Theoretische Informatik und Logik — VU 4.0 VO-Prüfung WS 2010/2011 20. Jänner 2011				
Kennzahl	Matrikelnummer	Familienname **Lösung**	Vorname	Gruppe **A**

1.) Sei $G = \langle \{S, A, B\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, P, S\rangle$, wobei

$$P = \{S \to A\underline{\mathtt{b}}B, \quad A \to \underline{\mathtt{a}}A \mid \varepsilon, \quad B \to \underline{\mathtt{a}}B \mid \underline{\mathtt{c}}B \mid \varepsilon\}.$$

a) Ist G regulär, kontextfrei und/oder monoton? Begründen Sie Ihre Antwort. **(3 Punkte)**

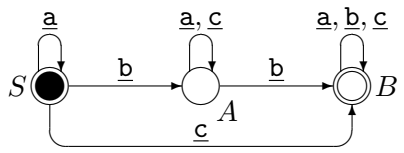
Lösung: G ist eine kontextfreie Grammatik, da alle Produktionen in P die Form $A \to \beta$ haben, wobei $A \in N$ und $\beta \in (N \cup T)^*$. Wegen der Produktion $S \to A\underline{\mathtt{b}}B$ ist G nicht regulär, wegen z.B. $A \to \varepsilon$ ist G nicht monoton, nachdem A auch auf der rechten Seite einer Produktion vorkommt.

b) Geben Sie die von G erzeugte reguläre Sprache L an. **(2 Punkte)**

Lösung: $L = \{\underline{\mathtt{a}}\}^*\{\underline{\mathtt{b}}\}\{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{c}}\}^*$

c) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, welcher $\overline{L}$ (also das Komplement von L, wobei $\Sigma = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}$) akzeptiert. (Graphische Darstellung genügt.) **(5 Punkte)**

Lösung:



2.) Sei $\Sigma = \{\underline{0}\}$. Die Sprache A ist folgendermaßen definiert.

- $\varepsilon \in A$.
- Ist $a \in \Sigma$ und $w \in A$, so ist auch $waa \in A$.

a) Ist A regulär, kontextfrei und/oder monoton? Begründen Sie Ihre Antwort. **(3 Punkte)**

Lösung: $A = \{\underline{0}\underline{0}\}^*$ kann z.B. als reguläre Menge dargestellt werden und ist somit regulär. Aufgrund der Chomsky Hierarchie ist A damit auch kontextfrei und monoton.

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, welche A erzeugt. **(2 Punkte)**

Lösung: z.B. $G = \langle \{S\}, \{\underline{0}\}, \{S \to S\underline{0}\underline{0} \mid \varepsilon\}, S\rangle$

c) Transformieren Sie die unter b) erhaltene Grammatik G in Chomsky Normalform und begründen Sie dabei die wesentlichen Schritte. **(5 Punkte)**

Lösung:

- **Schritt 1 und 2** (Elimination nutzloser Produktionen): Es gibt in G keine nutzlosen Produktionen, daher ist $G_1 = G_2 = G$ und es gilt offensichtlich $\mathcal{L}(G_1) = \mathcal{L}(G_2) = \mathcal{L}(G)$.
- **Schritt 3** (Elimination der ε-Produktionen):

$$\begin{aligned} G_3 &= \langle \{S\}, \{\underline{0}\}, P_3, S\rangle \text{ mit} \\ P_3 &= \{S \to S\underline{0}\underline{0} \mid \underline{0}\underline{0}\} \end{aligned}$$

  Und es gilt: $\mathcal{L}(G_3) = \mathcal{L}(G) - \{\varepsilon\}$.
- **Schritt 4** (Elimination der Einheits-Produktionen): G_3 ist bereits reduziert, also $G_4 = G_3$ und $\mathcal{L}(G_4) = \mathcal{L}(G) - \{\varepsilon\}$.
- **CNF**:
  - Terminalsymbole ersetzen:

$$P'' = \{S \to SX_{\underline{0}}X_{\underline{0}} \mid X_{\underline{0}}X_{\underline{0}}, \quad X_{\underline{0}} \to \underline{0}\}$$

  - Produktionen mit mehr als zwei Nonterminalen auf der rechten Seite ersetzen:

$$S \to SX_{\underline{0}}X_{\underline{0}} \quad \text{durch} \quad S \to SY_1, \quad Y_1 \to X_{\underline{0}}X_{\underline{0}}$$

