

*Extras
im Web*

Harten Physik

Einführung
für Ingenieure
und Naturwissenschaftler

3. Auflage



Springer

Wichtige Zahlenwerte

π	$\pi = 3,141592\dots$
e	$e = 2,718281\dots$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} = 1,4142\dots$
ln 2	$\ln 2 = 0,6931\dots$
Fallbeschleunigung	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$
Lichtgeschwindigkeit (Vakuum)	$c = 2,99792458 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Avogadro-Konstante	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Gaskonstante	$R = 8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$
Volumen eines Mol Gas (Normalbedingungen)	$22,4 \text{ l/mol}$
Dichte von Wasser	$\rho_W = 1,0 \text{ kg/l}$
Spez. Wärmekapazität von Wasser	$4,18 \text{ J/(g} \cdot \text{K)}$
Schallgeschwindigkeit in Wasser	1480 m/s
Schallgeschwindigkeit in Luft	330 m/s
Elementarladung	$e_0 = 1,602 \cdot 10^{19} \text{ As}$
elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$
magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$

Energieeinheiten

1 Joule = 1 Newtonmeter = 1 Wattsekunde = 1 J = 1 N · m = 1 W · s

Kilowattstunde = 1 kWh = $3,600 \cdot 10^6 \text{ J}$

Elektronvolt = 1 eV = $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Kalorie = 1 cal = 4,184 J

Druckeinheiten

Pascal = 1 Pa = 1 N/m²:

Luftdruck: $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg} \approx 10 \text{ Meter H}_2\text{O}$

Bar = 1 bar = $1,000 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

mm-Quecksilber = 1 mmHg = 133,3 Pa

mm-Wasser = 1 mmH₂O = 9,81 Pa

Atmosphäre = 1 atm = $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

SPRINGER-LEHRBUCH

ULRICH HARTEN

Physik

Einführung für Ingenieure
und Naturwissenschaftler

3., bearbeitete und erweiterte Auflage
Mit 484, teilweise zweifarbigen Abbildungen



PROFESSOR DR. ULRICH HARTEN
Hochschule Mannheim
Windeckstr. 110
68163 Mannheim
e-mail: u.harten@hs-mannheim.de

Internetseite zum Buch unter
www.physik.hs-mannheim.de/physikbuch.html

ISBN 13: 978-3-540-34053-9 Springer Berlin Heidelberg New York

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science + Business Media
springer.de

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003, 2005 und 2007
Printed in The Netherlands

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürfen.

Sollte in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z.B. DIN, VDI, VDE) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert worden sein, so kann der Verlag keine Gewähr für die Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen. Es empfiehlt sich, gegebenenfalls für die eigenen Arbeiten die vollständigen Vorschriften oder Richtlinien in der jeweils gültigen Fassung hinzuzuziehen.

Zeichnungen: Günther Hippmann, Nürnberg
Umschlaggestaltung: deblik Berlin
Satz: medionet AG, Berlin
Herstellung: LE-T_EX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig

Gedruckt auf säurefreiem Papier 7/3100/YL 5 4 3 2 1 0

Vorwort zur 3. Auflage

In dieser neuen Auflage wurden einige Überarbeitungen und Ergänzungen vorgenommen. Die Kapitel über *Wärmekraftmaschinen* und *Hydrodynamik* wurden völlig neu gefasst. Die *Zusammenfassungen* an den Kapitelenden wurden in einer Kombination von Text und Tabelle übersichtlicher gestaltet. In Ergänzung zu den Übungsaufgaben wurden *Verständnisfragen* eingeführt, die sich in meinem Unterricht sehr bewährt haben. Sie werden natürlich im Anhang auch beantwortet. Eine Liste wichtiger Zahlenwerte an leichter aufschlagbarer Stelle vor dem Inhaltsverzeichnis, eine Tabelle der griechischen Buchstaben und eine Liste aller im Buch verwendeter *Formelzeichen* sollen das Arbeiten erleichtern. Das *Sachverzeichnis* wurde deutlich erweitert.

Ich danke allen Leserinnen und Lesern, die mir Anregungen und Korrekturen haben zukommen lassen. Vieles wurde von mir aufgegriffen.

Auch diese Auflage wurde in bewährter Weise im Springer-Verlag von Frau Hestermann und Frau Lempe betreut. Auch ihnen gilt mein Dank.

Frühjahr 2007

Ulrich Harten

Vorwort

Die Naturgesetze galten schon, als die Erde noch wüst und leer war. Verstöße gegen sie werden nicht bestraft, sie sind gar nicht erst möglich. Wer verstehen will, was um ihn herum passiert oder gar technische Prozesse oder Maschinen entwickeln will, die auch tun, was sie sollen, der muss die Naturgesetze kennen. Die fertige Maschine wird sich erbarmungslos an sie halten.

Dieses Buch will Studienanfängern, die sich im Nebenfach mit Physik zu befassen haben, ein leidliches Verständnis der wichtigsten physikalischen Gesetze vermitteln. Dies ist absichtsvoll so

vorsichtig formuliert, denn leider sind die meisten Gesetze keineswegs einfach zu verstehen. Quantenphysik und Relativitätstheorie sind weitgehend ausgespart, denn hier kann der, der sich nur nebenbei mit Physik beschäftigt, nur ein sehr oberflächliches Verständnis erwerben und für den Ingenieur sind diese Gebiete praktisch ohne Bedeutung.

Die „klassische“ Physik ist schwierig genug. Die Erfahrung zeigt, dass schon die Newton'sche Mechanik Studienanfängern große Schwierigkeit bereitet. Zu verlockend ist die anschauliche Mechanik, die noch auf Aristoteles zurückgeht und sich vielleicht so auf den Punkt bringen lässt: Ein Gegenstand bewegt sich immer in die Richtung, in die er gezogen wird. Das ist selbst in einfachen Alltagssituationen falsch, und dies zu verstehen erfordert schon einiges Abstraktionsvermögen. Es erfordert außerdem die Bereitschaft, sich auf einige Mathematik einzulassen, auf die in der Physik nicht verzichtet werden kann.

Es geht mir mit diesem Buch also vor Allem um das Verstehen scheinbar einfacher Dinge. Ein so relativ kurzes Lehrbuch kann keine Vollständigkeit beanspruchen. Die Stoffauswahl orientiert sich an dem, was typischerweise an einer Fachhochschule gelehrt wird, ist aber natürlich auch persönlich gefärbt. Mancher Dozent wird also in seiner Vorlesung auch Themen behandeln, die in diesem Buch nur knapp erwähnt sind. Besteht dann weiterer Lebesedarf, so gibt es sehr gute „dicke“ Physikbücher, im Springer-Verlag den „Gerthsen“ und den „Hering“, die dann weiterhelfen, sonst aber vielleicht wieder zu viel des Guten sind.

Unentbehrlich beim Lernen sind Rechenbeispiele und Übungsaufgaben. Wenn es schon Physik sein muss, so hätte der Student sie gerne an Beispielen aus seinem Fachgebiet erläutert. Dies hat aber Grenzen, denn da wird es schnell zu kompliziert für den Anfang. Ich habe mich bemüht, anschauliche Beispiele, die vor Allem an Alltagserfahrungen anknüpfen, zu finden.

Viele Zusammenhänge in der Physik lassen sich am besten an bewegten Bildern veranschaulichen. Auf einer Internetseite zu diesem Buch gebe ich Ihnen ständig aktualisierte Hinweise auf solche Animationen im WWW.

Die Betreuung dieses Buches beim Verlag lag in den Händen der Damen Eva Hestermann, Monika Lempe und Ursula Weisgerber. Ihnen gilt mein besonderer Dank.

Ein großer Teil des Textes entstammt der Arbeit mit meinem Vater, dessen Andenken ich dieses Buch widme.

Februar 2003

Ulrich Harten

Hinweise zum Gebrauch des Buches

Lernen ist Arbeit. Darum passt ein Schreibtisch besser zum Lehrbuch als ein Ohrensessel. Für die Physik gilt das in besonderem Maße, denn sie macht Gebrauch von der Mathematik. Formeln im Kopf umzuformen und auszurechnen, grenzt an Leichtsinn. Darum hält der Kundige stets Bleistift, Papier, Taschenrechner und Radiergummi griffbereit.

Kleingedrucktes darf der eilige Leser überschlagen, ohne gleich befürchten zu müssen, dass er den Faden verliert. Er verzichtet lediglich auf etwas Butter zum Brot.

Was so markiert ist gehört zum Grundwissen.

wichtig

Wo es jeweils langgehen soll, kündigen die „Übersichten“ zu Beginn der einzelnen Abschnitte an.

Übersicht

Zusammenfassung

Diese Abschnitte am Ende der Kapitel fassen den Inhalt noch einmal zusammen und sollen insbesondere bei der Prüfungsvorbereitung helfen.

in Kürze

Vor dem Sachverzeichnis findet sich eine Liste aller im Buch verwendeten *Formelzeichen*, die ebenso wie eine Tabelle der griechischen Buchstaben das Lesen der Formeln unterstützen kann.

Lernen erschöpft sich nicht im Aufnehmen vorgedruckter Gedankengänge: Es erfordert eigenes Tun. Auch droht am Ende der Vorlesung in der Regel eine Klausur. Darum sollen Lösungen zu den Übungsaufgaben nicht einfach am Ende des Buches nachgeschlagen werden. Zunächst sollte zumindest versucht werden, sie selbst zu lösen. Das gilt auch für die Rechenbeispiele im Text.

Die Übungsaufgaben sind nach Schwierigkeitsgrad sortiert: (I) leicht; (II) mittel; (III) schwer. Auch ein Nachdenken über die Verständnisfragen vor den Aufgaben hilft bei der Prüfungsvorbereitung. Weitere Kontrollfragen gibt es auf der Internetseite.

Vieles in der Physik lässt sich nicht beantworten ohne die Kenntnis einzelner Natur- und Materialkonstanten. Nur wenige verdienen es, auswendig gelernt zu werden; den Rest schlägt man nach. Was der Inhalt dieses Buches verlangt, findet sich im Anhang.

Zu diesem Buch gibt es eine Internetseite. Sie enthält Hinweise auf interessante andere Internetseiten. Manche Zusammenhänge lassen sich viel besser anhand von bewegten Bildern verstehen, die der Buchdruck nicht bieten kann. Es gibt einige frei zugängliche gute Animationen in Internet. Außerdem finden Sie dort Multiple Choice Fragen, die Sie zusätzlich zur Lernkontrolle verwenden können.

Sie finden die Internetseite am schnellsten, indem Sie bei www.springer.de in die Katalogsuche die ISBN-Nummer des Buches eingeben: 978-3-540-34053-9. Sie gelangen dann auf die Katalogseite des Buches, auf der Sie auf weitere Informationen klicken können. Oder Sie gehen direkt zur Internetadresse: www.physik.hs-mannheim.de/physikbuch.html

Wichtige Zahlenwerte

π	$\pi = 3,141592\dots$
e	$e = 2,718281\dots$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} = 1,4142\dots$
ln 2	$\ln 2 = 0,6931\dots$
Fallbeschleunigung	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$
Lichtgeschwindigkeit (Vakuum)	$c = 2,99792458 \text{ m/s}$ $\approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Avogadro-Konstante	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Gaskonstante	$R = 8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$
Volumen eines Mol Gas (Normalbedingungen)	22,4 l/mol
Dichte von Wasser	$\rho_W = 1,0 \text{ kg/l}$
Spez. Wärmekapazität von Wasser	4,18 J/(g · K)
Schallgeschwindigkeit in Wasser	1480 m/s
Schallgeschwindigkeit in Luft	330 m/s
Elementarladung	$e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As}$
elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$
magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$

Energieeinheiten

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ Newtonmeter} = 1 \text{ Wattsekunde} = 1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} = 1 \text{ W} \cdot \text{s}$$

$$\text{Kilowattstunde} = 1 \text{ kWh} = 3,600 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$\text{Elektronvolt} = 1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$\text{Kalorie} = 1 \text{ cal} = 4,184 \text{ J}$$

Druckeinheiten

$$\text{Pascal} = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2;$$

$$\text{Luftdruck: } 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg} \approx 10 \text{ Meter H}_2\text{O}$$

$$\text{Bar} = 1 \text{ bar} = 1,000 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$\text{mm-Quecksilber} = 1 \text{ mmHg} = 133,3 \text{ Pa}$$

$$\text{mm-Wasser} = 1 \text{ mmH}_2\text{O} = 9,81 \text{ Pa}$$

$$\text{Atmosphäre} = 1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe	1
1.1	Physikalische Größen und ihre Einheiten	2
1.1.1	Physikalische Größen	2
1.1.2	Zeit	4
1.1.3	Länge, Fläche, Volumen	5
1.1.4	SI-Einheiten	8
1.1.5	Dimensionskontrolle	9
1.2	Mengenangaben	10
1.2.1	Masse und Stoffmenge	10
1.2.2	Dichten und Gehalte	11
1.3	Mathematische Hilfsmittel	13
1.3.1	Messfehler und Messunsicherheiten	13
1.3.2	Vektoren und Skalare	18
1.3.3	Winkelfunktionen	22
1.3.4	Exponentialfunktion und Logarithmus	23
1.3.5	Potenzfunktionen	26
1.3.6	Algebraische Gleichungen	27
2	Mechanik starrer Körper	31
2.1	Kinematik	32
2.1.1	Geschwindigkeit und Fahrstrecke (Integration)	32
2.1.2	Fahrstrecke und Geschwindigkeit (Differentiation)	35
2.1.3	Beschleunigung	36
2.1.4	Überlagerung von Bewegungen	39
2.1.5	Kinematik der Drehbewegungen	42
2.2	Statik starrer Körper	45
2.2.1	Kräfte	45
2.2.2	Gewichtskraft und Gravitation	48

2.2.3	Arbeit und Energie	49
2.2.4	Kinetische Energie	54
2.2.5	Hebel und Drehmoment	55
2.2.6	Die Grundgleichungen der Statik	58
2.2.7	Gleichgewichte	59
2.3	Dynamik der Translationsbewegung	61
2.3.1	Die Grundgleichung der Mechanik	62
2.3.2	$actio = reactio$	64
2.3.3	Reibung	65
2.3.4	Bewegungsgleichung	67
2.3.5	Impuls	68
2.4	Dynamik der Rotation	72
2.4.1	Analogien zur Translation	72
2.4.2	Dynamik der Kreisbewegung	73
2.4.3	Trägheitsmoment	75
2.4.4	Die Rollbewegung	76
2.4.5	Drehimpulserhaltung	78
2.5	Trägheitskräfte	80
2.5.1	Linear beschleunigte Systeme	80
2.5.2	Rotierende Systeme	82
2.5.3	Trägheitskräfte in der technischen Mechanik	84

3	Mechanik deformierbarer Körper	93
3.1	Die Aggregatzustände	94
3.2	Festkörper	95
3.2.1	Struktur der Festkörper	95
3.2.2	Verformung von Festkörpern	96
3.2.3	Viskoelastizität	99
3.3	Hydrostatik	100
3.3.1	Stempeldruck	100
3.3.2	Schweredruck	101
3.3.3	Auftrieb	103
3.3.4	Manometer	105
3.3.5	Pumpen	106
3.3.6	Kompressibilität	106

3.4	Grenzflächen	107
3.4.1	Kohäsion	107
3.4.2	Adhäsion	110
3.5	Hydrodynamik	112
3.5.1	Ideale Strömung	112
3.5.2	Zähigkeit (Viskosität)	115
3.5.3	Reale Strömung durch Rohre	116
3.5.4	Umströmung von Hindernissen	120
4	Mechanische Schwingungen und Wellen	127
4.1	Mechanische Schwingungen	128
4.1.1	Oszillatoren	128
4.1.2	Harmonische Schwingungen	128
4.1.3	Gedämpfte Schwingungen	132
4.1.4	Erzwungene Schwingungen	134
4.1.5	Überlagerung von Schwingungen	136
4.2	Seilwellen	138
4.3	Schallwellen	141
4.3.1	Schallerzeugung	142
4.3.2	Schallnachweis	144
4.3.3	Schallausbreitung	146
5	Wärmelehre	153
5.1	Temperatur	154
5.1.1	Temperaturmessung	154
5.1.2	Ausdehnungskoeffizienten	157
5.1.3	Das ideale Gas	158
5.1.4	Partialdruck und Partialvolumen	160
5.2	Thermische Bewegung	160
5.2.1	Wärme	161
5.2.2	Molekularbewegung	163
5.2.3	Wärmeleitung	165
5.2.4	Temperaturstrahlung	167
5.2.5	Diffusion	169
5.2.6	Osmose	171

5.3	Phasenumwandlungen	173
5.3.1	Umwandlungswärmen	173
5.3.2	Schmelzwärme	174
5.3.3	Lösungs- und Solvatationswärme	176
5.3.4	Verdampfung	177
5.3.5	Dampfdruck und Dampfdichte	177
5.3.6	Luftfeuchtigkeit	179
5.3.7	Verdampfungsenthalpie	179
5.3.8	Zustandsdiagramme	180
5.3.9	Absorption und Adsorption	183
5.4	Wärmenutzung	184
5.4.1	Die Sonderstellung der Energieform „Wärme“	184
5.4.2	Zustandsänderungen	186
5.4.3	Der Ottomotor	190
5.4.4	Wahrscheinlichkeit und Ordnung	192
5.4.5	Entropie	193
5.4.6	Wärme- und Entropiehaushalt der Erde	194
6	Elektrizitätslehre	203
6.1	Die wichtigsten Messgrößen	205
6.1.1	Strom, Spannung, Ladung	205
6.1.2	Leistung und Energie	208
6.2	Die wichtigsten Zusammenhänge	209
6.2.1	Elektrischer Widerstand	209
6.2.2	Das Ohm'sche Gesetz	210
6.2.3	Joule'sche Wärme	211
6.2.4	Kapazität	212
6.2.5	Energie des geladenen Kondensators	213
6.3	Wechselspannung	214
6.3.1	Effektivwerte	214
6.3.2	Kapazitiver Widerstand	216
6.4	Elektrische Netzwerke	217
6.4.1	Die Kirchhoff-Gesetze	218
6.4.2	Spezifischer Widerstand	220
6.4.3	Spannungsteiler	221
6.4.4	Innenwiderstände	222
6.4.5	Hoch- und Tiefpass	224
6.4.6	Kondensatorentladung und e-Funktion	224

6.5	Elektrisches Feld	227
6.5.1	Der Feldbegriff	227
6.5.2	Elektrisches Potential	229
6.5.3	Das Potentialfeld	230
6.5.4	Kräfte zwischen Ladungen	233
6.5.5	Das Feld im Kondensator	236
6.5.6	Energie des elektrischen Feldes	237
6.6	Materie im elektrischen Feld	238
6.6.1	Influenz	238
6.6.2	Elektrische Abschirmung	239
6.6.3	Die Elementarladung	240
6.6.4	Das quasifreie Elektron	241
6.6.5	Die Dielektrizitätskonstante (Permittivität)	242
6.6.6	Der elektrische Strom	244
6.6.7	Das Elektronvolt	247
6.6.8	Ruhmasse und relativistische Masse	248
6.6.9	Gasentladung	248
6.7	Elektrochemie	250
6.7.1	Dissoziation	250
6.7.2	Elektrolyte	252
6.8	Grenzflächen	254
6.8.1	Galvani-Spannung	254
6.8.2	Thermospannung	256
6.8.3	Halbleiter	257
6.9	Elektrische Unfälle	259
6.10	Magnetostatik	261
6.10.1	Magnetische Felder	261
6.10.2	Kräfte im Magnetfeld	264
6.10.3	Erzeugung von Magnetfeldern	267
6.10.4	Materie im Magnetfeld	268
6.10.5	Die Feldgrößen \bar{H} und \bar{D}	270
6.11	Magnetodynamik	270
6.11.1	Induktion	271
6.11.2	Transformatoren	273
6.11.3	Selbstinduktion	274
6.11.4	Induktiver Widerstand	277
6.12	Elektrische Schwingungen	278
6.12.1	Der Schwingkreis	278
6.12.2	Die Schwingungsdifferentialgleichung	281
6.12.3	Überlagerung von Schwingungen	282
6.12.4	Geschlossene elektrische Feldlinien	283
6.12.5	Der schwingende elektrische Dipol	284

7.1	Elektromagnetische Wellen	298
7.1.1	Der strahlende Dipol	298
7.1.2	Spektralbereiche	300
7.1.3	Wellenausbreitung	301
7.2	Geometrische Optik	303
7.2.1	Lichtbündel	304
7.2.2	Spiegelung	306
7.2.3	Brechung	308
7.2.4	Dispersion	311
7.2.5	Linsen	312
7.2.6	Abbildung durch Linsen	314
7.2.7	Abbildungsgleichungen	316
7.2.8	Dicke Linsen und Objektive	318
7.2.9	Das Auge	319
7.2.10	Optische Instrumente	320
7.3	Intensität und Farbe	324
7.3.1	Strahlungs- und Lichtmessgrößen	324
7.3.2	Optische Absorption	326
7.3.3	Temperaturstrahlung	328
7.4	Wellenoptik	329
7.4.1	Polarisiertes Licht	330
7.4.2	Interferenz	332
7.4.3	Kohärenz	334
7.4.4	Dünne Schichten und Beugungsgitter	335
7.4.5	Beugungsfiguren	337
7.5	Quantenoptik	339
7.5.1	Das Lichtquant	340
7.5.2	Energiezustände und Spektren	342
7.5.3	Laser	345
7.5.4	Röntgenstrahlen	346
7.6	Elektronenoptik	348
7.6.1	Elektronenbeugung	348
7.6.2	Elektronenmikroskope	349
7.6.3	Die Unschärferelation	351

8 Atom- und Kernphysik

8.1 Aufbau des Atoms	358
8.1.1 Das Bohr'sche Atommodell	358
8.1.2 Elektronenwolken	359
8.1.3 Das Pauli-Prinzip	360
8.1.4 Charakteristische Röntgenstrahlung	361
8.2 Aufbau des Atomkerns	361
8.2.1 Nukleonen und Nuklide	362
8.2.2 Der Massendefekt	363
8.2.3 Radioaktivität	364
8.2.4 Nachweis radioaktiver Strahlung	365
8.2.5 Zerfallsgesetz	369
8.2.6 Kernspaltung und künstliche Radioaktivität	371
8.2.7 Antimaterie	372
8.2.8 Strahlennutzen, Strahlenschaden, Strahlenschutz	373
Anworten und Lösungen	377
Einheiten und Zahlenwerte	405
Griechische Buchstaben	410
Formelzeichen	410
Sachverzeichnis	415

1.1	Physikalische Größen und ihre Einheiten	2
1.1.1	Physikalische Größen	2
1.1.2	Zeit	4
1.1.3	Länge, Fläche, Volumen	5
1.1.4	SI-Einheiten	8
1.1.5	Dimensionsanalyse	9
1.2	Mengenangaben	10
1.2.1	Masse und Stoffmenge	10
1.2.2	Dichten und Gehalte	11
1.3	Mathematische Hilfsmittel	13
1.3.1	Messfehler und Messunsicherheiten	13
1.3.2	Vektoren und Skalare	18
1.3.3	Winkelfunktionen	22
1.3.4	Exponentialfunktion und Logarithmus	23
1.3.5	Potenzfunktionen	26

Grundbegriffe

Übersicht

Die Physik ist eine empirische und quantitative Wissenschaft; sie beruht auf Messung und Experiment. Daraus folgt eine intensive Nutzung mathematischer Überlegungen, denn Messungen ergeben Zahlenwerte, und die Mathematik ist primär für den Umgang mit Zahlen erfunden worden. Die Natur ist damit einverstanden. Selbst rechnet sie zwar nicht, aber wenn der Mensch ihre Gesetzmäßigkeiten einfach und korrekt beschreiben will, dann tut er dies am besten mit Hilfe mathematischer Formeln und Kalküle.

