TU Wien
Institut für Logic and Computation
Forschungsbereich Algorithms and Complexity

186.866 Algorithmen und Datenstrukturen VU

Übungsblatt 5

PDF erstellt am: 5. Mai 2022

Deadline für dieses Übungsblatt ist **Sonntag, 30.05.2022, 20:00 Uhr**. Um Aufgaben für diese Übung anerkannt zu bekommen, gehen Sie folgendermaßen vor:

1. Öffnen Sie den TUWEL-Kurs der Lehrveranstaltung *186.866 Algorithmen und Datenstrukturen (VU 5.5)* und navigieren Sie zum Abschnitt *Übungsblätter*.
2. Teilen Sie uns mit, welche Aufgaben Sie gelöst haben **und** welche gelösten Aufgaben Sie gegebenenfalls in der Übungseinheit präsentieren können. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:
   - Laden Sie Ihre Lösungen in einem einzigen PDF-Dokument in TUWEL hoch.
     Link *Hochladen Lösungen Übungsblatt 5*
     Button *Abgabe hinzufügen*
     PDF-Datei mit Lösungen hochladen und *Änderungen sichern*.
   - Kreuzen Sie an, welche Aufgaben Sie gegebenenfalls in der Übung präsentieren können. Die Lösungen der angekreuzten Aufgaben müssen im hochgeladenen PDF enthalten sein.
     Link *Ankreuzen Übungsblatt 5*
     Button *Abgabe bearbeiten*
     Bearbeitete Aufgaben anhaken und *Änderungen speichern*.

Bitte beachten Sie:

- Bis zur Deadline können Sie sowohl Ihr hochgeladenes PDF, als auch Ihre angekreuzten Aufgaben beliebig oft verändern. Nach der Deadline ist keine Veränderung mehr möglich. Es werden ausnahmslos keine Nachabgabeversuche (z.B. per E-Mail) akzeptiert.
- Sie können Ihre Lösungen entweder direkt in einem Textverarbeitungsprogramm erstellen, oder aber auch gut leserliche Scans bzw. Fotos von handschriftlichen Ausarbeitungen hochladen (beachten Sie die maximale Dateigröße).
- Beachten Sie die Richtlinien für das An- und Aberkennen von Aufgaben (Details finden Sie in den Folien der Vorbesprechung).

Aufgabe 1. Im Folgenden sind verschiedene Probleme mit einem Zertifikat und einem Zertifizierer gegeben. Überlegen Sie sich, ob das Zertifikat und der Zertifizierer geeignet sind, um zu zeigen, dass das gegebene Problem in NP ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(a)
- **Problem:** Gegeben sei ein gewichteter Graph G, Knoten u und v sowie eine natürliche Zahl k. Gibt es einen Pfad von u nach v der Länge k oder kürzer?
- **Zertifikat:** Ein leerer String.
- **Zertifizierer:** Überprüfe mithilfe des Dijkstra Algorithmus, ob es einen Pfad von u nach v der Länge k oder kürzer gibt.

(b)
- **Problem:** Gegeben sei ein Graph G und eine natürliche Zahl k. Ist k die minimale Anzahl an Farben, sodass es eine k-Färbung von G gibt?
- **Zertifikat:** Eine k-Färbung von G.
- **Zertifizierer:** Überprüfe, ob keine zwei benachbarten Knoten die selbe Farbe haben und ob es keine $k-1$-Färbung gibt.

(c)
- **Problem:** Gegeben sei eine gerade natürliche Zahl n und ein Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n$. Existiert ein Kreis C in G, der genau $\frac{n}{2}$ Knoten enthält?
- **Zertifikat:** Ein Pfad $P = v_1 \ldots, v_{\frac{n}{2}}$ in G mit $\frac{n}{2}$ Knoten, sodass $(v_1, v_{\frac{n}{2}}) \in E$.
- **Zertifizierer:** Überprüfe, ob P ein Pfad mit genau $\frac{n}{2}$ Knoten ist und ob $(v_1, v_{\frac{n}{2}}) \in E$.

(d)
- **Problem:** Gegeben sei ein Graph G mit n Knoten und eine natürliche Zahl $k \leq n$. Gibt es ein Independent Set von G mit k oder weniger Knoten?
- **Zertifikat:** Ein Knoten v mit maximalem Grad in G.
- **Zertifizierer:** Überprüfe, ob jeder Knoten in G höchstens den Grad von v hat.

