

Mathe3 - Sätze und Definitionen

Franz Preyser
Patrick Ruß
Andreas Unterberger

2. Februar 2010

Zusammenfassung der wichtigsten Sätze und Definitionen.

1 Differenzen- und Differentialgleichungen

1.1 Differenzgleichungen - Qualitative Theorie

Definition 7.11: Ein Punkt x^* heißt **Fixpunkt** oder **Gleichgewichtspunkt** der Differenzgleichungen $x_{n+1} = f(x_n)$, wenn $f(x^*) = x^*$ gilt.

Definition 7.12 (Stabilität von Gleichgewichtslagen): Ein Gleichgewichtspunkt x^* der Differenzgleichungen $x_{n+1} = f(x_n)$ heißt **stabil**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, sodass für alle Lösungsfolgen (x_n) mit $|x_0 - x^*| < \delta(\varepsilon)$ gilt:
 $|x_n - x^*| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ein Gleichgewichtspunkt x^* heißt **asymptotisch stabil**, wenn es außerdem ein festes $\delta > 0$ gibt, sodass: $\forall(x_n)$ mit $|x_0 - x^*| < \delta : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$. Andernfalls heißt x^* **instabil**.

Satz 7.13: Ein Gleichgewichtspunkt x^* der Differenzgleichungen $x_{n+1} = f(x_n)$ ist asymptotisch stabil, falls $|f'(x^*)| < 1$, und instabil, falls $|f'(x^*)| > 1$ gilt.

Satz 7.18: Sind λ_1 und λ_2 Lösungen der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, dann lautet die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differenzgleichungen $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$

$$x_n^{(h)} = \begin{cases} C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n & \text{für } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ reell} \\ r^n (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi) & \text{für } \lambda_{1,2} = r(\cos \varphi \pm i \sin \varphi) \text{ konjugiert komplex} \\ (C_1 + C_2 n) \lambda_1^n & \text{für } \lambda_1 = \lambda_2 \text{ reell} \end{cases}$$

Satz 7.21 (Superpositionsprinzip): Gegeben sei die lineare inhomogene Differenzgleichung $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = c_1 s_n^{(1)} + c_2 s_n^{(2)}$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$). Sind $x_n^{(1)}$ und $x_n^{(2)}$ partikuläre Lösungen der inhomogenen Gleichungen mit den Störfunktionen $s_n^{(1)}$ bzw. $s_n^{(2)}$, dann ist $x_n = c_1 x_n^{(1)} + c_2 x_n^{(2)}$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung mit der Störfunktion $c_1 s_n^{(1)} + c_2 s_n^{(2)}$.

1.2 Differentialgleichungen

Satz 7.30 (Allgemeiner Existenzsatz von Peano): Ist $f(x, y)$ eine in einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^2$ stetige Funktion, dann besitzt die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D$ (mindestens) eine Lösung $y = y(x)$.

Satz 7.31 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz): Ist $f(x, y)$ eine stetige Funktion auf einem Rechtecksbereich $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und erfüllt dort eine sogenannte **Lipschitzbedingung**

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall x, y_1, y_2$$

mit einer von x, y_1 und y_2 unabhängigen Konstanten $L > 0$, dann besitzt die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ durch jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D$ genau eine Lösung $y = y(x)$.

Satz 7.35: Sind λ_1 und λ_2 Lösungen der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, dann lautet die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichungen $y'' + ay' + by = 0$

$$x_h(x) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} & \text{für } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ reell} \\ e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) & \text{für } \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \text{ konjugiert komplex} \\ (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x} & \text{für } \lambda_1 = \lambda_2 \text{ reell} \end{cases}$$

Unbestimmter Ansatz:

Störfunktion $s(x)$	Versuchslösung $y_p(x)$
1	A
e^{rx}	Ae^{rx}
$\sin rx$ oder $\cos rx$	$A \sin rx + B \cos rx$
$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$	$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_k x^k$
$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k) e^{rx}$	$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_k x^k) e^{rx}$

Definition 7.42: Man nennt y^* einen **Gleichgewichtspunkt** oder **stationären Zustand** der Differentialgleichung $y' = f(y)$ falls $f(y^*) = 0$.

