Wurzelkriterium: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

- $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$, für fast alle n

$$\Downarrow$$

$\sum_n a_n$ absolut konvergent

- $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, für unendl. viele n

$$\Downarrow$$

$\sum_n a_n$ divergent

Beweis: Konvergenzteil mittels Majorantenkriterium

konv. Vergleichsreihe: Geometrische Reihe

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \Rightarrow |a_n| \leq \underbrace{q^n}_{=b_n}$$

$$\sum_n a_n \qquad \sum_n q^n$$ konv. Majorante

$$= \frac{1}{1-q}, \text{ für } |q| < 1$$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ konvergiert absolut

Divergenzteil:

$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \Rightarrow |a_n| \geq 1$, unendlich oft

$\Rightarrow$ a_n ist keine Nullfolge

$\Rightarrow$ Reihe $\sum_n a_n$ divergiert

Wurzelkriterium, Limesform

- $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ absolut konvergent

- $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_n a_n$ divergent

Beweis: folgt sofort aus "gewöhnlichen" Wurzelkrit.

Bsp.

- Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ auf Konv. untersuchen

Limes sup: $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

< 1

$\Rightarrow$ konvergent !!

- Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ (Harmon. Reihe)

"Versuch" Wurzelkriterium

Limsup: $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

$\Rightarrow$ keine Entscheidung durch Wurzelkrit.

Irgendwo: $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{>1}} < 1$

ABER: hier liegt $q < 1$: $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \leq q \Rightarrow$ ↯

• Satz: Quotientenkriterium

Vor.: $a_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

• falls eine Zahl q existiert, sodass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1, \text{ für fast alle } n$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent}$$

• falls aber:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1, \text{ für fast alle } n$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergent}$$

• Satz: Quotientenkriterium, Limesform

• $\limsup\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

• $\liminf\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent

Beweis: Konvergenzteil:

Annahme $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ für alle n ...

$\Rightarrow |a_{n+1}| \leq q \cdot |a_n|$

iterieren: $|a_{n+1}| \leq q \cdot |a_n| \leq q^2 \cdot |a_{n-1}| \leq \ldots \leq \underbrace{q^{n+1} \cdot |a_0|}_{b_{n+1}}$

$\Rightarrow$ Majorantenkrit. mit konv. Majorante

$$|a_0| \cdot \sum_n q^n$$

$\Rightarrow \sum_n a_n$ ist konvergent

Divergenzteil: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für fast alle n

$\Rightarrow a_n$ keine Nullfolge

$\Rightarrow \sum a_n$ divergent

$= \log(1+x)$

Bsp.: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$, mit $x \in \mathbb{R}$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left| \frac{(-1)^{n+2} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}}{(-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}} \right| = \left| \frac{x \cdot n}{(n+1)} \right| =$$

$$= \frac{n}{n+1} \cdot |x|$$

konv

div $\quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad$ div.

$$\text{falls } |x| < 1 \Rightarrow \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{<1} \cdot |x| \leq \underbrace{|x| < 1}_{= q}$$

$\Rightarrow$ Quotientenkrit.: $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$ konv.

$$|x| > 1 \Rightarrow \frac{n}{n+1} \cdot |x| = |x| - \frac{|x|}{n+1}$$

Limesform des QKR: $\lim_{n \to \infty} \left(|x| - \frac{|x|}{n+1} \right)$

$$= |x| - \frac{|x|}{\lim_{n \to \infty} (n+1)} = |x| > 1$$

$\Rightarrow$ div.

$x = 1$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

$\Vert$ $\qquad$ $\downarrow$ Leibniz-Krit.

$$\log(1+1) = \log 2$$

$x = -1 \Rightarrow$ harm. Reihe

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \dots -$$

div.