1.1 Physikalische Größen und ihre Einheiten

Einleitung

Physikalische Größen sind messbare Größen; eine jede wird durch ihre spezielle Messverfahren definiert und besitzt ihre eigene Maßeinheit. Jedes Messergebnis ist das Produkt (im Sinn der Mathematik) aus einer Zahl und eben dieser Einheit. Einheiten werden vom Gesetzgeber vorgeschrieben, letzten Endes willkürlich, aber aufgrund internationaler Vereinbarungen. Längen misst man in Metern (und nicht mehr in Fuß oder Zoll), Massen in Kilogramm und Zeitspannen in Sekunden. Dahinter steht das „Système International d'Unités“. Einheiten sind nicht unabhängig voneinander – z.B. ist die Einheit der Geschwindigkeit notwendigerweise der (mathematische) Quotient aus einer Längen- und einer Zeiteinheit.

1.1.1 Physikalische Größen

Als die Pharaonen im alten Ägypten ihre Pyramiden bauen ließen, da mussten viele hundert Sklaven die Steine Rampen hochziehen. Dabei nutzten sie durchaus schon die physikalische Erkenntnis, dass sich Kräfte vektoriell zerlegen lassen (Abb. 2.21). Die Rampen erleichterten die Arbeit, da nicht die gesamte Gewichtskraft des Steines aufgebracht werden musste, um den Stein zu heben. Eine üble Plackerei, die man besser Sklaven überließ, war es trotzdem. Will heute jemand ein tonnenschweres Objekt bewegen, so kann er im nächsten Baumaschinenverleih einen Autokran mieten, Muskelkraft wird nur noch zum Umlegen

einiger Schalter gebraucht. Dafür hat der Autokran einen Verbrennungsmotor, der in der Lage ist, die beim Verbrennen von Benzin entstehende Wärme in mechanische Arbeit umzuwandeln. Dieses technische Wunderwerk zu erfinden war nicht leicht. Notwendig war dafür vor allem, Naturvorgänge präzise beschreiben, in Zahlen und Formeln fassen zu können.

Die Abb. 1.1 zeigt in solch präziser Weise, was in einer idealisierten Dampfmaschine, dem Vorläufer heutiger Verbrennungsmotoren, geschieht. Aufgetragen sind der Druck, die Temperatur und das Volumen des Dampfes im Kolben der Maschine bei einem Kolbenumlauf. Mit dieser Betrachtung lässt sich ermitteln, welcher Wirkungsgrad bei der Umwandlung von Wärme in mechanische Arbeit erreicht werden kann (dies wird in Kapitel 5.4.3 geschehen). Um das Diagramm zu verstehen, muss man aber erst

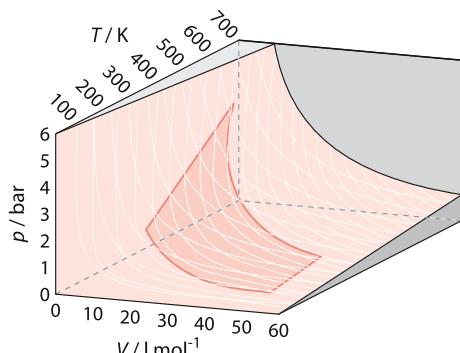


Abb. 1.1. Die Abbildung zeigt in einem perspektivisch dargestellten dreidimensionalen Diagramm den Verlauf von Druck p , Volumen V und Temperatur T im Kolben eines Otto-Motors (Kapitel 5.4.3) bei einem Kolbenumlauf. Die Fläche, auf der die Kurve liegt, ist die Zustandsfläche eines idealen Gases.

einmal wissen, was das ist: Druck, Temperatur, Volumen, Wärme, mechanische Arbeit.

All diese Vokabeln werden hier genau im Sinne der Physik benutzt, sie bezeichnen **physikalische Größen**. Gemeinsames Kennzeichen aller physikalischen Größen ist ihre Messbarkeit; eine jede von ihnen ist, letztlich unabhängig von Worten und Sprache, durch ihre speziellen Messverfahren definiert. So unterschiedlich diese Verfahren im Einzelnen auch sein mögen, grundsätzlich geht es bei jeder Messung um das gleiche Prinzip: um einen quantitativen Vergleich zwischen der Messgröße und ihrer Maßeinheit. Welchen Bruchteil oder welches Vielfache der Einheit stellt die zu messende Größe dar? Daraus folgt: Jede physikalische Größe ist das Produkt aus einer Zahl und einer Einheit – das Wort *Produkt* hier genau im Sinn der Mathematik verstanden. Deshalb darf man auch mit den Symbolen der Mathematik schreiben:

wichtig

Physikalische Größe = Zahl · Einheit.

Rechenoperationen wie Malnehmen und Teilen sind ursprünglich nur für den Umgang mit Zahlen erfunden worden. Dass man sie auch auf Maßeinheiten anwenden kann und, einschließlich der Differentiation und der Integration, sogar auf die physikalischen Größen selber, mag überraschen, doch es ist so. Extensive Nutzung dieser Möglichkeit kennzeichnet die exakten Naturwissenschaften. Formeln mögen der flüssigen Lesbarkeit eines Textes entgegenstehen, für präzise physikalische Aussagen sind sie unentbehrlich. Ohne Frage gehören sie zum Wesen der Physik. „Physik ohne Formeln“ – das gibt allenfalls eine unverbindliche Feierabendlektüre; wer Physik als Hilfswissenschaft nutzen oder gar hauptamtlich betreiben will, der darf mathematischen Formulierungen nicht ausweichen.

Wollte man physikalische Größen mit ihrem vollen Namen in Formeln einsetzen, so würden die Formeln unhandlich. Deshalb verwendet man einzelne Buchstaben

als Symbole, etwa p für den Druck, V für das Volumen und t für die Zeit. Leider gibt es aber weit mehr physikalische Größen als Buchstaben, selbst wenn man das griechische Alphabet dazunimmt. Eine in jeder Beziehung eindeutige Zuordnung ist darum nicht möglich. Internationale Empfehlungen helfen, sind aber nicht zwingend.

Formeln sparen Platz. Die Feststellung „physikalische Größe=Zahl·Einheit“ kann auch so geschrieben werden:

$$z = \{z\} \cdot [z].$$

Hier steht z ganz allgemein für irgendeine messbare Größe, z.B. die Flughöhe eines Düsenclipers, $[z]$ für irgendeine zur Größe z passende Einheit, z.B. „Meter“ (m) oder luftfahrtüblich „Fuß“ (ft), und schließlich $\{z\}$ für die sich ergebende Maßzahl, also $\{z\} \approx 10000$ bei $[z]=\text{m}$ und $\{z\} \approx 30000$ bei $[z]=\text{ft}$. Internationale Konvention empfiehlt, Buchstaben, die für Größen stehen, *kursiv* zu schreiben und Buchstaben, die für Einheiten stehen, gerade. Das hat freilich nur für Bücher und Reinzeichnungen Bedeutung.

Aus der Gleichung $z = \{z\} \cdot [z]$ folgt rein mathematisch:

$$\frac{z}{[z]} = \{z\},$$

in Worten: Wenn man eine physikalische Größe durch ihre Einheit teilt, bleibt eine reine Zahl übrig. Das erlaubt, die Achsen von Diagrammen zu *Zahlengeraden* zu machen. Eine Volumenachse wäre dann so zu beschriften, wie die Abb. 1.2 zeigt. In Abb. 1.1 ist ein spezifisches Volumen (Volumen pro Stoffmenge) aufgetragen, deshalb wird durch die Einheit Liter durch Mol geteilt. So vorzugehen hat einige Vorteile und wird international empfohlen. Das vorliegende Buch hält sich an diese Empfehlung.

Zahlen ohne Einheiten bezeichnet man als „dimensionslos“. Physikalische Größen sind deshalb durchweg „dimensioniert“; die Flug-

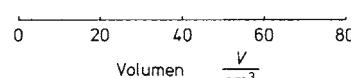


Abb. 1.2. Beschriftung einer Volumenachse nach internationaler Empfehlung; die Achse wird dadurch zur Zahlengeraden

höhe des Düsenclippers hat ebenso die Dimension einer Länge wie der Durchmesser eines Haares.

Die mittlere Volumenstromstärke I des Blutes in der Aorta ist der Quotient aus dem durchgeflossenen Volumen ΔV und der dazu benötigten Zeitspanne Δt ; als Formel:

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Hier stehen die Buchstaben für physikalische Größen. Darum bezeichnet man eine solche Formel als **Größengleichung**. Sie beschreibt einen physikalischen Zusammenhang und macht keine Vorschriften über die Einheiten, die bei einer konkreten Rechnung benutzt werden. Ob man die Zeit in Sekunden, Minuten oder Stunden misst, spielt für die Größengleichung keine Rolle. Zuweilen werden aber auch sog. **Zahlenwertgleichungen** verwendet. Bei ihnen stehen die Buchstaben nur für Zahlenwerte, müssten also eigentlich in geschweifte Klammern gesetzt werden. Oftmals geschieht das nicht und kann dann leicht zu Verwechslungen und Fehlrechnungen führen. Eine Zahlenwertgleichung ist ohne Angabe der Einheiten, für die sie gilt, sinnlos.

Das können die Schwingungen eines Schwingerpendels sein, wie bei Urgroßvaters Standuhr, oder die eines Drehpendels, wie bei Großvaters Taschenuhr, oder die eines sorgfältig geschliffenen Kristalls aus Quarz, wie bei der modernen Armbanduhr, oder auch die bestimmter Atome, wie bei der sog. „Atomuhr“. Die „biologische Uhr“ hingegen ist keine Uhr im physikalischen Sinne. Das Leben auf der Erde hat sich lediglich und notwendigerweise auf den Tagesrhythmus eingestellt, wie er von der Rotation der Erde seit Jahrtausenden praktisch unverändert vorgegeben wird. Auch Drehbewegungen können zu den periodisch sich wiederholenden Vorgängen gehören und darum zur Zeitmessung dienen – und zur Festlegung von Zeiteinheiten.

Das Bedürfnis, Zeiten zu messen, ist weit älter als das Dezimalsystem; darum hat es sich nur noch bei den kurzen Zeiteinheiten unter der Sekunde durchsetzen können:

- ▶ Jahr a ≈ 365,24 Tage
- ▶ Tag d = 24 Stunden
- ▶ Stunde h = 60 Minuten
- ▶ Minute min = 60 Sekunden
- ▶ Sekunde s = SI-Einheit der Zeit

Derzeit dauert ein Jahr 31556926,6 s. Definiert wird die Sekunde über die Schwingungsdauer des Lichtes einer bestimmten Spektrallinie. Aber da brauchen sich nur Spezialisten auszukennen.

Uhren gibt es genug auf der Welt. Bahnhofs- und Armbanduhren zeigen einen **Zeitpunkt** an, die Tageszeit nämlich. Für physikalische Zusammenhänge hat sie wenig Bedeutung – Naturgesetze gelten auch um Mitternacht. Wichtiger sind darum **Zeitspannen**, also die Differenzen von Zeitpunkten. Man misst sie z.B. mit Stoppuhren. Der Zeitnehmer beim 100-Meter-Lauf setzt die seine beim Startschuss in Gang und hält sie wieder an, wenn der Sprinter die Ziellinie erreicht. Dieser Satz ist nicht ganz korrekt, denn die Nervenleitung des Zeitnehmers braucht selbst ein wenig Zeit, um das optische Signal vom Pulverdampf der Startpistole, auf der Netzhaut entstanden, in eine

1.1.2 Zeit

Wenn Goethe vom „sausenden Webstuhl der Zeit“ spricht und Schiller von der „schönen Zeit der jungen Liebe“, dann meinen beide gewiss nicht dasselbe und schon gar nicht die physikalische Größe **Zeit**. Es gibt eben mehr Begriffe in der Welt als Worte in der Sprache. Einigkeit darüber, was mit benutzten Worten gemeint sein soll, ist Voraussetzung einer Verständigung. Die Methode der Physik, Größen durch Messverfahren zu definieren, hilft da durchaus.

wichtig

Zeit misst man mit **Uhren**, und Uhren zählen periodische Vorgänge ab.

Kontraktion des Daumenmuskels umzusetzen. Dieser sog. **persönliche Fehler** beträgt, individuell unterschiedlich, einige Zehntelsekunden; durch Alkohol im Blut lässt er sich beträchtlich verlängern. Träte er am Ziel in exakt der gleichen Größe wieder auf, so würde die Laufzeit des Sprinters schon richtig gemessen, wenn auch insgesamt ein wenig zu spät. Darauf ist aber kein Verlass. Wenn es um Rekorde geht, wird darum heutzutage automatisch, d.h. elektronisch gemessen, auf die Hundertstelsekunde genau. Diese Präzision erreicht kein Mensch.

1.1.3 Länge, Fläche, Volumen

Die Volumina von Körpern und Hohlräumen werden von ihren linearen Abmessungen bestimmt. Für geometrisch einfache Körper hält die Mathematik entsprechend einfache Formeln bereit, wie Abb. 1.3 zeigt.

Wo immer Kreise und Kugeln auftauchen, erscheint die Zahl π , das Verhältnis von Kreisumfang und Kreisdurchmesser. Computer haben π auf tausende Stellen hinter dem Komma ausgerechnet; physikalisch gibt das keinen Sinn, weil sich eine entsprechende Messgenauigkeit ja doch nicht erreichen lässt. Auswendigzulernen braucht man nur $\pi \approx 3,14$; für Abschätzungen genügt es oft, $\pi \approx 3$ zu setzen.

In jeder Formel zur Berechnung eines Volumens erscheint das Produkt dreier Längen, sei es nun als $a \cdot b \cdot c$, als $r^2 \cdot h$ oder als r^3 – allenfalls ist noch ein Zahlenfaktor dabei. Demnach steht die physikalische Größe **Volumen** in engem Zusammenhang mit der physikalischen Größe **Länge**; das Volumen hat die Dimension **Länge hoch drei**. Für die physikalische Größe **Fläche** ergibt sich ganz analog die Dimension **Länge hoch zwei**. Daraus folgen wiederum feste Beziehungen zwischen den Einheiten. Bei der Länge hat man sich international auf die Einheit **Meter** geeinigt, abgekürzt m. Folglich ist die Einheit der Fläche **Meterquadrat**, das man lieber Quadratmeter nennt und m^2 abkürzt,

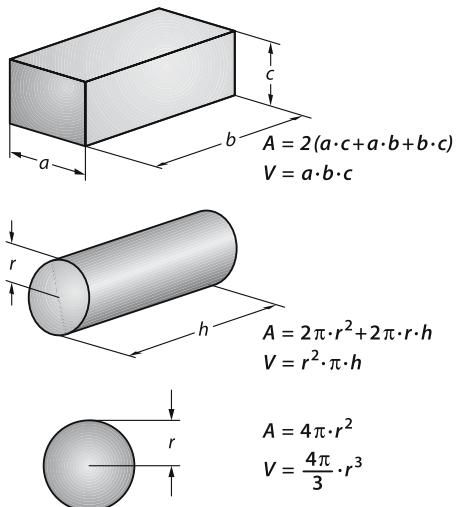


Abb. 1.3. Oberfläche A und Volumen V von Quader, Kreiszylinder und Kugel

und die des Volumens „Meter hoch drei“, also m^3 , durchweg **Kubikmeter** genannt.

Die Festlegung von Einheiten ist reine Willkür; das beweisen all die vielen Meilen, Ellen und Füße, die Kaufleute noch im 19. Jahrhundert große und unnötige Mühe beim Umrechnen gemacht haben. Internationale Einigung bedeutet hier schon für sich allein einen Fortschritt – welche Einheit es dann trifft, ist im Grunde nicht mehr so wichtig.

Das Verfahren der Längenmessung ist bekannt; jedermann weiß, wie man mit einem Zollstock umgeht: Man trägt ihn wiederholt längs der zu messenden Strecke ab und zählt, wie oft das geht. Im Allgemeinen wird freilich ein Bruchteil vom Meter übrig bleiben; um auch ihn zu messen, ist der Zollstock unterteilt, in 100 größere Abschnitte, die **Zentimeter** (cm), und 1000 kleinere, die **Millimeter** (mm).

Messen heißt, die Messgröße mit ihrer Einheit vergleichen.

wichtig

Wenn ein Mensch 1 m, 76 cm und 5 mm groß ist, dann darf man für seine Länge h schreiben:

- $h = 1,765 \text{ m}$
- $h = 176,5 \text{ cm}$
- $h = 1765 \text{ mm}$
- $h = 1,765 \cdot 10^3 \text{ mm}$

Alle vier Schreibweisen besagen dasselbe.

Wollte man die Wellenlänge λ derjenigen Spektrallinie des Edelgases Krypton, die noch vor einigen Jahren zur Definition des Meters diente, auch in Metern angeben, so hätte man zu schreiben:

$$\lambda = 0,0000006056 \text{ m}.$$

Die vielen Nullen sind weder handlich noch übersichtlich. Darum weicht man gern in die Schreibweise mit Zehnerpotenzen aus: $\lambda = 6,056 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Üblich ist aber auch, Einheiten um ganze Dezimalfaktoren zu reduzieren oder zu erweitern und dies durch vereinbarte Vorsilben und deren Abkürzungen anzugeben. Zentimeter und Millimeter wurden schon genannt, Kilometer sind geläufig. Für die Wellenlängen sichtbaren Lichtes ist das *Nanometer* (nm) angemessen; es entspricht 10^{-9} m :

$$\lambda = 605,6 \text{ nm}.$$

Die international festgelegten Bezeichnungen enthält eine Tabelle im Anhang – zumin-

dest die folgenden sollte man wie Vokabeln auswendig gelernt haben:

wichtig

Vorsilbe	Kennbuchstabe	Zehnerpotenz
mikro	μ	10^{-6}
milli	m	10^{-3}
zentri	c	10^{-2}
dezi	d	10^{-1}
kilo	k	10^3
mega	M	10^6

Hier erweist sich wieder einmal die Kürze des Alphabets als lästig: Der Buchstabe „m“ muss in Formeln die physikalische Größe Masse vertreten, als Einheit das Meter und als Präfix den Faktor 10^{-3} , „milli“ genannt.

„Eine Länge misst man durch Abtragen eines Maßstabes.“ Wie aber misst man den Durchmesser eines Fußballes? An die Länge, die gemessen werden soll, kommt man ja mit dem Zollstock nicht heran. Deshalb klemmt man den Fußball zwischen zwei parallele Latten und misst deren Abstand. Nach dem gleichen Schema geht ein Arzt vor, wenn er die Körpergröße eines Patienten bestimmt (☞ Abb. 1.4); hier sorgt eine Mechanik für die Parallelführung des Messfühlers.

Ein Pantoffeltierchen kann man nicht zwischen die Backen einer Schublehre klemmen; seine Länge L wird unter dem Mikroskop bestimmt. Dessen Okular besitzt hierfür ein *Okularmikrometer*, eine Skala, die der Beobachter zugleich mit dem Objekt scharf sieht (☞ Abb. 1.5, oberes Teilbild – wie das möglich ist – wird im Kap. 7.2.10 besprochen). Damit kennt man L zunächst einmal in Skalenteilen. Deren metrische Bedeutung lässt sich aber bestimmen, wenn man das Objekt gegen ein *Objektmikrometer* vertauscht, einen kleinen Maßstab, der meist 100 Teilstriche auf einem Millimeter enthält, in ☞ Abb. 1.5, unteres Teilbild aber nur 20 Teilstriche. Der Rest ist Dreisatz.

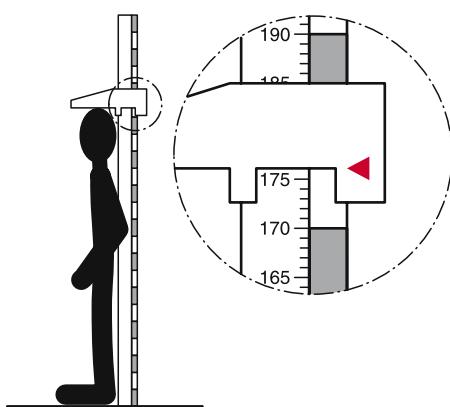


Abb. 1.4. Messung der KörpergröÙe eines Menschen

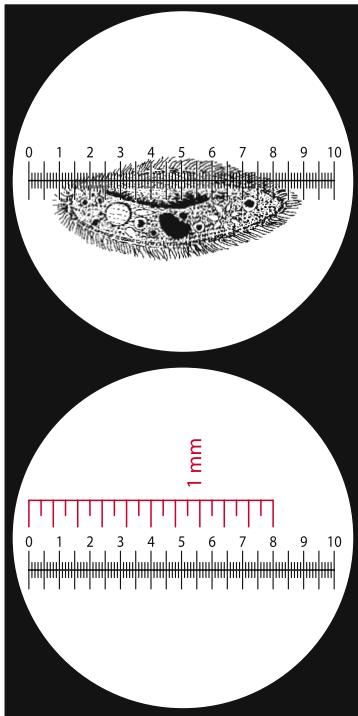


Abb. 1.5. Objektmikrometer und Pantoffeltierchen unter einem Mikroskop mit Skala im Okular

Kennt man von einem Gegenstand alle linearen Abmessungen, so kennt man auch seine Oberfläche, sagt die Mathematik, und im Prinzip hat sie Recht. Handliche Formeln bietet sie freilich wieder nur für wenige, geometrisch einfache Fälle an. Die Fläche eines Rechtecks ist das Produkt seiner beiden Seiten. Weil drei Paare von Rechtecken einen Quader begrenzen (s. Abb. 1.3), gilt für seine Oberfläche

$$A_Q = 2(a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a).$$

Von der Kugel sollte man wissen, dass ihre Oberfläche A_K viermal so groß ist wie die Fläche A_k eines Kreises vom gleichen Radius r ; also

$$A_K = 4\pi r^2 \text{ und } A_k = r^2\pi.$$

Der Mantel eines Kreiszylinders schließlich lässt sich als Rechteck abrollen, wenn man

ihn aufschneidet. Die eine Rechteckseite hat dann die Länge des Kreisumfangs

$$U_k = 2r\pi.$$

Eine unregelmäßig begrenzte, aber ebene Fläche bestimmt man am einfachsten dadurch, dass man sie vergrößert, verkleinert oder auch naturgetreu auf Millimeterpapier überträgt und dann ganz stumpfsinnig die Quadratmillimeter auszählt. Nahezu hoffnungslos wird es aber bei unregelmäßig gewölbten Flächen. Man bestimmt sie nicht mehr, man schätzt sie ab. Lungenbläschen z.B. sind nahezu Kugeln mit leidlich einheitlichem Radius (ca. 0,14 mm beim Menschen, abhängig natürlich davon, ob er gerade ein- oder ausgeatmet hat). Kennt man ihre Anzahl n (beim Menschen ca. $3 \cdot 10^8$) und unterschlägt man all die Röhrchen, die sie miteinander verbinden, so darf man für die gesamte Lungenoberfläche A_L näherungsweise setzen:

$$A_L \approx 4\pi r^2 \cdot n.$$

Beim Menschen gibt das rund 70 m^2 ; mit hinreichend feiner Unterteilung lässt sich auf wenig Raum viel Fläche unterbringen.

Riskanter ist schon die folgende Abschätzung: Ein erwachsener Mensch ist etwa 1,75 m groß (h_M) und hat einen Brust- und Hüftumfang U_M von ungefähr 95 cm. Die Oberfläche seines Körpers wird dann wohl nicht wesentlich von der eines entsprechenden Kreiszylinders abweichen (Abb. 1.6). Dessen Oberfläche lässt sich nach den Regeln der Mathematik ausrechnen.

wichtig

Zum Umgang mit quantitativen Größen gehört zuweilen auch der Mut zur groben Schätzung, nicht immer muss präzise gemessen werden.

