Übung 1

Aufgabe 1

Die Ereignisse A, B und C erfüllen die Bedingungen

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{A}) = \mathbf{0.7}, \mathbb{P}(\boldsymbol{B}) = \mathbf{0.6}, \mathbb{P}(\boldsymbol{C}) = \mathbf{0.5}$$

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \mathbf{0.4}, \mathbb{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}) = \mathbf{0.3}, \mathbb{P}(\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = \mathbf{0.2}, \mathbb{P}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = \mathbf{0.1}$$

Bestimmen Sie $\mathbb{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}), \mathbb{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C}), \mathbb{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C})$.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.7 + 0.6 - 0.4 = 0.9$$
$$\mathbb{P}(A \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) = 0.7 + 0.5 - 0.3 = 0.9$$
$$\mathbb{P}(B \cup C) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) = 0.6 + 0.5 - 0.2 = 0.9$$

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$
$$= 0.7 + 0.6 + 0.5 - 0.4 - 0.3 - 0.2 + 0.1 = 1$$

Aufgabe 2

Von einer Krankheit sind 2% der Bevölkerung betroffen. Ein Test gibt bei einem Kranken mit Wahrscheinlichkeit 0.99 ein positives Ergebnis bei einem Gesunden mit Wahrscheinlichkeit 0.01.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Unter einer bedingten (konditionalen) Wahrscheinlichkeit versteht man das Eintreten eines Ereignisses A unter der Bedingung, dass das Eintreten eines anderen Ereignisses B bereits bekannt ist. Sie gibt also ein Maß dafür an, wie stark der statistische Einfluss von B auf A ist.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A, vorausgesetzt B, ist definiert durch:

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

Es sei $\{A_i : i \in I \subseteq \mathbb{N}\}$ ein vollständiges Ereignisfeld, das heißt, die A_i sind disjunkt mit $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$. B sei ein beliebiges Ereignis mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(B \mid A_i)$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit von B gegeben durch

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B \mid A_i)$$

---

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person positiv getestet wird.

$\mathbb{P}(A) = 0.02$	Person ist krank
$\mathbb{P}(A^C) = 0.98$	Person ist gesund
$\mathbb{P}(\boldsymbol{B}) = ?$	**Positiv getestet**
$\mathbb{P}(B \mid A) = 0.99$	Positiv getestet, vorausgesetzt Person ist krank
$\mathbb{P}(B \mid A^C) = 0.01$	Positiv getestet, vorausgesetzt Person ist gesund

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(B)$ ergibt sich aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^C \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}(A^C)\mathbb{P}(B \mid A^C) = 0.02 * 0.99 + 0.98 * 0.01$$

$$\mathbb{P}(B) = 0.0296$$

b) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig gewählte Person krank ist, wenn das Testergebnis positiv ist.

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0.0198}{0.0296} = 0.66891 \ldots \approx 66{,}9\ \%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person krank ist, wenn das Testergebnis positiv ist, beträgt 66,9 %. Anders gesagt: Wenn ich mich ohne Grund (keine Anzeichen einer Krankheit) testen lasse und ich bin positiv, habe ich immer noch eine Chance von 33 % Prozent gesund zu sein.

Aufgabe 3

Beim norddeutschen Bingo („die Umweltlotterie") werden 22 Zahlen aus $\{1, \dots, 75\}$ ohne Zurücklegen gezogen. Die Wettscheine sind Quadrate mit 5 x 5 Feldern. In der ersten Spalte stehen Zahlen zwischen 1 und 15, in der zweiten Zahlen von 16 bis 30 usw.

Hypergeometrische Verteilung

$$h(k|N;M;n) \coloneqq \mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

N	Gesamtmenge
M	Elemente mit einer bestimmten Eigenschaft (z.B. mögliche Erfolge)
n	Anzahl der Elemente in einer Stichprobe
k	Anzahl, von der die Wahrscheinlichkeit berechnet werden soll

---

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass keine Zahlen aus der ersten Spalte (also zwischen 1 und 15) gezogen werden.

Hierbei handelt es sich um eine Kombination ohne Wiederholung bzw. ohne Zurücklegen.