Cauchyprodukt und Potenzreihen

Def.: __Cauchyprodukt__ zweier Reihen $\sum_{n\geq 0} a_n$, $\sum_{n\geq 0} b_n$:

Reihe $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right)$

$$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots) =$$

$$= \underbrace{a_0 \cdot b_0}_{\substack{\text{Summe Indices}\\ =0}} + \underbrace{(a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0)}_{\substack{\text{Summe Indices}\\ \text{jedes Produkts}\\ =1}} + \underbrace{(a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0)}_{\substack{\text{Summe Indices}\\ \text{jedes Produkts}\\ =2}} + \cdots$$

Def. Potenzreihe: $\sum_{n\geq 0} a_n \cdot (x-x_0)^n$

a_n ... Koeffizienten

x_0 ... Entwicklungspunkt (= Anschlussstelle)

Cauchyprodukt von Potenzreihe:

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n \cdot (x-x_0)^n\right) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} b_n \cdot (x-x_0)^n\right) =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x-x_0)^k \cdot b_{n-k} \cdot (x-x_0)^{n-k}\right) =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}\right) \cdot (x-x_0)^n$$

Bsp.:

- $\sum_{n\geq 0} x^n$: geometr. Reihe

$|x| < 1 \Rightarrow$ konvergent

$|x| \geq 1 \Rightarrow$ divergent

- $\sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} \cdot x^n$: Binomialreihe

$(1+x)^\alpha$

w. UE: z.z.: $|x| < 1$

$\Rightarrow$ Reihe konv. $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$

Satz: Konvergenzbereich einer Potenzreihe (in $\mathbb{C}$)

$$\sum_{n\geq 0} a_n \cdot (x-x_0)^n \quad \text{Potenzreihe}$$

$\Rightarrow$ es existiert R: $0 \leq R \leq \infty$, sodass:

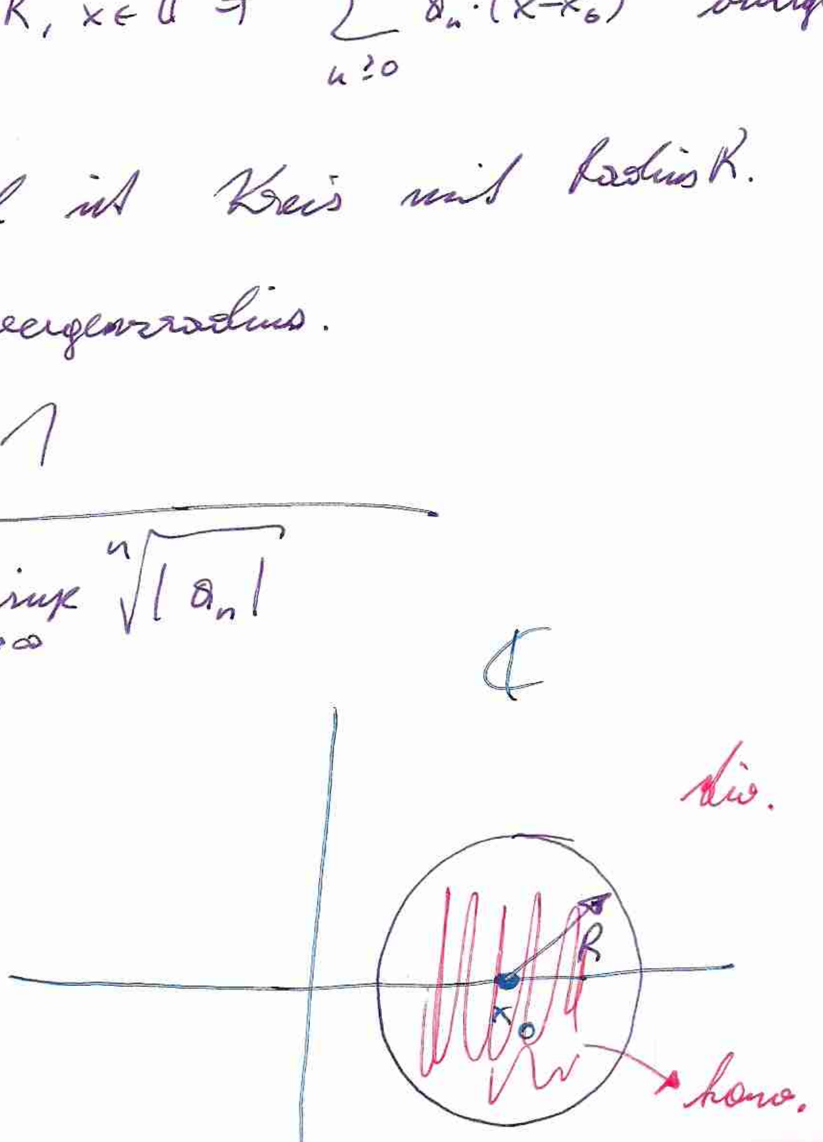
$$|x-x_0| < R,\ x \in \mathbb{C} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (x-x_0)^n \text{ konvergiert}$$