  - Nachdem $\varepsilon \in A$ fügen wir noch ein neues Startsymbol S' mit entsprechenden Produktionen hinzu, um die zu G äquivalente Grammatik G' in Chomsky Normalform zu erhalten:

$$\begin{aligned} G' &= \langle \quad \{S', S, X_{\underline{0}}, Y_1\}, \{\underline{0}\}, P', S' \quad \rangle \text{ mit} \\ P' &= \{ \quad S' \to SY_1 \mid X_{\underline{0}}X_{\underline{0}} \mid \varepsilon, \\ &\qquad S \to SY_1 \mid X_{\underline{0}}X_{\underline{0}}, \\ &\qquad X_{\underline{0}} \to \underline{0}, \\ &\qquad Y_1 \to X_{\underline{0}}X_{\underline{0}} \quad \} \end{aligned}$$

3.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für richtige Antworten mit richtiger Begründung, einen Punkt für richtige Antworten mit leicht mangelhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte Begründungen.)

a) Ist F eine endliche und R eine reguläre Menge, dann ist $F \cup R$ eine reguläre Menge.

Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

Lösung: Reguläre Mengen sind unter Vereinigung abgeschlossen, und jede endlich Menge ist laut Definition regulär, da sie ja mittels Vereinigung aus einelementigen Mengen gebildet werden kann.

b) Es gibt Sprachen L, für die gilt: $L^* = L^+$.

Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

Lösung: Gilt $\varepsilon \in L$, so gilt auch $L^* = L^+$.

c) Die Grammatik $G = \langle \{S, A\}, \{\underline{\mathtt{a}}\}, \{S \to A \mid \underline{\mathtt{a}}, A \to \underline{\mathtt{a}}\}, S\rangle$ ist mehrdeutig.

Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

Lösung: Für das Wort $\underline{\mathtt{a}}$ existieren zwei verschiedene Linksableitungen: $S \Rightarrow A \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}$ bzw. $S \Rightarrow \underline{\mathtt{a}}$.

d) Ist das Wortproblem für eine Sprache L entscheidbar, so ist das Komplement von L nicht rekursiv aufzählbar.

Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

Lösung: Das Wortproblem für eine Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn L rekursiv ist, also wenn das Komplement von L rekursiv aufzählbar ist.

e) Es gibt keinen Homomorphismus, der die Sprache $\{\underline{0}^{2n}\underline{1}^n \mid n \geq 0\}$ auf die Sprache $\{\underline{0}^{123n} \mid n \geq 0\}$ abbildet.

Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

Lösung: z.B. $h : \{\underline{0}, \underline{1}\}^* \longrightarrow \{\underline{0}\}^*$ mit $h(\underline{0}) = \varepsilon, h(\underline{1}) = \underline{0}^{123}$.

(10 Punkte)

4.) Gegeben sei das nachstehend beschriebene logische Puzzle:

Die 3 TU-Angehörigen A, B und C seien *Tanja*, *Magdalena* und *Sabine* (in irgendeiner Reihenfolge). Über die 3 gibt es folgendes Faktenwissen:

(a) A ist *Tanja* oder B ist *Magdalena*.

(b) B ist *Tanja* oder C ist *Magdalena*.

(c) B ist *Magdalena* oder B ist *Sabine*.

Frage: Wer sind A, B und C konkret? Gibt es überhaupt eine Lösung? Falls ja, gibt es genau eine Lösung oder sogar mehrere?

Um die obigen Fragen zu beantworten, formalisieren sie das gegebene Faktenwissen über A, B und C, *Tanja*, *Magdalena* und *Sabine* in Aussagenlogik und verwenden Sie diese Formalisierung, um die Fragen zu beantworten. Falls Sie zusätzliches implizites Wissen bei Ihrer Argumentation benötigen, so formulieren Sie auch dieses Wissen in Aussagenlogik. Ein Beispiel für derartiges Zusatzwissen wäre etwa: Wenn es sich bei A um *Tanja* handelt, so ist A weder *Magdalena* noch *Sabine*.

