

6.0 VU Theoretische Informatik 2023W 15.4.2024			
Matrikelnummer	Nachname	Vorname	Gruppe
	Lösung		A

Aufgabe 1

(a) [10 Punkte] Wir definieren das folgende Entscheidungsproblem:

HELLOWORLD
 Instanz: Programm Π und ein Input String I .
 Frage: Gibt Programm Π bei Aufruf mit Input I den String "Hello World" aus?

Beweisen Sie mittels Reduktion vom HALTEPROBLEM, dass das HELLOWORLD Problem unentscheidbar ist. Zeigen Sie außerdem eine Richtung des Korrektheitsbeweises für die von Ihnen vorgeschlagene Reduktion R , nämlich: Wenn x eine positive Instanz des HALTEPROBLEMS ist, dann ist $R(x)$ eine positive Instanz des HELLOWORLD Problems.

Lösung

Problemreduktion: Sei (Π, I) eine beliebige Instanz des HALTEPROBLEMS. Wir definieren daraus eine Instanz (Π', I') des HELLOWORLD Problems mit $I' = I$ und folgendem Programm Π' .

```
String  $\Pi'$  (String  $I'$ ) {
  call  $\Pi(I')$ ;
  return "Hello World"; }
```

Das heißt: Das Programm Π' nimmt I' als Input, ruft das Programm Π mit eben diesem Input auf und, wenn die Kontrolle vom Aufruf von Π zurückkommt, gibt Π' den String "Hello World" aus.

Korrektheitsbeweis der Reduktion (eine Richtung): Sei (Π, I) eine positive Instanz des HALTEPROBLEMS. Wir müssen zeigen, dass dann (Π', I') eine positive Instanz des HELLOWORLD Problems ist.

Wir betrachten das Verhalten des Programms Π' beim Aufruf mit Input I' : Π' ruft zunächst Π mit Input I' auf. Laut Problemreduktion gilt $I' = I$. Laut Annahme ist (Π, I) eine positive Instanz des HALTEPROBLEM. Das bedeutet, dass Π beim Aufruf mit Input I terminiert. Daher wird das return-Statement am Ende von Programm Π' ausgeführt und Π' gibt den String "Hello World" aus. Das heißt, (Π', I') ist eine positive Instanz von HELLOWORLD.

(b) [2 Punkte] Betrachten Sie folgende Aussage: "Aus der Reduktion vom HALTEPROBLEM auf das HELLOWORLD Problem folgt, dass das HELLOWORLD Problem semi-entscheidbar ist und dass das co-HELLOWORLD Problem nicht semi-entscheidbar ist."

Ist diese Aussage korrekt? Begründen Sie Ihre Antwort kurz (maximal zwei Sätze). Punkte gibt es nur für eine hinreichend begründete Antwort. Sie dürfen folgende Eigenschaften des HALTEPROBLEMS (die in der Vorlesung gezeigt wurden) als bekannt voraussetzen:

Das HALTEPROBLEM ist semi-entscheidbar und das co-HALTEPROBLEM ist nicht semi-entscheidbar.

Lösung

Nein, diese Aussage ist inkorrekt.

Begründung: Aus der Reduktion vom HALTEPROBLEM auf das HELLOWORLD Problem folgt *nicht*, dass das HELLOWORLD Problem semi-entscheidbar ist. Dazu würden wir eine Reduktion in der umgekehrten Richtung benötigen.

Bemerkung: Allgemein gilt: Aus einer Reduktion von Problem A auf Problem B folgt, dass Problem B "mindestens so schwer" wie Problem A ist. Das heißt: Aus der Reduktion vom HALTEPROBLEM auf HELLOWORLD folgt, dass sich die Unentscheidbarkeit des HALTEPROBLEMS auf das HELLOWORLD Problem überträgt, und ebenso, dass sich die Nicht-Semi-Entscheidbarkeit des co-HALTEPROBLEMS auf das co-HELLOWORLD Problem überträgt. Außerdem, wenn wir wüssten, dass das HELLOWORLD Problem semi-entscheidbar ist, dann würde sich diese Eigenschaft auf das HALTEPROBLEM übertragen. Aber nicht umgekehrt. Dafür bräuchten wir eine Reduktion vom HELLOWORLD Problem auf das HALTEPROBLEM.

