Runde 8, Beispiel 50

LVA 118.181, Übungsrunde 8, 15.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 08.12.2006

1 Angabe

Unter Zuhilfenahme der Potenzreihenentwicklung des $\cosh z$:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n}}{(2n!)}, \qquad z \in \mathbb{C}$$

bestimme man den Wert der folgenden trigonometrischen Reihe:

$$\sum_{n \geq 0}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{(2n!)}$$

Anmerkung: Man fasse die Reihe als Realteil von $\sum_{n \geq 0}^{\infty} \frac{\cos 2nt + i \sin 2nt}{(2n!)}$ auf.

2 Theoretische Grundlagen: Darstellung trigonometrischer Polynome und Reihen

2.1 Trigonometrische Polynome

2.1.1 Allgemeines

Trigonometrisches Polynom (eine Trigonometrische Summe) ist ein Polynom, welches trigonometrische Ausdrücke erhält. Es hat also folgende Form:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)$$

wobei $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.
n bezeichnet man als den Grad des Polynoms und $\omega = \frac{2\pi}{T}$, wobei T die Periode von f ist.

2.1.2 Periodische Funktionen - Rechenregeln

Es gilt für Funktionen mit der Periode T:

$$f(t + T) = f(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

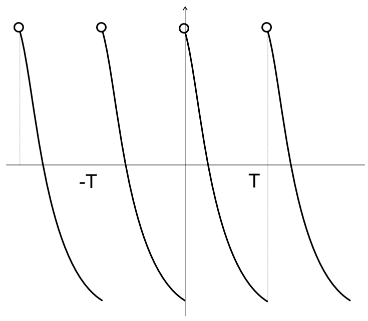
Wichtige Rechenregeln:

1. Mit T ist auch nT für alle $n = 1, 2, 3, \dots$ eine Periode.
2. Mit f und g ist auch $\alpha f + \beta g$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ T-periodisch
3. Ist f T-periodisch, gilt für alle $a \in \mathbb{R}$:
$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}\,t$$
4. Die Reduktion auf die Periode 2π erfolgt über die Substitution
$$x := \frac{2\pi}{T} t = \omega t \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$
Ist $f(t)$ T-periodisch, so ist $F(x) := f(\frac{x}{\omega}) = f(t)$ 2π-periodisch.

2.1.3 Periodische Funktionen - Periodische Fortsetzung

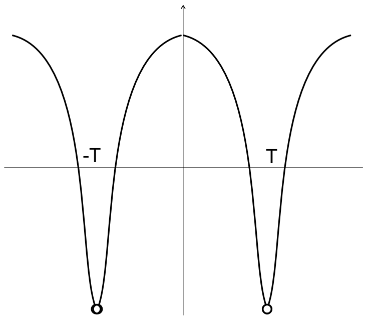
Ist eine Funktion g nur auf $[0, T]$ erklärt, so kann man drei Fortsetzungsformen unterscheiden:

- **Direkte Fortsetzung (T-periodisch)**: $\mathbb{R}$ wird in Intervalle $I_n := [nT, (n+1)T], n \in \mathbb{Z}$ zerlegt und f auf $\mathbb{R}$ definiert durch
$$f(t) := g(t - nT), \ t \in I_n$$
Geometrisch veranschaulicht:



- **Gerade Fortsetzung ($2T$-periodisch)**: $\mathbb{R}$ wird in Intervalle $(2n-1)T, (2n+1)T$ (Breite $2T$) zerlegt und setzt zunächst g durch Spiegelung auf der y-Achse auf $[-T, T)$ fort:
$$f(t) := \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < T \\ g(-t), & -T \leq T < 0 \end{cases}$$
Nun wie bei direkter Fortsetzung $2T$-periodisch fortgesetzt:
$$f(t) := f(t - 2nt), \qquad (2n-1)T \leq t < (2n+1)T, n \in \mathbb{Z}$$

Geometrisch veranschaulicht:



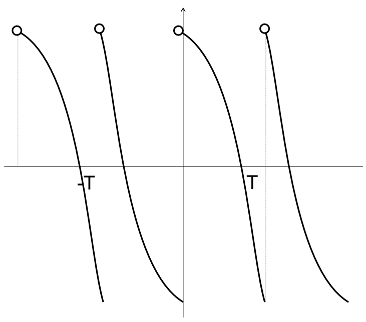
- **Ungerade Fortsetzung ($2T$-periodisch)**: g wird zuerst durch Spiegelung am Nullpunkt auf $[-T.T)$ forgesetzt:

$$f(t) := \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < T \\ -g(-t), & -T \leq T < 0 \end{cases}$$

Nun wie bei gerader Fortsetzung $2T$-periodisch fortgesetzt:

$$f(t) := f(t - 2nt), \qquad (2n-1)T \leq t < (2n+1)T, n \in \mathbb{Z}$$

Geometrisch veranschaulicht:



2.1.4 Darstellung in Sinus-Cosinus-Form oder komplex

Meistens betrachtet man aber nur 2π-periodische Funktionen ($\omega = \frac{2\pi}{T}$) und erhält dann (Sinus-Cosinus-Form):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Alternativ zu der obigen Darstellung existiert noch eine komplexe Darstellung, die sich oft als rechentechnisch günstig erweist:

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ik\omega x}$$

für die Koeffizienten $\in \mathbb{C}$, (erhält man mit der Euler-Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$)

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{(a_k - ib_k)}{2}, c_{-k} = \frac{(a_k + ib_k)}{2}$$
$$a_0 = 2c_0, a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n})$$

Bei geraden Fortsetzungen der Periode spricht man von der **Fourier-Cosinus-Reihe** - in diesem Fall ist $b_n = 0$.
Bei ungeraden Fortsetzungen der Periode spricht man von der **Fourier-Sinus-Reihe** - in diesem Fall ist $a_n = 0$.
Mit $z = \cos x + i \cdot \sin x = e^{ix}$ erhält man:

$$\sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = 1 + 2\cos x + \cdots + 2N\cos x = \begin{cases} 2N+1, & x = 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2.1.5 Orthogonalitätsrelationen

Aus den trigonometrischen Identitäten

$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$
$$\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$
$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

folgen die wichtigen Orthogonalitätsrelationen der Sinus- und Cosinus-Funktion ($m, n \geq 0, m, n \in \mathbb{Z}$):

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} 0, & m = n = 0 \\ 0, & m \neq m \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}$$
$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x = \begin{cases} 2\pi, & m = n = 0 \\ 0, & m \neq m \\ \pi, & m = n \neq 0 \end{cases}$$
$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x = 0$$

Weil die **Orthogonalitätsrelationen** (s.o.) gelten, lassen sich die Koeffizienten eines trigonometrischen Polynoms über Integrale bestimmen:

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{ik\omega t} \cdot \overline{e^{ik\omega t}} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (n, k \in \mathbb{Z})$$

2.1.6 Hilfreiches zum Umgang mit trigonometrischen Polynomen

Wichtig für den Umgang mit trigonometrischen Polynomen f vom Grad N ist:

1. f hat in $[0,T)$ höchstens $2N$ Nullstellen
2. Koeffizientenvergleich: $f(t) = 0, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow c_k = 0, -N \leq k \leq N$
3. f ist eine reelle Funktion, d.h. $f(t) \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow c_k = \overline{c_{-k}}, 0 \leq k \leq N$. Das Poylnom kann dann wie folgt dargestellt werden ($a_n, b_n \in \mathbb{R}$):
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \mathrm{Re}[\sum_{n=1} 1^N (a_n - ib_n)e^{-in\omega t}]$$
4. Formeln von Euler-Fourier. Für $-N \leq k \leq N$, $0 \leq n \leq N$ ist
$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ik\omega r}\,\mathrm{d}\,t,$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}\,t, \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}\,t$$
5. $f(t) \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(t) - \overline{f(t)} =, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sum_{k=-N}^{N}(c_k e^{ik\omega t} - c_k \overline{e^{ik\omega t}}) = 0, t \in \mathbb{R}$
6. $\int_0^T f(t)e^{-ik\omega t}\,\mathrm{d}\,t = \sum_{k=-N}^{N} c_k \int_0^T e^{in\omega t} \cdot e^{-in\omega t}\,\mathrm{d}\,t = c_n \cdot T$