Definition 7.44 (Stabilität von Gleichgewichtslagen): Ein Gleichgewichtspunkt y^* der Differentialgleichungen $y' = f(y)$ heißt **stabil**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gibt, sodass für alle Lösungen $y(x)$ der Gleichung, welche die Bedingung $|y(x_0) - y^*| < \delta(\varepsilon)$ (für ein x_0) erfüllen, gilt:

$|y(x) - y^*| < \varepsilon \quad \forall x > x_0$. Ein Gleichgewichtspunkt y^* heißt **asymptotisch stabil**, wenn es außerdem ein festes $\delta > 0$ gibt, sodass: $\forall y(x)$ mit $|y(x_0) - y^*| < \delta : \lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = y^*$. Andernfalls heißt y^* **instabil**.

Satz 7.13: Ein Gleichgewichtspunkt y^* der Differentialgleichungen $y' = f(y)$ ist asymptotisch stabil, falls $f'(y^*) < 0$, und instabil, falls $f'(y^*) > 0$ gilt.

2 Partielle Differentialgleichungen (PDG)

Buch Mathematik für Informatik (oranges Buch), 2007 (erste Auflage) Buch Kapitel 7.8 (Seite 306ff)

2.1 Allgemeines

Eine PDG ist allgemein eine Gleichung der Form

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}, \frac{\delta^m}{\delta x_1^{m_1} \dots \delta x_n^{m_n}} u) = 0$$

Die **Ordnung** der Differentialgleichung ist die höchste tatsächlich auftretende Ableitungsordnung $m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$.

- **Anfangsbedingungen** für eine Funktion $u(x, t)$ sind zum Zeitpunkt t_0 das "Anfangsprofil" $f(x)$ und die "Anfangsgeschwindigkeit" $g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ vorgegeben:

$$u(x, t_0) = f(x)$$

$$u_t(x, t_0) = g(x)$$

- **Rand-Anfangswert-Problem** hier ist das Anfangswertproblem nur für ein Intervall also für $x \in [a, b]$ erklärt. Zusätzlich zu den Anfangswerten sind dann noch Randwerte $u(a, t)$ und $u(b, t)$ für alle Zeitpunkte $t \geq t_0$ vorgegeben.

$$u(x, t_0) = f(x)$$

$$u_t(x, t_0) = g(x), \text{ für } a \leq x \leq b$$

$$u(a, t) = h(t)$$

$$u(b, t) = k(t), \text{ für } t \geq t_0$$

- **Dirichlet-Bedingungen** bei diesen Bedingungen ist die DGL auf ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$ beschränkt. Außerdem wird die Forderung gestellt, dass die Lösung $u(x, y)$ auf dem Rand δG von G die Werte einer vorgegebenen Funktion $f(x, y)$ annimmt.

$$u(x, y) = f(x, y), \forall (x, y) \in \delta G$$

Unter dem **Rand** δM einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ versteht man dabei die Menge von Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die gilt, dass jede ihrer offenen Umgebungen sowohl Punkte aus M als auch Punkte, die nicht in M liegen, enthält.

In etwas abgewandelter Form nennt man solche Bedingungen auch **Cauchy-Bedingungen**, wobei man fordert, dass die Lösung $z = u(x, y)$ durch eine vorgegebene Raumkurve $\gamma \in \mathbb{R}^3$ gehen muss.

2.2 explizit lösbare PDG

Für bestimmte Typen von PDGen lässt sich eine allgemeine Lösung durch einfache Variablen-substitution finden.

lineare PDG erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare PDG erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist eine Gleichung der Form:

$$a * u_x + b * u_y = f(x, y), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

mit folgender Substitution kommt man zur Lösung:

$$\begin{aligned}\xi &= b * x + a * y, & \eta &= b * x - a * y \\ \Rightarrow x &= \frac{\xi + \eta}{2b}, y = \frac{\xi - \eta}{2a}\end{aligned}$$

Die Funktionen $u(x, y)$ und $f(x, y)$ müssen auch noch folgendermaßen substituiert werden:

$$\begin{aligned}U(\xi, \eta) &= u\left(\frac{\xi + \eta}{2b}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right) = u(x, y) \\ F(\xi, \eta) &= f\left(\frac{\xi + \eta}{2b}, \frac{\xi - \eta}{2a}\right) = f(x, y)\end{aligned}$$

Nach der Rücksubstitution führt das auf folgendes Ergebnis:

$$u(x, y) = \frac{1}{2 * a * b} \int_{bx_0 + ay_0}^{bx + ay} F(\xi, bx - ay) d\xi + G(bx - ay)$$

2.2.1 Lösungsansatz nach D'Alembert

Dieser Ansatz ist für die **eindimensionale Wellengleichung** ich gebe hier nur die substitution an da es eine PDG 2.Ordnung ist (kommt nicht zum prüfungstermin 2.2.10).