Aufgabe 2

Sei $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, P, S)$, wobei

$$P = \{S \rightarrow bacS \mid cab\} \cup \{xy \rightarrow yx \mid x, y \in \{a, b, c\}\}.$$

(a) [4 Punkte] Ist die Grammatik G regulär, kontextfrei, monoton, kontextsensitiv und/oder unbeschränkt? Begründen Sie Ihre Antwort.

	Ja	Nein
regulär	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
kontextfrei	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
monoton	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
kontextsensitiv	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
unbeschränkt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Lösung

G ist unbeschränkt und monoton, da für alle Produktionen $\alpha \rightarrow \beta$ gilt: $|\alpha| \leq |\beta|$. Wegen z.B. $ab \rightarrow ba$ ist G weder regulär, noch kontextfrei, noch kontextsensitiv.

(b) [2 Punkte] Geben Sie die von G erzeugte Sprache $L = L(G)$ an.

Lösung

$$L(G) = \{w \in \{a, b, c\}^+ \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$$

(c) [4 Punkte] Ist $L(G)$ regulär, kontextfrei, kontextsensitiv und/oder rekursiv aufzählbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

	Ja	Nein
regulär	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
kontextfrei	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
kontextsensitiv	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
rekursiv aufzählbar	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Lösung

$L(G)$ ist weder regulär noch kontextfrei. Nachdem G aber monoton ist, ist $L(G)$ entsprechend kontextsensitiv und damit, aufgrund der Chomsky Hierarchie, auch rekursiv aufzählbar.

(d) [2 Punkte] Kann \overline{L} , also das Komplement von L , von einer Turingmaschine akzeptiert werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

Ja. L ist kontextsensitiv, und kontextsensitive Sprachen sind unter Komplementbildung abgeschlossen. Dementsprechend ist \overline{L} auch kontextsensitiv, und somit auch rekursiv aufzählbar. Für jede rekursiv aufzählbare Sprache gibt es eine Turingmaschine, die sie akzeptiert.

Aufgabe 3

Die Funktion f vom Typ $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ sei definiert durch $f = \mathbf{Pr}(C_3^1, + \circ (P_2^3, P_3^3))$.

(a) [4 Punkte] Werten Sie f für die Eingabewerte $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$ und $(3, 2)$ aus.

Lösung

$$\begin{aligned} f(0, 2) &= C_3^1(2) = 3 \\ f(1, 2) &= + \circ (P_2^3, P_3^3)(0, f(0, 2), 2) = + \circ (3, 2) = 3 + 2 = 5 \\ f(2, 2) &= + \circ (P_2^3, P_3^3)(1, f(1, 2), 2) = + \circ (5, 2) = 5 + 2 = 7 \\ f(3, 2) &= + \circ (P_2^3, P_3^3)(2, f(2, 2), 2) = + \circ (7, 2) = 7 + 2 = 9 \end{aligned}$$

(b) [2 Punkte] Welche Funktion wird durch f dargestellt?

Lösung

$$f(x, y) = xy + 3$$

(c) [2 Punkte] Welche Funktion wird durch $\mu_0 f$ (alte Schreibweise: μf) dargestellt?

Lösung

$$(\mu_0 f)(x) = \min_{y \geq 0} [f(y, x) = 0] = \min_{y \geq 0} [yx + 3 = 0].$$

Da $xy + 3$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$ größer als 0 ist, ist μf die 1-stellige Funktion, deren Wert für alle Eingabewerte undefiniert ist.

(d) [2 Punkte] Welche Funktion wird durch $\overline{\mu} f$ dargestellt?

Hinweis: Die adäquate Darstellung benötigt eine dreifache Fallunterscheidung.

Lösung

$$(\overline{\mu} f)(x_1, x_2) = \min_{y \geq 0} [f(y, x_2) = x_1] = \min_{y \geq 0} [yx_2 + 3 = x_1].$$

Es gilt daher

$$\overline{\mu} f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_1 = 3, \\ \frac{x_1 - 3}{x_2} & \text{falls } x_1 > 3 \text{ und } x_2 \text{ ein Teiler von } x_1 - 3 \text{ ist,} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(e) [2 Punkte] Ist es entscheidbar, ob eine gegebene Turingmaschine M die Funktion f berechnet? Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

Anmerkung: Punkte gibt es nur für eine hinreichend begründete Antwort.

Lösung

Die Menge $\{f\}$ ist eine (extensionale) nicht-triviale Funktions-Eigenschaft. Daher ist der Satz von Rice für Funktionen anwendbar. Das Problem ist folglich unentscheidbar.