2.2 Trigonometrische Reihen (einführend)

Analog zum Begriff eines trigonometrischen Polynoms kann man auch den Begriff der trigonometrischen Reihe definieren:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos k\omega x + b_k \sin k\omega x)$$

bzw. in der komplexen Darstellung:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k e^{ik\omega x}$$

3 Lösung des Beispiels

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2nt)}{(2n)!} = \mathrm{Re}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2nt) + i\sin(2nt)}{(2n)!}) = \mathrm{Re}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i2nt}}{(2n)!}) =$$
$$\mathrm{Re}(\frac{1}{2}(\underbrace{e^{e^{it}} + e^{-e^{it}}}_{\cosh(e^{it})})) = \mathrm{Re}(\frac{1}{2}(e^{cos(t)} \cdot e^{i\sin(t)} + e^{-cos(t)} \cdot e^{-i\sin(t)})) =$$
$$\mathrm{Re}(\frac{1}{2}(e^{\cos(t)}(\cos(\sin(t)) + i\sin t + e^{-\cos(t)}(\cos(\sin(t))) + i\sin t)))) =$$
$$\mathbf{\frac{1}{2}}(\cos(\sin(\mathbf{t})) \cdot (\mathbf{e}^{\cos \mathbf{t}} + \mathbf{e}^{-\cos \mathbf{t}})$$

Runde 8, Beispiel 51

LVA 118.181, Übungsrunde 8, 15.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 08.12.2006

1 Angabe

Man zeige die in der Vorlesung besprochene Orthogonalitätsrelation für die folgende Menge von T-periodischen Funktionen: $\{f_k(t) := e^{ik\omega t} | k \in \mathbb{Z}\}$, wobei $\omega := \frac{2\pi}{T}$. Es gilt nämlich für $k, l \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^T f_k(t)\overline{f_l(t)}\, dt = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases}$$

Anmerkung:

$$\overline{e^{ik\omega t}} = \overline{\cos(k\omega t) + i\sin(k\omega t)} = \cos(k\omega t) - i\sin(k\omega t) = e^{-ik\omega t}$$

2 Theoretische Grundlagen: Orthogonalitätsrelationen und Bestimmung der Koeffizienten

Weil die **Orthogonalitätsrelationen** (s. Bsp. 50) gelten, lassen sich die Koeffizienten eines trigonometrischen Polynoms über Integrale bestimmen:

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{ik\omega t} \cdot \overline{e^{ik\omega t}} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (n, k \in \mathbb{Z})$$

3 Lösung des Beispiels

$$k = l \Rightarrow \int_0^T \underbrace{e^{ik\omega t} \cdot e^{-ik\omega t}}_{=1} dt = \int_0^T 1dt = T$$

$$k \neq l \Rightarrow \int_0^T e^{ik\omega t} \cdot e^{-il\omega t} = \int_0^T e^{i\omega t\cdot(k-l)}dt = \frac{1}{i\omega \cdot (k-l)}[e^{i\omega t\cdot(k-l)}]_0^T$$

$$\Rightarrow [\cos(\omega t(k-l)) + i \cdot \sin(\omega t(k-l))]_0^T = \underbrace{\cos(\omega T(k-l))}_{=1\ \square} + i \cdot \underbrace{\sin(\omega T(k-l))}_{=0} - \cos(0) - i \cdot \sin(0) = 0$$

$$\square \qquad \cos(\omega T(k-l)) = 1 \text{ durch Einsetzen von } \frac{2\pi}{T}$$

Runde 8, Beispiel 52

LVA 118.181, Übungsrunde 8, 15.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 08.12.2006

1 Angabe

Man bestimme die (reelle und komplexe) Fourier-Reihe folgender 2π-periodischer Funktion "f(t)":

$$f(t) = t, \qquad 0 \leq t < 2\pi, \qquad 2\pi - \text{periodisch fortgesetzt}$$

Anmerkung: Selbstverständlich ist wahlweise die reelle oder die komplexe Fourier-Reihe zu bestimmen, wodurch dann mit den Beziehungen $a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n})$ die andere ebenfalls erhalten wird.

