1.
2.
3.
4.
5.

Name:

Matrikelnummer:

Algebra und Diskrete Mathematik für Inf. und Winf.

(Prof. Karigl)

Schriftliche Prüfung am 02. 07. 2021

---

1. Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ mit $x_1 = \frac{2}{3}$ und

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{8+3x_n} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Man berechne x_2 und x_3 und beweise sodann mittels vollständiger Induktion, dass

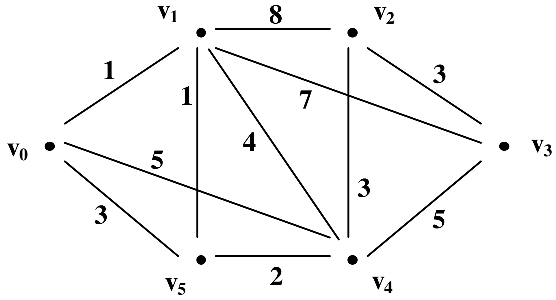
$$x_n = \frac{2}{4^n - 1} \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

2. Gesucht ist die Lösung der linearen Differenzengleichung

$$4x_{n+2} - 8x_{n+1} - 5x_n = 1 - 27n,$$

die den Anfangsbedingungen $x_0 = \frac{8}{9}, x_1 = \frac{8}{9}$ genügt.

3. In nachstehendem bewerteten Graphen bestimme man den Entfernungsbaum bezüglich des Knotens v_5, d.h. die kürzesten Wege von v_5 zu allen anderen Knoten des Graphen sowie die entsprechenden Distanzen.



Bitte umblättern!

4. Man zeichne die Hassediagramme der beiden Teilerverbände T_{78} und T_{135} und beantworte anhand dieser Diagramme nachstehende Fragen:
(i) Wie ist das Hassediagramm einer Halbordnung definiert? Welche Elemente sind durch Kanten verbunden, welche nicht?
(ii) Wie kann allgemein in einem Verband eine Halbordnungsrelation eingeführt werden?
(iii) Welcher der beiden Verbände ist keine Boole'sche Algebra? Warum nicht?

5. Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2021x2021}$ mit Rang $rg(A) = 2021$. Man beantworte die folgenden Fragen bzw. überprüfe die nachstehenden Aussagen (bitte ankreuzen; es können keine, genau eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein):

Je 2020 der 2021 Spaltenvektoren von A sind	○ linear abhängig ○ linear unabhängig
Die 2021 Zeilenvektoren von A bilden eine Basis des $\mathbb{R}^{2021}$:	○ ja ○ nein
Die lineare Abbildung f: $\mathbb{R}^{2021} \to \mathbb{R}^{2021}$ mit $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ ist	○ injektiv ○ surjektiv ○ bijektiv
Für die Determinante det(A) von A gilt	○ $\det(A) = 0$ ○ $\det(A) \neq 0$
Der Kern ker(A) von A hat Dimension	○ 0 ○ 1 ○ 2020 ○ 2021
Die Matrix A^T ist invertierbar:	○ ja ○ nein
Das homogene lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{0}$ ist	○ eindeutig lösbar ○ nicht eindeutig lösbar ○ überhaupt nicht lösbar
Das inhomogene lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist für alle $\vec{b} \neq \vec{0}$	○ eindeutig lösbar ○ nicht eindeutig lösbar ○ überhaupt nicht lösbar

Zeit: 100 Minuten

Prüfungsergebnisse voraussichtlich bis Freitag, 23.07.2021, siehe TISS