

Formelsammlung fuer Analysis 2

Hier die Formeln, die ich mir auf meinen Zettel schreiben werde, falls sie sich alle ausgehen sollten. Strukturiert roughly so, wie es in der Vorlesung vorgekommen ist. Wenn man die Ueberschriften weglaesst oder kleiner macht sollte es sich ausgehen auf 2 A4 Seiten Diese Seite nicht mitabschreiben ;->).

Integralrechnung in mehreren Variablen

Satz von Fubini

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(y) \leq x \leq \eta(y), c \leq y \leq d\} \Rightarrow \int \int_B f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{\varphi(y)}^{\eta(y)} f(x, y) dx dy$$

Substitutionsregel fuer Bereichsintegrale

$$B \subset \mathbb{R}^2, B' = \{(\varphi(x, y), \nu(x, y)) \mid (x, y) \in B\} \Rightarrow \int \int_{B'} f(u, v) du dv = \int \int_B f(\varphi(x, y), \nu(x, y)) \cdot \left| \det \begin{pmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \nu_x & \nu_y \end{pmatrix} \right| dx dy$$

Bogenlaenge einer Kurve

$$L = \int_a^b \|c'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{c_1'(t)^2 + \dots + c_n'(t)^2} dt$$

Kurvenintegral der Skalarenfunktion f entlang c

$$\int_a^b f(c(t)) \|c'(t)\| dt$$

Kruemmung einer stetig differenzierbaren ebenen Kurve mit l(t)=s als Bogenlaenge nach t

$$K(t) = \frac{d}{ds} \cdot \varphi(l^{-1}(s))$$

Kurvenintegral eines Vektorfelds entlang einer Kurve c

$$\int_c f(x) dx = \int_a^b f(c(t)) \cdot c'(t) dt = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n f_k(c(t)) \cdot c_k'(t) \right) dt$$

Fourierreihen

Trigonometrische Polynome

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad f(t) = \sum_{n=-N}^N c_k e^{ik\omega t}$$

Orthogonalitaetsrelationen der trigonometrischen Funktionen

- fuer $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt: $\int_0^T e^{ik\omega t} \cdot \overline{e^{il\omega t}} dt = \int_0^T e^{ik\omega t} \cdot e^{-il\omega t} dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq l \\ T & \text{falls } k = l \end{cases}$
- fuer $n, m \in \mathbb{N}$ gilt: $\int_0^T \cos(n\omega t) \cos(m\omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{falls } n = m \neq 0 \\ T & \text{falls } n = m = 0 \end{cases}$
- fuer $n, m \in \mathbb{N}^+$ gilt: $\int_0^T \sin(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq m \\ \frac{T}{2} & \text{falls } n = m \end{cases}$
- fuer $n, m \in \mathbb{N}$ gilt: $\int_0^T \cos(n\omega t) \sin(m\omega t) dt = 0$

Formel von Euler-Fourier

- $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt,$
- $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt,$
- $c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt$

Parseval'sche Gleichung

Fuer eine T-periodische auf $[0, T]$ stueckweise stetige Funktion $f(t)$ gilt: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$

Definition der Fourierkoeffizienten

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-kj \frac{2\pi i}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \omega^{kj}$$

Fouriermatrix

$$F_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

$$c = \frac{1}{N} \overline{F_N} y, F_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{F_N}$$

DFT und IDFT

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$$

- DFT: $c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \omega^{-kj}$
- IDFT: $y_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \omega^{jk}$

Rechenregeln fuer Spektralkoeffs

- Linearitaet: $ay + bz \xrightarrow{\text{DFT}} ac + bd$
- Verschiebung im Zeitbereich: $(y_{k+n})_k \xrightarrow{\text{DFT}} (\omega^{kn} c_k)_k$
- Verschiebung im Frequenzbereich: $(\omega^{kn} y_k)_k \xrightarrow{\text{DFT}} (c_{k-n})_k$
- Periodische Faltung: $y * z \xrightarrow{\text{DFT}} (c_k \cdot d_k)_k$

Parseval-Gleichung

$$\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |y_j|^2$$

Cauchy Hauptwert

$$\text{aperiodische Funktion } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad (CHW) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(t) dt$$

Fourier-Transformation

$$F(\omega) = F\{f(t)\} = (CHW) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \\ F^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi} (CHW) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega$$

Rechenregeln fuer Fourier-Transformation

- Linearitaet: $F\{a \cdot f(t) + b \cdot g(t)\} = \alpha \cdot F(\omega) + \beta \cdot G(\omega)$
- Konjugation: $F\{\overline{f(t)}\} = \overline{F(-\omega)}$
- Streckung: $F\{f(ct)\} = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right)$
- Verschiebung im Zeitbereich: $F\{f(t-a)\} = e^{-i\omega a} F(\omega)$
- Verschiebung im Frequenzbereich: $F\{e^{i\Omega t} f(t)\} = F(\omega - \Omega)$
- Symmetrien: $f(-t) = f(t) \Leftrightarrow F(-\omega) = F(\omega), f(-t) = -f(t) \Leftrightarrow F(-\omega) = -F(\omega)$
- Differenzieren im Zeitbereich: $F\{f'(t)\} = i\omega F(\omega)$
- Differenzieren im Frequenzbereich: $F\{tf(t)\} = iF'(\omega)$
- Faltung: $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau) d\tau$

Abtasttheorem

Kommt hier ned vor. Is org zach und probably 2.5 Punkte bei der Pruefung wert.