Aufgabe 4

Wir haben vier Entscheidungsprobleme gegeben: P_1, P_2, P_3, P_4 . Wir wissen, dass $P_1 \in \mathbf{P}$, $P_3 \in \mathbf{NP}$ und P_4 \mathbf{NP} -hart ist (über P_2 ist nichts bekannt). Welche *zusätzlichen* Aussagen über P_1, P_2, P_3 und P_4 können wir bzgl. der Komplexitätsklassen \mathbf{P} und \mathbf{NP} treffen wenn jeweils folgende polynomielle many-one Reduktionen gelten:

(a) [3 Punkte] $P_2 \leq_R P_1$ und $P_3 \leq_R P_2$

Lösung

$P_2 \in \mathbf{P}$; $P_3 \in \mathbf{P}$.

(b) [3 Punkte] $P_1 \leq_R P_2$ und $P_2 \leq_R P_3$

Lösung

$P_2 \in \mathbf{NP}$.

(c) [3 Punkte] $P_2 \leq_R P_3$ und $P_3 \leq_R P_4$

Lösung

$P_2 \in \mathbf{NP}$.

(d) [3 Punkte] $P_4 \leq_R P_3$ und $P_3 \leq_R P_2$

Lösung

P_2 ist \mathbf{NP} -hart; P_3 ist \mathbf{NP} -vollständig.

Aufgabe 5 [12 Punkte]

Zeigen Sie mit Hilfe der Annotierungsregeln, dass die folgende Korrektheitsaussage wahr hinsichtlich totaler Korrektheit ist. Verwenden Sie $x*m \leq n < y*m \wedge m > 0$ als Invariante und $y-x$ als Variante.

Einige Annotierungsregeln:

$$\begin{aligned} \{F\}v := e &\mapsto \{F\}v := e\{\exists v'(F[v'] \wedge v = e[v'])\} \\ \text{if } e \text{ then } \{F\} \cdots \text{ else } \{G\} &\mapsto \{(e \supset F) \wedge (\neg e \supset G)\} \text{if } e \text{ then } \{F\} \cdots \text{ else } \{G\} \\ \{F\} \text{if } e \text{ then } \cdots \text{ else } &\mapsto \{F\} \text{if } e \text{ then } \{F \wedge e\} \cdots \text{ else } \{F \wedge \neg e\} \\ \text{while } e \text{ do } \cdots &\mapsto \{Inv\} \text{while } e \text{ do } \{Inv \wedge e \wedge t=t_0\} \cdots \{Inv \wedge (e \supset 0 \leq t < t_0)\} \{Inv \wedge \neg e\} \end{aligned}$$

```

{ m > 0 ∧ n ≥ 0 }
{{
x := 0;
y := n + 1}};
while x + 1 ≠ y do {
  z := (x + y)/2;
  if z * m > n then
    y := z
  else
    x := z;
  // end if
}}
{ x * m ≤ n < (x + 1) * m }

```

Lösung

Sei $Inv = xm \leq n < ym \wedge m > 0$ und $t = y - x$, wie in der Angabe vorgeschlagen. Die Regeln können in verschiedenen Reihenfolgen angewendet werden. Die Nummerierung der Formeln gibt eine mögliche an.

```

{ Pre: m > 0 ∧ n ≥ 0 }
{ F6: Inv  $\begin{smallmatrix} [n+1] \\ [x] \end{smallmatrix}$  }
{{
x := 0;
{ F5: Inv  $\begin{smallmatrix} [n+1] \\ [y] \end{smallmatrix}$  }
y := n+1}};
{ F1: Inv }
while x+1 ≠ y do
  { F2: Inv ∧ x+1 ≠ y ∧ t = t0 }
  z := (x+y)/2;
  { F11: Inv ∧ x+1 ≠ y ∧ t = t0 ∧ z = (x+y)/2 }
  if z * m > n then
    { F12: Inv ∧ x+1 ≠ y ∧ t = t0 ∧ z = (x+y)/2 ∧ zm > n }
    { F10: (Inv ∧ 0 ≤ t < t0)  $\begin{smallmatrix} [z] \\ [y] \end{smallmatrix}$  }
    y := z
    { F8: Inv ∧ 0 ≤ t < t0 }
  else
    { F13: Inv ∧ x+1 ≠ y ∧ t = t0 ∧ z = (x+y)/2 ∧ zm ≤ n }
    { F9: (Inv ∧ 0 ≤ t < t0)  $\begin{smallmatrix} [z] \\ [x] \end{smallmatrix}$  }
    x := z
    { F7: Inv ∧ 0 ≤ t < t0 }
  // end if
  { F3: Inv ∧ 0 ≤ t < t0 }
}}
{ F4: Inv ∧ x+1 = y }
{ Post: xm ≤ n < (x+1)m }