(e)
- **Problem:** Gegeben sei eine Formel Φ in konjunktiver Normalform. Ist die Formel unerfüllbar?
- **Zertifikat:** Eine Wahrheitsbelegung f für die n Boole'schen Variablen, die Φ erfüllt.
- **Zertifizierer:** Überprüfe ob f die Formel Φ erfüllt.

Aufgabe 2. Seien A, B, C, D Ja/Nein-Probleme in NP und n die Eingabegröße. Angenommen, es gibt

- eine Reduktion von A auf B mit Laufzeit $O(n^3 \cdot \log(n))$,
- eine Reduktion von B auf C mit Laufzeit $O(2^n)$,
- sowie eine Reduktion von B auf D mit Laufzeit $O(n^2)$.

Beantworten/lösen Sie die folgenden Fragen/Aufgabenstellungen:

(a) Geben Sie die engste obere Schranke für die Laufzeit einer Reduktion von A auf D in O-Notation an, die sich aus diesen Annahmen ableiten lässt und begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Nehmen Sie an, dass Set Cover in polynomieller Zeit auf B reduziert werden kann. Was folgt daraus für die Komplexität der Probleme A, B, C und D?

(c) Nehmen Sie an, D kann in $O(n^2)$ Zeit gelöst werden. Geben Sie die engste obere Schranke für die Laufzeit eines Algorithmus der A löst in O-Notation an, die sich aus diesen Annahmen ableiten lässt und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3. Gegeben ist eine Instanz $\Phi = (x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$ von 3-Sat.

(a) Wenden Sie die in der Vorlesung besprochene Problemreduktion von 3-Sat auf 3-Color an, um aus der Instanz Φ eine äquivalente Instanz G von 3-Color zu erzeugen.

(b) Betrachten Sie die folgende Wahrheitsbelegung f: $f(x_1) = f(x_2) = \texttt{false}$ und $f(x_3) = \texttt{true}$. Verwenden Sie die Reduktion, um f in eine 3-Färbung von G umzuwandeln.

Aufgabe 4.

(a) Ein *Hamiltonpfad* eines Graphen ist ein Pfad, der alle Knoten des Graphens genau einmal besucht. Das Hamiltonpfad-Problem (HPP) besteht darin, zu entscheiden, ob ein gegebener Graph einen solchen Pfad besitzt. Analog ist beim 1/2-Hamiltonpfad-Problem (1/2-HPP) nach einem Pfad gefragt, der mindestens die Hälfte der Knoten besucht. Zeigen Sie, dass

$$\text{HPP} \leq_P \text{1/2-HPP}.$$

(b) Eine *Clique* in einem Graphen ist eine Teilmenge S der Knoten, sodass alle Knoten in S paarweise miteinander verbunden sind. Bei dem Clique-Problem bekommt man als Eingabe einen Graphen und eine Zahl k und muss entscheiden, ob es eine Clique mit $|S| \geq k$ gibt. Zeigen Sie, dass

$$\textsc{Clique} \equiv_P \textsc{Independent Set}.$$

Hinweis: Angenommen wir haben eine Clique S in einem Graphen. Wie müssen wir die Kanten des Graphen verändern, damit S ein Independent Set wird?

Aufgabe 5. Wir betrachten erneut das NP-vollständige Independent Set Problem. Sei weiterhin MST* das aus der Vorlesung bekannte Minimum Spanning Tree Problem. Nehmen Sie an, dass P $\neq$ NP und erläutern Sie, ob die folgenden Behauptungen gelten:

(a) MST* $\leq_P$ Independent Set

(b) Independent Set $\leq_P$ MST*

Aufgabe 6. In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass 3-Coloring NP-vollständig ist. Wir betrachten nun einen Greedy-Algorithmus für 2-Coloring, der einen Eingabegraphen mit den zwei Farben 0 und 1 färbt. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass der Eingabegraph zusammenhängend ist. Der Algorithmus geht wie folgt vor:

1. Erstelle einen Breitensuchbaum.
2. Gebe allen Knoten auf Ebene i des Suchbaums die Farbe i modulo 2.
3. Falls dies eine gültige 2-Färbung ist, sage „Ja“, sonst sage „Nein“.

Argumentieren Sie, dass 2-Coloring polynomiell lösbar ist. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Analysieren Sie die Laufzeit des obigen Algorithmus.

(b) Argumentieren Sie: Falls der Graph 2-färbbar ist, sagt der Algorithmus „Ja“.

(c) Argumentieren Sie: Falls der Graph nicht 2-färbbar ist, sagt der Algorithmus „Nein“.