Das Volumen eines unregelmäßig geformten Körpers lässt sich meist einfacher und genauer bestimmen als seine Oberfläche. Taucht man ihn nämlich in Wasser oder

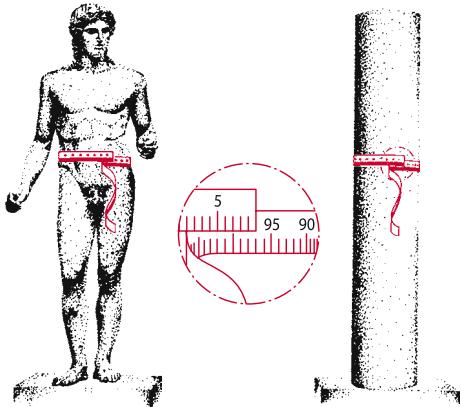


Abb. 1.6. Ein Mensch und sein „Ersatzzyylinder“ zur Abschätzung der Körperoberfläche. Es ist nicht wesentlich, ob man den Umfang zu 97 cm oder zu 95 cm ansetzt

eine andere Flüssigkeit, in der er sich nicht löst, so verdrängt er dort genau sein eigenes Volumen. Eine vorgegebene Wassermenge behält aber ihr Volumen bei, unabhängig von der Form des Gefäßes, in das man sie gießt – unter normalen Umständen jedenfalls. Ist das Gefäß ein Hohlzylinder, so ist das Wasservolumen der Höhe des Wasserspiegels proportional, mit der Grundfläche des Zylinders als Proportionalitätskonstante. Folglich kann man eine Skala längs seines Mantels statt in cm gleich in cm^3 teilen und so einen **Messzylinder** herstellen (☞ Abb. 1.7). Füllt man in ihn eine bestimmte Menge Wasser (Volumen V_0) und taucht man den Probekörper (Volumen V_K) hinein, so steigt der Wasserspiegel auf die Marke V_1 . Dann gilt

$$V_K = V_1 - V_0$$

– auch trivialen Zusammenhängen kann man mit einer Formel einen Hauch von Wissenschaftlichkeit geben. Zuweilen macht das Ablesen eines Messzylinders etwas Schwierigkeiten: Die Oberflächenspannung (s. Kap. 3.4.1) kann das Wasser an der Wand ein wenig hochziehen. Als Ablesemarke gilt die Mitte des Meniskus. Nach dem gleichen Prinzip wie die Messzylinder arbeiten *Pipet-*

ten und *Büretten*, die recht genau abgemessene Flüssigkeitsmengen abgeben können. Oft findet man auf solchen Geräten die Einheit **Milliliter** (ml) statt des cm^3 . Das braucht niemanden zu beunruhigen: schon vor vielen Jahren sind beide Einheiten gleichgesetzt worden. Definitionsgemäß gilt für das Liter (l): $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 10^3 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ ml}$. Bleibe zu erwähnen: 1 cm^3 entspricht 10^{-6} m^3 ; es ist ein Kubikzentimeter und nicht etwa ein Zentikubikmeter. Beim Potenzieren bilden Kennbuchstabe und Einheitsymbol eine (mathematische) Einheit.

1.1.4 SI-Einheiten

Die Festlegung von Einheiten ist reine Willkür. Es empfiehlt sich aber, System in diese Willkür zu bringen. Vor nicht langer Zeit waren Meter und Sekunde unabhängig voneinander definiert; das machte sie zu **Grundeinheiten** des internationalen Maßsystems und die zugehörigen Größen Länge und Zeit zu **Grundgrößen**. Der Präzisionsmesstechnik zuliebe hat man inzwischen das Meter über die Lichtgeschwindigkeit an die Sekunde angehängt; es ist der 299.792.458te Teil der Strecke, die das Licht im Vakuum in einer Sekunde zurücklegt. Trotzdem behandelt man das Meter aus alter Gewohnheit als Grundeinheit.

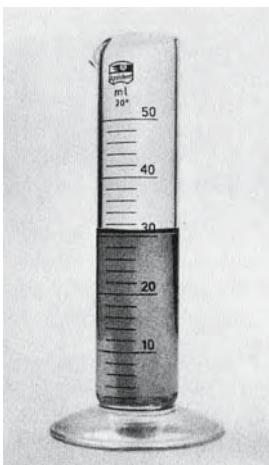


Abb. 1.7. Messzylinder, gefüllt mit 31 ml Flüssigkeit, die Messgenauigkeit ist bescheiden

Im Maßsystem kann man sich leichte Inkonsistenzen leisten. Es geht um Zweckmäßigkeit, nicht um Physik. Am zweckmäßigsten ist aber dasjenige System, das von den meisten Staaten akzeptiert wird. Es heißt *Système International d'Unités*, abgekürzt SI; seine Einheiten sind die SI-Einheiten. Es besitzt die sieben Grundgrößen Länge, Zeit, Masse, elektrische Stromstärke, Temperatur, Stoffmenge und Lichtstärke. Alle anderen physikalischen Größen sind vom Gesetzgeber zu *abgeleiteten Größen* erklärt worden.

wichtig

- Die Grundgrößen und -einheiten des „*Système International d'Unités*“:
- die *Länge* mit der Einheit *Meter* (m)
 - die *Zeit* mit der Einheit *Sekunde* (s)
 - die *Masse* mit der Einheit *Kilogramm* (kg)
 - die el. *Stromstärke* mit der Einheit *Ampère* (A)
 - die *Temperatur* mit der Einheit *Kelvin* (K)
 - die *Stoffmenge* mit der Einheit *Mol* (mol)
 - die *Lichtstärke* mit der Einheit *Candela* (cd)

Einer abgeleiteten Größe wird entsprechend ihrer Definition eine abgeleitete SI-Einheit zugeordnet, z.B.

wichtig

Abgeleitete Größe	Definition	SI- Einheit
Fläche	Länge^2	m^2
Volumen	Länge^3	m^3
Volumen stromstärke	$\text{Volumen}/\text{Zeit}$	m^3/s
Dichte	$\text{Masse}/\text{Volumen}$	kg/m^3

Einige häufiger gebrauchte SI-Einheiten bekommen eigene Namen, wie beispielsweise die Krafteinheit Newton = N = $\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2$ oder die Druckeinheit Pascal = Pa = $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$. Auch durch Vorsilbe erweiterte SI-Einheiten wie Mikrogramm (μg) und Kilometer (km) gehören zu den SI-Einheiten.

Die internationale Einigung auf das SI schließt die Empfehlung ein, tunlichst nur noch SI-Einheiten zu verwenden. Trotzdem wird man auch weiterhin 86.400 Sekunden

einen Tag nennen und in 24 Stunden unterteilen. Der Wetterbericht hat seine Angaben zum Luftdruck längst vom alten ehrwürdigen Torr und mmHg auf Hektopascal umgestellt; die Medizin bleibt da konservativer. Einen Druck kümmert das nicht. Er ist wie jede physikalische Größe unabhängig von der Einheit, in der er gemessen wird. Ob 110 mmHg oder 146 hPa, der Blutdruck ist der gleiche.

wichtig

Der Wert einer physikalischen Größe ist unabhängig von der Wahl der Einheit.

1.1.5

Dimensionskontrolle

Bei mathematischen Gleichungen müssen auf beiden Seiten die Zahlen stimmen, bei physikalischen Gleichungen darüber hinaus auch die Einheiten, die Dimensionen. Meter können Sekunden nie gleich sein, Kräfte nie Energien und Kilowatt (kW) nie Kilowattstunden (kWh), auch wenn da in Zeitungsartikeln manchmal manches durcheinandergeht. Daraus folgen einige Rechenregeln. Addieren kann man nur dimensionsgleiche Größen, Länge zu Länge, Kraft zu Kraft, Induktivität zu Induktivität. Für Subtraktionen gilt das gleiche. Multiplikation und Division sind dahingegen immer erlaubt, führen aber zu neuen physikalischen Größen: Weg durch Zeit gleich Geschwindigkeit mit der SI-Einheit m/s und der verkehrsüblichen Einheit km/h. Potenzieren wiederum ist nur mit reinen, dimensionslosen Zahlen im Exponenten möglich: Länge² gibt eine Fläche mit der SI-Einheit Quadratmeter (m^2). Eine Abklingfunktion e^{-t} ist dahingegen unmöglich, jedenfalls wenn der Buchstabe t die Zeit bedeuten soll. Um den Exponenten dimensionslos zu machen, muss noch eine „Relaxationszeit“ τ als Divisor hinzukommen ($e^{-t/\tau}$) oder eine „Zeitkonstante“ λ als Faktor ($e^{-\lambda \cdot t}$). Gleiches gilt für die Argumente an-

derer mathematischer Funktionen wie Sinus, Logarithmus, Hyperbeltangens.

Bei komplizierteren physikalischen Formeln lohnt zuweilen eine **Dimensionskontrolle**: Man notiert auf beiden Seiten der Gleichung die Einheiten der beteiligten physikalischen Größen und reduziert sie auf die Grundeinheiten. Wenn dann nicht auf beiden Seiten das Gleiche steht, sind die Formeln falsch, und man kann gleich auf Fehlersuche gehen, bevor man mühsam unsinnige Ergebnisse ausgerechnet hat.

Eine Dimensionskontrolle kann einen aber auch an physikalische Zusammenhänge erinnern, die man vielleicht vergessen hat. Beispiel: Zu einer Geschwindigkeit v gehört die Einheit m/s; die Änderungsgeschwindigkeit einer Geschwindigkeit heißt Beschleunigung und bekommt die Einheit $(\text{m/s})/\text{s} = \text{m/s}^2$. Eine Kraft ist gleich Masse m mal Beschleunigung, Einheit $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$. Das Produkt Gewichtskraft mal Hubhöhe gibt die Hubarbeit, also eine Energie W . Ihr gebührt demnach die Einheit $(\text{kg} \cdot \text{m/s}^2) \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$. Nun ist aber m^2/s^2 gleich $(\text{m/s})^2$, also die Einheit eines Geschwindigkeitsquadrates v^2 . Woraus folgt, dass auch das Produkt Masse mal Geschwindigkeitsquadrat die Dimension einer Energie besitzt. In der Tat gilt für die sog. kinetische Energie $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$.

Hier zeigt sich freilich auch eine Schwäche der Dimensionsanalyse: Reine Zahlenfaktoren wie hier das $\frac{1}{2}$ vermag sie nicht zu erkennen.

Alkohol weniger Moleküle als ein Gramm Wasser; die Molekülmassen verschiedener chemischer Verbindungen sind nicht gleich. Ehe die Chemiker Molekülmassen absolut messen konnten, kannten sie schon deren Relationen; die Massen der Moleküle von Wasser und Alkohol stehen im Verhältnis 18:46. Das hat zu der Definition der Grundgröße „Stoffmenge“ mit der Einheit Mol geführt. Auf das Volumen bezogene Mengen bezeichnet man als Dichten (Anzahldichte, Massendichte, Stoffmengendichte) und die prozentualen Anteile einzelner Substanzen an Gemischen als Gehalte oder Konzentrationen.

1.2.1 Masse und Stoffmenge

Kein Backrezept kann auf Mengenangaben verzichten: $\frac{1}{4}$ Ltr. Milch, 250 g Weizenmehl, 3 Eier. „Ltr.“ steht hier für Liter. Bei Flüssigkeiten lässt sich das Volumen am leichtesten messen. Größere Objekte wie die Eier kann man einfach abzählen. Beim Mehl bevorzugt man aber das Gewicht, gemessen mit einer Waage. Jeder Kaufmann, jedes Postamt benutzt Waagen. Wie sie funktionieren, wird in Kap. 2.2.7 beschrieben werden. Dabei wird sich herausstellen, dass die Umgangssprache mit dem Wort „Gewicht“ die physikalische Größe **Masse** meint. Deren Eigenschaften werden in Kap. 2.3.1 genauer behandelt. Jedenfalls ist die Masse eine Grundgröße im SI und bekommt die Einheit **Kilogramm** (kg). Für den Hausgebrauch wird das Kilogramm hinreichend genau repräsentiert durch die Masse von 1000 ml Wasser.

Im Gegensatz zum Wasser bringt es ein Kilobarren Gold nur auf etwa 50 cm^3 . Sind die beiden Substanzmengen nun gleich, weil ihre Massen gleich sind, oder sind sie verschieden, weil ihre Volumina verschieden sind? Die Frage lässt sich nicht beantworten, weil der Gebrauch der Vokabel „Substanzmenge“ nicht eindeutig definiert ist. Die beiden „Stoffmengen“ sind jedenfalls verschieden.

Alle Materie besteht aus Atomen, die sich, von wenigen Ausnahmen abgesehen, zu Molekülen zusammenlegen. Ein natürliches

1.2 Mengenangaben

Einleitung

Alle Materie besteht aus submikroskopischen Teilchen, aus Atomen oder Molekülen. Es liegt deshalb grundsätzlich nahe, eine Substanzmenge durch die Anzahl der in ihr vorhandenen Moleküle zu beschreiben. Sie sind aber zu viele, als dass man diese Anzahl durch Abzählen bestimmen könnte. Es ist leichter, eine Probe zu wiegen; auch die Masse kann als Maß für Substanzmengen benutzt werden. Allerdings enthält ein Gramm

Maß für die Menge einer Substanz wäre die Anzahl N ihrer Moleküle. Freilich, Moleküle sind klein und entsprechend zahlreich; zu handlichen Mengen gehören unhandlich große Anzahlen, weit über 10^{20} . Um sie zu vermeiden, hat man in das Système International d'Unités eine spezielle, zu N proportionale Grundgröße eingefügt: die **Stoffmenge** n mit der Einheit **Mol** („abgekürzt“ mol). Die Proportionalitätskonstante heißt

$$\text{Avogadro-Konstante } N_A = 6,0220 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

wichtig

Die Stoffmenge n ist ein Maß für die Anzahl der Teilchen in einer Probe. Ihre Einheit Mol entspricht $6,0220 \cdot 10^{23}$ Teilchen.

Damit ist das Problem aber zunächst nur verschoben, denn niemand kann die Moleküle auch nur eines Sandkorns abzählen und durch N_A dividieren, um die Stoffmenge zu bestimmen. Man legt weiterhin seine Substanzproben auf die Waage, misst also ihre Masse m , und rechnet um mit der sog.

$$\text{molare Masse } M = \frac{\text{Masse } m}{\text{Stoffmenge } n}$$

der beteiligten Moleküle (M wird auch **Molmasse** genannt – die Einheit ist g/mol). Dafür darf die Probe allerdings aus nur einer einzigen Molekülsorte bestehen, deren Molmasse man kennt. Woher? In Natur und Technik gibt es viel zu viele Molekülarten, als dass man alle ihre Molmassen in einem dicken Tabellenbuch zusammenfassen könnte. Das ist aber auch nicht nötig, denn Moleküle setzen sich aus Atomen zusammen, von denen es nicht allzu viele verschiedene Arten gibt, die der rund hundert chemischen Elemente nämlich. Deren molare Massen lassen sich auflisten. Dann braucht man nur noch die chemische Formel eines Moleküls zu kennen, um seine molare Masse auszurechnen:

- Wasserstoffatom: $M(H) = 1 \text{ g/mol}$
- Sauerstoffatom: $M(O) = 16 \text{ g/mol}$
- Wassermolekül: $M(H_2O) = 18 \text{ g/mol}$

Die molare Masse $M = m/n$ mit der Einheit g/mol einer Molekülsorte ist die Summe der molaren Massen der das Molekül bildenden Atome.

1.2.2

Dichten und Gehalte

Volumen, Masse und Stoffmenge sind Kenngrößen einzelner Substanzproben, eines silbernen Löffels etwa, eines Stücks Würfelszucker, einer Aspirin-Tablette; sie sind keine Kenngrößen von Substanzen wie Silber, Saccharose oder Acetylsalicylsäure. Vom Wasser wurde schon gesagt, dass ein Liter 1000 g wiegt; beim Silber sind es 10,5 kg und bei der Saccharose 1586 g. Zwei Liter wiegen jeweils doppelt soviel und 0,5 l die Hälfte. Der Quotient aus Masse und Volumen ist substanztypisch. Man nennt ihn

$$\text{Dichte } \rho = \frac{\text{Masse } m}{\text{Volumen } V}$$

Manchmal empfiehlt sich der Name **Massendichte**, um deutlich von der

$$\text{Stoffmengendichte} = \frac{\text{Stoffmenge}}{\text{Volumen}}$$

zu unterscheiden (die zuweilen kurz **Molarität** genannt wird). Wenn man diese mit der Avogadro-Konstanten multipliziert, erhält man die

$$\text{Teilchenanzahldichte} = \frac{\text{Teilchenanzahl}}{\text{Volumen}}$$

Die Kehrwerte der ersten beiden Dichten bekommen Namen. Massenbezogene Größen heißen üblicherweise „spezifisch“, also

$$\begin{aligned} \text{spezifisches Volumen } V_s &= \frac{\text{Volumen}}{\text{Masse}} \\ &= \frac{1}{\text{Dichte}} \end{aligned}$$

Der Kehrwert der Stoffmengendichte müsste korrekt „stoffmengenbezogenes Volumen“

genannt werden. Das ist zu umständlich, darum spricht man lieber vom

$$\text{Molvolumen } V_n = \frac{\text{Volumen}}{\text{Stoffmenge}},$$

meist in der Einheit Liter/Mol (l/mol) angegeben. Man darf sich durch den Namen nicht zu der Annahme verleiten lassen, beim Molvolumen handele es sich um ein Volumen, das in m³ oder l allein gemessen werden könnte.

Der thermischen Ausdehnung wegen sind alle Dichten temperaturabhängig, auch die Molarität. Wen das stört, der kann auf die

$$\text{Molalität } c_m = \frac{\text{Stoffmenge}}{\text{Masse}}$$

mit der Einheit mol/kg ausweichen.

wichtig

- ▶ spezifische Größen:
- ▶ Massendichte $\rho = m/V$ (übliche Einheit g/ml)
- ▶ Kehrwert = V/m = spezifisches Volumen
- ▶ Stoffmengendichte (Molarität) = n/V
- ▶ Kehrwert = V/n = molares Volumen
= Molvolumen
- ▶ Molalität = n/m

Für die Verkehrstüchtigkeit eines Autofahrers spielt es eine erhebliche Rolle, ob er gerade eine halbe Flasche Bier oder eine halbe Flasche Schnaps getrunken hat. Jeder Doppelkorn enthält mehr Alkohol als das stärkste Bockbier. Was ist damit gemeint? Spirituosen sind Mischungen, im Wesentlichen aus Alkohol und Wasser; die wichtigen Geschmacksstoffe, die z.B. Kirschwasser von Himbeergeist unterscheiden, spielen mengenmäßig kaum eine Rolle. Zur Kennzeichnung eines Gemisches dient der

$$\text{Gehalt} = \frac{\text{Teilmenge}}{\text{Gesamtmenge}}$$

Als Quotient zweier Mengen ist er eine reine Zahl und lässt sich darum auch in Prozent angeben. Beim Blutalkohol bevorzugt man das um einen Faktor 10 kleinere Promille, bei

Spuren von Beimengungen das ppm; die drei Buchstaben stehen für „parts per million“, also 10⁻⁶. Hochentwickelte Spurenanalyse dringt bereits in den Bereich ppb ein, „parts per billion“; gemeint ist 10⁻⁹, denn im Angelsächsischen entspricht „billion“ der deutschen Milliarde (=10⁹) und nicht der Billion (=10¹²). Die Summe aller Gehalte einer Mischung muss notwendigerweise eins ergeben.

Auf welche Mengenangabe sich ein Gehalt bezieht, ist zunächst noch offen; man muss es dazu sagen. Der

$$\text{Massengehalt} = \frac{\text{Masse des gelösten Stoffes}}{\text{Masse der Lösung}}$$

wird zuweilen als „Gew.%“ bezeichnet, als „Gewichtsprozent“ – und der

$$\text{Volumengehalt} = \frac{\text{Volumen des gelösten Stoffes}}{\text{Volumen der Lösung}}$$

als „Vol.%“, als „Volumenprozent“ also. Wenn man es ganz genau nimmt, muss man ein wenig aufpassen: Die Teilmassen einer Mischung addieren sich präzise zur Gesamtmasse; die Volumina tun dies nicht unbedingt. Allerdings ist die Volumenkontraktion oder -dilatation beim Mischen meist gering. Der

$$\text{Stoffmengengehalt}$$

$$= \frac{\text{Stoffmenge des gelösten Stoffes}}{\text{Stoffmenge der Lösung}}$$

ist dem Teilchenanzahlgehalt gleich, denn die Avogadro-Konstante steht im Zähler wie im Nenner, kürzt sich also weg. Einen Stoffmengengehalt bezeichnet man auch als *Molenbruch* oder als „At.%“ (Atomprozent). ppm und ppb werden üblicherweise nur bei Stoffmengengehalten verwendet (und nach neuester Empfehlung am besten gar nicht).

Rechenbeispiel

Wie groß ist die Stoffmengendichte des Alkohols in einem Schnaps mit 40 Vol.%? Die Dichte des Äthylalkohols (C2H5OH) ist 0,79 g/ml.

Lösung: Die Stoffmengendichte des reinen Alkohols kann zum Beispiel als Anzahl der Alkoholmoleküle in Mol pro Liter Alkohol angegeben werden. Dazu muss die Massendichte durch die Molmasse M des Äthylalkohols geteilt werden. Laut Anhang ergibt sich die Molmasse zu:

$$M(C_2H_5OH) = 2 \cdot M(C) + 6 \cdot M(H) + M(O) \\ \approx 24 \text{ g/mol} + 6 \text{ g/mol} + 16 \text{ g/mol} = 46 \text{ g/mol}$$

Die Stoffmengendichte des reinen Alkohols ist dann

$$\frac{n}{V} = \frac{790 \frac{\text{g}}{\text{l}}}{46 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 17,18 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$$

Im Schnaps ist aber nur 40% des Volumens Alkohol, also ist hier die Stoffmengendichte um den Faktor 0,4 kleiner:

$$\frac{n}{V} = 0,4 \cdot \frac{790 \frac{\text{g}}{\text{l}}}{46 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 6,87 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$$

1.3 Mathematische Hilfsmittel

Einleitung

Die Mathematik liefert dem Physiker unentbehrliches Handwerkszeug; kein Physikbuch kommt daran vorbei. Manches Werkzeug ist auf einen Spezialfall zugeschnitten; das nimmt man erst zur Hand, wenn man es braucht. Andere lassen sich aber so vielseitig verwenden, dass es Sinn macht, sie gleich zu Beginn bereitzulegen, auch wenn die „Gebrauchsanweisungen“ dann etwas abstrakter formuliert werden müssen.

1.3.1 Messfehler und Messunsicherheiten

Kein Messergebnis kann absolute Genauigkeit für sich in Anspruch nehmen. Oftmals ist schon die Messgröße selbst gar nicht präzise definiert. Wenn ein Straßenschild in Nikolausberg behauptet, bis Göttingen

seien es 4 km, dann genügt das für die Zwecke des Straßenverkehrs vollauf. Gemeint ist so etwas wie „Fahrstrecke von Ortsmitte bis Stadtzentrum“. Wollte man die Entfernung auf 1 mm genau angeben, müsste man zunächst die beiden Ortsangaben präzisieren, z.B. „Luftlinie von der Spitze der Wetterfahne auf der Klosterkirche von Nikolausberg bis zur Nasenspitze des Gänseliesels auf dem Brunnen vor dem alten Rathaus in Göttingen“. Der messtechnische Aufwand steige beträchtlich und niemand hätte etwas davon. Bei allen Messungen muss man Aufwand und Nutzen gegeneinander abwägen.

wichtig

Messfehler: Differenz zwischen Messwert und grundsätzlich unbekanntem wahren Wert der Messgröße.

Messfehler lassen sich in zwei große Gruppen einteilen: die *systematischen* und die *zufälligen Fehler*. Wenn man sein Lineal auf ein Blatt Millimeterpapier legt, sieht man zumeist eine deutliche Diskrepanz zwischen den beiden Skalen; Papier ist kein gutes Material für Längenmaßstäbe. Wer sich trotzdem auf sein Blatt Millimeterpapier verlässt, macht einen systematischen Fehler, weil die Skala nicht genau stimmt. Grundsätzlich gilt das für jede Längenmessung, für jede Messung überhaupt. Auch Präzisionsmessinstrumente können *Eichfehler* ihrer Skalen nicht vollständig vermeiden. Um sie in Grenzen zu halten, müssen z.B. Händler ihre Waagen von Zeit zu Zeit nacheichen lassen. Aber auch in Messverfahren können systematische Fehler implizit eingebaut sein. Hohe Temperaturen wird man oft etwas zu niedrig messen, da der Messfühler seine Temperatur erst angeleichen muss und der Benutzer vielleicht nicht die Geduld aufbringt, lange genug zu warten.

wichtig

Systematischer Fehler: prinzipieller Fehler des Messverfahrens oder Messinstruments, z.B. Eichfehler – reproduzierbar.