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$\xi = x - ct, \quad \tau = x + ct$$

2.3 lineare und quasilineare PDG erster Ordnung

Lineare PDG erster Ordnung für eine unbekannte Funktion $u(x_1, \dots, x_n)$ in n Variablen haben die Gestalt

$$a_1(x_1, \dots, x_n) u_{x_1} +$$

Satz 7.50 (Existenz- und Eindeutigkeitsatz für Differentialgleichungssysteme): *Ist das Vektorfeld $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ für $a < t < b$ und $\mathbf{x} \in D$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ist, stetig partiell nach x_1, \dots, x_n differenzierbar, dann gibt es zu jedem $t_0 \in (a, b)$ und jedem $\mathbf{x}_0 \in D$ genau eine maximale Lösungskurve des Anfangswertproblems*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

2.4 Beispiele

- Wärmeleitungsgleichung (PDG 2.Ordnung)

$$\frac{\delta c}{\delta t} = D \frac{\delta^2 c}{\delta x^2}$$

- eindimensionale Wellengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, y)$, für ein reelles $c > 0$
diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung von Schwingungen in homogenen elastischen Medien (z.B. einer Gitarrensaite) Die Konstante c beschreibt dabei die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle und $f(x, t)$ den Einfluss äußerer Kräfte. Bei der Lösung einer inhomogenen PDG ist genau so vorzugehen wie bei einer inhomogenen DGL. Zuerst die homogene und dann die inhomogenen Lösung bestimmen.

3 Fourier-Analyse

3.1 Fourier-Reihen

Definition 8.3: Ein **trigonometrisches Polynom** der Periode T in **Sinus-Cosinus-Form** ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ der Gestalt:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Ein trigonometrisches Polynom der Periode T in **Exponentialform** ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ der Gestalt:

$$f(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\omega t}$$

Die Konstanten $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ und $c_k \in \mathbb{C}$ heißen die **Koeffizienten** des trigonometrischen Polynoms und $N \in \mathbb{N}$ nennt man den **Grad** des trigonometrischen Polynoms.

Satz 8.6: Die Koeffizienten a_n, b_n bzw. c_k eines trigonometrischen Polynoms $f(t)$ vom Grad N erhält man mit Hilfe der **Formeln von Euler-Fourier**, das heißt für $-N \leq k \leq N$ bzw. $0 \leq n \leq N$ gilt:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k\omega t} dt$$

Geht man mit dem Grad des trigonometrischen Polynoms gegen ∞ , so erhält man eine trigonometrische Reihe.

Definition (Teil von) 8.8 (N-te Partialsumme): Die N-te Partialsumme $S_N(t)$ einer trigonometrischen Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$ ist definiert als: $S_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\omega t}$.

Definition 8.9 (gleichmäßige Konvergenz): Eine Funktionenfolge $f_0(x), f_1(x), f_2(x) \dots$ **konvergiert gleichmäßig** auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gegen die Funktion $f(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$, wenn für jede beliebig kleine Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ ein für alle $x \in I$ gemeinsamer Index N_ε existiert, sodass gilt:

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in I.$$

Satz 8.10 (Weierstraß'scher M-Test für die gleichmäßige Konvergenz): Gilt für jede Funktion $f_k(x)$ der auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktionenfolge $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ eine Abschätzung $|f_k(x)| \leq M_k \quad \forall x \in I$, mit $M_k \in \mathbb{R}$ und

$$\sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty,$$

dann ist die Funktionenreihe $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ auf I gleichmäßig konvergent.