Lösung: Wir modellieren das Faktenwissen wie folgt. Die aussagenlogischen Variablen XY, wobei $X \in \{A, B, C\}$ und $Y \in \{\mathit{Magdalena}, \mathit{Sabine}, \mathit{Tanja}\}$ ist, beschreiben, dass die Person X konkret Y ist. Also bedeutet etwa BM, dass es sich bei der Person B um *Magdalena* handelt.

Damit können wir (a)-(c) wie folgt formalisieren:

(a) $AT \vee BM$.

(b) $BT \vee CM$.

(c) $BM \vee BS$.

Wir lösen das Puzzle durch Fallunterscheidung und konstruieren/verwenden dabei zusätzlich benötigtes implizites Faktenwissen.

Wir behandeln und rechtfertigen das implizite (durch die Aufgabenstellung gegebene) Zusatzwissen separat, verwenden es aber bereits in der folgenden Argumentation:

Zunächst analysieren wir (a)-(c) durch Fallunterscheidung: Sei I eine beliebige Variablenbelegung.

– **Fall 1**: $I(BS) = \mathbf{f}$. Daraus folgt mit (c), dass $I(BM) = \mathbf{t}$ (*) gelten muss. Folglich gilt wegen (f) insbesondere $I(CM) = \mathbf{f}$, also $I(BT) = \mathbf{t}$ wegen (b). Das aber steht (wegen (d)) im Widerspruch zu (*).

– **Fall 2**: $I(BS) = \mathbf{t}$. Das impliziert insbesondere $I(BT) = \mathbf{f}$ (mit (d) für B) und wegen (b) daher $I(CM) = \mathbf{t}$. Letzteres liefert $I(BM) = \mathbf{f}$ (mit (f) für *Magdalena* statt *Tanja*), also schließlich $I(AT) = \mathbf{t}$ wegen (a). Das bedeutet, in diesem Fall gibt es genau eine Lösung.

Da die Fallunterscheidung vollständig war, gibt es insgesamt also genau eine Lösung des Puzzles, nämlich I mit $I(AT) = I(BS) = I(CM) = \mathbf{t}$, d.h. A ist *Tanja*, B ist *Sabine* und C ist *Magdalena*.

Eine Lösung des Puzzles ist eine Variablenbelegung, die (a), (b) und (c) wahr macht und gleichzeitig eine ganze Reihe weiterer (implizit spezifizierter) Eigenschaften erfüllt. Da A, B und C sowie Magdalena, Sabine und Tanja jeweils paarweise verschiedene Personen sind, gelten natürlich Eigenschaften wie

(d) $I(AT) = \mathbf{t} \implies I(AM) = I(AS) = \mathbf{f}$ (und analog für B, C).

(e) $I(AT) \vee I(AM) \vee I(AS) = \mathbf{t}$ (und analog auch für B, C).

(f) $I(AT) = \mathbf{t} \implies I(BT) = I(CT) = \mathbf{f}$ (und analog für die anderen Kombinationen).

(10 Punkte)

5.) Gegeben seien die prädikatenlogischen Formeln

$$F_1\colon P(a,b), \quad F_2\colon (\forall x)(\forall y)\,[\,P(x,y) \supset P(y,f(x))] \quad \text{und} \quad G\colon P(f(a),f(b))\,.$$

a) Zeigen Sie, dass G eine logische Konsequenz von F_1 und F_2 ist, d.h. dass gilt: $F_1, F_2 \models G$. **(6 Punkte)**

b) Weisen Sie nach, dass F_2 keine Tautologie ist. **(4 Punkte)**

Lösung:

– Mit dem Deduktionstheorem gilt: $F_1, F_2 \models G$ gdw. $F := (F_1 \wedge F_2) \supset G$ gültig. Wir beweisen die Gültigkeit von F mittels Resolution. Transformation von $\neg F$ in Klauselform ergibt:

$$\neg F \sim \neg\,[\,\neg(F_1 \wedge F_2) \vee G\,] \sim F_1 \wedge F_2 \wedge \neg G\,.$$

Folglich erhalten wir die Klauselform

$$cl(\neg F) = \{\,\{P(a,b)\},\ \{\neg P(x,y), P(y,f(x))\},\ \{\neg P(f(a),f(b))\}\,.$$

