Mathematik 1 für Informatiker — Übungsbeispiele

1) Sei a die Aussage *Es gibt eine größte natürliche Zahl.* und b die Aussage *0 ist die größte natürliche Zahl.* Man entscheide, ob die Aussagen $a \to b$ bzw. $b \to a$ wahr oder falsch sind.

2–7) Entscheiden Sie mit Hilfe einer Wahrheitstafel, ob die folgenden Äquivalenzen richtig sind.

2) $a \vee (b \vee c) \Longleftrightarrow (a \vee b) \vee c$

3) $a \vee (a \wedge b) \Longleftrightarrow a$

4) $a \wedge (b \vee c) \Longleftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

5) $(a \wedge \neg b) \wedge \neg c \Longleftrightarrow a \wedge \neg(b \wedge \neg c)$

6) $a \leftrightarrow b \Longleftrightarrow (a \to b) \to \neg(b \to a)$

7) $\neg(a \to b) \Longleftrightarrow a \wedge \neg b$

8–16) Beweisen Sie die folgenden Beziehungen mit Hilfe von Elementtafeln oder geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel an.

8) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

9) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

10) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

11) $(A \cup B) \cap (B \cup C)' \subseteq A \cap B'$

12) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

13) $(A \triangle B)' = A' \triangle B'$

14) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

15) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

16) $A \triangle (B \cap C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$

17) Man zeige, daß es sich bei dem logischen Ausdruck

$$[(B \vee C) \wedge (B \to \neg A) \wedge A] \to C$$

um eine Tautologie bzw. bei dem Ausdruck

$$(A \to C) \wedge (C \to B) \wedge A \wedge \neg B$$

um eine Kontradiktion handelt.

18) Man beweise, daß die folgenden drei Aussagen äquivalent sind. (D. h., gilt eine der drei Aussagen, dann gelten alle drei.)

(i) $A \subseteq B$, (ii) $A \cup B = B$, (iii) $A \cap B = A$.

19–22) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Identitäten für Mengen:

19) $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (A \cap B)$.

20) $(A \times B) \cup (B \times A) = (A \cup B) \times (A \cup B)$.

21) $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$.

22) $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$.

23) Sei M eine nichtleere endliche Menge. Zeigen Sie, daß M gleich viele Teilmengen mit gerader Elementanzahl wie solche mit ungerader Elementanzahl besitzt, indem Sie ein Verfahren angeben, das aus den Teilmengen der einen Art umkehrbar eindeutig die der anderen Art erzeugt.

24) Es sei A eine Menge mit n Elementen und $\mathfrak{P}(A)$ die Menge aller Teilmengen der Menge A. Zeigen Sie, daß $\mathfrak{P}(A)$ 2^n Elemente besitzt.

25) Zeigen Sie, daß $\sqrt{3}$ irrational ist.

26) Zeigen Sie, daß $\sqrt{5}$ irrational ist.

27) Zeigen Sie, daß $\sqrt{6}$ irrational ist.

28) Zeigen Sie, daß $\sqrt{10}$ irrational ist.

29) Man überprüfe die Gleichung

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

für die ersten fünf natürlichen Zahlen und beweise sodann deren Gültigkeit für alle natürlichen Zahlen durch vollständige Induktion.

30) Man zeige mittels vollständiger Induktion, daß für die rekursiv definierte Folge $x_1 = 1$ und $x_{k+1} = x_k + 8k$ für $k \geq 1$ allgemein gilt:

$$x_n = (2n-1)^2, \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

31) Nach der sogenannten „abessinischen Bauernmethode“ werden zwei Zahlen, z.B. 21 und 17, wie folgt multipliziert:

21	17
~~10~~	~~34~~
5	68
~~2~~	~~136~~
1	272
	357

Dabei wird der erste Faktor laufend durch 2 dividiert (und der Rest dabei vernachlässigt), während der zweite Faktor stets verdoppelt wird. Nach dem Motto der abessinischen Bauern „Gerade Zahlen bringen Unglück“ streicht man nun alle Zeilen, in denen die Zahl in der ersten Spalte gerade ist. Die Summe der verbleibenden Zahlen in der zweiten Spalte liefert dann das Ergebnis $21 \cdot 17 = 357$.
Man begründe, warum diese Methode zum richtigen Resultat führt. (Hinweis: Man gehe von einer Darstellung des ersten Faktors im Binärsystem aus.)

32) Man bestätige die Richtigkeit der folgenden Behauptungen:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n^3 - n$ stets durch 3 teilbar – mittels eines direkten Beweises.

(b) Ist die Summe $m + n$ zweier Zahlen $m, n \in \mathbb{Z}$ ungerade, dann ist genau einer der beiden Summanden ungerade – mittels eines indirekten Beweises.

(c) Ist das Quadrat n^2 einer ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gerade, dann ist auch n gerade – mittels eines Beweises durch Kontraposition.

(d) Die Aussage von (a) – mittels eines Beweises durch vollständige Induktion.

33–43) Man beweise mittels vollständiger Induktion:

33)

$$\sum_{j=2}^{n} j(j-1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3} \quad (n \geq 2)$$

34)

$$\sum_{j=1}^{n} j(j+1) = \frac{n}{6}(2n^2 + 6n + 4) \quad (n \geq 1)$$

35) $$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = \frac{n}{n+1} \quad (n \geq 1)$$

36) $$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{n-1}{n} \quad (n \geq 2)$$

37) $\sum_{j=0}^{n} j2^j = 2^{n+1}(n-1)+2 \quad (n \geq 0)$

38) $\sum_{j=1}^{n} j3^{j-1} = \frac{3^n(2n-1)+1}{4} \quad (n \geq 1)$

39)

$$\sum_{k=1}^{n} k5^k = \frac{5}{16}(n5^{n+1} - (n+1)5^n + 1) \quad (n \geq 1)$$

40)

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{l}{3^l} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

41) Ist $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

42) Ist $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ und $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$L_n = \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

43) Ist $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $F_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n$.