$$|x-x_0| > R,\ x \in \mathbb{C} \Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (x-x_0)^n \text{ divergiert}$$

$\Rightarrow$ Konvergenzbereich ist Kreis mit Radius R.

R: Konvergenzradius.

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$



Beweis: Wurzelkriterium, Limesform

setze: $$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\cdot|x-x_0|^n} = |x-x_0|\cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (*)$$

- Fall $|x-x_0| < R$:

$$< R\cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (x-x_0)^n \text{ konvergent}$$

- Fall $|x-x_0| > R$: $(*) > R\cdot \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Asymptotischer Vergleich von Folgen

Def. Landau-Symbole:

$(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ Folgen

- $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, für $n\to\infty$ („a_n ist groß O von b_n")

  falls $C>0$ existiert, sodaß:

  $$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq C, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

  $$|a_n| \leq C\cdot|b_n|$$

- $a_n = o(b_n)$, für $n\to\infty$ („a_n ist klein o von b_n"),

  falls $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

- $a_n \sim b_n$ („a_n ist asymptotisch gleich b_n"
  „a_n ist asympt. äquivalent b_n",

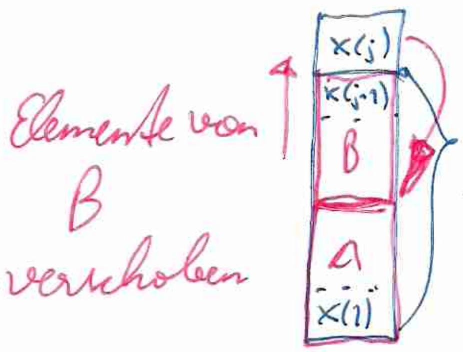
  falls $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Bsp.:

Insertion sort

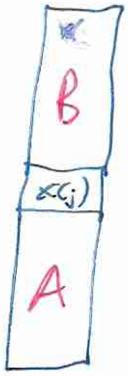
V_n ... mittlere Anzahl der Verschiebungen beim sort. eines Datenfeldes (≙ Zufallspermutation) der Länge n

es lässt sich zeigen: $V_n = \dfrac{n\cdot(n-1)}{4}$



bereichsortiert
$x(1) < x(2) < \dots < x(j-1)$

$x(j)$ an richtige Stelle im Feld eingefügt



0 Verschiebungen
1 Verschieben
⋮
$j-1$ Verschiebungen

Wahrscheinlichk. jeweils $\dfrac{1}{j}$

mittl # Verschiebungen $= \frac{1}{j}\cdot(0+1+\dots+j-1) =$

$$= \frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-1} k = \frac{1}{j}\cdot\frac{j\cdot(j-1)}{2} = \frac{j-1}{2}$$

Dieses "Einfügen von $x(j)$ an richtige Stelle" wird iteriert (von $j=2$ bis $j=n$).

$$\Rightarrow \quad V_n = \sum_{j=2}^{n} \frac{j-1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2} \cdot \frac{n\cdot(n-1)}{2} =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)}{4} = \frac{n^2}{4.} - \frac{n}{4}$$

$$V_n = \Theta(\underbrace{n^2}_{=b_n})$$

$$\left|\frac{V_n}{n^2}\right| = \left|\frac{\frac{n^2}{4} - \frac{n}{4}}{n^2}\right| \underset{C}{\overset{\leq}{}} \frac{1}{4}$$

$$= \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{4n}\right|$$

$$V_n = o(n^3) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{n^3} = 0$$

$$V_n \sim \frac{n^2}{4} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{V_n}{\frac{n^2}{4}} = 1$$