Folge a_n

NICHT nach oben beschränkt

$\Rightarrow \quad \sup a_n := +\infty$

NICHT nach unten beschränkt

$\Rightarrow \quad \inf a_n := -\infty$

HS monotone Folgen

a_n monoton

a_n beschränkt $\iff$ a_n konvergent

Bsp.: $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ "1^∞"

z.z.: a_n mon. wachsend

a_n nach oben beschränkt (nicht sonst)

HS: Bernoulli'sche UG

$$\boxed{(1+x)^n > 1 + n \cdot x},$$

falls: $n \geq 2$, $x > -1$, $x \neq 0$

Bew. vollst. Ind.

I.A.: $\overset{n=2}{(1+x)^2} = 1 + 2x + \underbrace{x^2}_{>0,\, x \neq 0} > 1 + 2x$ ✓

$n \to n+1$:

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{\text{I.V.}} \cdot (1+x) > (1+n \cdot x) \cdot (1+x)$$

$$= 1 + \underbrace{nx + x}_{(n+1) \cdot x} + \underbrace{n \cdot x^2}_{>0} > 1 + (n+1) \cdot x$$ ✓

$$\boxed{\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \underbrace{\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}}_{\text{B. UG}} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) >$$

$$> \left(1-\frac{\cancel{n+1}}{(n+1)^{\cancel{2}}}\right)^{1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$\boxed{= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1}$$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$\Rightarrow$ a_n konvergiert

$$\lim_{n \to \infty} a_n =: e \approx 2.717\ldots -$$

Euler'sche Zahl

Am mal ole lenk.

$$\text{B.L.}\quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3} + \dots =$$

$$= 1 + \cancel{n}\cdot\frac{1}{\cancel{n}} + \overset{<1}{\frac{n\cdot(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}} + \overset{<1}{\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}} +$$

$$+ \overset{<1}{\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4!}\cdot\frac{1}{n^4}} + \dots$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{\underset{3\cdot 2}{3!}} + \frac{1}{\underset{4\cdot 3\cdot 2}{4!}} + \frac{1}{\underset{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{5!}} \dots$$

$$\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} + \dots$$

$$\leq 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots}_{1}$$

$$\leq 1 + 1 + 1 = 3$$

Achtung bei uneigentl. Konvergenz

unbest. Formen

"$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$", "$0 \cdot \infty$", "1^∞",

"0^0" "∞^0"

$a_n \cdot b_n$ "$\infty \cdot 0$"

Bsp.:

- $\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

- $\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\to 0} = \sqrt{n} \to \infty$

- $\underset{\substack{\downarrow\\ \infty}}{n} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} = 1 = 1$

Rechenregeln bei uneigentl. konv.

Folgen:

$a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty \quad , \quad b_n \xrightarrow{n\to\infty} b \in \mathbb{R}$

$(a_n + b_n) \to +\infty$

$(\lambda \cdot a_n) \to \begin{cases} +\infty & , \lambda > 0 \\ -\infty & , \lambda < 0 \end{cases}$

$(a_n \cdot b_n) \to \begin{cases} +\infty, & b > 0 \\ -\infty, & b < 0 \end{cases}$

$\dfrac{b_n \to b}{a_n \to \infty} \to 0$

$a_n \to +\infty \quad , \quad b_n \to +\infty$

$a_n - b_n$ ~~?~~ : keine Aussage

Rechenregeln für konv. Folgen

$$a_n \xrightarrow{n\to\infty} a \in \mathbb{R} \qquad b_n \xrightarrow{n\to\infty} b \in \mathbb{R}$$

$$c_n := a_n + b_n \qquad c_n \xrightarrow{n\to\infty} a+b$$

$$(a_n - b_n) \xrightarrow{n\to\infty} a-b$$

$$(a_n \cdot b_n) \xrightarrow{n\to\infty} a \cdot b$$

$$(\lambda \cdot a_n) \xrightarrow{n\to\infty} \lambda \cdot a$$
$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{a}{b}, \quad \text{falls: } b \neq 0, \; b_1, b_2, \ldots \neq 0$$

Bem. kml ; +

Bsp.:

$$\frac{n^2 + 5\cdot\sqrt{n} - 3}{2n^2 - 5n + 1} = \text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$= \frac{\cancel{n^2}\cdot\left(1 + \frac{5\cdot\sqrt{n}}{n^2} - \frac{3}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\cdot\left(2 - \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{\underset{\to 1}{1} + \underset{\to 0}{\frac{5}{n^{3/2}}} - \underset{\to 0}{\frac{3}{n^2}}}{\underset{\to 2}{2} - \underset{\to 0}{\frac{5}{n}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}} \quad \frac{\to 1}{\to 2}$$

$$\downarrow \frac{1}{2}$$