Resolution liefert

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{P(a,b)\} \quad \{\neg P(x,y), P(y,f(x))\}}{\{P(b,f(a))\}}\,\sigma_1 \quad \{\neg P(x,y), P(y,f(x))\}}{\{P(f(a),f(b))\}}\,\sigma_2 \quad \{\neg P(f(a),f(b))\}}{\emptyset}\,\sigma_3$$

mit den jeweiligen mgu's für die Resolutionsschritte $\sigma_1 = \{x \leftarrow a, y \leftarrow b\}$, $\sigma_2 = \{x \leftarrow b, y \leftarrow f(a)\}$ und $\sigma_3 = id = \emptyset$. Da wir mit der leeren Klausel einen Widerspruch gefunden haben, ist die ursprüngliche Formel F gültig.

– Wir zeigen, dass F_2 allein jedoch nicht gültig ist, indem wir ein Gegenbeispiel dafür angeben, nämlich die Interpretation in den natürlichen Zahlen $\mathcal{I} = \langle \mathbb{N}, \Phi, I \rangle$ mit $\Phi(P) =<$ und $\Phi(f) = id$ (i.e., $\Phi(f)(m) = m$ für alle $m \in \omega$). Dann gilt:

$$\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{I}, F_2) = \mathbf{t} \iff \text{Für alle } m, n \in \omega \colon m < n\,,$$

was offensichtlich nicht stimmt.

Ein alternatives Gegenbeispiel wäre die 2-elementige Interpretation $\mathcal{J}$ mit domain $D = \{a, b\}$ und $\Phi(P) = \{(a, b)\}$, $\Phi(f)(d) = d$ für $d \in D$. Dann gilt ebenfalls

$$\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J}_2, F) = \mathbf{t} \iff \text{Für alle } m, n \in \omega \supset (\exists x) < n \ :$$

Beachten Sie, dass auch andere Gegenbeispiele hier möglich sind (allerdings kein 1-elementiges!).

6.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für richtige Antworten mit richtiger Begründung, einen Punkt für richtige Antworten mit leicht mangelhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte Begründungen.)

a) Es existiert ein uniform terminierender Algorithmus, der bei Eingabe einer prädikatenlogischen Formel "JA" sagt und anhält, falls sie gültig ist, und spätestens nach exponentieller Zeit anhält und "Nein" sagt, falls die Formel nicht gültig ist.

Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

Lösung: Ansonsten wäre die Gültigkeit prädikatenlogischen Formeln entscheidbar, was aber nicht der Fall ist.

b) Die Menge aller erfüllbaren aussagenlogischen Formeln ist rekursiv aufzählbar.

Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

Lösung: Erfüllbarkeit aussagenlogischer Formeln ist sogar entscheidbar (etwa mit einer Wahrheitstafel). Also können alle erfüllbaren aussagenlogischen Formeln auch rekursiv aufgezählt werden.

c) Die Klauselmenge $K = \{\, \{P(f(a))\}, \{\neg P(f(x)), P(x)\} \,\}$ ist widerlegbar, d.h. aus K ist (mittels Robinson-Resolution) die leere Klausel herleitbar.

Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

Lösung: Es git nur einzige Resolvente aus den beiden Klauseln, nämlich $\{P(a)\}$, und diese führt zu keinen weiteren Resolutionsmöglichkeiten. Folglich ist die leere Klausel nicht herleitbar.

d) Die Terme $f(x, x)$ und $f(h(y), y)$ sind miteinander unifizierbar.

Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

Lösung: Falls ja, etwa mit mgu σ, dann würde gelten: $\sigma(x) = \sigma(h(y))$ sowie $\sigma(x) = y$ (mit der Dekomp.regel), also $\sigma(h(y)) = \sigma(y)$. Letzteres kann aber wegen der *occurs check*-Regel nie gelten! Also sind die beiden Terme nicht unifizierbar.

e) Die prädikatenlogischen Formeln $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ und $(\forall y)(\exists x)P(y, x)$ sind logisch äquivalent.

Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

Lösung: Alle Formeln, die durch Umbenennung gebundener Variablen (hier: x durch y und y durch x) auseinander hervorgehen, sind zueinander logisch äquivalent.