Satz 8.11: Wenn jedes Glied einer Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ stetig ist in einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ und die Reihe auf I gleichmäßig konvergiert gegen eine Funktion $f(x)$, dann gilt:

- $f(x)$ ist stetig im Intervall I .
- Die Reihe darf gliedweise integriert werden, d.h.:

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_k(x) dx \right)$$

Satz 8.12: Falls die trigonometrische Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$ gleichmäßig $\forall t \in \mathbb{R}$ gegen die T -periodische Funktion $f(t)$ konvergiert, so ist $f(t)$ stetig $\forall t \in \mathbb{R}$, und die Koeffizienten der trigonometrischen Reihe sind durch die Formel von Euler-Fourier bestimmt:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k\omega t} dt$$

Satz 8.14: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine T -periodische Funktion, die auf $[0, T]$ stückweise stetig ist. Dann ist die **Fourier-Reihe** $S_f(t)$ von $f(t)$ ($S_f(t) \sim f(t)$) definiert als trigonometrische Reihe

$$S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

wobei die **Fourier-Koeffizienten** a_n, b_n bzw. c_k für $n \in \mathbb{N}$ bzw. $k \in \mathbb{Z}$ folgendermaßen definiert sind:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-k\omega t} dt$$

Die Fourier-Koeffizienten a_n, b_n der Sinus-Kosinus-Darstellung hängen mit den Fourier-Koeffizienten c_k der komplexen Darstellung wie folgt zusammen:

$$\begin{array}{llll} a_0 = 2c_0 & a_n = c_n + c_{-n} & b_n = i(c_n - c_{-n}) & \text{für } n \in \mathbb{N}^+ \\ c_0 = \frac{a_0}{2} & c_k = \frac{a_k + ib_k}{2} & c_{-k} = \frac{a_k - ib_k}{2} & \text{für } k \in \mathbb{N}^+ \end{array}$$

Satz 8.16 (Rechenregeln): Für Fourierreihen

$$S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \sim f(t) \quad S_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ik\omega t} \sim g(t)$$

von auf $[0, T]$ stückweise stetigen T -periodischen Funktionen $f(t), g(t)$ gelten die nachfolgend angeführten Rechenregeln:

- *Linearität:* $\alpha f(t) + \beta g(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha c_k + \beta d_k) e^{ik\omega t}$
- *Konjugation:* $\overline{f(t)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{c_{-k}} e^{ik\omega t}$
- *Zeitumkehr:* $f(-t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} e^{ik\omega t}$
- *Streckung:* $f(ct) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik(c\omega)t}$ wobei $c > 0$
- *Verschiebung im Zeitbereich:* $f(t+a) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k e^{ik\omega a}) e^{ik\omega t}$ wobei $a \in \mathbb{R}$
- *Verschiebung im Frequenzbereich:* $e^{in\omega t} f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k-n} e^{ik\omega t}$ wobei $n \in \mathbb{Z}$

Satz 8.18 (Differentiation einer Fourier-Reihe): Sei $f(t)$ eine auf \mathbb{R} stetige und auf $[0, T]$ stückweise stetig differenzierbare T -periodische Funktion mit der Fourier-Reihe $S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$. Für die Fourier-Reihe $S_{f'}(t)$ der Ableitung $f'(t)$ gilt dann:

$$S_{f'}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik\omega c_k) e^{ik\omega t}$$

Satz 8.19 (Integration einer Fourier-Reihe): Sei $f(t)$ eine auf $[0, T]$ stückweise stetige T -periodische Funktion mit der Fourier-Reihe $S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$. Das Integral $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ ist nur dann wieder eine T -periodische Funktion, wenn $\int_0^T f(t) dt = 0$, also $c_0 = 0$ ist. In diesem Fall gilt für die Fourier-Reihe $S_F(t) \sim F(t)$:

$$S_F(t) = -\frac{1}{T} \int_0^T t f(t) dt + \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} \left(\frac{c_k}{ik\omega} \right) e^{ik\omega t}$$

Satz 8.21 (Bessel-Ungleichung): Für T -periodische auf $[0, T]$ stückweise stetige Funktionen $f(t)$ gilt für die Fourier-Koeffizienten a_n, b_n bzw. c_k folgende Ungleichung:

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

Satz 8.22: Sei $f(t)$ eine T -periodische Funktion mit $f(t) \sim S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$. Sind $f(t), f'(t), \dots, f^{(r-1)}(t)$ stetige Funktionen auf \mathbb{R} und ist weiters $f^{(r)}(t)$ für $r \geq 0$, stückweise stetig differenzierbar auf $[0, T]$, so gibt es eine Schranke $M < \infty$, so dass gilt:

$$|c_k| \leq \frac{M}{|k|^{r+1}} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Satz 8.23 (Parseval'sche Gleichung): Für eine T -periodische auf $[0, T]$ stückweise stetige Funktion $f(t)$ gilt:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt$$