Systematische Fehler sind schwer zu erkennen; man muss sich sein Messverfahren sehr genau und kritisch ansehen. Der zufällige Fehler meldet sich selbst, wenn man eine Messung wiederholt: Die Ergebnisse weichen voneinander ab. Letzten Endes führt diese **Streuung** von Störeffekten her, die man nicht beherrscht und zum großen Teil nicht einmal kennt.

wichtig

Zufällige Fehler verraten sich durch Streuung der Messwerte.

Wie groß ist eine Erbse? Diese Frage zielt auf die „Erbse an sich“, nicht auf ein ganz bestimmtes Einzelexemplar. Dabei spielt die Sorte eine Rolle, der Boden, die Düngung, das Wetter. Aber auch innerhalb einer Ernte von einem ganz bestimmten Feld streuen die Durchmesser verschiedener Erbsen deutlich. Deshalb kann nur nach einer mittleren Größe gefragt werden.

Nach alter Regel bestimmt man den **Mittelwert** $\langle x \rangle$ einer Reihe von Messwerten x_j dadurch, dass man sie alle zusammenzählt und das Resultat durch ihre Anzahl n dividiert:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$$

Der Index j läuft von 1 bis n , er kennzeichnet den einzelnen Messwert. Nun wird niemand alle zigtausend Erbsen einer Ernte einzeln ausmessen, um den wahren Mittelwert $\langle d_w \rangle$ des Durchmessers zu bestimmen. Man begnügt sich mit einer **Stichprobe**. Zum Beispiel wurden bei $n = 12$ willkürlich aus einer Tüte herausgegriffenen Erbsen die Quotienten $x_j = d_j / \text{mm}$ gemessen und in der folgenden Wertetabelle zusammengestellt:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
7,5	7,9	7,6	8,2	7,4	8,0	8,0	7,9	7,6	7,7

x_{11}	x_{12}
7,2	7,5

Daraus errechnet sich der Mittelwert der Stichprobe zu $\langle x \rangle = 92,5/12 = 7,71$.

wichtig

Mittelwert = Quotient aus Summe und Anzahl der Messwerte, bester Schätzwert des unbekannten wahren Wertes.

Wie zuverlässig ist ein Mittelwert? Genau lässt sich das nicht sagen, aber die Wahrscheinlichkeitsrechnung hilft weiter. So viel leuchtet ein: Der Mittelwert der Stichprobe wird umso zuverlässiger sein, je größer man den Umfang n der Stichprobe macht, und je weniger die einzelnen Messwerte streuen. n hat man selbst in der Hand, seine Größe ist eine Frage des Aufwandes, den man treiben will. Benötigt wird aber noch ein **Streumaß** für die Messwerte. Die Differenzen $x_j - \langle x \rangle$ zwischen den einzelnen Messwerten und dem Mittelwert können dieses Maß nicht unmittelbar liefern, weil sie positive wie negative Vorzeichen haben und sich zu Null aufaddieren; so ist letzten Endes der Mittelwert definiert. Die Quadrate $(x_j - \langle x \rangle)^2$ sind aber wie alle Quadratzahlen grundsätzlich positiv. Wenn man sie addiert und durch $n-1$ teilt, bekommt man die sog.

$$\text{Varianz } s^2 = \frac{\sum (x_j - \langle x \rangle)^2}{n-1}$$

Der Einfachheit halber sind hier die Grenzen der Summe nicht mitgeschrieben worden. Dass durch $n-1$ und nicht durch n dividiert wird, liegt daran, dass man mindestens zwei Messwerte braucht, um einen Mittelwert auszurechnen zu können. Ein eigenes Buchstabsymbol bekommt die Varianz nicht; sie ist das Quadrat der

$$\text{Standardabweichung } s = \sqrt{\text{Varianz}}$$

Manche Taschenrechner erlauben, s mit einem einzigen Tastendruck auszurechnen.

s^2 und s lassen sich grundsätzlich für jede Messreihe angeben. Zuverlässige Bedeutung haben sie aber nur, wenn die Messwerte tatsächlich rein zufällig streuen. Mathematisch

lässt sich dies daran erkennen, dass sich die Messwerte entsprechend der sog. **Normalverteilung** (auch **Gauß-Verteilung** genannt) um ihren Mittelwert scharen. Wie man dies feststellt, erläutern einschlägige Mathematikbücher. Sind die Messwerte tatsächlich normal verteilt, so weichen 68% von ihnen nicht mehr als eine Standardabweichung nach oben oder nach unten vom Mittelwert ab, liegen also zwischen $\langle x \rangle - s$ und $\langle x \rangle + s$.

Dividiert man s noch einmal durch \sqrt{n} , so bekommt man die

Standardabweichung des Mittelwertes

$$s(\langle x \rangle) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

als Maß für die Zuverlässigkeit des Mittelwertes selbst: Bei normal verteilten Messwerten liegt $\langle x \rangle$ mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% nicht weiter als eine Standardabweichung von dem unbekannten wahren Mittelwert entfernt.

wichtig

Standardabweichung des Mittelwertes: Schätzwert der sich aus zufälligen Messfehlern ergebenden Messunsicherheit.
Messunsicherheit: Abschätzung des Intervalls, in dem der unbekannte wahre Wert wahrscheinlich liegt.

Im Erbsenbeispiel kommen heraus: Varianz = $0,0864 \text{ mm}^2$; Standardabweichung = $0,294 \text{ mm}$; Standardabweichung des Mittelwertes = $0,0849 \text{ mm}$. Im Allgemeinen ändern sich Varianz und Standardabweichung nicht, wenn man den Umfang n der Stichprobe vergrößert; man erhält sie lediglich genauer. Das heißt aber auch, dass der Standardabweichung des Mittelwertes umgekehrt proportional zu \sqrt{n} kleiner wird. Grundsätzlich kann man also die Messgenauigkeit trotz (zufällig!) streuernder Messwerte durch Ausdehnung der Stichprobe so weit treiben wie man will. Nur wächst der Aufwand leider quadratisch mit dem Gewinn an Genauigkeit.

Bei hinreichend präzisen Messverfahren und hinreichend ähnlichen Messobjekten braucht man sich über Standardabweichung und Standardabweichung des Mittelwertes weiter keine Gedanken zu machen. Es wäre unsinnig, wollte man in der Klinik allen Patienten jeden Morgen die Körpertemperatur fünfmal dicht hintereinander messen, nur um einen Mittelwert zu bestimmen und den Standardfehler herunterzudrücken; eine einzige Messung erfüllt ihren Zweck durchaus. Wenn aber die einzelnen Messwerte merklich streuen und gar noch wichtige Schlüsse aus dem Ergebnis gezogen werden, dann sollte die Messunsicherheit beziehungsweise die Standardabweichung des Mittelwertes schon ausgerechnet werden.

Sie mitzuteilen gibt es mehrere Möglichkeiten. In Diagrammen kann man zu jedem Messpunkt einen **Fehlerbalken** (besser: **Messunsicherheitsbalken**) zeichnen (☞ Abb. 1.8). Messwerten fügt man die Messunsicherheit an. Im Erbsenbeispiel könnte man schreiben:

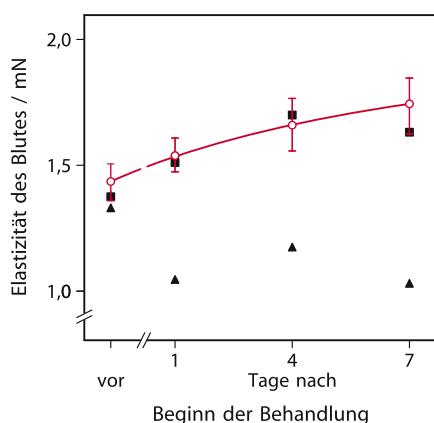


Abb. 1.8. Elastizität des Blutes während einer Behandlung mit einem blutverflüssigenden Mittel als Beispiel für ein Diagramm mit Fehlerbalken (in diesem Zusammenhang spielen das Messverfahren und die medizinische Bedeutung der Messwerte keine Rolle). Kreise und Fehlerbalken: Mittelwerte aus einer Beobachtungsgruppe von 28 Patienten mit Standardabweichung des Mittelwertes; die ausgefüllten Messpunkte gehören zu zwei Mitgliedern der Beobachtungsgruppe: einzelne Messwerte können durchaus weit außerhalb des Standardfehlers liegen.

mittlerer Durchmesser = $(7,71 \pm 0,09)$ mm.

Meist lohnt es nicht, von der Messunsicherheit mehr als eine zählende Dezimalstelle anzugeben; man sollte aber nach oben aufrunden, um nicht hochzustapeln. Bei obiger Schreibweise spricht man von der *absoluten Messunsicherheit* und bezeichnet sie bei einer Messgröße x nach DIN-Norm mit $u(x)$ (oft wird auch Δx geschrieben; das bedeutet aber eigentlich einen Messfehler, also eine bestimmte Abweichung vom wahren Wert). Erlaubt ist aber auch,

mittlerer Durchmesser = $7,71 (1 \pm 1,1\%)$ mm

zu schreiben. Hier spricht man von der *relativen Messunsicherheit* $u(x)/x_0$. Beide Bezeichnungen sind sprachlich nicht so ganz korrekt, denn es handelt sich ja jedes Mal um die gleiche Messunsicherheit.

wichtig

Absolute Messunsicherheit $u(x)$,
relativer Messunsicherheit $u(x)/x_0$.

Oftmals werden Messergebnisse kombiniert, um etwas anderes auszurechnen; dabei reichen sie ihre Messunsicherheiten an das Resultat weiter: Als Folge der *Fehlerfortpflanzung* bekommt dies eine *gesamte Messunsicherheit*. Wer 100 Erbsen dicht an dicht aneinander legt, darf erwarten, dass die Kette ca. 771 mm lang wird, mit einer absoluten Unsicherheit von ± 9 mm und einer relativen von nach wie vor $\pm 1,1\%$. Bei der Addition von Messwerten addieren sich die absoluten Unsicherheiten. Für die Subtraktion gilt das Gleiche. Gewiss darf man darauf hoffen, dass sich die absoluten Fehler z.T. kompensieren, aber verlassen darf man sich darauf nicht. Dieser Zusammenhang kann zu hohen relativen Unsicherheiten führen, wenn sich die gesuchte Größe nur als (kleine) Differenz zweier (größer) Messwerte bestimmen lässt. Wie viel Nahrung ein Säugling beim Stillen aufgenommen hat, stellt man üblicherweise dadurch fest, dass man ihn vorher und hinterher wiegt, mitsamt den Windeln. Grund-

sätzlich könnte man auch die Mutter wiegen, aber dann wäre das Resultat weniger genau.

Bei der Multiplikation von Messwerten addieren sich die relativen Unsicherheiten, wie die folgende Rechnung für den Zusammenhang $Z=X \cdot Y$ zeigt. Bezieht man die absoluten Unsicherheiten mit ein, so hat man zu schreiben:

$$Z = Z_0 \pm u(Z) = (X_0 \pm u(X)) \cdot (Y_0 \pm u(Y)).$$

Ausmultiplizieren der Klammern führt zu

$$Z_0 \pm u(Z) = X_0 \cdot Y_0 \pm X_0 \cdot u(Y) \pm Y_0 \cdot u(X) \\ \pm u(X) \cdot u(Y).$$

Da man grundsätzlich mit der unglücklichsten Vorzeichenkombination rechnen muss, addieren sich die drei letzten Glieder zu der absoluten Unsicherheit $u(Z)$ und damit zur relativen Unsicherheit:

$$\frac{u(Z)}{Z_0} = \frac{X_0 \cdot u(Y)}{X_0 \cdot Y_0} + \frac{Y_0 \cdot u(X)}{X_0 \cdot Y_0} + \frac{u(X) \cdot u(Y)}{X_0 \cdot Y_0} \\ = \frac{u(X)}{X_0} + \frac{u(Y)}{Y_0} + \frac{u(X) \cdot u(Y)}{X_0 \cdot Y_0}.$$

Liegt die relative Unsicherheit der beiden Einzelmesswerte in der Größenordnung Prozent oder gar darunter, so ist ihr Produkt um mindestens zwei Zehnerpotenzen kleiner, kann also vernachlässigt werden: Addition der relativen Unsicherheiten bei Multiplikation der Messwerte. Für deren Division gilt das Gleiche.

wichtig

Fehlerfortpflanzung (gesamte

Messunsicherheit):

Addition und Subtraktion der Messwerte:

Addition der absoluten Messunsicherheiten,

Multiplikation und Division der Messwerte:

Addition der relativen Messunsicherheiten.

In der Physik und im täglichen Leben macht man sich meist nicht die Mühe, die Standardabweichung des Mittelwertes tatsächlich

auszurechnen. Die meisten Messverfahren sind für ihren Zweck präzise genug, sodass sich Messwiederholungen nicht lohnen. Trotzdem sollte man die Messunsicherheit abschätzen und Zahlenwerte grundsätzlich nicht genauer hinschreiben, als man sie hat: die letzte angegebene Dezimalstelle sollte noch stimmen. Wenn das Schild in Nikolausberg behauptet, bis Göttingen seien es 4 km, dann sollte die tatsächliche Entfernung näher bei diesem Wert liegen als bei 3 km oder bei 5 km. Darum sollte auch der mittlere Radius der Erdbahn zu $149,5 \cdot 10^6$ km angegeben werden und nicht zu 149.500.000 km, denn für die fünf Nullen kann niemand garantieren. Umgekehrt sollte die Länge des 50-m-Beckens in einem wettkampfgeeigneten Schwimmstadion durchaus 50,0 m, wenn nicht gar 50,00 m betragen.

wichtig

Man sollte alle Dezimalstellen angeben, die man zuverlässig gemessen hat, nicht weniger, aber auch nicht mehr.

Messwerte streuen, der zufälligen Fehler wegen. Deshalb lassen sich in einem Diagramm die Messpunkte nur dann leicht durch eine glatte Kurve verbinden, wenn die Streuung geringer ist als die Strichbreite. In Abb. 1.8 ist dem dadurch nachgeholfen worden, dass nur die aus zusammengehörenden Messungen gebildeten Mittelwerte als offene Kreise eingetragen wurden. Hätte man alle Messpunkte in das Diagramm aufgenommen, so wäre es unübersichtlicher geworden; vermutlich hätten sich die Punkte aber erkennbar um ihre Mittelwerte geschart und so den Zeichner veranlasst, mit Kurvenlineal und Augenmaß eine glatte **Ausgleichskurve** nahezu der gleichen Form hindurchzulegen. Grundsätzlich kann man auch rechnen. Der mathematische Aufwand ist aber nicht gering, es sei denn, man gibt sich mit einer *Ausgleichsgeraden* zufrieden (manche Taschenrechner vermögen deren Parameter zu bestimmen, Tabellenkalkulationsprogramme auf dem PC sowieso).

Ausgleichsgerade (Ausgleichskurve): an eine Punktreihe im Diagramm angepasste Gerade (glatte Kurve).

Rechenbeispiel

Es soll die Massendichte eines würzelförmigen Spielzeug-Bauklotzes aus Holz bestimmt werden. Dazu wird die Kantenlänge mit einem Lineal zu $a = (34,5 \pm 0,25)$ mm gemessen. Dabei wurde die Ablesegenauigkeit zu $\pm 0,25$ mm geschätzt. Die Masse wurde mit einer einfachen digitalen Laborwaage zu $m = (30,0 \pm 0,1)$ g gemessen. Welchen Wert hat die Dichte und mit welcher Messunsicherheit ist dieser Wert behaftet?

Lösung: Das Volumen des Bauklotzes berechnet sich zu $V = a^3 = 41063,625$ mm³. Hier wurden aber sicher unsinnig viele Stellen angegeben. Die relative Messungenauigkeit für die Kantenlänge ist:

$$\frac{u(a)}{a} = \frac{0,25\text{mm}}{34,5\text{mm}} = 0,0072 .$$

Da zur Berechnung des Volumens a zweimal mit sich selbst multipliziert wird, ist die relative Unsicherheit des Volumens nach der einen Regel zur Fehlerfortpflanzung dreimal so groß:

$$\frac{u(V)}{V} = 3 \cdot \frac{u(a)}{a} = 0,022 .$$

Die absolute Unsicherheit des Volumens ist also $u(V) = 893$ mm³. Eine vernünftige Angabe des Volumens lautet also $V = (41 \pm 0,9)$ cm³. Die Dichte ist

$$\rho = \frac{m}{V} = 0,7306 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Die relative Unsicherheit ergibt sich wieder aus einer Addition:

$$\begin{aligned} \frac{u(\rho)}{\rho} &= \frac{u(m)}{m} + \frac{u(V)}{V} \\ &= 0,0033 + 0,022 = 0,0253 . \end{aligned}$$

Die Unsicherheit der Dichte wird also im Wesentlichen durch die Unsicherheit des Volumens bestimmt. Absolut ist also die Dichte des Bauklotzes:

$$\rho = (0,73 \pm 0,02) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

1.3.2 Vektoren und Skalare

Wie finden die Männer vom Bautrupp im Bürgersteig den Deckel über einem unterirdischen Hydranten, wenn frischer Schnee gefallen ist? Sie suchen deutlich über Kopfhöhe an einem Laternenmast ein Schild nach Art der Abb. 1.9 und wissen dann: senkrecht zum Schild 5,5 m geradeaus, dann im rechten Winkel 0,5 m zur richtigen Seite; dort hat der Deckel zu sein. Eine Angabe über die dritte Richtung im Raum, über die Höhe, ist nicht nötig; Hydrantendeckel schließen mit dem Asphalt des Bürgersteiges ab. Bei einem im Mittelalter vergrabenen Schatz wüsste man aber ganz gerne noch: 2 Klafter tief in der Erde.

Eine Position in der Welt, einen Punkt im Raum kann man nicht absolut festlegen, sondern nur relativ zu einem **Koordinatensystem**. Das kann das Gitternetz auf den Karten im Atlas sein oder auch vom Schild am Laternenpfahl vorgegeben werden. Das Koordinatensystem darf willkürlich gewählt



Abb. 1.9. Hinweisschild für einen Hydrantendeckel in der Straße. Der Deckel befindet sich fünfeinhalb Meter vor dem Schild und einen halben Meter nach rechts versetzt.

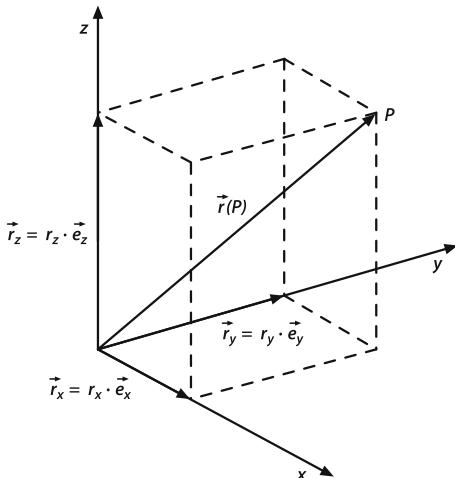


Abb. 1.10. Der Ortsvektor zum Punkt P.

werden, aber so vernünftig wie möglich sollte man schon wählen.

Der **Raum**, in dem alles geschieht, was geschieht, hat drei voneinander unabhängige Richtungen: vorn-hinten, rechts-links, oben-unten. Man nennt ihn *dreedimensional* (und benutzt hier das Wort „Dimension“ in einem ganz anderen Sinn als im Kap. 1.1.5). Folglich braucht ein räumliches Koordinatensystem drei sog. **Achsen**: sie zeigen in drei Raumrichtungen und schneiden sich in einem Punkt, dem *Nullpunkt* des Systems. Üblicherweise ordnet man ihnen die letzten drei Buchstaben des Alphabets zu: *x-Achse*, *y-Achse*, *z-Achse*. Vom Nullpunkt aus kann man jeden Punkt P im Raum grundsätzlich in drei geraden Schritten erreichen, ein jeder parallel zu einer anderen Achse. Die Abschnitte auf den Achsen r_x , r_y , und r_z (siehe Abb. 1.10), die diesen Schritten entsprechen, sind die sog. **Koordinaten** des Punktes P. Die drei Achsen müssen nicht senkrecht aufeinander stehen, aber wenn sie es tun, spart das mancherlei Mühe. Man spricht dann von *kartesischen Koordinaten* (René Descartes, „Renatus Cartesius“, 1596-1650).

Zieht man vom Nullpunkt des Koordinatensystems einen Pfeil zum Punkt P, so erhält man dessen **Ortsvektor** $\vec{r}(P)$. Er legt P eindeutig fest. Allgemein wird eine physikalische Größe durch einen **Vektor** beschrie-

ben, wenn sie eine Richtung im Raum hat, wie z.B. eine Kraft, eine Geschwindigkeit, eine elektrische Feldstärke. Im Gegensatz dazu stehen physikalische Größen, die durch **Skalare**, denen sich keine Richtung im Raum zuordnen lässt, beschrieben werden, wie etwa die Masse, die Temperatur, der elektrischen Widerstand. Auch mit Vektoren kann man rechnen, die Regeln müssen aber natürlich anders festgelegt werden als bei Skalaren. Darum malt man in Formeln über die Buchstabsymbole der Vektoren kleine **Vektorpfeile**: Kraft \vec{F} , Geschwindigkeit \vec{v} , Feldstärke \vec{E} , aber Masse m , Temperatur T , Widerstand R .

wichtig

Physikalische Größe, die eine Richtung im Raum haben: **Vektoren**; Ungerichtete physikalische Größen: **Skalare**.

Vektoren lassen sich durch Pfeile symbolisieren. Sie haben nicht nur eine Richtung, sondern auch einen positiven (skalaren) **Betrag**, der durch die Pfeillänge symbolisiert wird. Auch gerichtete physikalische Größen haben ja neben der Richtung einen Betrag: den Betrag der Geschwindigkeit, die Stärke der Kraft, usw. Ein Vektor \vec{a} kann als Produkt seines Betrages $|\vec{a}|$ und des **Einheitsvektors** in seiner Richtung \vec{e}_a geschrieben werden. Dabei wird die Einheit der physikalischen Größe immer dem Betrag zugeordnet. Wenn in diesem Buch gelegentlich einfach der Buchstabe ohne Vektorpfeil geschrieben wird, so ist dann immer der Betrag des Vektors gemeint, also $a = |\vec{a}|$. Ein Einheitsvektor ist ein dimensionsloser Vektor mit Betrag eins, hat also keine Einheit. Bei der Multiplikation eines Vektors mit einer positiven Zahl wird sein Betrag um diesen Faktor geändert, seine Richtung ändert sich nicht.

wichtig

Ein Vektor \vec{a} ist das Produkt aus (skalarem) Betrag $|\vec{a}|$ und dem Einheitsvektor \vec{e}_a .

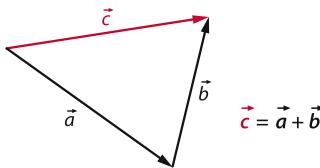


Abb. 1.11. Vektoraddition. Vektoren werden zumeist durch einen übergesetzten Vektorpfeil gekennzeichnet

Addiert werden Vektoren durch Aneinanderhängen ihrer Pfeile: Abb. 1.11 entspricht also der Gleichung

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Diese Regel erlaubt, jeden Vektor in **Komponenten** zu zerlegen, deren Summe er darstellt – zwei Komponenten in der Ebene, drei im Raum (Abb. 1.12).