(10 Punkte)

Theoretische Informatik und Logik — VU 4.0 VO-Prüfung WS 2010/2011 20. Jänner 2011				
Kennzahl	Matrikelnummer	Familienname **Lösung**	Vorname	Gruppe **B**

1.) Sei $G = \langle \{S, A, B\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}, P, S\rangle$, wobei

$$P = \{S \to A\underline{\mathtt{c}}B, \quad A \to \underline{\mathtt{a}}A \mid \underline{\mathtt{b}}A \mid \varepsilon, \quad B \to \underline{\mathtt{a}}B \mid \varepsilon\}.$$

a) Ist G regulär, kontextfrei und/oder monoton? Begründen Sie Ihre Antwort. **(3 Punkte)**

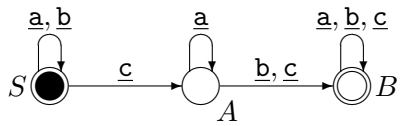
Lösung: G ist eine kontextfreie Grammatik, da alle Produktionen in P die Form $A \to \beta$ haben, wobei $A \in N$ und $\beta \in (N \cup T)^*$. Wegen der Produktion $S \to A\underline{\mathtt{c}}B$ ist G nicht regulär, wegen z.B. $A \to \varepsilon$ ist G nicht monoton, nachdem A auch auf der rechten Seite einer Produktion vorkommt.

b) Geben Sie die von G erzeugte reguläre Sprache L an. **(2 Punkte)**

Lösung: $L = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*\{\underline{\mathtt{c}}\}\{\underline{\mathtt{a}}\}^*$

c) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, welcher $\overline{L}$ (also das Komplement von L, wobei $\Sigma = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}\}$) akzeptiert. (Graphische Darstellung genügt.) **(5 Punkte)**

Lösung:



2.) Sei $\Sigma = \{\underline{1}\}$. Die Sprache B ist folgendermaßen definiert.

- $\varepsilon \in B$.
- Ist $a \in \Sigma$ und $w \in B$, so ist auch $awa \in B$.

a) Ist B regulär, kontextfrei und/oder monoton? Begründen Sie Ihre Antwort. **(3 Punkte)**

Lösung: $B = \{\underline{1}\,\underline{1}\}^*$ kann z.B. als reguläre Menge dargestellt werden und ist somit regulär. Aufgrund der Chomsky Hierarchie ist B damit auch kontextfrei und monoton.

b) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, welche B erzeugt. **(2 Punkte)**

Lösung: z.B. $G = \langle \{S\}, \{\underline{1}\}, \{S \to \underline{1}S\underline{1} \mid \varepsilon\}, S\rangle$

c) Transformieren Sie die unter b) erhaltene Grammatik G in Chomsky Normalform und begründen Sie dabei die wesentlichen Schritte. **(5 Punkte)**

Lösung:

- **Schritt 1 und 2** (Elimination nutzloser Produktionen): Es gibt in G keine nutzlosen Produktionen, daher ist $G_1 = G_2 = G$ und es gilt offensichtlich $\mathcal{L}(G_1) = \mathcal{L}(G_2) = \mathcal{L}(G)$.
- **Schritt 3** (Elimination der ε-Produktionen):

$$\begin{aligned} G_3 &= \langle \{S\}, \{\underline{1}\}, P_3, S\rangle \text{ mit} \\ P_3 &= \{S \to \underline{1}S\underline{1} \mid \underline{1}\,\underline{1}\} \end{aligned}$$

  Und es gilt: $\mathcal{L}(G_3) = \mathcal{L}(G) - \{\varepsilon\}$.
- **Schritt 4** (Elimination der Einheits-Produktionen): G_3 ist bereits reduziert, also $G_4 = G_3$ und $\mathcal{L}(G_4) = \mathcal{L}(G) - \{\varepsilon\}$.
- **CNF**:
  - Terminalsymbole ersetzen:

$$P'' = \{S \to X_{\underline{1}}SX_{\underline{1}} \mid X_{\underline{1}}X_{\underline{1}}, \quad X_{\underline{1}} \to \underline{1}\}$$

  - Produktionen mit mehr als zwei Nonterminalen auf der rechten Seite ersetzen:

$$S \to X_{\underline{1}}SX_{\underline{1}} \quad \text{durch} \quad S \to X_{\underline{1}}Y_1, \quad Y_1 \to SX_{\underline{1}}$$