Definition (Abstand zweier T -periodischer Funktionen im quadratischen Mittel): Der Abstand zweier T -periodischer Funktionen $g(t), h(t)$ im **quadratischen Mittel** ist wie folgt definiert:

$$\|g(t) - h(t)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |g(t) - h(t)|^2 dt}$$

Satz 8.24 (Konvergenz im quadratischen Mittel): Die Fourier-Reihe einer auf $[0, T]$ stückweise stetigen Funktion $f(t)$ konvergiert auf $[0, T]$ im quadratischen Mittel gegen $f(t)$, d.h. für die Partialsummen $S_N(t)$ von $S_f(t)$ gilt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f(t) - S_N(t)\|_2 = 0$$

Satz 8.26 (Darstellungssatz bei gleichmäßiger Konvergenz): Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, T -periodisch und konvergiert die Fourier-Reihe $S_f(t)$ gleichmäßig auf $[0, T]$, so gilt $f(t) = S_f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Satz 8.27 (Darstellungssatz für stückweise stetig differenzierbare Funktionen): Ist die T -periodische Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ auf $[0, T]$ stückweise stetig differenzierbar, so gilt für die Fourier-Reihe $S_f(t)$:

1. Die Fourier-Reihe $S_f(t)$ konvergiert punktweise $\forall t \in \mathbb{R}$
2. $S_f(t) = \frac{1}{2}(f(t_+) + f(t_-)) \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Das heißt, $S_f(t)$ konvergiert an allen Stetigkeitsstellen gegen den Funktionswert $f(t)$ und an allen Unstetigkeitsstellen gegen das arithmetische Mittel des linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwertes der Funktion.
3. Ist $f(t)$ stetig auf einem Intervall $[a, b] \subseteq (0, T)$, so konvergiert $S_f(t)$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $f(t)$

3.2 Diskrete Fourier-Transformation

Definition 8.28: Die **Fourier-Koeffizienten** oder **Spektralkoeffizienten** c_k , für $k = 0, 1, \dots, N-1$ eines Vektors $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_{N-1})^T$ seien wie folgt definiert:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-kj \frac{i2\pi}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \overline{w^{kj}}$$

wobei $w = e^{\frac{i2\pi}{N}}$ die erste von N verschiedenen N -ten Einheitswurzeln bezeichnet.

Definition 8.31: Die **Diskrete Fourier-Transformation** DFT ist eine Abbildung $DFT : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$, die dem Vektor $\mathbf{y} = (y_0, \dots, y_{N-1})^T$ den Vektor der durch (8.8) definierten Spektralkoeffizienten $\mathbf{c} \mathbf{y} = (c_0, \dots, c_{N-1})^T$ zuordnet. DFT ist invertierbar, und die Umkehrfunktion heißt **inverse Diskrete Fourier-Transformation** $IDFT$, also:

$$\begin{aligned} DFT : \quad c_k &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j w^{-kj}, \quad k \in \{0, 1, \dots, N-1\} \\ IDFT : \quad y_j &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k w^{kj}, \quad j \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad \text{mit } w = e^{\frac{i2\pi}{N}}. \end{aligned}$$

Definition (Fourier-Matrix):

$$F_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \dots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \dots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$$

Satz 8.30: Die *Fourier-Matrix* F_N ist invertierbar, und die *inverse Matrix* F_N^{-1} ist gegeben durch

$$F_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{F_N}.$$

Es gilt der Zusammenhang:

$$\mathbf{c} = F_N^{-1} \mathbf{y} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{y} = F_N \mathbf{c}$$

