### Mathematik für Informatiker 1 - UE 118.150

Ausgearbeitete Übungsbeispiele Woche 04/2006 Für Übung Prof. Gittenberger, Mi. 13:00-14:00

Markus Nemetz, e9604652, markus.nemetz@tuwien.ac.at

## Beispiel 476

### **Angabe**

Bildet  $\mathbb{R}^2$  mit den angegebenen Operationen einen Vektorraum über  $\mathbb{R}$ ?

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0), \lambda(x_1, x_2) = (\lambda * x_1, 0)$$

### Theoretische Grundlagen

Ein Vektorraum V über einem Körper K ist im wesentlichen eine Menge, deren Elemente man addieren und mit den Elementen von K multiplizieren kann. Die Elemente von V heißen Vektoren; die Elemente von K werden im Zusammenhang mit dem Vektorraum Skalare genannt.

**Definition**: Sei K ein Körper. Eine Menge V heißt Vektorraum über K, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- 1.  $\langle V, +, 0 \rangle$  ist eine abelsche Gruppe
- 2. es ist eine Verknüpfung  $\cdot: K \times V \to V$  definiert mit folgenden Eigenschaften:
  - ist 1 das Einselement von K, so gilt  $\forall v \in V : 1 \cdot v = v$
  - für alle  $j, k \in K$  und  $v \in V$  gilt

$$-(j+k) \cdot v = j \cdot v + k \cdot v \text{ und}$$
  
$$-(j \cdot k) \cdot v = j \cdot (k \cdot v),$$

•  $\forall k \in K \text{ und } u, v \in V \text{ gilt: } k \cdot (u + v) = k \cdot u + k \cdot v$ 

Zur Abelschen Gruppe: Eine Gruppe ist zunächst eine Menge M, auf der eine Verknüpfung o definiert ist. Eine Verknüpfung ist eine Abbildung von  $M \times M$  in M. Es müssen darüber hinaus drei Eigenschaften erfüllt sein, diese heißen die Gruppenaxiome:

- 1. die Verknüpfung ist assoziativ
- 2. es gibt ein neutrales Element
- 3. jedes Element hat ein inverses Element

Bei einer abelschen Gruppe gilt zusätzlich:

• die Verknüpfung ist kommutativ.

Wir verwenden dasselbe Zeichen + für die Addition in K wie auch für die Addition in V, ebenso dasselbe Zeichen · für die Multiplikation in K wie auch für die Multiplikation zwischen K und V. Auch die 0 bezeichnet einerseits das Nullelement  $0 \in K$  und andererseits den Nullvektor  $0 \in V$ .

Beispiel: Die Menge der Paare (a,b) mit  $a,b\in K$  ist ein Vektorraum über K, d.h.  $V=K\times K$ .

Hierbei sind die Addition in V und die Multiplikation zwischen K und V komponentenweise definiert:

- (a,b) + (c,d) = (a+c,b+d) und
- $k \cdot (a, b) = (k \cdot a, k \cdot b)$

 $\forall (a,b), (c,d) \in V, k \in K$ . Der Nullvektor ist (0,0).

Allgemein ist auch  $K_n$  ein Vektorraum über K, also z.B. reelle Zahlen über reelle Zahlen oder boolesche Mengen über boolesche Menge.

Ferner ist die Menge der Polynome mit Koeffizienten aus K ein Vektorraum über K.

Die Menge aller Abbildungen von einer nichtleeren Menge  $M \in K$  ist ein Vektorraum über K.

Satz: (Rechenregeln in V) Es gilt  $\forall v \in V, k \in K$ :

- $0 \cdot v = 0$
- $k \cdot 0 = 0$
- $\bullet \ (-1) \cdot v = -v$

Wenn eine Teilmenge U eines Vektorraums V für sich genommen die Vektorraumaxiome erfüllt, bildet sie einen Teilraum von V. Dies ist bereits dann der Fall, wenn sie hinsichtlich der Addition von Vektoren und Multiplikation mit Elementen des Körpers abgeschlossen ist.