2 Theoretische Grundlagen: Fourier-Reihen (2π-Periode)

$f(x)$ sei eine Funktion mit der Periode 2π und durch eine Reihe darstellbar, dann kann man transformieren zu der Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man wie folgt berechnen:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}\,x,$$

Die komplexe Darstellung:

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ik\omega x}$$

für die Koeffizienten $\in \mathbb{C}$, (erhält man mit der Euler-Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$)

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{(a_k - ib_k)}{2}, c_{-k} = \frac{(a_k + ib_k)}{2}$$
$$a_0 = 2c_0, a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n})$$

3 Lösung des Beispiels

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\pi}[\frac{t^2}{2}]|_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}(\frac{4\pi^2}{2}) = 2\pi$$

$$\text{Anmerkung zu } \; a_n : \text{ ungerade Funktion, daher } 0 \text{ (testweise berechnet) } \triangledown$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$u = t, u' = 1;\; r' = \cos(nt), r = \frac{\sin(nt)}{n}$$

$$= \frac{1}{\pi}((\frac{t\sin(nt)}{n})|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}\,t) =$$

$$= \frac{1}{\pi}((\frac{t\sin(nt)}{n})|_0^{2\pi} + (\frac{\cos(nt)}{n^2})|_0^{2\pi}) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$u = t, u' = 1;\; r' = \sin(nt), r = -\frac{\cos(nt)}{n}$$

$$= \frac{1}{\pi}((-\frac{t\cos(nt)}{n})|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nt)}{n}\,\mathrm{d}\,t) =$$

$$\frac{1}{\pi}(\frac{-2\pi\overbrace{\cos(2\pi n)}^{=1}}{n} + \underbrace{(\frac{\sin(nt)}{n^2})|_0^{2\pi})}_{=0} = -\frac{2\pi}{n}$$

$$\mathbf{f(x)} = \pi + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \mathbf{0}\cos(\mathbf{nt}) - \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{n}}\sin(\mathbf{nt})$$

$$c_n = i\cdot\frac{1}{n} \;\Rightarrow\; \mathbf{S_F(t)} = \pi - 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nt)}{n}$$

$\triangledown$ Funktion nicht direkt ungerade (wird erst durch Verschiebung ersichtlich).

Runde 8, Beispiel 53

LVA 118.181, Übungsrunde 8, 15.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 08.12.2006

1 Angabe

Man bestimme die Fourier-Reihe folgender 2π-periodischer Funktion $f(t)$:

$$f(t) = t^2, \qquad 0 \leq t < 2\pi, \qquad 2\pi - \text{periodisch fortgesetzt}$$

2 Theoretische Grundlagen: Fourier-Reihen (2π-Periode)

$f(x)$ sei eine Funktion mit der Periode 2π und durch eine Reihe darstellbar, dann kann man transformieren zu der Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}\,x, \end{aligned}$$

Die komplexe Darstellung:

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ik\omega x}$$

für die Koeffizienten $\in \mathbb{C}$, (erhält man mit der Euler-Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$)

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{(a_k - ib_k)}{2}, c_{-k} = \frac{(a_k + ib_k)}{2}$$
$$a_0 = 2c_0, a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n})$$