Dabei ist eines zu beachten: Vektoren haben im Allgemeinen wirklich nur eine Richtung im Raum, keine Lage. Die sie symbolisierenden Pfeile dürfen beliebig auf dem Papier herumgeschoben werden – allerdings nur parallel zu sich selbst, denn das ändert ihre Komponenten nicht. Eine Ausnahme bildet der Ortsvektor: Er muss beim Koordinaten-Nullpunkt beginnen und darf nicht parallelverschoben werden, denn dann endete er nicht im Punkt P .

Die Achsen eines Koordinatensystems werden durch Einheitsvektoren in den Achsenrichtungen \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z festgelegt. Die Komponenten eines Vektors in diesen Richtungen können somit als Produkt dieser

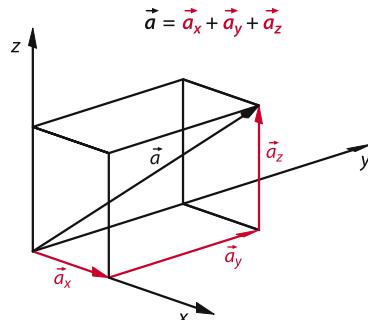


Abb. 1.12. Zerlegung des räumlichen Vektors \vec{a} in die drei senkrecht aufeinander stehenden Komponenten \vec{a}_x , \vec{a}_y und \vec{a}_z

Einheitsvektoren mit den **Koordinaten** des Vektors geschrieben werden (☞ Abb. 1.12). Im Falle des Ortsvektors $\vec{r}(P)$ sind diese Koordinaten identisch mit den Koordinaten des Punktes P. Es ist zu beachten, dass die Koordinaten anders als der Betrag eines Vektors auch negativ sein können. Sie sind aber auch physikalische Größen, haben also eine Einheit. Ist das Koordinatensystem einmal festgelegt, so ist der Vektor durch diese drei Koordinaten (im Raum) vollständig beschrieben.

wichtig

Komponentendarstellung eines Vektors:

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x \cdot \vec{e}_x + a_y \cdot \vec{e}_y + a_z \cdot \vec{e}_y$$

a_x, a_y, a_z : Koordinaten des Vektors

Es ist gebräuchlich, die Koordinaten eines Vektors in eine Spalte untereinander zu schreiben. Dies verringert den Schreibaufwand:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Im Prinzip kann man zwei Vektoren mit Bleistift, Lineal und Winkelmaß auf dem Papier addieren; in der Praxis würde man es freilich oftmals gerne genauer, als auf diesem Wege möglich. Wie addiert man zwei Vektoren mit dem Taschenrechner? Dazu muss man ihre Koordinaten kennen und es gilt dann:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x) \cdot \vec{e}_x + (a_y + b_y) \cdot \vec{e}_y$$

$$+ (a_z + b_z) \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

wichtig

Vektoraddition: graphisch durch Aneinanderlegen der Vektorpfeile; rechnerisch durch Addition der Koordinaten.

In kartesischen Koordinaten bildet ein Vektor mit seinen Komponenten rechtwinklige Dreiecke; das vereinfacht quantitative Rechnungen: Man kann sowohl die *Winkel-funktionen* Sinus und Kosinus als auch den *Lehrsatz des Pythagoras* leicht anwenden; allerdings muss man diesen um die dritte Vektorkomponente erweitern. Der Betrag $|\vec{a}|$ des Vektors \vec{a} beträgt

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Die Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl ändert seinen Betrag um diesen Faktor. Bei diesem Satz muss man aufpassen: Multiplikation mit einer negativen Zahl kehrt außerdem die Richtung des Vektors um.

Vektoren darf man auch miteinander *multipizieren*, und da geschieht Erstaunliches: Die Mathematik fragt nämlich zurück, was denn bitte herauskommen solle, ein Skalar oder ein Vektor. Möglich ist beides – und die Physik beansprucht sogar beide Möglichkeiten, denn das mathematische Produkt eines Ortsvektors und einer Kraft (beide Vektoren) kann eine Energie ergeben, einen Skalar also (Kap. 2.2.3), es kann aber auch ein Drehmoment ergeben, und das ist ein Vektor (Kap. 2.2.5). Was steckt mathematisch dahinter?

Formal kennzeichnet man das *skalare Produkt* S zweier Vektoren \vec{A} und \vec{B} mit einem Malpunkt zwischen ihnen:

$$S = \vec{A} \cdot \vec{B}$$

Die Mathematik wünscht, den Winkel α zwischen \vec{A} und \vec{B} zu kennen, und bestimmt dann:

$$S = \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$$

Daraus folgt für die Grenzfälle: Stehen \vec{A} und \vec{B} senkrecht aufeinander, ist ihr Skalarprodukt null – zeigen sie in die gleiche Richtung, ist S das Produkt ihrer Beträge $|\vec{A}| \cdot |\vec{B}|$. Im Allgemeinen liegt S also irgendwo dazwischen. Und was sagt man dem Taschenrechner? Wenn man die zweimal drei

Komponenten der beiden Vektoren ausmultipliziert, bekommt man neun Produkte von je zwei Komponenten:

$$\begin{aligned} S = \vec{A} \cdot \vec{B} &= (\vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z) \cdot (\vec{B}_x + \vec{B}_y + \vec{B}_z) \\ &= \vec{A}_x \cdot \vec{B}_x + \vec{A}_x \cdot \vec{B}_y + \vec{A}_x \cdot \vec{B}_z \\ &\quad + \vec{A}_y \cdot \vec{B}_x + \vec{A}_y \cdot \vec{B}_y + \vec{A}_y \cdot \vec{B}_z \\ &\quad + \vec{A}_z \cdot \vec{B}_x + \vec{A}_z \cdot \vec{B}_y + \vec{A}_z \cdot \vec{B}_z \end{aligned}$$

Nun stehen in kartesischen Koordinaten aber alle Komponenten, deren Indizes ungleich sind, senkrecht aufeinander. Folglich geben ihre skalaren Produkte null, so dass nur die drei Paare der Diagonalen von oben links nach unten rechts übrigbleiben:

$$\begin{aligned} S &= \vec{A}_x \cdot \vec{B}_x + \vec{A}_y \cdot \vec{B}_y + \vec{A}_z \cdot \vec{B}_z \\ &= A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z \end{aligned}$$

wichtig

Skalares Produkt zweier Vektoren:

$$\begin{aligned} S &= \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha \\ &= A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z \end{aligned}$$

Diese Formel kann auch dazu dienen, den Winkel zwischen zwei Vektoren zu bestimmen (Aufgabe 1.9).

Das **vektorielle Produkt** \vec{C} zweier Vektoren \vec{A} und \vec{B} muss schon in der Schreibweise vom skalaren unterschieden werden; man gibt ihm ein liegendes Malkreuz als Multiplikationszeichen und nennt es darum auch **Kreuzprodukt**:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$$

Wieder wünscht die Mathematik, den Winkel α zwischen den Vektoren \vec{A} und \vec{B} zu kennen, und bestimmt dann für den Betrag $|\vec{C}|$ des Produktvektors \vec{C} :

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \alpha$$

Im Gegensatz zum skalaren Produkt verschwindet das vektorielle gerade bei parallelen Ausgangsvektoren und nimmt seinen größtmöglichen Wert an, wenn sie senkrecht aufeinander stehen. Und in welche Richtung

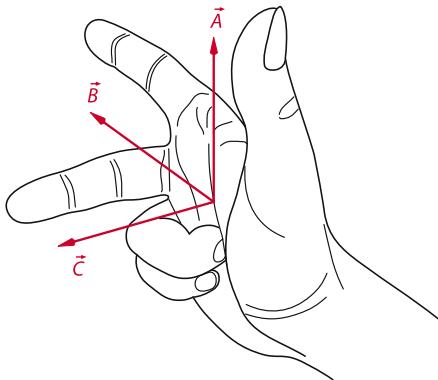


Abb. 1.13. Rechte-Hand-Regel

weist der Vektor \vec{C} ? Er steht senkrecht auf der Ebene, die die beiden Vektoren \vec{A} und \vec{B} aufspannen, und hält sich dann an die **Rechte-Hand-Regel** (☞ Abb. 1.13): \vec{A} (Daumen) kreuz \vec{B} (Zeigefinger) gleich \vec{C} (gewinkelter Mittelfinger). Das hat eine bemerkenswerte Konsequenz: vertauscht man die Positionen von \vec{A} und \vec{B} , d. h. \vec{B} wird Daumen und \vec{A} Zeigefinger, so verkehrt sich die Richtung von \vec{C} . Es ist also:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A}).$$

Beim vektoriellen Produkt dürfen die beiden Vektoren nicht vertauscht werden, das gewohnte Kommutativgesetz der Multiplikation gilt für das vektorielle Produkt zweier Vektoren ausdrücklich *nicht*.

Und was sagt man jetzt dem Taschenrechner? Mit einer ähnlichen Rechnung wie beim Skalarprodukt, also mit Hilfe der Komponentenzerlegung, erhält man:

$$\begin{aligned} V_x &= A_y B_z - A_z B_y, \\ V_y &= A_z B_x - A_x B_z, \\ V_z &= A_x B_y - A_y B_x. \end{aligned}$$

wichtig

Vektorielles Produkt zweier

Vektoren: $\vec{V} = \vec{A} \times \vec{B}$

mit $|\vec{V}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin \alpha$ und \vec{V} senkrecht zu \vec{A} und \vec{B} entsprechend der Schraubenregel.

Das Kommutativgesetz gilt nicht.

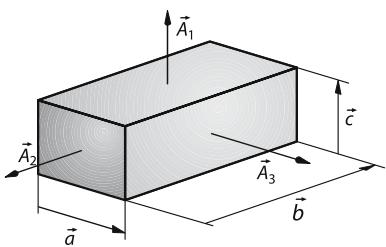


Abb. 1.14. Vektorielles Produkt zweier Vektoren; der Produktvektor (Flächen A) steht senkrecht auf jedem der beiden Ausgangsvektoren (den Kanten der Rechtecke)

Die beiden Seiten \vec{a} und \vec{b} eines Rechtecks haben Richtungen im Raum, sind also Vektoren. Die vier Wände eines Zimmers stehen senkrecht, Boden und Decke liegen horizontal; alle sechs haben paarweise unterschiedliche Richtungen im Raum. Insofern kann man auch Flächen als Vektoren beschreiben; diese zeigen in Richtung der *Flächennormalen* (Abb. 1.14). Die Fläche \vec{A}_1 des Rechtecks ist demnach das vektorielle Produkt der beiden Seiten:

$$\vec{A}_1 = \vec{a} \times \vec{b}$$

1.3.3 Winkelfunktionen

Bei den Multiplikationen der Vektoren spielen die beiden *Winkelfunktionen* Sinus und Kosinus eine Rolle. Der Vollständigkeit halber sei hier an ihre Definitionen im rechtwinkligen Dreieck erinnert:

- Sinus = Gegenkathete/Hypotenuse
- Kosinus = Ankathete/Hypotenuse
- Tangens = Gegenkathete/Ankathete
- Kotangens = Ankathete/Gegenkathete

Die Umkehrfunktionen zu den Winkelfunktionen werden *Arkusfunktionen* genannt. Beispielsweise gilt: wenn $\sin \alpha = a$, dann gilt $\alpha = \arcsin a$. Winkel misst man üblicherweise fernab von Dezimalsystem und SI in *Winkelgrad*: 90° für den rechten, 180° für den gestreckten und 360° für den Vollwinkel „einmal herum“. Mathematik und Physik bevorzugen aber das *Bogenmaß*. Man bekommt es,

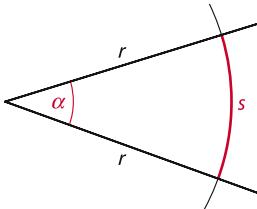


Abb. 1.15. Winkel im Bogenmaß: $\alpha = s/r$

indem man um den Scheitel des Winkels α einen Kreis mit dem Radius r schlägt. Die Schenkel schneiden aus ihm einen Kreisbogen der Länge s heraus (Abb. 1.15), der sowohl zu α wie zu r proportional ist. Dementsprechend definiert man

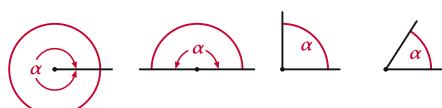
$$\text{Winkel } \alpha = \frac{\text{Länge } s \text{ des Kreisbogens}}{\text{Radius } r \text{ des Kreises}}.$$

Als Quotient zweier Längen ist der Winkel eine dimensionslose Zahl. Trotzdem wird ihm zuweilen die Einheit *Radian* (rad) zugeordnet, um daran zu erinnern, dass diese Zahl einen Winkel repräsentieren soll. Die Umrechnung von Winkelgrad in Bogenmaß ist leicht zu merken: 360° entsprechen 2π , d.h. $1^\circ = 0,01745$ (Abb. 1.16).

Die Funktionen Sinus und Kosinus erlauben, Schwingungen mathematisch zu beschreiben. Lässt man einen Punkt auf einer Kreisbahn umlaufen (Abb. 1.17), so kann man den *Fahrstrahl*, d.h. die Punkt und Zentrum verbindende Gerade, als Hypotenuse der Länge A_0 eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Winkel α am Zentrum, der Ankathete x_2 und einer Gegenkathete mit der Länge x_1 auffassen:

$$x_1(\alpha) = A_0 \sin \alpha \quad \text{und} \quad x_2(\alpha) = A_0 \cos \alpha.$$

Läuft der Punkt mit konstanter Geschwindigkeit um, so wächst α proportional zur Zeit t :

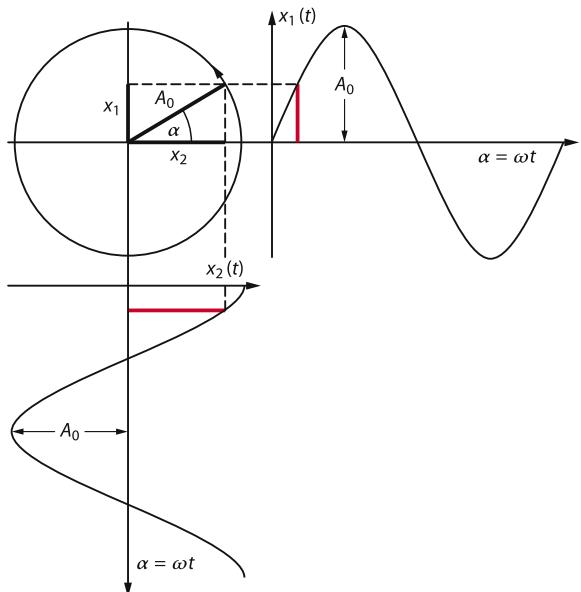


$$2\pi = 360^\circ \quad \pi = 180^\circ \quad \frac{\pi}{2} = 90^\circ \quad 1 = 57,3^\circ$$

Abb. 1.16. Zur Umrechnung von Winkelgrad in Bogenmaß

Abb. 1.17. Zusammenhang zwischen den Winkelfunktionen Sinus (rechts) und Kosinus (unten) und der Drehbewegung eines auf einer Kreisbahn umlaufenden Punktes. Der Radius des Kreises bestimmt die Amplitude A_0 der Auslenkung, die Zeit für einen Umlauf bestimmt die Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$Schwingungsdauer T = \frac{2\pi}{\omega}$$



$$\alpha(t) = \omega \cdot t$$

mit der Folge

$$x_1(t) = A_0 \sin(\omega \cdot t)$$

und $x_2(t) = A_0 \cos(\omega \cdot t)$.

Die Proportionalitätskonstante ω bekommt den Namen *Winkelgeschwindigkeit*.

Anschaulich entstehen x_1 durch horizontale und x_2 durch vertikale Projektion des umlaufenden Punktes in Abb. 1.17. Zeichnet man die Projektionen auf, so erhält man in beiden Fällen fast identische Graphen einer einfachen Schwingung; sie unterscheiden sich lediglich durch den Startwert bei $t = 0$, also $\alpha = 0$: Der Sinus hat dort einen Nulldurchgang, der Kosinus einen Maximalwert. Einen Viertelumlauf später ($\alpha = \pi/2$) ist es umgekehrt. Nach einem vollen Umlauf ($\alpha = 2\pi$) wiederholt sich das Spiel von neuem. Gegen beliebig große Winkel hat die Mathematik ebenso wenig einzuwenden wie gegen negative. Eine Schwingung wiederholt sich nach Ablauf einer **Schwingungsdauer** T . Daraus folgt für die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = 2\pi/T.$$

Den Kehrwert der Schwingungsdauer bezeichnet man als

$$Frequenz f = 1/T.$$

Die Konsequenz

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

macht verständlich, dass ω auch *Kreisfrequenz* genannt wird.

1.3.4

Exponentialfunktion und Logarithmus

Wer die **Exponentialfunktion** kennt, begegnet ihr in der Natur immer wieder. Sie ist die Funktion des (ungestörten) Wachstums, etwa eines Embryos vor der Zelldifferenzierung oder eines unberührten Sparguthabens mit Zins und Zinseszins; sie ist aber auch die Funktion (ungestörten) Abbaus, etwa eines Ausgangsproduktes einer chemischen Reaktion oder von Atomen durch radioaktiven Zerfall. Bei diesen Beispielen handelt es sich um Funktionen der Zeit. Mathematische Allgemeingültigkeit

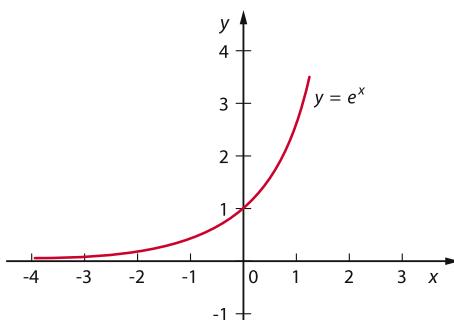


Abb. 1.18. Die Exponentialfunktion

verlangt aber, der e-Funktion zunächst einmal die Zahl x als unabhängige Variable zuzuordnen. Zwei Schreibweisen sind üblich:

$$y(x) = e^x = \exp(x).$$

Die zweite empfiehlt sich vor allem dann, wenn der physikalische Zusammenhang die Zahl x zu einem komplizierten Ausdruck werden lässt; die erste Schreibweise lässt leichter erkennen, worum es sich eigentlich handelt. Der Buchstabe e steht für eine ganz bestimmte Irrationalzahl, die *Euler-Zahl*:

$$e = 2,718281828\dots$$

(auch wenn es auf den ersten Blick anders aussieht: e ist ein nichtperiodischer unendlicher Dezimalbruch).

Die Zahlenwerte der e-Funktion auszurechnen bedarf es eines Taschenrechners. Auf Millimeterpapier aufgetragen, liefert e^x eine zunächst flach und dann immer steiler ansteigende Kurve (Abb. 1.18). Sie ist überall positiv, liegt also stets oberhalb der Abszisse ($e^x > 0$), und schneidet die Ordinate bei $e^0 = 1$ (jede Zahl, also auch e, gibt in Nullter Potenz die eins). Nach den Regeln des Potenzrechnens gilt $e^{-x} = 1/e^x$. Weil e^x mit wachsendem x ansteigt, fällt e^{-x} mit wachsendem x ab; der Graph läuft asymptotisch auf die Abszisse zu, ohne sie je zu erreichen. Auch e^{-x} bleibt stets positiv und schneidet die Ordinate bei der eins (Abb. 1.19). Mit positivem Exponenten beschreibt die e-Funktion ungestörtes Wachstum, mit negativem ungestörtem Abbau.

Exponentialfunktion $e^x = \exp(x)$,
positiver Exponent: Wachstumsfunktion,
negativer Exponent: Abbaufunktion.

Eine der beiden Umkehrungen der Potenz ist der *Logarithmus* (die andere ist die Wurzel). Ganz allgemein gilt:

$$\text{wenn } a = b^c, \text{ dann } c = \log_b a$$

(gelesen: „ c gleich Logarithmus a zur Basis b “). Zur e-Funktion gehört der Logarithmus zur Basis e; er wird *natürlicher Logarithmus* genannt und ln geschrieben:

$$\text{wenn } y = e^x, \text{ dann } x = \ln y = \log_e y.$$

Auch diese Zahlenwerte müssen mit dem Taschenrechner ausgerechnet werden. Dort findet man neben der Taste für den natürlichen Logarithmus meist auch noch eine für den Logarithmus zur Basis 10, den *dekadi-schen Logarithmus*, lg oder log geschrieben:

$$\text{wenn } y = 10^w, \text{ dann } w = \lg y = \log_{10} y.$$

Dieser Logarithmus findet in der Messtechnik beim Pegelmaß Anwendung (Kapitel 4.3.2).

Der Logarithmus zu irgendeiner anderen Basis a kann wie folgt berechnet werden: Definitionsgemäß gilt ja $a = \exp(\ln a)$, also auch

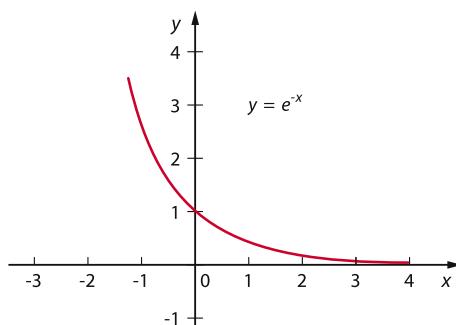


Abb. 1.19. Exponentialfunktion mit negativem Exponenten

$$y = a^w = [\exp(\ln a)]^w.$$

Nun potenziert man eine Potenz durch Multiplikation der beiden Exponenten:

$$y = \exp(w \cdot \ln a).$$

Daraus folgt aber

$$\ln y = w \cdot \ln a = \log_a(y) \cdot \ln a$$

und

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

Die beiden Logarithmen unterscheiden sich also nur um einen Zahlenfaktor

wichtig

Der natürliche Logarithmus ist Umkehrfunktion zur e-Funktion.

Aus mathematischen Gründen können Exponenten nur reine Zahlen ohne physikalische Einheit sein; analog lassen sich auch nur dimensionslose Zahlen logarithmieren. Wenn eine Exponentialfunktion nun aber Wachstum oder Abbau beschreiben soll, dann muss die Zeit t mit einer entsprechenden Einheit im Exponenten erscheinen. Sie kann dies nur zusammen mit einem Divisor τ , der ebenfalls in einer Zeiteinheit zu messen sein muss. Je nach den Umständen werden ihm Namen wie Relaxationszeit, *Zeitkonstante*, Eliminationszeit oder Lebensdauer gegeben. Selbstverständlich darf er durch einen Faktor $\lambda = 1/\tau$ ersetzt werden:

$$y(t) = \exp(t/\tau) = \exp(\lambda \cdot t).$$

Nach Ablauf einer Zeitkonstanten, also nach einer Zeitspanne $\Delta t = \tau$, hat sich der Exponent x gerade um 1 vergrößert. Die Wachstumsfunktion $\exp(x)$ ist dann auf das e-fache ihres Ausgangswertes angestiegen, die Abklingfunktion $\exp(-x)$ auf den e-ten Teil abgefallen. Dieses Verhalten ist nicht auf die Faktoren e und 1/e beschränkt. Die Schrittweite $x_{1/2} = \ln 2$ halbiert den Wert der abfallenden e-Funktion, gleichgültig, von welchem x aus dieser Schritt getan wird

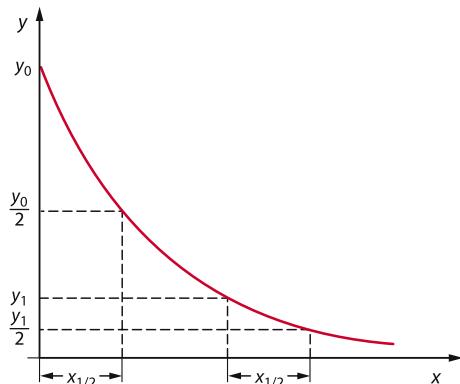


Abb. 1.20. Die Schrittweite $x_{1/2}$ ist eine für den Abfall der e-Funktion charakteristische Größe: sie halbiert die Ordinate unabhängig von dem Punkt, von dem aus der Schritt getan wird

(☞ Abb. 1.20). Entsprechend lässt sich die Lebensdauer τ eines radioaktiven Präparates leicht in die gebräuchlichere

$$\text{Halbwertszeit } T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2 = 0,693 \cdot \tau$$

umrechnen (davon wird in Kap. 8.2.6 noch genauer die Rede sein). Die Eigenschaft, bei vorgegebener Schrittweite unabhängig vom Ausgangspunkt um einen festen Faktor abzufallen oder anzusteigen, ist Kennzeichen der e-Funktion.

wichtig

Kennzeichen der Exponentialfunktion: Änderungsgeschwindigkeit proportional zum Momentanwert.