**Definition:** Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Eine Teilmenge U enthalten V heißt Teilraum von V, wenn gilt

- $\bullet \ \ u+v \in U \qquad \forall u,v \in U$
- $k \cdot u \in U$   $\forall u \in U, k \in K$

Beispiel: Die Menge aller Paare (a,0) bildet einen Teilraum von reelle Zahlen. Die Menge aller Polynome vom Grad  $\leq 3$  ist ein Teilraum des Vektorraums aller Polynome.

**Definition:** Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und T eine Teilmenge von V. Ein Vektor u heißt Linearkombination von T, wenn es endliche viele Vektoren  $v_1, \ldots, v_m \in T$  und Koeffizienten  $k_1, \cdot, k_m$   $m \in \mathbf{N}$  gibt mit  $u = k_1 \cdot v_1 + \cdots + k_m \cdot v_m$ .

### Lösung

Wir betrachten einmal, ob  $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$  überhaupt eine kommutative Gruppe ist.

Abgeschlossenheit ist gegeben, weil das Ergebnis wieder einen Vektor liefert, egal welche Werte man für x und y einsetzt.

Assoziativität:  $[(x_1, x_2) + (y_1, y_2)] + (z_1, z_2) = (y_1, y_2) + [(x_1, x_2) + (z_1, z_2)] = (x_1 + y_1 + z_1, 0)$  ist auch erfüllt, weil die Addition assoziativ ist und das zweite Element im Vektor immer auf 0 abgebildet wird  $\rightarrow$  Gruppoid.

Neutrales Element: d.h. x + e = e + x = x - ist jedoch nicht immer vorhanden, z.B. bei (x1, x2) + (e1, e2) = (e1, e2) + (x1, x2) = (x1, x2) nicht, aber bei  $(x1, 0) + (0, n) = (x1, 0) \Rightarrow (x1, x2) + (0, n) \neq (x1 + 0, 0)$ 

Auch das folgende Gesetz ist nicht erfüllt:  $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ , denn  $1 \cdot x = (x_1, 0) \neq x((x_1, x_2))!$ 

Schlussfolgerung: V ist keine kommuative Gruppe daher bildet die Operation keinen Vektorraum!

# Beispiel 513

#### **Angabe**

Untersuchen Sie, ob die angegebene Abbildung A von  $\mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^2$  eine linare Abbildung ist!

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 + 5x_2 \\ x_1 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

### Theoretische Grundlagen

In  $\mathbb{R}^n$  sind lineare Abbildungen die Zuordnungen  $x \to A \cdot x \ (x \in \mathbb{R}^n)$ . Allgemein gesagt:

**Lineare Abbildungen:** Seien V, W Vektorräume über  $\mathbf{R}$ . Mit einer Abbildung  $f: V \to W$  wird jedem Vektor  $v \in V$  ein eindeutig bestimmter Vektor  $w = f(v) \in W$ , das sogenannte f-Bild von v zugeordnet.

**Definition:** Eine Abbildung  $f: V \to W$  heisst **linear** wenn gilt:

- **1.** f ist homogen, d.h.  $f(\alpha v) = \alpha f(v)$   $\forall \alpha \in \mathbf{R}, v \in V$
- **2.** f ist additiv, d.h. f(u+v) = f(u) + f(v)  $\forall u, v \in V$

Lineare Abbildungen werden auch wie folgt genannt: lineare Transformation, linearer Operator, Vektorraumhomomorphismus.

