Übungstest Algebra und Diskrete Mathematik

5. Juni 2020

1. Man bestimme alle Werte von $\sqrt[3]{-8i}$ in den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, gebe sie in Polardarstellung und kartesischer Darstellung an und zeichne sie in der Gauß'schen Zahlenebene ein.

2. Man bestimme den $ggT(79, 29)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus' und stelle $ggT(79, 29)$ in der Form $79a + 29b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ dar. Wie lautet das multiplikative Inverse der Restklasse 29 modulo 79?

3. n Kugeln sollen auf k unterscheidbare Fächer verteilt werden $(n, k \in \mathbb{N})$. Man gebe die Anzahl der unterschiedlichen Verteilungen an, wenn
   a) die Kugeln unterscheidbar sind,
   b) die Kugeln unterscheidbar sind und in jedem Fach höchstens eine Kugel sein darf,
   c) die Kugeln nicht unterscheidbar sind,
   d) die Kugeln nicht unterscheidbar sind und in jedem Fach höchstens ein Kugel sein darf.

   Man begründe dabei, wie man auf die jeweilige Anzahl kommt, etwa indem man angibt, wie sich die Verteilungen als geordnete/ungeordnete Auswahlen mit/ohne Wiederholung interpretieren lassen.

4. Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Wir betrachten den vollständigen Graphen K_n (das ist der schlichte ungerichtete Graph mit n Knoten, bei dem je zwei verschiedene Knoten mit einer Kante verbunden sind). Man gebe jeweils mit Begründung an: Für welche n ist K_n
   a) ein Baum?
   b) ein planarer Graph? - Für die entsprechenden Werte von n gebe man $\propto_0 (K_n), \propto_1 (K_n)$ und $\propto_2 (K_n)$ an.
   c) ein Hamilton'scher Graph?
   d) ein Euler'scher Graph?

   Hinweis: Es wird empfohlen, die Graphen $K_1, \dots, K_5$ zur Veranschaulichung aufzuzeichnen und sich die jeweiligen Eigenschaften zunächst in diesen Fällen anzuschauen. Die Argumentation ist dann immer für alle $n \geq 1$ durchzuführen.

5. Man bestimme die Lösung der Differenzengleichung
$$a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 25n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$
   die die Anfangsbedingung $a_0 = 4$ und $a_1 = 1$ erfüllt.