Nyquist Bedingung

1. $f(t)$ hat eine endliche Bandbreite Ω
2. Die Abtastfrequenz $\omega_s = \frac{2\pi}{\Delta t}$ ist mehr als doppelt so gross wie die Bandbreite Ω , also $\omega_s > 2\Omega$

Laplace Transformation

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

Rechenregeln

- Linearitaet: $L\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s)$
- Streckung: $L\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
- Differentiation und Integration im Zeitbereich:
 $L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+)$, $L\left\{\int_0^t f(u) du\right\} = \frac{1}{s} F(s)$
- Differentiation und Integration im Bildbereich:
 $L\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds} F(s)$, $L(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
 $L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u) du$
- Verschiebung im Bildbereich: $L\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$
- Verschiebung im Zeitbereich: $L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as} F(s)$
 $L\{u(t-a)\} = e^{-as} \frac{1}{s}$
- Faltung $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau$ $L\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s)$

z-Transformation

$$F(z) = Z(f_k) = \sum_{k=0}^\infty f_k z^{-k}$$

Konvergenzradius

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f_k|}}$$

Wenn $\frac{1}{R} < \infty$ ist die Folge z-Transformierbar

Lineare DGLs 1. mit konstanten Koeffizienten

1. Trennung der Variablen

Schaun, dass links nur y und Ableitungen sind und rechts nur x. $\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{a(x)}{x} dx$

2. Variation der Konstanten

$$y_{p(x)} = C(x)e^{-\int a(x)dx} \Rightarrow C(x) = \int s(x)e^{\int a(x)dx} dx$$

Lineare DGLs 2. mit konstanten Koeffizienten

1. Loesung der homogenen Gelichung durch Exponentialansatz fuer $y_{h(x)}$

- Ansatz $y_{h(x)} = e^{\lambda x}$
- $y'' + ay' + by = 0 \Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda x} + a \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0$
- Quad Gleichung loesen

$$\bullet y_h(x) = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} & \text{falls } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ reell} \\ e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) & \text{falls } \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \text{ konjugiert komplex} \\ (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x} & \text{falls } \lambda_1 = \lambda_2 \text{ reell} \end{pmatrix}$$

2. Bestimmung einer partikulaeren Loesung mit Hilfe eines unbestimmten Ansatzes

Stoerfunktion s(x)	Versuchsloesung $y_{p(x)}$
1	A
e^{rx}	$A \cdot e^{rx}$
$\sin(rx)$ oder $\cos(rx)$	$A \cdot \sin(rx) + B \cos(rx)$
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$	$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_k x^k$
$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k) \cdot e^{rx}$	$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_k x^k) e^{rx}$

lineare DGL k-ter Ordnung

Laplace transformieren und Gleichung loesen

Quasilineare DGLs 1. Ordnung

$$au_x + bu_y = f(x, y), a, b \in \mathbb{R}$$

Transformieren

$$\xi = bx + ay, \eta = bx - ay \Rightarrow x = \frac{\xi + \eta}{2} b, y = \frac{\xi - \eta}{2} a$$

$$\Rightarrow F(\xi, \eta) = 2ab U_\xi \text{ und } U(\xi, \eta) = \frac{1}{2ab} \int F(\xi, \eta) d\xi + G(\eta)$$

$$\Rightarrow u(x, y) = \frac{1}{2ab} \int_{bx_0 + ay_0}^{bx + ay} F(\xi, bx - ay) d\xi + G(bx - ay)$$

Quasilineare DGLs 2. Ordnung

Transformieren

mit Transformationen, sodass $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ und $\begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \neq 0$

Normalform bestimmen

- $AC - B^2 < 0 \Rightarrow$ hyperbolisch $Az_x \pm (B\sqrt{B^2 - AC})z_y = 0$
- $AC - B^2 = 0 \Rightarrow$ parabolisch $Az_x + Bz_y = 0$
- $AC - B^2 > 0 \Rightarrow$ elliptisch $Az_x + (B + \sqrt{B^2 - AC})z_y = 0$ aufpassen das ist dann imaginaer

Gleichung ist dann quasilinear 1. Ordnung und kann so geloest werden (transformieren)