Zu den linearen Abbildungen zählt auch die Multplikation einer festen  $m \times n$ -Matrix A:

$$l: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, \qquad l(x) := Ax$$

### Lösung

### Überprüfung der Homogenität

Zu prüfen ist ob gilt: f ist homogen, d.h.  $f(\alpha v) = \alpha f(v)$   $\forall \alpha \in \mathbf{R}, v \in V$ 

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = A(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}) + A(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix})$$

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = A(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}) + A(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix})$$

Ausführung der Funktion A:

$$\begin{pmatrix} 7*(a_1+b_1)+5*(a_2+b_2) \\ a_1+b_1-2*(a_3+b_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7*a_1+5*a_2 \\ a_1-2*a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7*b_1+5*b_2 \\ b_1-2*b_3 \end{pmatrix}$$

Ausführung der Addition auf der rechten Seite:

$$\begin{pmatrix} 7*(a_1+b_1)+5*(a_2+b_2) \\ a_1+b_1-2*(a_3+b_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7*a_1+5*a_2+7*b_1+5*b_2 \\ a_1-2*a_3+b_1-2*b_3 \end{pmatrix}$$

Vereinfachung der rechten Seite:

$$\begin{pmatrix} 7*(a_1+b_1)+5*(a_2+b_2) \\ a_1+b_1-2*(a_3+b_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7*(a_1+b_1)+5*(a_2+b_2) \\ a_1+b_1-2*(a_3+b_3) \end{pmatrix}$$

Somit ist also die Homogenität gegeben!

### Überprüfung der Additivität

Zu prüfen ist, ob gilt: f ist additiv, d.h. f(u+v) = f(u) + f(v)  $\forall u, v \in V$  (Betrachtung der Multiplikation mit einem Skalar):

$$\lambda A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} 7a_1 - 5a_2 \\ a_1 - 2a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda 7a_1 - \lambda 5a_2 \\ \lambda a_1 - \lambda 2a_3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} 7a_1 - 5a_2 \\ a_1 - 2a_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 7a_1 - 5a_2 \\ a_1 - 2a_3 \end{pmatrix}$$

Die Ausdrücke auf beiden Seiten sind äquivalent!

### Schlussfolgerung

Es liegt eine lineare Abbildung vor!

### Anmerkungen v. Prof. Gittenberger

Lineare Abbildungen sind ein wichtiges Gebiet, weil sie es erlauben, nichtlineare Zusammenhänge unter bestimmten Umständen durch lineare abbildungen zu approximieren. Dabei kann der Sachverhalt auch als Matrizenmultiplikation dargestellt werden!

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

# Beispiel 324

### **Angabe**

Man untersuche nachstehende Folgen im Hinblick auf Monotonie, Beschränktheit und bestimme gegebenenfalls mit Hilfe der bekannten Rechenregeln für Grenzwerte den Grenzwert  $\lim a_n$ .

$$a_0 = 4$$
  $a_{n+1} = \sqrt{6a_n - 9}$   $n \ge 0$ 

### Konvergenz und Grenzwert

Unter Konvergenz versteht man in der Mathematik die Existenz eines Grenzwertes. Das Gegenteil wird als Divergenz bezeichnet.

Eine Folge konvergiert gegen einen Grenzwert a, wenn in jeder  $\epsilon$ -Umgebung von a fast alle (alle bis auf endlich viele) Folgenglieder liegen.

In der Mathematik heißt eine Funktion oder Folge, die nur größer wird oder konstant ist (und niemals fällt), monoton steigend (oder monoton wachsend bzw. isoton). Entsprechend heißt eine Funktion oder Folge monoton fallend (antiton), wenn sie nur kleiner wird oder konstant bleibt.

Streng monoton steigend (bzw. streng monoton fallend) sind Funktionen oder Folgen, die nur größer (kleiner) werden, jedoch nicht konstant sind.

### Lösung

Wir untersuchen die Ergebnisse für Werte  $a_0$  bis  $a_5$  mittels MATLAB:

$a_0$	4
$a_1$	3.8730
$a_2$	3.7733
$a_3$	3.6932
$a_4$	3.6276
$a_5$	3.5729

Diese Werte wurden mit MATLAB auf folgende Art berechnet:

$$A = 4;$$
  
for  $n = 1:5$   
 $A = (6*A - 9);$   
 $A$ 

Für  $a_{1000}$  ergab sich mit Matlab der Wert: 3.0060 - auf folgende Art berechnet:

$$A = 4;$$
  
for  $n = 1:1000$   
 $A = (6*A - 9);$   
end  
 $A$ 

Annahme, dass streng monoton fallende Folge vorliegt, denn es scheint zu gelten:  $a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots$ !