Fast Fourier Transform (FFT): Durch geschickte Wahl der Vektorlänge N , kann der Rechenaufwand für die DFT durch folgende Vorgehensweise erheblich gesenkt werden (hier gezeigt

anhand der *IDFT*):

$$\begin{aligned}
 \text{sei } N = 2^r : \quad y_n &= \sum_{k=0}^{2^r-1} c_k w_{2^r}^{nk} \\
 \Leftrightarrow y_n &= \sum_{k=0}^{2^{r-1}-1} c_{2k} w_{2^r}^{n2k} + \sum_{k=0}^{2^{r-1}-1} c_{2k-1} w_{2^r}^{n(2k-1)} \\
 \text{es gilt: } w_{2^r}^2 &= (e^{i\frac{2\pi}{2^r}})^2 = e^{i\frac{2\pi}{2^{r-1}}} = w_{2^{r-1}} \\
 \Leftrightarrow y_n &= \sum_{k=0}^{2^{r-1}-1} c_{2k} w_{2^{r-1}}^{nk} + w_{2^r}^{-n} \sum_{k=0}^{2^{r-1}-1} c_{2k-1} w_{2^{r-1}}^{nk}
 \end{aligned}$$

Es entstehen also zwei Teile, die jeweils für sich wieder den DFT-Algorithmus ergeben, aber mit jeweils nur der halben Vektorlänge $\frac{N}{2} = 2^{r-1}$ der ursprünglichen Länge. Die Koeffizienten der beiden neu entstandenen DFT-Teile entsprechen einmal den ursprünglichen Koeffizienten mit geraden (c_0, c_2, c_4, \dots) und einmal den ursprünglichen Koeffizienten mit ungeraden Indizes (c_1, c_3, c_5, \dots).

Satz 8.35 (Parseval-Gleichung): Zwischen den Funktionswerten y_j , $j = 0, \dots, N - 1$, und den Spektralkoeffizienten c_k , $k = 0, \dots, N - 1$, gilt folgende Gleichung:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |y_j|^2$$

3.3 Fourier-Transformation

Definition 8.37 (Cauchy-Hauptwert): Wenn für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ der Grenzwertes

$$(CHW) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^{+a} f(t) dt$$

existiert, dann heißt dieser der **Cauchy-Hauptwert** von $f(t)$.

Definition 8.39: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **Fourier-transformierbar** (F-transformierbar), wenn der Cauchy-Hauptwert

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = (CHW) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$\forall \omega \in \mathbb{R}$ existiert. Dann heißt $F(\omega)$ **Fourier-Transformierte** bzw. **Spektralfunktion** von $f(t)$. Die Zeitfunktion $f(t)$ liegt im **Original- oder Zeitbereich**, die Spektralfunktion $F(\omega)$ liegt im **Bild- oder Frequenzbereich**.

Die **inverse Fourier-Transformation** von $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ lautet:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} (CHW) \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

wenn das Integral als Cauchy-Hauptwert $\forall t \in \mathbb{R}$ existiert.

Definition 8.41 (absolut integrierbar): Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **absolut integrierbar**, wenn sie auf jedem endlichen Intervall stückweise stetig ist und für das uneigentliche Riemann-Integral gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Satz 8.47 (Umkehr- und Eindeutigkeitsatz): *Besitzt die Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ folgende Eigenschaften.*

- sie ist absolut integrierbar
- sie ist in jedem endlichen Intervall stückweise differenzierbar
- es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mittelwerteigenschaft:

$$f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2},$$

dann ist mit $f(t)$ auch $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ F -transformierbar, und es gilt $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2\pi}F(-\omega)\right\} = f(t)$$

3.4 Laplace-Transformation

Definition 8.51: Eine Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Laplace-transformierbar** (L-transformierbar), wenn das uneigentliche Integral

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

für ein $s \in \mathbb{R}$ konvergiert. $F(s)$ heißt dann die **Laplace-Transformierte** (oder kurz L-Transformierte) von $f(t)$. $F(s)$ nennt man auch die Bildfunktion von $f(t)$ und $f(t)$ die Urbildfunktion von $F(s)$. Dies wird auch mit $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ notiert.

Ein paar Laplace-Transformationspaare:

$\mathbf{f(t)}$	$\mathbf{F(s)} = \mathcal{L}\{\mathbf{f(t)}\}$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
$u(t - a)$	$\frac{1}{s}e^{-as}, \quad a \geq 0, s > 0$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}, \quad s > \alpha \in \mathbb{R}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$

Satz 8.53 (Existenz und Eindeutigkeitsatz der Laplace-Transformation): *Ist die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ auf jedem beschränkten Intervall stückweise stetig und besitzt $f(t)$ höchstens exponentielles Wachstum, das heißt, es gibt Konstanten $M, \sigma \in \mathbb{R}$, sodass $|f(t)| \leq Me^{\sigma t} \quad \forall t > 0$, dann gilt:*