3 Lösung des Beispiels

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t^2 \,\mathrm{d}\,t = \frac{4\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} t^2 \cos(nt)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$a = t^2, a' = 2t;\; b' = \cos(nt), b = \frac{\sin(nt)}{n}, \qquad \int ab' = ab - \int ba'$$

$$= \frac{1}{\pi}(\underbrace{t^2 \frac{\sin(nt)}{n}|_0^{2\pi}}_{=0} - 2\int t\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}\,t) =$$

$$\frac{1}{\pi n}(-2\int_0^{2\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t) =$$

$$c = t, c' = 1;\; d' = \sin(nt), d = -\frac{\cos(nt)}{n}, \qquad \int cd' = cd - \int c'd$$

$$\frac{1}{\pi n}(2t\frac{\cos(n)}{n}|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} \cos(nt)\,\mathrm{d}\,t) =$$

$$\frac{1}{\pi n}(2t\frac{\cos(nt)}{n}|_0^{2\pi} - \underbrace{2\frac{\sin(nt)}{n}|_0^{2\pi}}_{=0}) =$$

$$\frac{1}{\pi n^2}(4\pi \underbrace{\cos(2n\pi)}_{=1}) = \frac{4}{n^2}$$

b_n nur verkürzt dargstellt, analog wie oben zu rechnen:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \sin(nt)\,\mathrm{d}\,t =$$

$$\frac{1}{\pi n}(-t^2\cos(nt)|_0^{2\pi} + 2\int t\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t) =$$

$$\frac{1}{\pi n^2}(-t^2 n\cos(nt)|_0^{2\pi} + 2t\sin(nt)|_0^{2\pi} - 2\cos(nt)|_0^{2\pi}) = -\frac{4\pi}{n}$$

$$c_n = \frac{4}{n^2}(1 - i\cdot n)$$

$$\mathbf{S_F(t)} = \mathbf{\frac{4\pi^2}{3}} + \sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty} \mathbf{\frac{4}{n^2}}\cos(\mathbf{nt}) - \mathbf{\frac{4\pi}{n}}\sin(\mathbf{nt})$$

Runde 8, Beispiel 54

LVA 118.181, Übungsrunde 8, 15.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 19.12.2006

Vielen Dank an Michael BIRSAK für seine Aufzeichnungen!

1 Angabe

Man bestimme die Fourier-Reihe folgender 2π-periodischer Funktion $f(t)$:

$$f(t) = \cos t + |\cos t|$$

2 Theoretische Grundlagen: Fourier-Reihen (2π-Periode)

$f(x)$ sei eine Funktion mit der Periode 2π und durch eine Reihe darstellbar, dann kann man transformieren zu der Fourier-Reihe:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man wie folgt berechnen:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}\,x,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}\,x,$$

Die komplexe Darstellung:

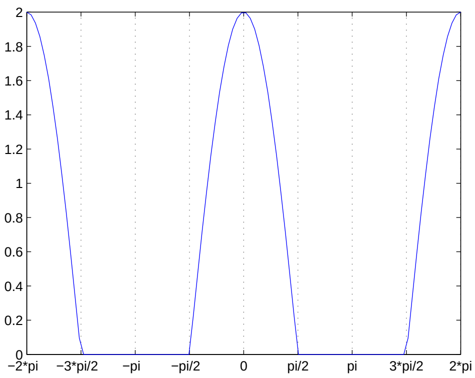
$$f(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ik\omega x}$$

für die Koeffizienten $\in \mathbb{C}$, (erhält man mit der Euler-Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$)

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{(a_k - ib_k)}{2}, c_{-k} = \frac{(a_k + ib_k)}{2}$$
$$a_0 = 2c_0, a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n})$$

3 Lösung des Beispiels

Zunächst betrachten wie den Graphen der Funktion $f(t) = \cos t + |\cos t|$:



Wir können $f(t)$ also im Intervall $[0, 2\pi]$ anschreiben als (2π-periodisch fortgesetzt):

$$f(t) \begin{cases} 0 < \cos(t) < \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} < \cos(t) < \frac{3\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} < \cos(t) < 2\pi \end{cases}$$

a_0 ist zu berechnen und ergibt sich aus:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^2 \cos(t) + |\cos(t)| \,\mathrm{d}\, t$$