Untersuche daher die Ungleichung  $a_{n+1} \leq a_n$  - diese können wir voraussetzen - jedoch um zu beweisen, ob wirklich jedes  $a_{n+1}$  kleiner als jedes  $a_n$  ist, müssen wir mittels vollständiger Induktion den Sachverhalt  $a_{n+2} \leq a_{n+1}$  nachweisen, und dieser ist:

$$\sqrt{6a_n - 9} \ge \sqrt{6 \cdot \sqrt{6a_n - 9} - 9}$$
$$6a_n - 9 \ge 6 \cdot \sqrt{6a_n - 9} - 9$$

Obenstehender Ausdruck ist zutreffend und es ist auch erlaubt, die Wurzeln 'wegzuquadrieren', da die Wurzelfunktion eine monotone Funktion ist  $(\forall x, y : x < y = f(x) < f(y))$ .

Wie wir mit MATLAB bereits berechneten, scheint 3 ein Grenzwert zu sein. Nachzuweisen ist daher der Sachverhalt:  $a_n \ge 3$ ! Wir schreiben also:

$$\sqrt{6a_n - 9} = \sqrt{6 \cdot \sqrt{6a_n - 9} - 9}$$

$$6a_n - 9 = 6 \cdot \sqrt{6a_n - 9} - 9$$

$$a_n = \sqrt{6a_n - 9}$$

$$a_n^2 = 6a_n - 9$$

$$a_n^2 - 6a_n + 9 = 0$$

$$(a_n - 3) \cdot (a_n - 3) = 0$$

Das Infimum ist somit 3!

## Beispiel 334

### **Angabe**

Man untersuche die Folge  $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$  auf Konvergenz und bestimme gegebenfalls den Grenzwert.

$$a_n = \frac{3 \cdot n^2 - 4 \cdot n^{\frac{11}{3}} + n^{-1}}{2 \cdot n^4 + 2 \cdot n^{-\frac{3}{2}} + 1}$$

### Lösung

Untersuchung der Konvergenz (mittels MATLAB):

a = 1	0
a=2	-1.1362
a = 3	-1.2077
a=4	-1.1628
a = 5	-1.1084
a = 1000	-0.2000
a = 100000	-0.0431

Vermutung, Ausdruck konvergiert gegen 0.

Weitere Vermutung: Der Zähler besitzt in einem exponentialen Teilausdruck einen als Maximum niedrigeren Exponenten als der Nenner ( $n^2$  im Zähler,  $n^4$  im Nenner).

$$\lim_{n \to \infty} = \frac{3 \cdot n^2 - 4 \cdot n^{\frac{11}{3}} + n^{-1}}{2 \cdot n^4 + 2 \cdot n^{-\frac{3}{2}} + 1} \underbrace{=}_{\cdot \frac{1}{n^4}} \frac{\frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{n^5}}{2 + \frac{2}{n^{\frac{11}{2}}} + \frac{1}{n^4}}$$

Untersuchung des Zählers: 
$$\underbrace{\frac{3}{n^2}}_{\rightarrow 0} - \underbrace{\frac{4}{n^{\frac{1}{3}}}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{n^5}}_{\rightarrow \infty} \Rightarrow 0$$
Untersuchung des Nenners:  $2 + \underbrace{\frac{2}{n^{\frac{11}{2}}}}_{\rightarrow \infty} + \underbrace{\frac{1}{n^4}}_{\rightarrow 0} \Rightarrow 2$ 

Untersuchung des Nenners: 
$$2 + \underbrace{\frac{2}{n^{\frac{11}{2}}}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{n^4}}_{\rightarrow 0} \Rightarrow 2$$

Daher: Grenzwert 0.