- $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existiert $\forall s > \sigma$,
- das Integral $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ konvergiert für $s \geq s_0 > \sigma$ gleichmäßig,
- $f(t)$ ist bis auf die Funktionswerte an den Unstetigkeitsstellen durch $F(s)$ eindeutig bestimmt,
- $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$

Satz 8.54 (Rechenregeln): Seien $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Laplace-transformierbare Funktionen mit Laplace-Transformierten $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ und $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$. Es gelten dann die folgenden Rechenregeln:

- *Linearität:*

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

- *Streckung:*

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c \neq 0$$

- *Differentiation im Zeitbereich:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= sF(s) - f(0^+) \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+) \end{aligned}$$

- *Integration im Zeitbereich:*

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} F(s)$$

- *Differentiation im Bildbereich:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{tf(t)\} &= -\frac{d}{ds} F(s) \\ \mathcal{L}\{t^n f(t)\} &= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \end{aligned}$$

- *Integration im Bildbereich*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u) du$$

- *Verschiebung im Bildbereich*

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a), \quad a \in \mathbb{R}$$

- *Verschiebung im Zeitbereich (u(t)...Heaviside-Funktion)*

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = F(s)e^{-as}, \quad a \geq 0$$

- *Faltung im Zeitbereich:*

$$\begin{aligned} \text{Faltung: } (f * g)(t) &= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau \\ \mathcal{L}\{(f * g)(t)\} &= F(s)G(s) \end{aligned}$$

4 Numerische Mathematik

4.1 Approximation und Interpolation

Bei der Darstellung von Funktionen ist prinzipiell zwischen zwei Aufgabenstellungen zu unterscheiden, nämlich der **Approximation** und der **Interpolation** von Funktionen. Während es bei der Approximation darum geht, über eine **Minimalbedingung** eine möglichst gute Übereinstimmung zwischen vorgegebener Funktionen f und Ersatzfunktion p im gesamten Intervall I zu erreichen, wird die Interpolationsaufgabe über die **Inzidenzbedingung** $f(x_i) = p(x_i)$ für vorgegebene Argumente $x_i \in I$ formuliert. Die Darstellung einer Funktion f durch Approximation ist vor allem dann zweckmäßig, wenn viele Werte von f bekannt sind und damit zu rechnen ist, dass die einzelnen Funktionswerte mit Fehlern behaftet sind. Sind hingegen nur wenige Werte von f vorgegeben und kann man annehmen, dass diese exakt sind, so wird man f durch eine Funktion beschreiben, welche genau mit diesen Werten übereinstimmt.

4.1.1 Approximation mittels einer Ausgleichsgeraden

Sind von einer Funktion f endlich viele Wertepaare (x_i, y_i) mit $y_i = f(x_i), i = 1, \dots, n$, bekannt, kann ein Polynom p nach der **Methode der kleinsten Quadrate** derart bestimmt werden, dass die Quadratsumme

$$Q = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - p(x_i))^2$$

minimiert wird.

4.1.2 Allgemeiner Ansatz zur Interpolation mittels Polynomfunktion

Satz 9.11: *Zu $n+1$ Interpolationsstellen $(x_i, y_i), i = 0, 1, \dots, n$, mit paarweise verschiedenen Stützstellen x_i gibt es genau ein Interpolationspolynom p , dessen Grad höchstens n beträgt.*

4.1.3 Interpolation nach Lagrange

Das nach Satz 9.11 bestimmte Interpolationspolynom kann auch explizit, ohne eine Rechnung durchführen zu müssen, angegeben werden. Dazu betrachtet man die Polynome

$$L_i(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

für $i = 0, 1, \dots, n$ und bildet damit das **Lagrange'sches Interpolationspolynom**

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x).$$

4.1.4 Interpolation nach Newton

Das **Newton'sche Interpolationspolynom** hat die Form

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}).$$

Kommt ein Stützpunkt hinzu, wird - im Gegensatz zum Lagrange'schen Polynom - der Newton'sche Ansatz nur um einen Summanden erweitert und der Koeffizient b_{n+1} neu berechnet, alle anderen b_i bleiben unverändert.