Gesamtanzahl der Zahlen	$N = 75$
Anzahl der „erlaubten" Zahlen	$M = 60$
Umfang der Stichprobe	$n = 22$
Wie viele Proben müssen passend sein	$x = 22$

Nun berechnen wir uns die Anzahl der Möglichkeiten, aus den „erlaubten" 60 Zahlen, 22 auszuwählen.

$$\binom{M}{x} = \binom{60}{22} = \frac{60!}{22!\,(60-22)!} = 1.415 * 10^{16}$$

Die Anzahl der Möglichkeiten, aus den 75 Zahlen, beliebige 22 auszuwählen, ist:

$$\binom{N}{n} = \binom{75}{22} = \frac{75!}{22!\,(75-22)!} = 5.163 * 10^{18}$$

Für die Wahrscheinlichkeit müssen wir nur noch dividieren:

$$\frac{\binom{60}{22}\binom{15}{0}}{\binom{75}{22}} = \frac{\frac{60!}{22!\,(60-22)!}}{\frac{75!}{22!\,(75-22)!}} \approx 0.274\ \%$$

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 8 Zahlen aus der ersten Spalte gezogen werden.

Aus der Angabe wissen wir, dass wir mindestens 8 und maximal 15 Zahlen aus der ersten Spalte ziehen dürfen. Dafür berechne ich alle einzelnen Wahrscheinlichkeiten.

$$\mathbb{P}(8) = \frac{\binom{60}{14}\binom{15}{8}}{\binom{75}{22}} = 0.00216 \qquad \mathbb{P}(10) = \frac{\binom{60}{12}\binom{15}{10}}{\binom{75}{22}} = 0.0008$$

$$\mathbb{P}(9) = \frac{\binom{60}{13}\binom{15}{9}}{\binom{75}{22}} = 0.005 \qquad \mathbb{P}(11) = \frac{\binom{60}{11}\binom{15}{11}}{\binom{75}{22}} = 0.0001$$

Die Wahrscheinlichkeiten für 12, 13, 14 oder 15 Zahlen aus der ersten Spalte ist so klein, dass ich diese vernachlässige.

$$\mathbb{P}(mind\ 8) = \mathbb{P}(8) + \mathbb{P}(9) + \dots + \mathbb{P}(15) = 0{,}02754$$

Aufgabe 4

(Fortsetzung) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in mindestens einer Spalte keine Zahlen gezogen werden.

Siebformel für beliebige Vereinigungen

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}) \right)$$

$\Omega = \binom{75}{22}$ # Gesamtmenge

$A_i = \binom{60}{22}$ # Ergebnisse ohne Spalte i

B # Ergebnisse ohne mindestens 1 Spalte

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right) = \sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \le i_1 \le \cdots \le i_k \le 5} \mathbb{P}(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}) \right)$$

$$= \binom{5}{1} * \frac{\binom{60}{22}\binom{15}{0}}{\binom{75}{22}} - \binom{5}{2} * \frac{\binom{45}{22}}{\binom{75}{22}} + \binom{5}{3} * \frac{\binom{30}{22}}{\binom{75}{22}} = 0.013$$

Anschaulich kann man es sich so vorstellen:

- Es gibt $\binom{5}{1}$ Möglichkeiten, eine von fünf Spalten auszuwählen, die leer bleibt
- Es gibt $\binom{5}{2}$ Möglichkeiten, eine zwei-elementige Schnittmenge aus fünf Mengen zu bilden
- Es gibt $\binom{5}{3}$ Möglichkeiten, eine drei-elementige Schnittmenge aus fünf Mengen zu bilden
- Da es nicht möglich ist, aus 15 Zahlen, 22 auszuwählen, müssen immer in mindestens zwei Spalten Zahlen stehen.

Aufgabe 5

Die symmetrische Differenz von zwei Mengen („exklusives Oder“) ist

$$\boldsymbol{A \Delta B} = (\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B} \setminus \boldsymbol{A})$$

Bestimmen Sie Ausdrücke für $\mathbb{P}(\boldsymbol{A \Delta B})$ und $\mathbb{P}(\boldsymbol{A \Delta B \Delta C})$.

$$\mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A)$$

Betrachten wir zuerst noch folgendes:

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

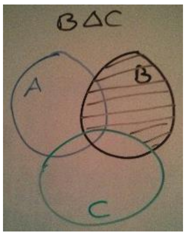
Somit ergibt sich:

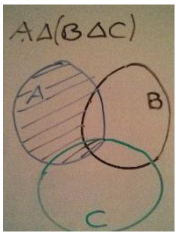
$$\mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A)$$
$$\mathbb{P}(A \Delta B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2 * \mathbb{P}(A \cap B)$$

Für $\mathbb{P}(A \Delta B \Delta C)$ berechnet man:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(A \Delta B \Delta C) = \\
&\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \\
&\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) + \\
&\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\
&+\mathbb{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C})
\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(A \Delta B \Delta C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - 2 * \mathbb{P}(A \cap B) - 2 * \mathbb{P}(A \cap C) - 2 * \mathbb{P}(B \cap C) + 4 * \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$





Zusatzaufgabe: Raten Sie, wie die Formel für n Mengen aussieht.