  - Nachdem $\varepsilon \in B$ fügen wir noch ein neues Startsymbol S' mit entsprechenden Produktionen hinzu, um die zu G äquivalente Grammatik G' in Chomsky Normalform zu erhalten:

$$\begin{aligned} G' &= \langle \quad \{S', S, X_{\underline{1}}, Y_1\}, \{\underline{1}\}, P', S' \quad \rangle \text{ mit} \\ P' &= \{ \quad S' \to X_{\underline{1}}Y_1 \mid X_{\underline{1}}X_{\underline{1}} \mid \varepsilon, \\ &\qquad S \to X_{\underline{1}}Y_1 \mid X_{\underline{1}}X_{\underline{1}}, \\ &\qquad X_{\underline{1}} \to \underline{1}, \\ &\qquad Y_1 \to SX_{\underline{1}} \quad \} \end{aligned}$$

3.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für richtige Antworten mit richtiger Begründung, einen Punkt für richtige Antworten mit leicht mangelhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte Begründungen.)

a) Jede Teilmenge einer regulären Sprache ist regulär.

Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

Lösung: Gegenbeispiel: $A = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*, B = \{\underline{\mathtt{a}}^n\underline{\mathtt{b}}^n \mid n \geq 0\}$. B ist eine Teilmenge der regulären Sprache A, aber selbst sicher nicht regulär.

b) Es gibt Mengen A, für die A^* endlich ist.

Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

Lösung: Es gibt allerdings nur zwei Mengen A, für die A^* endlich ist, nämlich $\{\}$ und $\{\varepsilon\}$.

c) Die von der Grammatik $G = \langle\{S, A\}, \{\underline{\mathtt{a}}\}, \{S \to A \mid \underline{\mathtt{a}}, A \to \underline{\mathtt{a}}\}, S\rangle$ erzeugte Sprache ist mehrdeutig.

Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

Lösung: Für die von der mehrdeutigen Grammatik G erzeugte Sprache $L(G) = \{\underline{\mathtt{a}}\}$ existiert z.B. folgende eindeutige Grammatik: $G = \langle\{S\}, \{\underline{\mathtt{a}}\}, \{S \to \underline{\mathtt{a}}\}, S\rangle$.

d) Ist das Komplement einer Sprache L rekursiv aufzählbar, so ist das Wortproblem für L entscheidbar.

Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

Lösung: Das Wortproblem für eine Sprache L ist genau dann entscheidbar, wenn L rekursiv ist, also wenn das Komplement von L rekursiv aufzählbar ist.

e) Es gibt einen Homomorphismus, der die Sprache $\{\underline{0}^{3n} \mid n \geq 0\}$ auf die Sprache $\{\underline{0}^{123n} \mid n \geq 0\}$ abbildet.

Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

Lösung: z.B. $h : \{\underline{0}\}^* \longrightarrow \{\underline{0}\}^*$ mit $h(\underline{0}) = \underline{0}^{41}$

(10 Punkte)

4.) Gegeben sei das nachstehend beschriebene logische Puzzle:

Die 3 TU-Angehörigen C, B und A seien *Magdalena*, *Tanja* und *Sabine* (in irgendeiner Reihenfolge). Über die 3 gibt es folgendes Faktenwissen:

(a) C ist *Magdalena* oder B ist *Tanja*.

(b) B ist *Magdalena* oder A ist *Tanja*.

(c) B ist *Tanja* oder B ist *Sabine*.

Frage: Wer sind C, B und A konkret? Gibt es überhaupt eine Lösung? Falls ja, gibt es genau eine Lösung oder sogar mehrere?

Um die obigen Fragen zu beantworten, formalisieren sie das gegebene Faktenwissen über C, B und A, *Magdalena*, *Tanja* und *Sabine* in Aussagenlogik und verwenden Sie diese Formalisierung, um die Fragen zu beantworten. Falls Sie zusätzliches implizites Wissen bei Ihrer Argumentation benötigen, so formulieren Sie auch dieses Wissen in Aussagenlogik. Ein Beispiel für derartiges Zusatzwissen wäre etwa: Wenn es sich bei C um *Magdalena* handelt, so ist C weder *Tanja* noch *Sabine*.