4.2 Numerische Integration

4.2.1 Sehnentrapezregel

$$Q^{ST}(a, b) = \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Wird eine Funktion in jedem Teilintervall linear interpoliert, d.h. durch eine Sehne ersetzt, dann entspricht der Wert von $Q^{ST}(a, b)$ gerade der Summe der Flächen aller Sehnentrapeze, welche durch die x -Achse, die beiden Ordinaten in x_{i-1} und x_i sowie die Sekante durch (x_{i-1}, y_{i-1}) und (x_i, y_i) begrenzt sind. Auf Grund dieser Interpretation ist auch klar, dass die Sehnentrapezformel im Fall eines linearen Integranden f mit dem exakten Wert des Integral übereinstimmt. Ist f zweimal stetig differenzierbar, kann der Integrationsfehler durch

$$R^{ST}(a, b) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi)$$

mit einem geeigneten $\xi \in [a, b]$ angegeben werden und hat somit die Fehlerordnung $O(h^2)$ für $h \rightarrow 0$. Eine Halbierung der Schrittweite führt also zu einer Verringerung des Fehlers auf etwa ein Viertel.

4.2.2 Kepler'sche Fassregel

Im nächsten Schritt wird der Integrand $f(x)$ nicht durch eine lineare, sondern durch eine quadratische Funktion, d.h. eine Parabel approximiert. Man erhält die so genannte **Kepler'sche Fassregel**

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)).$$

4.2.3 Simpson'sche Regel

Wiederholte Anwendung der Kepler'schen Fassregel zur Verbesserung der Genauigkeit führt auf die **Simpson'sche Regel**

$$Q^{SI}(a, b) = \frac{b-a}{6n} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n})$$

Wie man zeigen kann, beträgt das zugehörige Restglied (unter passenden Voraussetzungen)

$$R^{SI}(a, b) = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}(\xi).$$

Der Verfahrensfehler bei der Simpson'schen Regel ist also von der Ordnung $O(h^4)$.

4.3 Simulation von Differentialgleichungen

Wir betrachten Differentialgleichungen der Form: $y' = f(x, y)$

4.3.1 Euler'sches Polygonzugverfahren

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i) \end{aligned}$$

Bei jedem Schritt tritt ein **lokaler Verfahrensfehler** der Ordnung $O(h^2)$ auf. Die Summe der lokalen Verfahrensfehler der einzelnen Schritte ergibt den **globalen Verfahrensfehler**, dessen Größenordnung $O(h)$ beträgt.

4.3.2 Verbessertes Euler'sches Polygonzugverfahren

$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left(f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)) \right)$$

Das verbesserte Euler'sche Polygonzugverfahren hat einen globalen Verfahrensfehler der Ordnung $O(h^2)$ für $h \rightarrow 0$. Dieses Verfahren kann noch verbessert werden, indem man die Näherungswerte y_i in jedem Schritt iterativ verbessert. Dieser Ansatz führt auf ein Verfahren aus der Klasse der **Prädiktor-Korrektor-Verfahren**.

4.3.3 Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

Eine Verbesserung zum verbesserten Euler'schen Polygonzugverfahren erhält man durch Anwendung der Kepler'schen Fassregel. Dieser Ansatz führt auf

$$x_{i+1} = x_i + h$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

mit

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$
$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$
$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right)$$
$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

Das Verfahren zählt zur Gruppe der Runge-Kutta-Verfahren und wird als klassisches Runge-Kutta-Verfahren bezeichnet. Sein globaler Verfahrensfehler besitzt die Größenordnung $O(h^4)$.

Bei jedem Verfahren sind sowohl der Verfahrensfehler wie der Rechnungsfehler von Bedeutung. Beide sind Funktionen der Schrittweite h . Große Werte von h haben zwar kurze Rechenzeiten, im Allgemeinen aber auch große Verfahrensfehler zur Folge. Mit fallender Schrittweite nimmt der Verfahrensfehler wohl ab, dafür aber steigen dann die Rechenzeit und die Rundungsfehler. In der Praxis orientiert man sich vielfach an der so genannten **Schrittkenzahl** $K = h\lambda$, wo h die Schrittweite und λ eine Lipschitzkonstante für die Funktion f bezeichnet, und wählt h derart, dass $0.05 \leq K \leq 0.2$ gilt. Man spricht dann von einem Verfahren mit **Schrittweitensteuerung**.