Eine wichtige Rolle spielt der Logarithmus in manchen Diagrammen. Im Anhang findet sich eine Tabelle für den Dampfdruck p_D des Wassers in Abhängigkeit von der Temperatur. Zeichnet man diesen Zusammenhang in gewohnter Weise, d.h. in **linearem Maßstab**, auf Millimeterpapier, so bekommt man das linke Teilbild der ☞ Abb. 1.21. p_D steigt ab 50 °C rasch an, löst sich aber bei tieferen Temperaturen kaum von der Abszisse. In solchen Fällen empfiehlt es sich, längs der Ordinate nicht die Dampfdrücke

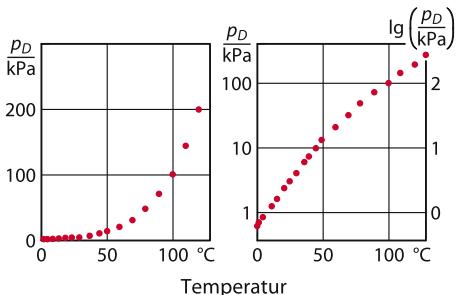


Abb. 1.21. Dampfdruckkurve des Wassers in linearem und in logarithmischem Maßstab (Einzelheiten im Text)

p_D selbst aufzutragen, sondern die (z.B. dekadischen) Logarithmen ihrer Maßzahlen $\{p_D\}$ (☞ Abb. 1.21, rechtes Teilbild, rechte Skala).

Nun kann man nicht verlangen, dass jedermann die Werte des dekadischen Logarithmus im Kopf hat. Deshalb ist es üblich, nicht sie an die Ordinate zu schreiben, sondern die Messwerte selbst (☞ Abb. 1.21, rechtes Teilbild, linke Skala). Man spricht dann von einer **logarithmischen Skala** und von einem Diagramm in **einfach-logarithmischer Darstellung**, im Gegensatz zur **doppelt-logarithmischen**, bei der beide Achsen logarithmisch geteilt sind.

In einfach-logarithmischer Darstellung wird die Dampfdruckkurve des Wassers fast zur Geraden. Damit signalisiert sie, dass der Dampfdruck fast exponentiell mit der Temperatur ansteigt. Wieso? Der dekadische Logarithmus einer Exponentialfunktion entspricht bis auf einen konstanten Faktor ihrem Exponenten und damit auch dessen unabhängiger Variablen:

$$\lg e^{ax} = 0,434 \cdot a \cdot x.$$

Trägt man aber $z = x \cdot \text{const.}$ linear gegen x auf, so erhält man eine Gerade. Folglich ergibt eine Exponentialfunktion in einfach-logarithmischer Darstellung ebenfalls eine Gerade.

Wie in einschlägigen Schulbüchern nachzulesen, gilt ganz allgemein für alle Logarithmen, also auch für die natürlichen zur Basis e:

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b;$$

einer Multiplikation zweier Zahlen entspricht die Addition ihrer Logarithmen. Dies ist für Umformungen von Bedeutung.

wichtig

Wichtige Rechenregeln für den Logarithmus:

$$\ln(e^a) = a$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$$

1.3.5 Potenzfunktionen

Ein Quadrat der Kantenlänge a besitzt die Fläche $A_Q = a^2$, der entsprechende Würfel das Volumen $V_W = a^3$. Bei den **Potenzfunktionen** steht die unabhängige Variable in der Basis und nicht im Exponenten wie bei den Exponentialfunktionen. Für die Potenzen selbst gelten aber die gleichen Rechenregeln.

Generell gibt es zur Potenz zwei Umkehrfunktionen, den bereits besprochenen Logarithmus und die Wurzel. Die Kantenlänge a ist die zweite, die Quadratwurzel, der Fläche A_Q des Quadrats und die dritte, die Kubikwurzel, des Würfels volumens V_W :

$$a = \sqrt{A_Q} = A_Q^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{V_W} = V_W^{\frac{1}{3}}.$$

Kehrwerte ganzer Zahlen im Exponenten entsprechen Wurzeln. So kann man auch mit gebrochenen Exponenten rechnen: eine Zahl z mit dem Exponenten $0,425 = 17/40$ bedeutet die 40. Wurzel der 17. Potenz:

$$z^{0,425} = z^{\frac{17}{40}} = \sqrt[40]{z^{17}}.$$

Da muss man schon einen Taschenrechner zu Hilfe holen.

Nur der Vollständigkeit halber sei hier noch einmal erwähnt: Negative Exponenten bezeichnen Kehrwerthe:

$$z^{-3} = 1/z^3.$$

Für die graphische Darstellung einer Potenzfunktion bietet sich die **doppelt-logarithmische Auftragung** an. Das geht so: man logarithmiert $y = x^n$ auf beiden Seiten und erhält:

$$\lg y = \lg(x^n) = n \cdot \lg(x)$$

Trägt man also $\lg y$ gegen $\lg x$ auf, so erhält man eine Gerade deren Steigung gleich der Potenz n ist. Das kann man mit dem Taschenrechner erledigen oder doppelt-logarithmisches Millimeterpapier verwenden, mit dem sozusagen graphisch logarithmiert wird. Ein Beispiel für eine doppelt-logarithmische Auftragung gibt Abb. 6.48.

wichtig

Wichtige Rechenregeln für Potenzen:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\sqrt[n]{m}} = \sqrt[n]{a^m}$$

1.3.6

Algebraische Gleichungen

Eine Gleichung bleibt als Gleichung erhalten, wenn man auf beiden Seiten das Gleiche tut, die gleichen Größen addiert oder subtrahiert, mit den gleichen Größen multipliziert oder potenziert usw. Nach diesem Schema lassen sich Gleichungen *umformen* und nach einer gewünschten Größe *auflösen*. Definitionsgemäß ist der elektrische Widerstand R der Quotient aus elektrischer Spannung U und elektrischem Strom I :

$$R = U/I.$$

Multiplikation mit I führt zu

$$U = I \cdot R$$

(Auflösung nach U), anschließende Division durch R zu

$$I = U/R$$

(Auflösung nach I). Etwas schwieriger wird es, wenn die Größe, nach der aufgelöst werden soll, nicht nur in der ersten, sondern auch in der zweiten Potenz vorkommt. Eine solche **quadratische Gleichung** bringt man zunächst in ihre *Normalform*

$$x^2 + p \cdot x + q = 0.$$

Sodann subtrahiert man q :

$$x^2 + p \cdot x = -q$$

und addiert die sog. quadratische Ergänzung $p^2/4$:

$$x^2 + p \cdot x + p^2/4 = p^2/4 - q.$$

Jetzt kann man nämlich nach dem Schema

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

die Gleichung auf der linken Seite umschreiben zu

$$(x + p/2)^2 = p^2/4 - q$$

und anschließend die Wurzel ziehen

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

(auch negative Größen liefern positive Quadrate; Quadratwurzeln sind deshalb beide Vorzeichen erlaubt). Jetzt lässt sich nach x auflösen:

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Eine quadratische Gleichung hat demnach

- zwei Lösungen, wenn $p^2 > 4q$
- eine Lösung, wenn $p^2 = 4q$
- keine Lösung, wenn $p^2 < 4q$ (jedenfalls keine reelle)

Messungen sind nie beliebig genau. Weicht der gemessene Wert vom tatsächlichen Wert der Größe bei jeder Messung um den gleichen Betrag ab, so spricht man von einem **systematischen Fehler**. Streuen die Messwerte bei wiederholter Messung um einen Mittelwert, so spricht man von einem **zufälligen Fehler**. Ein mathematisches Maß für diese Streuung ist die **Standardabweichung** s , eine Schätzung für die Messunsicherheit die **Standardabweichung des Mittelwertes**.

Absolute Messunsicherheit

$u(x)$; x : Messwert

Bedeutet: der wahre Wert der Größe befindet sich sehr wahrscheinlich zwischen den Werten $x - u(x)$ und $x + u(x)$.

Relative Messunsicherheit

$\frac{u(x)}{x}$ absolute Messunsicherheit geteilt durch Messwert
(dimensionslos)

Fehlerfortpflanzung

Regel 1: bei Multiplikation oder Division von Messwerten addieren sich die relativen Messunsicherheiten.

Regel 2: bei Addition oder Subtraktion von Messwerten addieren sich die absoluten Messunsicherheiten.

Schätzung des Messwertes bei vielen Messungen x_1, \dots, x_n

Mittelwert $\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Schätzung der Messunsicherheit

Standardabweichung des Mittelwertes

$$s(\langle x \rangle) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n-1}}$$

Vektoren

Viele physikalische Größen wie z. B. die Geschwindigkeit oder die Kraft haben nicht nur einen bestimmten Wert, sondern auch eine Richtung. Solche beschreibt man mathematisch durch **Vektoren** und man kann sie durch Pfeile im Raum veranschaulichen. Die Länge des Pfeils entspricht dem **Betrag** der Größe. Mit Hilfe eines **Koordinatensystems** kann man Vektoren durch Zahlen ausdrücken, im dreidimensionalen Fall durch drei **Koordinaten**. Vektoren kann man mit einer Zahl multiplizieren. Die Länge des Pfeils (der Betrag) ändert sich dabei um diesen Faktor. Ist der Faktor negativ, so dreht der Pfeil in die entgegengesetzte Richtung. Man addiert Vektoren durch Aneinandersetzen der Pfeile. Die Vektoraddition ermöglicht auch, Vektoren in **Komponenten** zu zerlegen, die zum Beispiel in die Koordinatenrichtungen weisen (s. Abb. 1.11). Es gibt zwei verschiedene Möglichkeiten, Vektoren miteinander zu multiplizieren.

Betrag

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Addition

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Vektorprodukt

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \alpha, \vec{a} \times \vec{b} \text{ steht senkrecht auf } \vec{a} \text{ und } \vec{b}$$

Exponentialfunktion und Logarithmus

Exponentialfunktion	$y = e^{ax}$	$a > 0$: ansteigend $a < 0$: abfallend
Rechenregeln	$e^{a+x} = (e^a)^x; e^{x+y} = e^x \cdot e^y$	
Beispiel: radioaktiver Zerfall	$N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}$	N : Teilchenzahl t : Zeit [s] τ : Zeitkonstante [s] N_0 : Teilchenzahl bei $t = 0$
Halbwertszeit	$T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2$ [s]	Nach jeweils der Halbwertszeit halbiert sich die Teilchenzahl
Halblogarithmische Auftragung	$\ln N(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot t$	In der halblogarithmischen Auftragung ergibt sich eine fallende Gerade mit der Steigung $-1/\tau$.
Logarithmusfunktion (zur Basis e)	$y = \ln x$	Umkehrfunktion zu e^x
Rechenregeln	$\ln(e^a) = a; \ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b); \ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$	
quadratische Gleichung		
p-q-Formel	$x^2 + p \cdot x + q = 0$	
	$x_{1/2} = -\frac{1}{2} p \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	

Verständnisfragen

- Was ist für die statistische Abschätzung der Messunsicherheit maßgeblich: die Standardabweichung oder die Standardabweichung des Mittelwertes?
- Ändert sich die seine relative Unsicherheit, wenn ein Messwert durch drei geteilt wird?
- Zwei Vektoren haben verschiedene Beträge. Kann ihre Summe Null sein?
- Wenn die Komponente des Vektors \vec{A} in Richtung von Vektor \vec{B} Null ist, was folgt daraus für die beiden Vektoren?
- Welche Größen sind Vektoren, welche nicht: Kraft, Temperatur, Volumen, Die Bewertung einer Fernsehsendung, Höhe, Geschwindigkeit, Alter?

Übungsaufgaben

((I): leicht; (II): mittel; (III): schwer)

- 1.1: (I) Für wissenschaftliche Vorträge gilt eine beherzigenswerte Regel: rede niemals länger als ein Mikrojahrhundert. Wie lange ist das?
- 1.2: (I) Welches Volumen steht dem Gehirn eines Menschen so ungefähr zur Verfügung? Zur Abschätzung sei angenommen, dass der Schädel eine hohle Halbkugel von etwa 20 cm Durchmesser bildet.
- 1.3: (I) Wie lang ist das Pantoffeltierchen der Abb. 1.5?
- 1.4: (I) Wie groß ist schätzungsweise die Körperoberfläche des Griechen von Abb. 1.6?

Messunsicherheit

- 1.5: (II) Wenn der Zuckerfabrik ungewaschene Rüben angeliefert werden, zieht sie vom gemessenen Gewicht einen Anteil als Erfahrungswert ab. Systematischer oder zufälliger Fehler, relativer oder absoluter Fehler?
- 1.6: (II) Welche der beiden Regeln der Fehlerfortpflanzung gilt nur näherungsweise?

Vektoren

- 1.7: (II) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q, der vom Punkt $P = (3; 1; -5)$ in Richtung des Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

20 Längeneinheiten entfernt ist.

- 1.8: (I) Wann verschwindet das Vektorprodukt, wann das Skalarprodukt zweier Vektoren unabhängig von deren Beträgen?
- 1.9: (II) Berechnen Sie den Winkel φ , den die beiden Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

miteinander einschließen.

- 1.10: (II) Entspricht der Vektorpfeil der kleinsten Quaderfläche in Abb. 1.14 dem Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{c}$ oder $\vec{c} \times \vec{a}$?

Exponentialfunktion

- 1.11: (II) 1850 lebten auf der Erde 1,17 Milliarden Menschen, 1900 waren es bereits 1,61 Milliarden und 1950 2,50 Milliarden. Entsprechen diese Zahlen einer „Bevölkerungsexplosion“, wenn man das Wort „Explosion“ mit exponentiellem Wachstum gleichsetzt?

2.1	Kinematik	32
2.1.1	Geschwindigkeit und Fahrstrecke (Integration)	32
2.1.2	Fahrstrecke und Geschwindigkeit (Differentiation)	35
2.1.3	Beschleunigung	36
2.1.4	Überlagerung von Bewegungen	39
2.1.5	Kinematik der Drehbewegungen	42
2.2	Statik starrer Körper	45
2.2.1	Kräfte	45
2.2.2	Gewichtskraft und Gravitation	48
2.2.3	Arbeit und Energie	49
2.2.4	Kinetische Energie	54
2.2.5	Hebel und Drehmoment	55
2.2.6	Die Grundgleichungen der Statik	58
2.2.7	Gleichgewichte	59
2.3	Dynamik der Translation	61
2.3.1	Die Grundgleichung der Mechanik	62
2.3.2	actio = reactio	64
2.3.3	Reibung	65
2.3.4	Bewegungsgleichung	67
2.3.5	Impuls	68
2.4	Dynamik der Rotation	72
2.4.1	Analogie zur Translation	72
2.4.2	Dynamik der Drehbewegung	73
2.4.3	Trägheitsmoment	75
2.4.4	Die Rollbewegung	76
2.4.5	Drehimpulserhaltung	78
2.5	Trägheitskräfte	80
2.5.1	Linear beschleunigte Systeme	80
2.5.2	Rotierende Systeme	83
2.5.3	Trägheitskräfte in der technischen Mechanik	84

Übersicht

Seit eh und je bildet die Mechanik die Grundlage der Physik und gehört deshalb an den Anfang eines Lehrbuches. Sie handelt von den Bewegungen der Körper und den Kräften, die sie auslösen. Damit spielt sie in alle Gebiete der Naturwissenschaften hinein, über die Bindungskräfte der Moleküle in die Chemie, über die Muskelkräfte in die Medizin, über die von Benzin- und Elektromotoren entwickelten Kräfte in die Technik usw. Wenn Kräfte nicht durch Gegenkräfte kompensiert werden, haben sie Bewegungsänderungen zur Folge, Beschleunigungen in Translation und Rotation. Dabei wird Energie umgesetzt; sie ist eine der wichtigsten physikalischen Größen überhaupt. Dabei ändern sich aber auch die Größen Impuls und Drehimpuls.

2.1 Kinematik

Einleitung

Translationen beschreibt man mit den Größen Geschwindigkeit und Beschleunigung, Rotationen mit den Größen Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung. Korrekt lassen sich diese Größen nur mit Hilfe der mathematischen Differentiation und Integration sowie der Vektorrechnung behandeln.

2.1.1 Geschwindigkeit und Fahrstrecke (Integration)

Dem motorisierten Menschen ist die Vokabel „*Geschwindigkeit*“ geläufig, vom Tachometer seines Auto nämlich; Lastwagen registrieren sogar mit einem Fahrtenschreiber. Wie solche Geräte im Einzelnen funktionieren, interessiert hier nicht. Im Grunde sind sie Drehzahlmesser: sie vermelden, wie oft sich die Hinterachse des Fahrzeugs in der Sekunde, in der Minute herumdreht. Physikalisch korrekter: Drehzahlmesser messen die

Drehfrequenz $f = \text{Anzahl der Umdrehungen } \Delta N / \text{benötigte Zeitspanne } \Delta t$

-Einheit 1/s oder 1/min, denn die „Umdrehung“ ist keine Einheit, sie wird nur gezählt. Bei jeder Umdrehung kommt das Fahrzeug einen Radumfang s_r weiter. Es fährt deshalb mit der

Geschwindigkeit $v = f \cdot s_r$

-Einheit m/s oder, im Straßenverkehr üblicher, km/h. Die Umrechnung ist einfach: Ein Kilometer hat 10^3 m, eine Stunde $3,6 \cdot 10^3$ s. Wer brav mit 90 km/h die Landstraße entlangfährt, hat zu rechnen:

$$v = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{90 \cdot 10^3 \text{ m}}{3,6 \cdot 10^3 \text{ s}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dieses Schema funktioniert auch bei anderen Umrechnungen.

Wer eisern die 90 km/h durchhält, kommt demnach in der Sekunde 25 m weit, in der Minute $60 \cdot 25 \text{ m} = 1,5 \text{ km}$ und in der Stunde eben 90 km. Die Länge Δs des zurückgelegten Weges ist der Fahrzeit Δt proportional:

$$\Delta s = v_0 \cdot \Delta t.$$

Das gilt aber nur bei konstanter Geschwindigkeit, in der Gleichung durch den Index $_0$ gekennzeichnet. Im Straßenverkehr kommt das nicht vor. Dort ändert sich die Geschwindigkeit ständig, sie wird eine Funktion der Zeit: $v = v(t)$. Kann man auch dann noch die Fahrstrecke bestimmen, etwa aus der Registrierkurve des Fahrtenschreibers?

Angenommen, ein gemütlicher Vorortzug steht im Bahnhof und wartet auf das Abfahrtssignal. Seine Geschwindigkeit ist Null. Um 7.48 Uhr setzt er sich in Bewegung und hat schon eine Minute später seine volle Geschwindigkeit von 60 km/h erreicht. Er hält sie bis 7.54 Uhr bei, muss dann aber einer Baustelle wegen bremsen. Ab 7.56 Uhr fährt er nur noch mit 30 km/h, und das bis 7.58 Uhr. Danach bremst er endgültig und kommt um 8.00 Uhr im nächsten Bahnhof

zum Stehen. Sein Fahrtenschreiber hätte dann ein Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm aufgezeichnet, wie es Abb. 2.1 in ihrem oberen Teilbild zeigt. Wie weit liegen die beiden Bahnhöfe auseinander?

Leicht zu bestimmen sind die beiden Teilstrecken, die mit konstanten Geschwindigkeiten durchfahren wurden (Indizes 2 und 4 im unteren Teilbild der Abb. 2.1):

$$\Delta s_2 = \Delta t_2 \cdot v_2 = 5 \text{ min} \cdot 60 \text{ km/h} = 5 \text{ km}, \\ \Delta s_4 = \Delta t_4 \cdot v_4 = 2 \text{ min} \cdot 30 \text{ km/h} = 1 \text{ km}.$$

Im Diagramm werden die beiden Strecken durch die schraffierten Rechtecke unter den horizontalen Teilen des Graphen repräsentiert; die Fläche eines Rechtecks ist ja das Produkt seiner beiden Seiten. Das gilt auch für Rechtecke in einem Diagramm, deren Seiten keine Längen darstellen, sondern die Quotienten irgendwelcher physikalischer Größen und ihrer Einheiten. Man muss nur entsprechend den Achsenmaßstäben umrechnen.

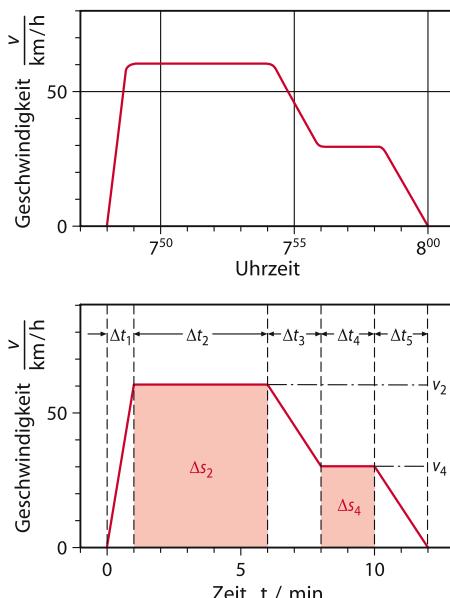


Abb. 2.1. Geschwindigkeit-Zeit-Diagramme eines hypothetischen Vorortzuges (*oberes Teilbild*) und seine graphische Integration zur Bestimmung des Position-Zeit-Diagrammes (*unteres Teilbild*); Einzelheiten im Text

Diese Überlegungen lassen sich auch auf die Zeitspannen mit den ungeraden Indizes übertragen, in denen die Geschwindigkeit nicht konstant war. Auch hier werden die durchfahrenen Strecken von den Flächen unter der Kurve im $v(t)$ -Diagramm repräsentiert. Wie bei allen ebenen Flächen kann man ihren Flächeninhalt bestimmen, indem man sie auf Millimeterpapier zeichnet und die Quadratmillimeter auszählt. Ganz präzise ist das nicht. Was macht man mit den vom Graphen angeschnittenen Quadratmillimetern?

Man müsste feiner unterteilen, unendlich fein. Man müsste $v(t)$ in, wie der Mathematiker sagt, *differentiell kleinen* Zeitabständen dt bestimmen, mit dt multiplizieren und alle *differentiell kleinen* Produkten, alle *differentiell schmalen* Flächenelemente $v(t) \cdot dt$ zusammenzählen. Diesen Vorgang bezeichnet man als *Integration*, sein Ergebnis als *Integral*. Im Diagramm wird es repräsentiert durch die Fläche „unter der Kurve“, die Fläche zwischen Kurve und Abszisse. Ein konkreter Zahlenwert lässt sich freilich nur angeben, wenn die Fläche nicht nur oben und unten begrenzt ist, sondern auch links und rechts. Das *bestimmte Integral*

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

liefert die Länge Δs des Weges, der zwischen den Zeitpunkten t_0 und t_1 , zwischen den sog. *Integrationsgrenzen*, der mit der Geschwindigkeit $v(t)$ durchfahren wurde.

wichtig

Bestimmtes Integral:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \text{const.}$$

= Fläche zwischen der Kurve $f(x)$ oben, der x -Achse unten und den Geraden der Integrationsgrenzen x_1 und x_2 links und rechts.