```

Wir müssen zeigen, dass die Implikationen $Pre \supset F_6$, $F_{12} \supset F_{10}$, $F_{13} \supset F_9$ und $F_4 \supset Post$ gültige Formeln sind.

- $Pre \supset F_6$
 $m > 0 \wedge n \geq 0 \supset Inv \left[\begin{smallmatrix} n+1 \\ y \end{smallmatrix} \right] \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ x \end{smallmatrix} \right]$
 $m > 0 \wedge n \geq 0 \supset 0 \cdot m \leq n < (n+1)m \wedge m > 0$

Konklusion ... ist gültig wegen ...

$0 \cdot m \leq n$	äquivalent zur Prämisse $n \geq 0$
$n < (n+1)m$	Für jede Zahl n gilt $n < n+1$. Wegen der Prämissen $n \geq 0$ und $m > 0$ sind $n+1$ und m positive Zahlen ≥ 1 , daher gilt $n+1 \leq (n+1)m$, woraus die Behauptung folgt.
$m > 0$	Prämisse

- $F_{12} \supset F_{10}$
 $Inv \wedge x+1 \neq y \wedge t = t_0 \wedge z = (x+y)/2 \wedge zm > n \supset (Inv \wedge 0 \leq t < t_0) \left[\begin{smallmatrix} z \\ y \end{smallmatrix} \right]$
 $Inv \wedge x+1 \neq y \wedge t = t_0 \wedge z = (x+y)/2 \wedge zm > n \supset xm \leq n < zm \wedge m > 0 \wedge 0 \leq z-x < t_0$

Konklusion ... ist gültig wegen ...

$xm \leq n$	Prämisse (Teil von <i>Inv</i>)
$n < zm$	Prämisse $zm > n$
$m > 0$	Prämisse (Teil von <i>Inv</i>)
$0 \leq z-x$	Aus den Prämissen $xm \leq n$ und $n < zm$ erhalten wir $xm < zm$. Wegen $m > 0$ können wir kürzen und erhalten $x < z$, was gleichbedeutend mit $0 < z-x$ ist. Daraus folgt $0 \leq z-x$.
$z-x < t_0$	Aus $xm < zm$ und $m > 0$ (beides Teil von <i>Inv</i>) erhalten wir $x < z$ bzw. $x+1 \leq y$. Wegen der Prämisse $x+1 \neq y$ gilt sogar $x+2 \leq y$. Durch Addition von y , Division durch 2 und Subtraktion von x ergibt sich daraus $(x+y)/2 - x + 1 \leq y - x$. Mit den Prämissen $y-x = t_0$ und $z = (x+y)/2$ ergibt sich die gesuchte Bedingung.

Anmerkung: Da wir ganzzahlig dividieren, müssen wir sicherstellen, dass entweder kein Divisionsrest entsteht (wie bei der Umformung von $xm < zm$ auf $x < z$), oder wir müssen \leq anstelle von $<$ verwenden, da die Relation \leq im Gegensatz zu $<$ bei Division erhalten bleibt. Um das Problem zu veranschaulichen: Aus $4 < 5$ erhält man bei reeller Division durch 2 die wahre Aussage $2 < 2.5$, bei ganzzahliger Division ergibt sich aber die falsche Aussage $2 < 2$. Die Relation \leq bleibt aber erhalten: Aus $4 \leq 5$ folgt bei ganzzahliger Division durch 2 die wahre Aussage $2 \leq 2$.

- $F_{13} \supset F_9$ analog zu $F_{12} \supset F_{10}$

- $F_4 \supset Post$
 $xm \leq n < ym \wedge m > 0 \wedge x+1 = y \supset xm \leq n < (x+1)m$

Konklusion ... ist gültig wegen ...

$xm \leq n$	Prämisse
$n < (x+1)m$	Prämissen $n < ym$ und $x+1 = y$