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} * 2^{k-1} \left(\sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \mathbb{P}(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{in}) \right)$$

Aufgabe 6

In einer Urne sind 3 weiße und 2 schwarze Kugeln. Es wird eine Kugel gezogen und mit einer zusätzlichen Kugel derselben Farbe zurückgelegt (nach der ersten Ziehung sind also insgesamt 6 Kugeln in der Urne). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel weiß ist.

$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{5}$	1. Kugel ist weiß
$\mathbb{P}(A^C) = \frac{2}{5}$	1. Kugel ist schwarz
$\mathbb{P}(\boldsymbol{B}) =?$	**2. Kugel ist weiß**
$\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{5} * \frac{4}{6} = 0.4$	Beide Kugeln sind weiß
$\mathbb{P}(B \mid A^C) = \mathbb{P}(A^C)\mathbb{P}(A^C \cap B) = \frac{2}{5} * \frac{3}{6} = 0.2$	Erste Kugel ist schwarz, zweite ist weiß

Wir suchen also die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(B)$.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}(B \mid A^C) = 0.4 + 0.2 = 0.6$$

Aufgabe 7

Ein Würfel wird dreimal geworfen. Die Augenzahlen werden der Größe nach geordnet, die Zufallsvariable X sei die mittlere (etwa (2, 2, 5) → 2).

Bestimmen Sie die Verteilung von X.

Für diese Aufgabe definieren wir uns die drei Variablen x, y und z. Es gilt:

$$x \leq y \leq z$$

Sie entsprechen also der geordneten Augenanzahl nach drei Würfen. Die Beziehung zu einander kann in vier Fälle unterteilt werden. Die Anzahl der Möglichkeiten bezieht sich auf y.

Fall	Beziehung	Möglichkeiten
1	$x = y = z$	$1! = 1$
2	$x = y < z$	3
3	$x < y = z$	3
4	$x < y < z$	$3! = 6$

Zur Verdeutlichung

Betrachten wir den Fall 2 genauer. Wir wissen, dass zwei gleiche Zahlen und eine größere Zahl gewürfelt wurden.

$$Gleiche\ Zahlen\ (niedriger) = n$$
$$größere\ Zahl\ (höher) = h$$

Alle Möglichkeiten, dies zu Würfeln, lauten:

$$n\,n\,h$$
$$n\,h\,n$$
$$h\,n\,h$$

Das ergibt unsere drei Möglichkeiten. Analog dazu werden die anderen Möglichkeiten berechnet.

Werte für y

Nun betrachten wir alle Werte, die y annehmen kann und überlegen uns außerdem dazu, wie oft jeder Fall mit dem festgesetzten y-Wert auftreten kann.

Wert für y	Fall 1	Fall 2	Fall 3	Fall 4	$\boldsymbol{Fallanzahl * Möglichkeiten}$	Ergebnis
1	1	5	0	0	$1 * 1 + 5 * 3$	**16**
2	1	4	1	4	$1 * 1 + 4 * 3 + 1 * 3 + 4 * 6$	**40**
3	1	3	2	6	$1 * 1 + 3 * 3 + 2 * 3 + 6 * 6$	**52**
4	1	2	3	6	$1 * 1 + 2 * 3 + 3 * 3 + 6 * 6$	**52**
5	1	1	4	4	$1 * 1 + 1 * 3 + 4 * 3 + 4 * 6$	**40**
6	1	0	5	0	$1 * 1 + 5 * 3$	**16**
Gesamt						**216**

Nun wird der prozentuelle Anteil für jeden Wert von y berechnet:

Wert für y	**Prozentueller Anteil**
1	7,407 %
2	18,519 %
3	24,074 %
4	24,074 %
5	18,519 %
6	7,407 %
Gesamt	**100 %**

Die Verteilung ist eine Treppenfunktion, die beschreibt, wie wahrscheinlich es ist, dass y in diesem Bereich liegt.

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0\,\%, & y < 1 \\ 7{,}407\,\%, & y < 2 \\ 25{,}926\,\%, & y < 3 \\ 50\,\%, & y < 4 \\ 74{,}074\,\%, & y < 5 \\ 92{,}593\,\%, & y < 6 \\ 100\,\%, & y \geq 6 \end{cases}$$