Durchführen lässt sich diese Integration zunächst nur im Prinzip. Tatsächlich kann

man differentiell kleine Beträge numerisch nicht zusammenzählen, weil es unendlich viele sein müssten. Auch ein Computer, der numerisch integriert, tut dies in zwar kleinen, aber eben doch nicht differentiell kleinen Schritten. In einfachen Fällen hilft aber auch Nachdenken. Angenommen, der Vorortzug steigere seine Geschwindigkeit in der Minute des Anfahrens linear mit der Zeit (d.h. mit konstanter Beschleunigung, s. Kap. 2.1.3), dann ist der Graph eine ansteigende Gerade und die Fläche darunter ein rechtwinkliges Dreieck, halb so groß wie das zugehörige Rechteck (☞ Abb. 2.1, unteres Teilbild):

$$\Delta s_1 = \frac{1}{2} v_2 \cdot \Delta t_1 = \frac{1}{2} 60 \text{ km/h} \cdot 1 \text{ min} = 0,5 \text{ km.}$$

In analoger Rechnung findet man $\Delta s_5 = 0,5 \text{ km}$ und $\Delta s_3 = 1,5 \text{ km}$ (hier muss man Dreieck und Rechteck zusammenzählen). Die Entfernung zwischen den beiden Bahnhöfen beträgt demnach

$$\Delta s = \Delta s_1 + \dots + \Delta s_5 = \sum_{n=1}^5 \Delta s_n = 8,5 \text{ km},$$

jedenfalls so ungefähr. Die Teilstrecken mit den ungeraden Indizes wurden ja nur näherungsweise berechnet.

Angenommen nun, der Triebwagen des Zuges stehe im ersten Bahnhof mit seiner Vorderkante neben dem Kilometerstein 8,5. Dann beginnt der zugehörige Graph $s(t)$ bei dieser Marke (s_0) mit einer abszissenparallelen Geraden (☞ Abb. 2.2): Die Zeit schreitet fort, der Zug bleibt stehen. Wenn der Zug um 7.48 Uhr anfährt, biegt der Graph „nach oben“ und erreicht eine Minute später die Marke 9,0 km ($s_1 = s_0 + \Delta s_1$). Danach kommt in jeder Minute ein Kilometer hinzu; der Graph bildet eine ansteigende Gerade, bis er um 7.54 Uhr auf die Marke 14,0 km trifft. Weil der Zug jetzt bremst, krümmt sich der Graph „nach rechts“, läuft um 7.56 Uhr durch die Marke 15,5 km, steigt in jeder der beiden nächsten Minuten um nur noch 0,5 km an, krümmt sich noch einmal und

mündet um 8.00 Uhr in eine Horizontale bei 17,0 km ein.

Für das Ende des Zuges bekäme man die gleiche Kurve, lediglich auf der Ordinate um die Zuglänge versetzt. Das gilt entsprechend für jede Achse, jeden Türgriff, jedes Atom des Zuges. Alle $s(t)$ -Kurven haben den gleichen Verlauf, sie unterscheiden sich lediglich durch ihren Startwert s_0 . Man muss ihn kennen, wenn man das Position-Zeit-Diagramm mit einer den Kilometersteinen entsprechenden Skala längs der Ordinate versehen will. Im Prinzip entsteht die Kurve durch wiederholtes Lösen des bestimmten Integrals zu verschiedenen oberen Integrationsgrenzen t_1 ; damit wird die Obergrenze t_1 zur Variablen t :

$$s(t) = \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + s(t_0)$$

Da t nun für die obere Integrationsgrenze steht, muss hier die von der Untergrenze zur Obergrenze laufende Integrationsvariable mit einem anderen Buchstaben (hier τ) bezeichnet werden. Auf jeden Fall muss der Startwert $s_0 = s(t_0)$ hinzugeschrieben werden, denn der Funktion $v(t)$ lässt er sich ja nicht entnehmen.

Ein solches Integral mit variabler Obergrenze nennt man **unbestimmtes Integral** und $s(t)$ auch eine Stammfunktion zu $v(t)$. Zu einer ganzen Reihe auch schon recht kompliziert aussehender mathematischer

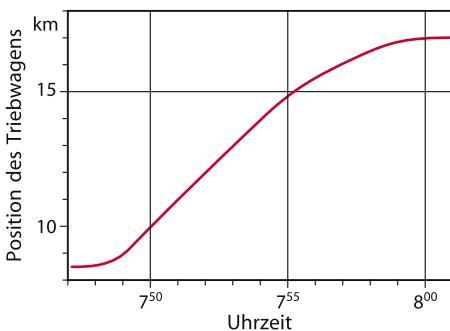


Abb. 2.2. Weg-Zeit-Diagramm des Vorortzuges von
☞ Abb. 2.1; Einzelheiten im Text

Funktionen sind die Stammfunktionen bekannt und können in Formelsammlungen nachgeschlagen werden. Wie immer man ein unbestimmtes Integral löst, graphisch, numerisch oder auch „geschlossen“ (d.h. als mathematische Funktion), die Integrationskonstante s_0 muss dazugeschrieben werden. Im allgemeinen Fall wird sie unbestimmt, eben als s_0 dazugeschrieben; im konkreten Einzelfall muss sie als Anfangsbedingung des Problems bestimmt werden.

wichtig

Unbestimmtes Integral:

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau + F_0$$

$F(t)$ = Stammfunktion, Funktion der oberen Integrationsgrenze,
 F_0 = Integrationskonstante.

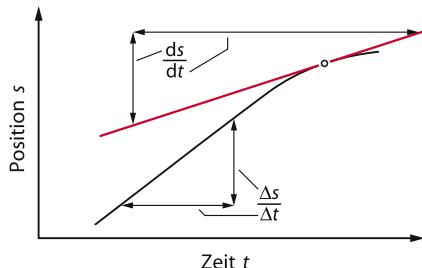
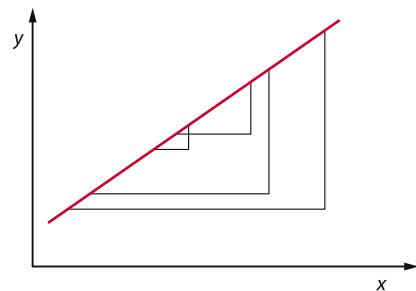


Abb. 2.3. Zur graphischen Differentiation: Alle zu der gleichen Geraden gezeichneten Steigungsdreiecke sind einander ähnlich; die Quotienten ihrer Katheten sind gleich (*oberes Teilbild*); die Steigung einer Kurve ist die Steigung ihrer Tangente (*unteres Teilbild*); Einzelheiten im Text

2.1.2

Fahrstrecke und Geschwindigkeit (Differentiation)

Wenn es möglich ist, aus dem Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm das Position-Zeit-Diagramm abzuleiten, dann muss auch das Umgekehrte möglich sein. Dabei handelt es sich dann sogar um eine „Ableitung“ in des Wortes mathematischer Bedeutung. Ganz offensichtlich läuft die Kurve des $s(t)$ -Diagramms der Abb. 2.2 in der schnell durchfahrenen freien Strecke steiler als in der langsam durchfahrenen Baustelle. Die Steigung des Graphen $s(t)$ muss etwas mit der Geschwindigkeit $v(t)$ zu tun haben.

Die Steigung einer Geraden bestimmt man mit Hilfe des *Steigungsdreiecks*, eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse ein Stück der Geraden ist und dessen Katheten parallel zu den Achsen des Diagramms liegen. Dabei spielt die Größe des Dreiecks keine Rolle, denn der Quotient der Katheten, eben die (mathematisch definerte) *Steigung*, ist davon unabhängig. Alle zu

der gleichen Geraden gezeichneten Dreiecke sind einander „ähnlich“ im Sinn der Mathematik (Abb. 2.3, oberes Teilbild).

Bei einer gekrümmten Kurve muss man die Steigungsdreiecke so klein zeichnen, dass die Krümmung ihrer „Hypotenosen“ nicht mehr auffällt, streng genommen also differentiell klein. Lässt man Δt zu dt schrumpfen, so schrumpft auch Δs zu ds . Das Verhältnis der beiden bleibt dabei als endlicher Wert erhalten: Der *Differenzenquotient* $\Delta s/\Delta t$ einer zeitlich konstanten Geschwindigkeit v_0 geht in den *Differentialquotienten* ds/dt über. Die momentane und zeitabhängige

$$\text{Geschwindigkeit } v(t) = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t)$$

ist als Differentialquotient definiert. Differentiationen nach der Zeit werden gern durch einen Punkt über dem Buchstaben gekennzeichnet, andere Differentiationen durch einen nachgesetzten Strich ($y' = dy/dx$).

wichtig

Ungleichförmige Bewegung
momentane Geschwindigkeit:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t)$$

$$\text{Fahrstrecke } \Delta s = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

Differentiell kleine Dreiecke kann man weder zeichnen noch ausmessen. Die Richtung der differentiell kleinen Hypotenuse stimmt aber mit der Richtung einer Tangente überein, die am Ort des Dreiecks an der Kurve anliegt. Die Tangente ist eine Gerade, ihre Steigung kann also wie besprochen mit einem Steigungsdreieck bestimmt werden (☞ Abb. 2.3, unteres Teilbild). Auf diese Weise lässt sich das ganze $s(t)$ -Diagramm grundsätzlich Punkt für Punkt in seine **Ableitung**, das $v(t)$ -Diagramm überführen.

Die Bundesbahn gibt für einige ihrer schnellen Züge die sog. Reisegeschwindigkeit an, den Quotienten aus der gesamten Fahrstrecke Δs und der gesamten Fahrzeit Δt einschließlich aller Halte und Langsamfahrstrecken. Man kann den Differenzenquotienten auch als

$$\text{mittlere Geschwindigkeit } < v > = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

interpretieren.

wichtig

Gleichförmige Bewegung:
konstante Geschwindigkeit $v_0 = \Delta s / \Delta t$,
Fahrstrecke $\Delta s = v_0 \cdot \Delta t$.

Auch wenn dies graphisch nicht unmittelbar einleuchtet: Mathematisch formal sind Differentiation und Integration Gegenoperationen, die sich gegenseitig kompensieren. Jede Funktion ist die Ableitung ihrer Stammfunktion und die Stammfunktion ihrer Ableitung.

Nun hat eine Bewegung stets auch eine Richtung im Raum, eine Geschwindigkeit

ist darum ein Vektor. Bis hierher wurde dies unterschlagen und immer nur der Betrag der Geschwindigkeit betrachtet, der sich eben aus der Ableitung des Betrages der zurückgelegten Strecke ergibt. Wer den genauen Verlauf der Fahrt beschreiben will, muss zum Ortsvektor greifen. Eine Funktion $\vec{r}(t) = r_x(t) \cdot \vec{e}_x + r_y(t) \cdot \vec{e}_y + r_z(t) \cdot \vec{e}_z$ kann den Ort des Zuges zu jedem Zeitpunkt genau festlegen. Die Geschwindigkeit ergibt sich dann aus der Änderung des Ortsvektors mit der Zeit, also aus seiner Ableitung:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}_x(t) \cdot \vec{e}_x + \dot{r}_y(t) \cdot \vec{e}_y + \dot{r}_z(t) \cdot \vec{e}_z$$

2.1.3

Beschleunigung

Im Sprachgebrauch des Alltags wird das Wort „beschleunigt“ meist lediglich im Sinn von „schnell“ verwendet; im Sprachgebrauch der Physik ist jede Bewegung „beschleunigt“, die ihre Geschwindigkeit ändert, ob sie nun schneller wird oder langsamer oder auch nur in eine andere Richtung schwenkt. Die physikalische Größe **Beschleunigung** \ddot{s} ist die Änderungs geschwindigkeit der Geschwindigkeit \vec{v} . Sie ist also der erste Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der Zeit t und folglich der zweite des Weges \vec{s} :

$$\ddot{s} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = \ddot{\vec{s}}.$$

Damit liegt auch ihre Einheit fest:

$$\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \text{m/s}^2 = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Jede Beschleunigung hat eine Richtung, \ddot{s} ist also ein Vektor, der sich obendrein noch mit der Zeit zu ändern pflegt: $\ddot{s}(t)$. Der allgemeine Fall ist immer denkbar kompliziert. Es gibt aber einfache Grenzfälle. Hat die Beschleunigung die gleiche Richtung wie die Geschwindigkeit, so ändert sie nur deren Betrag, die Geschwindigkeit nimmt zu. Zeigt der Beschleunigungsvektor genau entgegengesetzt zur Geschwindigkeit,

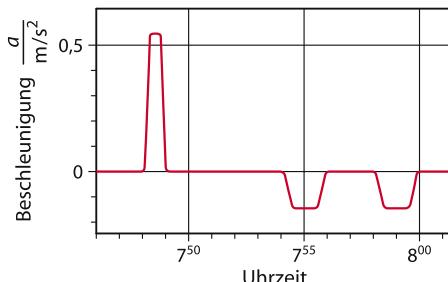


Abb. 2.4. Beschleunigungs-Zeit-Diagramm des Vorortzuges von Abb. 2.1 (nur Bahnbeschleunigung)

so ändert sich ebenfalls nur deren Betrag, sie wird kleiner. In beiden Fällen spricht man von einer *Bahnbeschleunigung*. Im anderen Extrem steht \vec{a} senkrecht auf \vec{v} und ändert als *Radialbeschleunigung* nur deren Richtung, nicht den Betrag. Jede andere Beschleunigung lässt sich als Vektor in eine radiale und eine tangentiale Komponente zerlegen.

wichtig

Beschleunigung: Änderungsgeschwindigkeit der Geschwindigkeit

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{s}}{dt^2} = \ddot{\vec{s}},$$

SI-Einheit: m/s^2 ;

Bahnbeschleunigung: \vec{a} parallel oder entgegengesetzt zu \vec{v} ,

Radialbeschleunigung: \vec{a} senkrecht zu \vec{v} .

Das Weg-Zeit-Diagramm des Vorortzuges von Abb. 2.2 sagt über Kurven im Bahndamm nichts aus, also auch nichts über etwaige Radialbeschleunigungen; ihr kann nur die Bahnbeschleunigung entnommen werden. Grundsätzlich muss man dazu $s(t)$ zweimal nach der Zeit differenzieren oder das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm der Abb. 2.1 einmal. Das Ergebnis zeigt Abb. 2.4: in den Bahnhöfen, auf freier Strecke und in der Baustelle ist $a=0$, überall dort nämlich, wo sich die Geschwindigkeit nicht ändert, ob der Zug nun steht oder nicht ($v=\text{const.}$). Positiv wird die Beschleunigung

nur in der einen Minute des Anfahrens, negativ nur in den beiden Bremsperioden vor der Baustelle und vor dem Zielbahnhof, denn hier nimmt v ab.

Keine Bahnbeschleunigung kann längere Zeit unverändert anhalten; die Folge wären übergroße Geschwindigkeiten. Für ein paar Sekunden geht es aber schon, beim *freien Fall* zum Beispiel. Wenn man die Luftreibung vernachlässigen darf, fallen alle Körper auf Erden mit der gleichen *Erdbeschleunigung* $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$ zu Boden; sie führen eine *gleichförmig beschleunigte Bewegung* aus.

wichtig

Gleichförmig beschleunigte Bewegung: $a = \text{const.}$

Weil g konstant ist, wächst die Fallgeschwindigkeit $v(t)$ linear mit der Zeit, sie wächst sogar proportional zur Zeitspanne t nach dem Loslassen, wenn der Stein wirklich nur losgelassen und nicht geworfen wird. Bei $v=0$ zum Zeitpunkt $t=0$ gilt

$$v(t) = g \cdot t$$

(Abb. 2.5, oberes und mittleres Teilbild). Alle im Nullpunkt des Koordinatenkreuzes beginnenden Flächen unter der Geraden im $v(t)$ -Diagramm sind rechtwinklige Dreiecke mit den Katheten t und $g \cdot t$. Sie liefern für die Fallstrecke s die Beziehung

$$s(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2.$$

Graphisch ist das eine Parabel mit dem Scheitel bei $s = 0$ und $t = 0$ (Abb. 2.5, unteres Teilbild): Die Messlatte für die Fallstrecke wird beim Startpunkt angelegt.

Selbstverständlich müssen die hier aufgestellten Behauptungen experimentell überprüft werden. Die heutigen technischen Mittel erlauben das mit guter Genauigkeit schon für den Schulunterricht. Galilei hatte es da schwerer; er besaß keine Stoppuhr, schon gar nicht eine elektrisch steuerbare. Ein

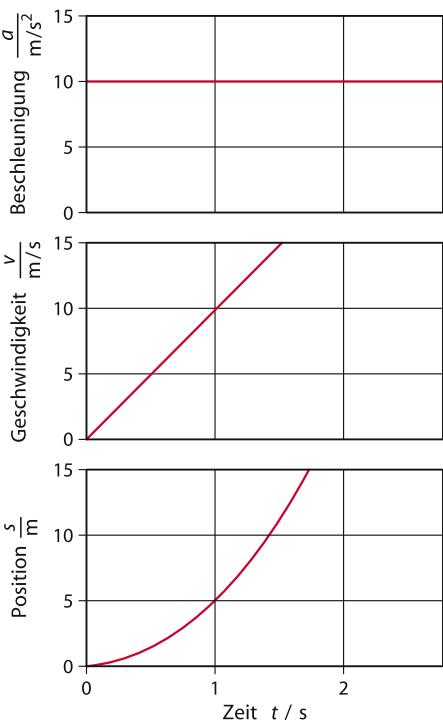


Abb. 2.5. Freier Fall, Einzelheiten im Text

Stein durchfällt die ersten 2 m in 0,64 s. Das war im Mittelalter nicht leicht zu messen.

Die bisher aufgestellten Gleichungen gelten nicht allgemein, weil die bei der Integration der Beschleunigung und der Geschwindigkeit grundsätzlich auftretenden Integrationskonstanten v_0 und s_0 unterschlagen, d.h. gleich null gesetzt wurden. Korrekterweise muss man ja

$$v(t) = \int_0^t g \cdot d\tau + v(0) = g \cdot t + v_0$$

und demzufolge auch

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t g \cdot \tau \cdot d\tau + \int_0^t v_0 \cdot d\tau + s(0) \\ &= \frac{g}{2} t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \end{aligned}$$

schreiben. Die Integrationskonstante v_0 hat hier eine handfeste Bedeutung: Es ist die **Anfangsgeschwindigkeit** bei $t = 0$. Man muss

den Stein ja nicht einfach fallen lassen, man darf ihn auch werfen. s_0 bezeichnet die Position, bei der man den Stein losgelassen hat. Die drei Graphen der Abb. 2.6 stellen einen Wurf senkrecht nach oben dar, und zwar mit $v_0 = 7,5 \text{ m/s}$. Man darf sich nicht darüber wundern, dass $v(t)$ unter der Nulllinie beginnt und $s(t)$ über eine negative Gipfelhöhe läuft. Wer der Fallbeschleunigung g ein positives Vorzeichen gibt, muss die Richtung senkrecht nach oben negativ zählen.

Rechenbeispiel 2.1: Fall vom Turm

Mit welcher Geschwindigkeit trifft ein Stein, der von einem 10 m hohen Turm fallengelassen wird, am Boden auf?

Lösung: Bei konstanter Beschleunigung und Startgeschwindigkeit Null ist $v = g \cdot t$. Zunächst muss also die Fallzeit berechnet werden:

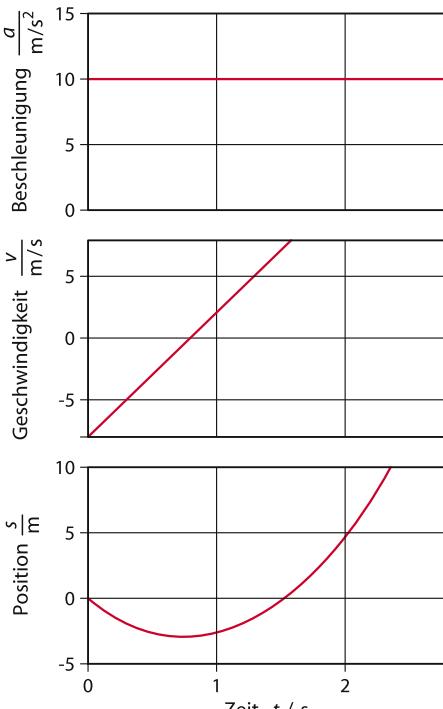


Abb. 2.6. Senkrechter Wurf, Einzelheiten im Text

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \text{ m}}{9,81 \text{ m/s}^2}} = 1,43 \text{ s.}$$

Die Geschwindigkeit ist dann:
 $v = 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1,43 \text{ s} = 14,0 \text{ m/s.}$

Rechenbeispiel 2.2: Wurf vom Turm

Statt den Stein einfach fallen zu lassen, soll er nun mit einer Startgeschwindigkeit von $v_0 = 7,5 \text{ m/s}$ fast senkrecht nach oben geworfen werden und erst, wenn er wieder herunterkommt, den Turm herunterfallen. Mit welcher Geschwindigkeit trifft er nun am Boden auf?

Lösung: Wie Abb. 2.6 nahelegt, kommt der Stein beim Herunterfallen mit dem gleichen Geschwindigkeitsbetrag wieder beim Werfer vorbei, mit dem er geworfen wurde. Addieren sich diese $7,5 \text{ m/s}$ also einfach zu den eben berechneten 14 m/s ? Nein! Denn die Fallzeit längs dem Turm ist nun kürzer. Wir müssen schon genau rechnen. Dazu legen wir zum Beispiel den Nullpunkt unserer Koordinatenachse in den Boden am Fuße des Turms und nehmen nun anders als in Abb. 2.6 die Richtung nach oben positiv (die Fallbeschleunigung ist dann negativ). Für den Ort als Funktion der Zeit erhalten wir nun:

$$\begin{aligned}s(t) &= s_0 + v_0 \cdot t - \frac{g}{2} t^2 \\&= 10 \text{ m} + 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - \frac{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2} \cdot t^2.\end{aligned}$$

Nach der gesamten Flugzeit t_0 kommt der Stein am Boden an: $s(t_0) = 0$. Das liefert uns eine quadratische Gleichung für t_0 , die wir lösen müssen (Kapitel 1.3.6). Heraus kommt $t_0 = 2,39 \text{ s}$. Die quadratische Gleichung hat auch noch eine negative Lösung. Diese ist für uns nicht relevant, da wir nur positive Zeiten betrachten. Nun ergibt sich die Aufschlaggeschwindigkeit zu:

$$\begin{aligned}v(t_0) &= v_0 - g \cdot t_0 \\&= 7,5 \text{ m/s} - 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 2,39 \text{ s} = -15,9 \text{ m/s.}\end{aligned}$$

Die resultierende Geschwindigkeit ist negativ, da nach unten gerichtet. Wir hätten auch zunächst die Wurfhöhe berechnen (sie ist $s = 2,87 \text{ m}$) und dann den einfachen Fall von dort betrachten können.

2.1.4

Überlagerung von Bewegungen

Wer im Boot einen breiten Fluss überqueren will, muss dessen Strömung berücksichtigen: Sie treibt ihn flussab. Von den vielen Möglichkeiten, die der Steuermann wählen kann, fallen zwei Grenzfälle heraus:

- ▶ der Steuermann hält sein Boot ständig quer zum Strom und lässt es abtreiben (Abb. 2.7, linkes Teilbild)
- ▶ der Steuermann „hält gegen den Strom“, und zwar so, dass sein Boot das andere Ufer „auf gleicher Höhe“ erreicht (Abb. 2.7, rechtes Teilbild).