Wir betrachten (da Linearkombination), die Summanden für sich:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) \,\mathrm{d}\, t + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos(t)| \,\mathrm{d}\, t = \frac{1}{2\pi} 4 + \frac{1}{2\pi} 4 = \frac{4}{\pi}$$

Wir berechnen nun a_n (Beachte mittleres Intervall ist 0):

$$f(t) = \begin{cases} 2\cos(t), & 0 \leq \pi < \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} \\ 2\cos(t), & \leq t < 2\pi \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \cdot \cos(nt)\,\mathrm{d}\,t + 2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t) \cdot \cos(nt)\,\mathrm{d}\,t)$$

$$\int \underbrace{\cos(t)}_{u}\underbrace{\cos(t)}_{\mathrm{d}\,v}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{n}\sin(nt)\cos(t) + \frac{1}{n}\underbrace{\sin(t)}_{x}\underbrace{\sin(t)}_{\mathrm{d}\,y}\,t = \blacklozenge$$

$$u = \cos(t), \mathrm{d}\,u = -sin(t)\,\mathrm{d}\,t;\ \mathrm{d}\,v = \cos(nt)\,\mathrm{d}\,t, v = \frac{1}{n}\sin(nt)$$

$$x = \sin(t), \mathrm{d}\,y = cos(t)\,\mathrm{d}\,t;\ \mathrm{d} <= \sin(nt)\,\mathrm{d}\,t, v = -\frac{1}{n}\cos(nt)$$

$$\blacklozenge \quad = \frac{1}{n}\sin(nt)\cos(t) + \frac{1}{n}(-\frac{1}{n}\sin(t)\cos(nt) + \frac{1}{n}\int \cos(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t) \qquad | \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n^2}}$$

$$(\int \cos(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}\,t)(1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{n}\sin(nt)\cos(t) - \frac{1}{n^2}\cos(nt)\sin(t)$$

$$\Rightarrow \ a_n = \frac{2}{\pi}(-\frac{1}{n^2 - 1}\cos(n\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{n^2 - 1\cos(n\frac{3\pi}{2})}$$

$$\Rightarrow \ \mathbf{a_n} = \begin{cases} 0, n \text{ ungerade} \\ \frac{2}{\pi} \cdot \frac{-2}{n^2-1} = -\frac{4}{\pi(n^2-1)}, & n \equiv 0 \bmod 4 \\ \frac{4}{\pi(n^2-1)}, & n \equiv 2 \bmod 4 \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi}(2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,\mathrm{d}\,t + 2\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos^2(t)\,\mathrm{d}\,t = 1$$

$$\mathbf{Sf}(\mathbf{t}) = \frac{\mathbf{2}}{\pi} + \cos(\mathbf{t}) + \sum_{\mathbf{n=2}}^{\infty} \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{a_n}}\cos(\mathbf{nt})$$

Runde 8, Beispiel 55

LVA 118.181, Übungsrunde 8, 15.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 14.12.2006

1 Angabe

Zeige, dass eine gerade T-periodische Funktion ($f(t) = f(-t)$) in ihrer reellen Fourierentwicklung (= Sinus-Cosinus-Form) keine Sinus-Ausdrücke enthalten kann.

2 Theoretische Grundlagen: Fourier-Reihen (T- bzw. L-Periode)

$f(x)$ sei eine Funktion mit der Periode $2L$ und durch eine Reihe darstellbar, dann kann man transformieren zu der Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x))$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}\,x, \\ a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})\,\mathrm{d}\,x, \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})\,\mathrm{d}\,x, \end{aligned}$$

Die komplexe Darstellung:

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ik\omega x}$$

für die Koeffizienten $\in \mathbb{C}$, (erhält man mit der Euler-Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$)

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{(a_k - ib_k)}{2}, c_{-k} = \frac{(a_k + ib_k)}{2}$$
$$a_0 = 2c_0, a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n})$$