Lösung: Wir modellieren das Faktenwissen wie folgt. Die aussagenlogischen Variablen XY, wobei $X \in \{A, B, C\}$ und $Y \in \{\mathit{Tanja}, \mathit{Sabine}, \mathit{Magdalena}\}$ ist, beschreiben, dass die Person X konkret Y ist. Also bedeutet etwa BT, dass es sich bei der Person B um *Tanja* handelt.

Damit können wir (a)-(c) wie folgt formalisieren:

(a) $CM \vee BT$.

(b) $BM \vee AT$.

(c) $BT \vee BS$.

Wir lösen das Puzzle durch Fallunterscheidung und konstruieren/verwenden dabei zusätzlich benötigtes implizites Faktenwissen.

Wir behandeln und rechtfertigen das implizite (durch die Aufgabenstellung gegebene) Zusatzwissen separat, verwenden es aber bereits in der folgenden Argumentation:

Zunächst analysieren wir (a)-(c) durch Fallunterscheidung: Sei I eine beliebige Variablenbelegung.

– **Fall 1**: $I(BS) = \mathbf{f}$. Daraus folgt mit (c), dass $I(BT) = \mathbf{t}$ (*) gelten muss. Folglich gilt wegen (f) insbesondere $I(AT) = \mathbf{f}$, also $I(BM) = \mathbf{t}$ wegen (b). Das aber steht (wegen (d)) im Widerspruch zu (*).

– **Fall 2**: $I(BS) = \mathbf{t}$. Das impliziert insbesondere $I(BM) = \mathbf{f}$ (mit (d) für B) und wegen (b) daher $I(AT) = \mathbf{t}$. Letzteres liefert $I(BT) = \mathbf{f}$ (mit (f) für *Tanja* statt *Magdalena*), also schließlich $I(CM) = \mathbf{t}$ wegen (a). Das bedeutet, in diesem Fall gibt es genau eine Lösung.

Da die Fallunterscheidung vollständig war, gibt es insgesamt also genau eine Lösung des Puzzles, nämlich I mit $I(CM) = I(BS) = I(AT) = \mathbf{t}$, d.h. C ist *Magdalena*, B ist *Sabine* und A ist *Tanja*.

Eine Lösung des Puzzles ist eine Variablenbelegung, die (a), (b) und (c) wahr macht und gleichzeitig eine ganze Reihe weiterer (implizit spezifizierter) Eigenschaften erfüllt. Da A, B und C sowie Magdalena, Sabine und Tanja jeweils paarweise verschiedene Personen sind, gelten natürlich Eigenschaften wie

(d) $I(CM) = \mathbf{t} \implies I(CT) = I(CS) = \mathbf{f}$ (und analog für B, A).

(e) $I(CM) \vee I(CT) \vee I(CS) = \mathbf{t}$ (und analog auch für B, A).

(f) $I(CM) = \mathbf{t} \implies I(BM) = I(AM) = \mathbf{f}$ (und analog für die anderen Kombinationen).

(10 Punkte)

5.) Gegeben seien die prädikatenlogischen Formeln

$$F_1\colon Q(b,a), \quad F_2\colon (\forall x)(\forall y)\,[\,Q(x,y) \supset Q(y,h(x))] \quad \text{und} \quad G\colon Q(h(b),h(a))\,.$$

a) Zeigen Sie, dass G eine logische Konsequenz von F_1 und F_2 ist, d.h. dass gilt: $F_1, F_2 \models G$. **(6 Punkte)**

b) Weisen Sie nach, dass F_2 keine Tautologie ist. **(4 Punkte)**

Lösung:

– Mit dem Deduktionstheorem gilt: $F_1, F_2 \models G$ gdw. $F := (F_1 \wedge F_2) \supset G$ gültig. Wir beweisen die Gültigkeit von F mittels Resolution. Transformation von $\neg F$ in Klauselform ergibt:

$$\neg F \sim \neg\,[\,\neg(F_1 \wedge F_2) \vee G\,] \sim F_1 \wedge F_2 \wedge \neg G\,.$$

Folglich erhalten wir die Klauselform

$$cl(\neg F) = \{\,\{Q(b,a)\},\ \{\neg Q(x,y), Q(y,h(x))\},\ \{\neg Q(h(b),h(a))\}\,.$$