44–47) Man untersuche mittels vollständiger Induktion, für welche $n \geq 0$ die angegebene Ungleichung gilt:

44) $9n^3 - 3 \leq 8^n$

45) $4n^2 \leq 2^n$

46) $3n + 2^n \leq 3^n$

47) $(n+1)3^n \leq 4^n$

48) Man zeige für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n \sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k)\sum_{j=1}^{k} b_j$.

49) Wo steckt der Fehler im „Beweis“ der folgenden Behauptung:
Ist in einer Gruppe von Personen eine Person blond, so sind alle blond.
Beweis: a) $n = 1$: Hier stimmt die Behauptung trivialerweise.
b) Die Behauptung gelte für Gruppen der Größe n.
Nun sei von $n+1$ Personen eine blond. Betrachte man diese Person zusammen mit $n-1$ weiteren. Dann sind nach Induktionsannahme diese $n-1$ Personen auch blond. Folglich ist in der Gruppe dieser $n-1$ Personen zusammen mit der noch nicht betrachteten Personen wieder wenigstens eine blond, woraus folgt, daß auch diese letzte Person blond sein muß.

50) Wo steckt der Fehler im „Beweis“ der folgenden Behauptung:
Je zwei natürliche Zahlen a, b sind gleich groß.
Beweis: Vollständige Induktion nach dem $\max\{a, b\}$.
a) $\max\{a, b\} = 0$: Hier gilt $a = b = 0$.
b) Die Behauptung gelte für $\max\{a, b\} = n$.
Sei nun $\max\{a, b\} = n + 1$. Dann ist $\max\{a-1, b-1\} = n$, und es folgt aus der Induktionsvoraussetzung b), daß $a - 1 = b - 1$ ist, womit aber auch $a = b$ gilt.

51) Zeigen Sie, daß $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist.

52) Zeigen Sie, daß die Menge aller unendlichen 0-1-Folgen überabzählbar ist

53) Man zeige, daß in $\mathbb{R}$ die Beziehung

$$\sqrt{5041} - \sqrt{5040} = 71 - 12\sqrt{35} = \frac{1}{71 + 12\sqrt{35}}$$

gilt. Was ergibt sich bei Rechnung in normalisierter Gleitkomma-Darstellung zur Basis 10 mit vierstelliger Mantisse?

54) Man finde alle sechsten Wurzeln von $z = 8i$ in $\mathbb{C}$ und stelle sie in der Gaußschen Zahlenebene dar.

55) Man bestimme rechnerisch (ohne Taschenrechner) und graphisch Summe und Produkt der komplexen Zahlen $z_1 = 3 - 4i$ und $z_2 = [2, \frac{\pi}{2}]$.

56) Wie bei 55) für $z_1 = 4 + 5i$ und $z_2 = [2, -\frac{\pi}{4}]$.

57) Wie bei 55) für $z_1 = 5 + 2i$ und $z_2 = [3, \frac{\pi}{2}]$.

58) Man berechne ohne Taschenrechner alle Werte von $\sqrt[4]{1+i}$ in der Form $[r, \varphi]$.

59) Wie bei 58) für $\sqrt[5]{18 - 6\sqrt{3}i}$.

60) Wie bei 58) für $\sqrt[3]{-i}$.

61) Wie bei 58) für $\sqrt[5]{\sqrt{2} - \sqrt{6}i}$.

62) Man beweise $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

63) Man beweise $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

64) Stellen Sie alle Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + 2z + 4 = 0$ sowohl in der Form $a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, als auch in Polarkoordinatenform $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, dar.

65) Wie Bsp. 64) für $z^2 + 4z + 8 = 0$.

66) Für welche komplexe Zahlen gilt $\overline{z} = \frac{1}{z}$?

67) Man zeige $\left|\frac{z_1 + z_2}{2}\right|^2 + \left|\frac{z_1 - z_2}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

68) Man beschreibe die Menge jener komplexen Zahlen z, die $\mathfrak{Re}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0$ erfüllen ($a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$).

69) Man beschreibe die Menge jener komplexen Zahlen z, die $\mathfrak{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) > 0$ erfüllen ($a, b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$).

70–71) Welche Teilmenge der komplexen Zahlenebene beschreibt die angegebene Ungleichung?

70) $\left|\frac{z+4}{z-4}\right| < 3$

71) $\left|\frac{z+5}{z}\right| < 4$

72) Man berechne alle Werte von $\sqrt{7 + 24i} = a + ib$ ohne Benützung der trigonometrischen Darstellung. (Hinweis: Man quadriere die zu lösende Gleichung und vergleiche Real- und Imaginärteile.)

73) Wie Bsp. 72) für $\sqrt{8 - 6i} = a + ib$.

74–79) Lösen Sie die folgenden Kongruenzen (d. h. Gleichungen in Restklassen) bzw. beweisen Sie die Unlösbarkeit:

74) a) $8x \equiv 4 \pmod{16}$, b) $8x \equiv 4 \pmod{15}$.

75) a) $6x \equiv 3 \pmod{9}$, b) $6x \equiv 4 \pmod{9}$.

76) a) $3x \equiv 9 \pmod{11}$, b) $3x \equiv 9 \pmod{12}$.

77) a) $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$, b) $x^2 \equiv 1 \pmod{5}$.

78) a) $x^2 \equiv 2 \pmod{5}$, b) $x^2 \equiv 2 \pmod{7}$.