3 Lösung des Beispiels

In unserem Beispiel ist die Periode T bzw. L (Unterschied ist nur in den Integrationsgrenzen).
Wenn bei $f(t) = f(-t)$ keine Sinus-Ausdrücke enthalten soll, so muss der Fourier-Koeffizient $b_n = 0$ sein. Somit können wir schrieben:

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t = \frac{2}{T}\int_0^T f(-t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t$$

Weil $f(t) = f(-t)$ ist und $\sin(-nt) = -\sin(nt)$ ist, können wir schreiben und weiter ausführen (Durch die Umformung des Sinus-Terms und die Indexveschiebung von $f(t) = f(-t)$ ersetzen):

$$\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t = -\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t$$
$$\frac{4}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin(nt)\,\mathrm{d}\,t = 0 = b_n \qquad \surd$$

Runde 8, Beispiel 56

LVA 118.181, Übungsrunde 8, 15.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 19.12.2006

Vielen Dank an Michael BIRSAK für seine Aufzeichnungen!

1 Angabe

Man entwickle die Funktion

$$g(t) = e^t, \qquad 0 \leq t < T$$

in eine reine Cosinusreihe, das heisst man bestimme die (gewöhnliche) Fourier-Reihe der $2T$- periodischen Funktion $h(t)$, welche die gerade, $2T$-periodische Fortsetzung von $g(t)$ darstellt:

$$h(t) = \begin{cases} g(t) & 0 \leq t < T \\ g(-t) & -T < t < 0 \end{cases}, \qquad h(t + 2T) = h(t)$$

2 Theoretische Grundlagen: Fourier-Reihen (T- bzw. L-Periode)

$f(x)$ sei eine Funktion mit der Periode $2L$ und durch eine Reihe darstellbar, dann kann man transformieren zu der Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)x + b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x))$$

Die Fourier-Koeffizienten kann man wie folgt berechnen:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})\,\mathrm{d}\,x,$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})\,\mathrm{d}\,x,$$

Die komplexe Darstellung:

$$f(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ik\omega x}$$

für die Koeffizienten $\in \mathbb{C}$, (erhält man mit der Euler-Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$)

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_k = \frac{(a_k - ib_k)}{2}, c_{-k} = \frac{(a_k + ib_k)}{2}$$

$$a_0 = 2c_0, a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n})$$

3 Lösung des Beispiels

$$
\begin{aligned}
\omega &= \frac{2\pi}{T^*} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T} \\
a_n &= \frac{1}{T}\left(\int_{-T}^{0} e^{-t}\cos(n\omega t)\,(\,d)t + \int_{0}^{T} e^{t}\cos(n\omega t)\,(\,d)t\right) \\
&= \frac{1}{T}\Big(-\frac{1}{\omega^2 n^2+1} - \frac{\omega n}{\omega^2 n^2+1}\sin(-n\pi)e^T + \\
&\quad \frac{1}{\omega^2 n^2+1}\cos(-n\pi)e^T + \frac{\omega n}{\omega^2 n^2+1}\sin(n\pi)e^T + \\
&\quad \frac{1}{\omega^2 n^2+1}\cos(n\pi)e^T - \frac{\omega n}{\omega^2 n^2+1}\sin(0) - \frac{1}{\omega^2 n^2+1}\Big) \\
&= \frac{1}{T}\Big(-\frac{2}{\omega^2 n^2+1} + \frac{2}{\omega^2 n^2+1}\cos(n\pi)e^T \\
\Rightarrow \quad a_n &= \begin{cases} \frac{1}{T}\left(-\frac{2}{\omega^2 n^2+1} - \frac{2}{\omega^2 n^2+1}e^t\right), & n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{T}\left(-\frac{2}{\omega^2 n^2+1} + \frac{2}{\omega^2 n^2+1}e^t\right), & n \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Gerade fortgesetzt, daher $b_n = 0$.

$$
\mathbf{S_f(t)} = \mathbf{\frac{1}{T}(e^T - 1)} + \sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty} \mathbf{a_n}\cos(\mathbf{n}\omega\mathbf{T})
$$