Resolution liefert

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{Q(b,a)\} \quad \{\neg Q(x,y), Q(y,h(x))\}}{\{Q(a,h(b))\}}\,\sigma_1 \quad \{\neg Q(x,y), Q(y,h(x))\}}{\{Q(h(b),h(a))\}}\,\sigma_2 \quad \{\neg Q(h(b),h(a))\}}{\emptyset}\,\sigma_3$$

mit den jeweiligen mgu's für die Resolutionsschritte $\sigma_1 = \{x \leftarrow b, y \leftarrow a\}$, $\sigma_2 = \{x \leftarrow a, y \leftarrow h(b)\}$ und $\sigma_3 = id = \emptyset$. Da wir mit der leeren Klausel einen Widerspruch gefunden haben, ist die ursprüngliche Formel F gültig.

– Wir zeigen, dass F_2 allein jedoch nicht gültig ist, indem wir ein Gegenbeispiel dafür angeben, nämlich die Interpretation in den natürlichen Zahlen $\mathcal{I} = \langle \mathbb{N}, \Phi, I \rangle$ mit $\Phi(Q) =<$ und $\Phi(h) = id$ (i.e., $\Phi(h)(m) = m$ für alle $m \in \omega$). Dann gilt:

$$\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{I}, F_2) = \mathbf{t} \iff \text{Für alle } m, n \in \omega \colon m < n\,,$$

was offensichtlich nicht stimmt.

Ein alternatives Gegenbeispiel wäre die 2-elementige Interpretation $\mathcal{J}$ mit domain $D = \{a, b\}$ und $\Phi(Q) = \{(a, b)\}$, $\Phi(h)(d) = d$ für $d \in D$. Dann gilt ebenfalls

$$\mathcal{M}_{PF}(\mathcal{J}_2, F) = \mathbf{t} \iff \text{Für alle } m, n \in \omega \supset (\exists x) < n \ :$$

Beachten Sie, dass auch andere Gegenbeispiele hier möglich sind (allerdings kein 1-elementiges!).

6.) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Antworten. (Zwei Punkte für richtige Antworten mit richtiger Begründung, einen Punkt für richtige Antworten mit leicht mangelhafter Begründung, keinen Punkt für falsche Antworten oder fehlerhafte Begründungen.)

a) Die Menge aller erfüllbaren aussagenlogischen Formeln ist rekursiv aufzählbar.
Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

Lösung: Erfüllbarkeit aussagenlogischer Formeln ist sogar entscheidbar (etwa mit einer Wahrheitstafel). Also können alle erfüllbaren aussagenlogischen Formeln auch rekursiv aufgezählt werden.

b) Die Erfüllungsäquivalenz aussagenlogischer Formeln ist entscheidbar.
Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

Lösung: Ob 2 gegebene aussagenlogische Formeln beide erfüllbar oder beide unerfüllbar sind, ist – etwa mit einer Wahrheitstafel – leicht entscheidbar.

c) Es existiert ein uniform terminierender Algorithmus, der bei Eingabe einer prädikatenlogischen Formel "JA" sagt und anhält, falls sie gültig ist, und spätestens nach exponentieller Zeit "Nein" sagt und hält, falls die Formel nicht gültig ist.
Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

Lösung: Ansonsten wäre die Gültigkeit prädikatenlogischen Formeln entscheidbar, was aber nicht der Fall ist.

d) Die prädikatenlogischen Formeln $(\forall x)(\exists y)P(x, y)$ und $(\forall y)(\exists x)P(y, x)$ sind logisch äquivalent.
Begründung: ☒ richtig ☐ falsch

Lösung: Alle Formeln, die durch Umbenennung gebundener Variablen (hier: x durch y und y durch x) auseinander hervorgehen, sind zueinander logisch äquivalent.

e) Die Atomformeln $P(a, y)$, $P(x, f(z))$ und $P(y, y)$ sind miteinander (simultan) unifizierbar.
Begründung: ☐ richtig ☒ falsch

Lösung: Falls die 3 Atomformeln (simultan) miteinander unifizierbar wären, etwa mit mgu σ, so müsste insbesondere gelten: $a = \sigma(x) = \sigma(y) = \sigma(f(z)) = f(\sigma(z))$. Dies ist aber offensichtlich nicht der Fall (da a und $f(\sigma(a))$ unabhängig von σ voneinander verschieden sind).

(10 Punkte)