

1) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für jede natürliche Zahl  $n \geq 0$  gilt:

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

(8 Punkte)

Induktionsanfang  $n=0$ :

$$\sum_{k=0}^0 \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{(0+1)(0+2)} = \frac{1}{2} = \frac{0+1}{0+2}$$

Induktionsschluss  $n \rightarrow n+1$ :

Voraussetzung:  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{n+1}{n+2}$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1+1)(n+1+2)} = \\ &= \frac{n+1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+3) + 1}{(n+2)(n+3)} = \\ &= \frac{n^2 + 4n + 4}{(n+2)(n+3)} = \frac{(n+2)^2}{(n+2)(n+3)} = \frac{n+2}{n+3} = \\ &= \frac{n+1+1}{n+1+2}, \text{ also gilt die Behauptung für } n+1. \end{aligned}$$

- 2) a) Definieren Sie den größten gemeinsamen Teiler  $d = \text{ggT}(a, b)$  und das kleinste gemeinsame Vielfache  $k = \text{kgV}(a, b)$  zweier ganzer Zahlen  $a$  und  $b$ .

(2 Punkte)

- b) Bestimmen Sie zwei ganze Zahlen  $x, y \in \mathbb{Z}$ , welche die Gleichung

$$595x + 462y = 7$$

erfüllen.

(5 Punkte)

a) Die Definition des größten gemeinsamen Teilers findet man im Buch auf S. 15 (3. Auflage) bzw. 16 (4. Auflage).  
 $k = \text{kgV}(a, b)$  ist algebraisch definiert:

(i)  $a|k$  und  $b|k$ .

(ii) Aus  $a|v$  und  $b|v$  folgt  $k|v$ , wobei  $v \in \mathbb{Z}$ .

b) Euklidischer Algorithmus:

$$595 = 462 \cdot 1 + 133$$

$$462 = 133 \cdot 3 + 63$$

$$133 = 63 \cdot 2 + 7$$

$$63 = 7 \cdot 9 + 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{ggT}(595, 462) &= 7 = 133 - 63 \cdot 2 = \\ &= 133 - (462 - 133 \cdot 3) \cdot 2 = 462 \cdot (-2) + 133 \cdot 7 = \\ &= 462 \cdot (-2) + (595 - 462) \cdot 7 = 595 \cdot 7 + 462 \cdot (-9), \end{aligned}$$

also  $595 \cdot 7 + 462 \cdot (-9) = 7$ ,

d.h.  $x = 7, y = -9$



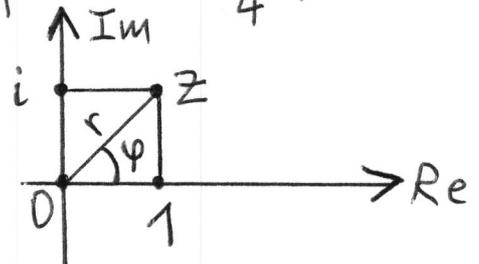
3) Berechnen Sie alle Werte von  $\sqrt[4]{1+i}$  in Polarkoordinaten.

(5 Punkte)

Seien  $z = 1+i$  und  $w_0, w_1, w_2, w_3$  die Werte von  $\sqrt[4]{z}$ . Die Polarkoordinaten von  $z$  lauten:  $r = \sqrt{2}$  und  $\varphi = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ .

Es gilt also:

$$z = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$



Somit haben die  $w_k$  den Betrag  $\sqrt[4]{\sqrt{2}} = \sqrt[8]{2}$  und die Winkel

$$\varphi_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{4}, \quad k=0, 1, 2, 3 \quad (\text{Formel von Moivre}).$$

Daraus ergibt sich (siehe auch unten stehende Skizze):

$$w_0 = \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right),$$

$$w_1 = \sqrt[8]{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2} \right) \right),$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{16} + \pi \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{16} + \pi \right) \right),$$

$$w_3 = \sqrt[8]{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2} \right) \right).$$

Anmerkung: Im Gradmaß

haben wir  $\frac{\pi}{16} = 11,25^\circ$  und

$$\frac{\pi}{2} = 90^\circ.$$

