

Beispiel 1: Man untersuche die Folge a_n (mit Hilfe vollständiger Induktion) auf Monotonie und Beschränktheit und bestimme gegebenenfalls mit Hilfe der bekannten Rechenregeln für Grenzwerte den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$a_0 = 2, a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3} \text{ für alle } n \geq 0. \quad (7 \text{ Punkte})$$

Lösung: Wir zeigen durch vollständige Induktion:

$$2 \leq a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$n=0: a_0 = 2 \leq \sqrt{5} = \sqrt{4 \cdot 2 - 3} = a_1$$

$$n \rightarrow n+1: a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow 4a_n - 3 \leq 4a_{n+1} - 3 \Rightarrow \sqrt{4a_n - 3} \leq \sqrt{4a_{n+1} - 3} \Rightarrow a_{n+1} \leq a_{n+2}$$

Weiters zeigen wir durch vollständige Induktion:

$$a_n \leq 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$n=0: a_0 = 2 \leq 3$$

$$n \rightarrow n+1: a_n \leq 3 \Rightarrow 4a_n - 3 \leq 4 \cdot 3 - 3 = 9 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{4a_n - 3} \leq \sqrt{9} = 3$$

Die Folge a_n ist somit monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Sei $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, dann gilt:

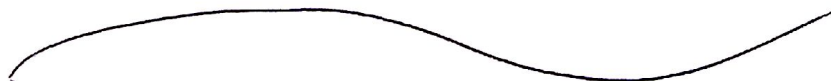
$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{4a_n - 3} = \sqrt{4 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 3} = \sqrt{4a - 3} \Rightarrow a^2 = 4a - 3 \Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0$$

Nach der Lösungsformel für die quadratische Gleichung erhalten wir:

$$a = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

Wegen $2 \leq a_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}$, kommt nur die Lösung 3 in Frage. Also erhalten wir:

$$\underline{\underline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3}}$$



Beispiel 2: Man untersuche die Folge a_n auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$$a_n = \frac{3n^3 - 5n^2 + 7}{2n^3 - 5n + 6} \quad \text{für alle } n \geq 0. \quad (6 \text{ Punkte})$$

Lösung: Wir bestimmen den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ nach den bekannten Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 - 5n^2 + 7}{2n^3 - 5n + 6} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{5}{n} + \frac{7}{n^3}}{2 - \frac{5}{n^2} + \frac{6}{n^3}} = \\ &= \frac{3 - 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 7 \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right)^3}{2 - 5 \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right)^2 + 6 \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right)^3} = \\ &= \frac{3 - 5 \cdot 0 + 7 \cdot 0^3}{2 - 5 \cdot 0^2 + 7 \cdot 0^3} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Wobei wir den bekannten Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ verwendet haben.



Beispiel 3: Man zeige, dass die folgende Funktionenreihe im angegebenen Bereich konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n, \quad |x| < \frac{1}{4}$$

(7 Punkte)

Lösung: Wir verwenden das Quotientenkriterium in Limesform.
Seien wir $a_n := \binom{2n}{n} x^n$,
so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{2(n+1)}{n+1} \cdot |x|^{n+1}}{\binom{2n}{n} \cdot |x|^n} = \\ &= |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)} = \\ &= |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})} = |x| \cdot \frac{(2+0)(2+0)}{(1+0)(1+0)} = \\ &= \underline{4 \cdot |x|}, \text{ wobei wir } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ und die bekannten} \\ &\text{Rechenregeln für Grenzwerte verwendet haben.} \end{aligned}$$

Für $|x| < \frac{1}{4}$ ist somit $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 4 \cdot |x| < 1$,
daher ist die angegebene Potenzreihe für $|x| < \frac{1}{4}$
absolut konvergent.