Welcher Weg ist der schnellere? Mit welcher Geschwindigkeit fährt das Boot in beiden Fällen „über Grund“? Um welchen Winkel muss das Boot im zweiten Fall „vorhalten“, um welchen wird es im ersten Fall abgetrieben? Die Antworten erhält man durch **Vektoraddition**. Aus eigener Kraft beschafft sich das Boot eine Relativgeschwindigkeit \vec{v}_b gegenüber dem Wasser des Flusses. Die-

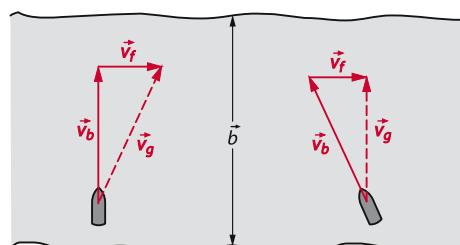


Abb. 2.7 a,b. Vektorielle Addition von Geschwindigkeiten: Ein Boot mit der Eigengeschwindigkeit \vec{v}_b überquert einen Fluss (Strömungsgeschwindigkeit \vec{v}_f , Breite \vec{b}). a Der Bootsführer lässt sich abtreiben; b Der Bootsführer „hält vor“. Die Geschwindigkeit \vec{v}_b lässt sich mit Hilfe der Winkelfunktionen und mit dem Satz des Pythagoras berechnen

ses läuft mit oder ohne Boot mit der Strömungsgeschwindigkeit \vec{v}_f des Flusses; sie soll der Einfachheit halber auf der ganzen Flussbreite als gleich angenommen werden. Für den Beobachter am ruhenden Ufer, und damit auch über Grund, addieren sich die beiden Geschwindigkeiten vektoriell.

Wie man am linken Teilbild der Abb. 2.7 sieht, steht die Eigengeschwindigkeit \vec{v}_b des Bootes im ersten Fall senkrecht auf der Strömungsgeschwindigkeit \vec{v}_f des Flusses. Ihre Vektorpfeile sind Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck mit der Geschwindigkeit \vec{v}_g über Grund als Hypotenuse. Nach dem Satz des Pythagoras hängen deshalb die drei Beträge folgendermaßen miteinander zusammen:

$$v_g^2 = v_f^2 + v_b^2.$$

Den Driftwinkel α zwischen \vec{v}_g und \vec{v}_b liefert die Winkelfunktion Tangens:

$$\cos \alpha = \frac{v_f}{v_b}.$$

In diesem Fall hat die Strömung des Flusses keinen Einfluss auf die Zeit T , die das Boot zum Überqueren benötigt. Die Flussbreite b ist durchfahren in

$$T = b/v_b.$$

Damit folgt für den Betrag x der Strecke, um die das Boot abgetrieben wird,

$$x = T \cdot v_f.$$

Hält der Bootsführer vor, um senkrecht zur Uferlinie überzusetzen, so ergibt sich seine Geschwindigkeit gegen Grund aus einer entsprechenden Überlegung (Abb. 2.7, rechtes Teilbild). v_g ist in diesem Fall kleiner.

Rechenbeispiel 2.3: Wie weit müssen wir vorhalten?

Der Fluss fließe mit $v_f = 1$ m/s. Das Boot fährt mit $v_b = 3$ m/s relativ zum Wasser. Es will genau senkrecht übersetzen.

Lösung: Wir schauen auf das rechte Teilbild der Abb. 2.7. Der Winkel, um den relativ zur senkrechten Fahrtrichtung vorgehalten werden muss, berechnet sich zu:

$$\sin \alpha = \frac{v_f}{v_b} = 0,33 \Rightarrow \alpha = 19,5^\circ$$

Die Geschwindigkeit gegen Grund ist:

$$v_g = \sqrt{v_b^2 - v_f^2} = 2,83 \text{ m/s.}$$

Zwei sich überlagernde Geschwindigkeiten müssen nicht konstant sein. Die Kugel, die ein Sportsfreund stößt oder eine Kanone schießt, fällt zu Boden, aber nicht im freien Fall senkrecht nach unten, wie am Ende des vorigen Kapitels beschrieben, sondern im hohen Bogen eines **schießen Wurfs** und längs einer sog. **Wurfparabel** nach Art der Abb. 2.8. Wie lässt sich diese formal beschreiben?

Die Kugel verlässt die Hand des Athleten mit einer **Anfangsgeschwindigkeit** \vec{v}_0 , die unter einem Winkel α gegen die horizontale x -Richtung schräg nach oben zeigt (Abb. 2.9). \vec{v}_0 hat demnach eine

horizontale Koordinate $v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$

und eine

vertikale Koordinate $v_{0z} = v_0 \cdot \sin \alpha$.

Gäbe es keine Schwerkraft und keine Luftreibung, flöge die Kugel kräftefrei nach dem 1. Newton'schen Gesetz (siehe Kap. 2.3.1) mit konstanter Geschwindigkeit immer geradeaus. Da die Schwerkraft \vec{F}_g senkrecht nach unten weist, merkt die horizontale Koordinate $v_x(t)$ der Geschwindigkeit der

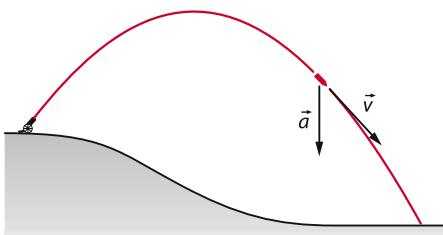


Abb. 2.8. Wurfparabel. Geschwindigkeit \vec{v} und Beschleunigung \vec{a} haben verschiedene Richtung

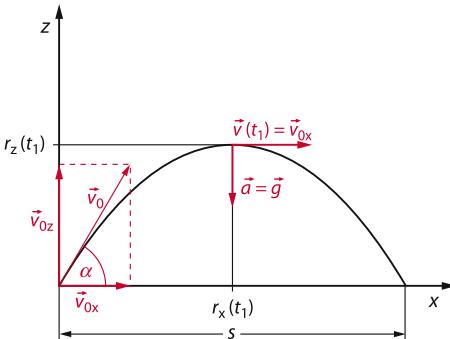


Abb. 2.9 Die Wurfbewegung kann man sich aus einer horizontalen Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit und einer vertikalen mit konstanter Beschleunigung zusammengesetzt denken.

Kugel tatsächlich von ihr nichts. Nur die Luftreibung führt zu einer Abbremsung in horizontaler Richtung. Die Kugel eines Kugelstoßers oder der mittelalterlichen Kanonenkugel aus Stein ist aber schwer und relativ langsam. Dann kann die Luftreibung gegen die Schwerkraft vernachlässigt werden und man kann für die Zeit des Fluges in guter Näherung behaupten:

$$v_x(t) = v_{0x} = \text{const.}$$

In x -Richtung bewegt sich die Kugel also ganz stur mit der konstanten Geschwindigkeit v_{0x} , die Beschleunigung in dieser Richtung ist Null. Die vertikale Komponente v_z unterliegt aber wie beim freien Fall der Fallbeschleunigung $a_z = -g$; sie muss hier ein negatives Vorzeichen bekommen, weil sie nach unten zeigt, und das positive Vorzeichen bei v_{0z} schon für „nach oben“ festgelegt worden ist:

$$v_z(t) = v_{0z} - g \cdot t.$$

Die Gesamtgeschwindigkeit der Kugel ist die Vektorsumme

$$\vec{v}(t) = v_{0x} \cdot \vec{e}_x + (v_{0z} - g \cdot t) \cdot \vec{e}_z$$

Für den Ort der Kugel gilt demnach:

$$r_x = v_{0x} \cdot t \quad \text{und} \quad r_z = v_{0z} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2.$$

Löst man die erste Gleichung nach t auf und setzt sie in die zweite ein, so erhält man r_z als Funktion von r_x :

$$r_z = \frac{v_{0z}}{v_{0x}} \cdot r_x - \frac{g}{2 \cdot v_{0x}^2} r_x^2$$

Dies ist tatsächlich die Formel einer nach unten geöffneten Parabel, eben der Wurfbahnparabel.

Mit diesen Überlegungen lassen sich allerlei Fragen an die Flugbahn beantworten. Hier soll als Beispiel nur eine Formel für die Flugweite s einer Kugel abgeleitet werden für den Fall, dass sie in der gleichen Höhe aufschlägt, in der sie abgeworfen wurde (☞ Abb. 2.9). Den höchsten Punkt ihrer Bahn erreicht sie zu dem Zeitpunkt t_1 , in dem die Geschwindigkeit in z -Richtung gerade verschwindet:

$$v_z(t_1) = v_{0z} - g \cdot t_1 = 0.$$

Daraus folgt $t_1 = v_{0z}/g$. Die gesamte Flugzeit ist wegen der Symmetrie der Flugbahn offenbar doppelt so lang. Aus der Flugzeit lässt sich die Flugweite s in x -Richtung ganz leicht berechnen, da ja die Geschwindigkeit in dieser Richtung konstant ist

$$s = r_x(2 \cdot t_1) = 2 \cdot v_{0x} \cdot t_1 = 2 \cdot v_{0x} \cdot v_{0z} / g.$$

All diese Betrachtungen beruhen darauf, die Wurfbewegung sich aus einer horizontalen Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit und einer vertikalen Fallbewegung mit konstanter Beschleunigung zusammengesetzt zu denken. Das funktioniert, weil gleichzeitig ablaufende Bewegungen eines Körpers sich tatsächlich nicht gegenseitig beeinflussen.

wichtig

Gleichzeitig ablaufende unterschiedliche Bewegungen eines Körpers beeinflussen sich gegenseitig nicht. Resultierende Größen ergeben sich durch Vektoraddition.

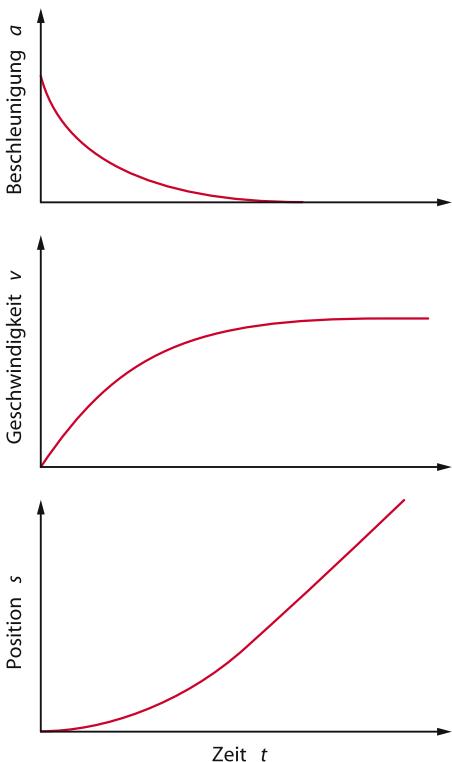


Abb. 2.10. Fall unter Reibung, qualitativ; Einzelheiten im Text

Die Vernachlässigung der Luftreibung ist bei einer schweren und nicht sehr schnellen Kugel noch zulässig, bei Regentropfen beispielsweise aber nicht. Würden sie im freien Fall aus der Wolke fallen, so schlägen sie mit etwa 700 km/h auf Passanten ein. Das wäre allenfalls in einer Ritterrüstung zu ertragen. Tatsächlich werden Regentropfen aber durch die Reibung der Luft so stark abgebremst, dass sie schließlich mit einer konstanten Geschwindigkeit von etwa 30 km/h am Boden ankommen. Schwere Tropfen fallen schneller als leichte (Kap. 3.5.1). Unter idealisierenden Annahmen kann man das rechnen, aber es ist mühsam und lohnt hier nicht. Soviel ist sicher: Die Wirkung der Reibung wächst mit der Geschwindigkeit und verschwindet in der Ruhe. Darum fällt der Tropfen zu Beginn so, als falle er frei. Mit steigender Geschwindigkeit wächst aber die

Reibungskraft bis sie die Schwerkraft kompensiert und deshalb v schließlich konstant wird. Folglich geht die Beschleunigung $a(t)$ gegen null, während $s(t)$ nach anfänglicher Krümmung in eine ansteigende Gerade übergeht (Abb. 2.10). Auch kompliziertere Situationen lassen sich graphisch relativ leicht und übersichtlich darstellen, solange eine qualitative Beschreibung genügt.

Rechenbeispiel 2.4: Noch ein Wurf vom Turm

Nun werde der Stein mit $v_0 = 15 \text{ m/s}$ unter einem Winkel von 30° zur horizontalen nach oben von unserem 10 m hohen Turm geworfen. Mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Winkel trifft er auf den Boden? Die Luftreibung sei vernachlässigbar.

Lösung: Die konstante Geschwindigkeit in horizontaler Richtung ist: $v_{0x} = v_0 \cdot \cos 30^\circ = 13 \text{ m/s}$, die Startgeschwindigkeit in senkrechter Richtung ist $v_{0z} = v_0 \cdot \sin 30^\circ = 7,5 \text{ m/s}$. In der senkrechten Richtung haben wir also genau die gleiche Situation wie im Rechenbeispiel 2.2. Der senkrechte Anteil der Auftreffgeschwindigkeit ist also $v_z = -15,9 \text{ m/s}$. Für die gesamten Auftreffgeschwindigkeit muss nun noch die konstante horizontale Komponente vektoriell hinzuaddiert werden:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_{0x}^2 + v_z^2} = 20,5 \text{ m/s} .$$

Der Auftreffwinkel zur Horizontalen ist:

$$\tan \alpha = \frac{v_z}{v_{0x}} = -1,22 \Rightarrow \alpha = -50,7^\circ.$$

Übung: Wie weit vom Turm landet der Stein? (Antwort: 31,1 m)

2.1.5

Kinematik der Drehbewegungen

Eine reine Bahnbeschleunigung \ddot{a}_t hat die gleiche Richtung wie die Geschwindigkeit \vec{v} und ändert darum nur deren Betrag v , nicht deren Richtung. Der freie Fall lieferte

ein Beispiel. Alle Teile eines starren Körpers bewegen sich mit der gleichen Momentangeschwindigkeit und darum auf parallelen Geraden; der Körper verschiebt sich parallel zu sich selbst. Man nennt das *Translation*. Sie muss nicht beschleunigt ablaufen.

Eine reine Radialbeschleunigung \ddot{a}_r steht senkrecht auf der Geschwindigkeit \dot{v} und ändert darum nur deren Richtung, nicht deren Betrag. Sie muss sich, wenn sie Radialbeschleunigung bleiben will, exakt mit dem Vektor \dot{v} mitdrehen, um stets senkrecht auf ihm zu stehen. \ddot{a}_r kann als Vektor also nicht konstant bleiben, sondern allenfalls einen zeitlich (aber nicht räumlich) konstanten Betrag $|\ddot{a}_r|$ besitzen. Alle Teile eines starren Körpers bewegen sich dann auf Bahnen konstanter Krümmung, d.h. auf konzentrischen Kreisbahnen um eine gemeinsame *Drehachse* herum. Diese kann weit außerhalb, aber auch innerhalb des Körpers liegen und fest im Raum stehen. Man nennt eine solche Bewegung *Rotation*. Auch bei konstanten Beträgen und raumfester Achse ist sie eine beschleunigte Bewegung.

Technisch lassen sich reine Rotationen leicht dadurch erzwingen, dass man, wie etwa bei den Flügeln einer Windmühle oder bei dem Kettenkarussell der Abb. 2.56, die Drehachse einfach durch Konstruktion vorgibt. Alle Teile des Karussells einschließlich der Fahrgäste holen sich die zur Rotation notwendigen Radialbeschleunigungen von *Zentripetalkräften*, die das Achslager aufbringt, was aber erst in Kap. 2.5.2 besprochen wird.

Drehbewegungen können aber auch wesentlich komplizierter ablaufen, wenn die Drehachse selbst wandert und eine sogenannte *momentane Drehachse* ist. Die Rollbewegung, die im Kapitel 2.4.3 besprochen werden wird, ist ein wiederum relativ einfaches Beispiel für so einen Fall. Die dann recht komplizierten Zusammenhänge müssen nur von einem Maschinenbauingenieur beherrscht werden. Zunächst soll hier nur der einfachere Fall einer raumfesten Drehachse besprochen werden.

Bei der Translation bewegen sich alle Teile eines starren Körpers mit der ge-

meinsamen Bahngeschwindigkeit \dot{v} . Bei der Rotation nimmt v mit dem Abstand r von der Drehachse zu. Was haben die Teile hier gemeinsam? Sie brauchen alle für einen vollen Umlauf die gleiche Zeit T , sie haben die gemeinsame *Drehfrequenz* $f = 1/T$. Sie wird zuweilen auch *Drehzahl* genannt, nicht ganz korrekt, denn sie ist keine dimensionslose Zahl, sondern eine reziproke Zeit mit der SI-Einheit 1/s. In der Technik wird oft die Einheit 1/min bevorzugt und zuweilen etwas umständlich sogar „Umdr. pro Min.“ geschrieben.

Eine vollständige Umdrehung „einmal rum um die Achse“ entspricht einem Drehwinkel von 360° , also von 2π im Bogenmaß, dem Verhältnis von Umfang und Radius bei Kreis (Kap. 1.2.3). Darum definiert man analog zur Frequenz $f = 1/T$ die

$$\text{Kreisfrequenz } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

ebenfalls mit der Einheit 1/s, die hier aber, im Gegensatz zur Einheit der „echten“ Frequenz, nicht Hertz genannt wird.

Der allgemeine Sprachgebrauch verbindet mit dem Wort „Frequenz“ gern die Vorstellung von einem sich wiederholenden, tunlichst periodisch wiederholenden Vorgang; das Rad einer Wassermühle dreht sich stundenlang. Unbedingt notwendig ist das aber grundsätzlich nicht. Wenn alle Teile eines starren Körpers für einen vollen Umlauf um den Winkel 2π gemeinsam die Zeit $T = 2\pi/\omega$ brauchen, werden sie den kleineren Drehwinkel $\Delta\varphi$ gemeinsam in der Zeitspanne $\Delta t = \Delta\varphi/\omega$ zurücklegen. Winkel und Zeitspanne dürfen auch differentiell klein sein. Das erlaubt, ω als

$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

zu definieren. Die Winkelgeschwindigkeit braucht aber nicht konstant zu sein: Ihr ist eine

$$\text{Winkelbeschleunigung } \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

mit der SI-Einheit 1/s² durchaus erlaubt.

wichtig

Translation: Parallelverschiebung; alle Teile eines starren Körpers bewegen sich mit der gemeinsamen Geschwindigkeit \bar{v} , d.h. auf geraden und parallelen Bahnen.
Rotation: Kreisbewegung um eine Drehachse; alle Teile eines starren Körpers bewegen sich mit der gemeinsamen Kreisfrequenz = Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$, d.h. auf konzentrischen Kreisbahnen.

miteinander zusammen. Entsprechend wird auch die Richtung der Winkelbeschleunigung $\bar{\alpha}$ so definiert, dass sich bei ungleichförmiger Rotation für die Tangentialbeschleunigung

$$\bar{a}_t = \bar{\alpha} \times \bar{r}$$

ergibt.

Wie eingangs erwähnt, ist eine ständig auf das Zentrum der Kreisbahn gerichtete und zeitlich, aber nicht räumlich konstante Radialbeschleunigung \bar{a}_r Ursache und Voraussetzung einer Kreisbewegung (sie darf nicht mit der tangentialen Beschleunigung \bar{a}_t aus der letzten Formel verwechselt werden). Wie sich eine rotierende Masse diese **Zentralbeschleunigung** besorgt, muss im Moment noch offen bleiben. Auf jeden Fall ist eine Kreisbewegung auch dann eine (ungleichförmig) beschleunigte Bewegung, wenn sie „mit konstanter Geschwindigkeit“ erfolgt. Nicht die Bahngeschwindigkeit ist konstant, sondern die Winkelgeschwindigkeit.

Welche Radialbeschleunigung braucht ein Massenpunkt, der auf einer Kreisbahn mit konstanter Kreisfrequenz umlaufen soll? Radiusvektor \bar{r} und Bahngeschwindigkeit \bar{v} stehen senkrecht aufeinander, rotieren also mit der gleichen Kreisfrequenz $\bar{\omega}$. Beide drehen sich in der (kleinen) Zeitspanne Δt um den gleichen (kleinen) Winkel $\Delta\varphi$ (☞ Abb. 2.12). Um \bar{r} in seine neue Lage zu bringen, muss ihm das (kleine) Wegstück Δs vektoriell addiert werden. Es steht im wesentlichen senkrecht auf \bar{r} ; es tut dies sogar streng, wenn man es differentiell klein werden lässt ($d\bar{s}$).

Dann fällt es mit dem ebenfalls differentiell kleinen Kreisbogen zusammen, so dass man seinen Betrag

$$|d\bar{s}| = |\bar{r}| \cdot d\varphi$$

schreiben darf. Ganz analog braucht die Bahngeschwindigkeit \bar{v} eine zu ihr senkrecht zu addierende Zusatzgeschwindigkeit $d\bar{v}$ mit dem Betrag

$$|d\bar{v}| = |\bar{v}| \cdot d\varphi$$

Ein Teil des starren Körpers, der sich im Abstand r von der Drehachse befindet, hat die Geschwindigkeit $v = 2\pi \cdot r/T = \omega \cdot r$, denn $2\pi \cdot r$ ist ja die Strecke, die er in der Umlaufzeit T zurücklegt. Entsprechend ist die Tangentialbeschleunigung dieses Teils $a_t = \alpha \cdot r$.

Die Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ und die Winkelbeschleunigung $\bar{\alpha}$ können auch als Vektor definiert werden. Welche Richtung bleibt zum Beispiel bei einer Rotation eines Körpers mit konstanter Winkelgeschwindigkeit konstant? Radiusvektor und Bahngeschwindigkeit eines Teils ändern ja ständig ihre Richtung. Konstant bleibt aber die Richtung der Drehachse. Sie wird deshalb als Richtung für die Winkelgeschwindigkeit gewählt, und zwar so, dass die Rotation im Uhrzeigersinn läuft, wenn man in die Richtung der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ sieht. Dies entspricht wieder der Rechtschraubenregel. Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$, Radiusvektor \bar{r} und Bahngeschwindigkeit \bar{v} stehen demnach in einer Weise senkrecht aufeinander, wie die ☞ Abb. 2.11 dies perspektivisch darzustellen versucht.

Formal hängen sie über das Kreuzprodukt

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

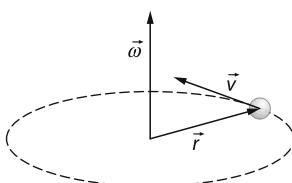


Abb. 2.11 Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit weist in Richtung der Drehachse senkrecht zur Bahnebene

$d\vec{v}$ ist radial nach innen, also antiparallel zum Radiusvektor \vec{r} gerichtet. Die genauso gerichtete Radialbeschleunigung ist

$$\vec{a}_r = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Für ihren Betrag gilt:

$$|\vec{a}_r| = \frac{|\vec{v}| \cdot d\varphi}{dt} = v \cdot \omega = \frac{v^2}{r},$$

$$\text{da ja } \omega = \frac{v}{r}.$$

wichtig

Drehbewegung (um eine raumfeste

Achse): Drehwinkel φ

Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\varphi/dt$

Winkelbeschleunigung $\alpha = d\omega/dt$

die Vektoren $\vec{\omega}$ und $\vec{\alpha}$ zeigen in Richtung der Drehachse

Bahngeschwindigkeit im Abstand r :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, v = \omega \cdot r$$

Tangentialbeschleunigung im Abstand r :

$$a_t = \alpha \cdot r$$

$$\text{Radialbeschleunigung im Abstand } r: a_r = \frac{v^2}{r}$$

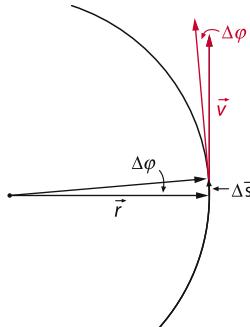


Abb. 2.12. Zur Kreisbewegung. Der Körper läuft gegen den Uhrzeiger und befindet sich auf seiner Bahn rechts („3 Uhr“). Der Vektor \vec{v} der Bahngeschwindigkeit zeigt nach oben und steht senkrecht auf dem Radiusvektor \vec{r} . Beide drehen sich in der (kleinen) Zeitspanne Δt um den (kleinen) Winkel $\Delta\varphi$. Dazu müssen zu \vec{r} das (kleine) Wegstück $\Delta\vec{s}$ mit $\Delta s = r \cdot \Delta\varphi$ und zu \vec{v} die (kleine) Zusatzgeschwindigkeit $\Delta\vec{v}$ mit $\Delta v = v \cdot \Delta\varphi$ vektoriell addiert werden. Für kleiner werdendes $\Delta\varphi$ steht die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}$ (der Übersichtlichkeit halber im Bild nicht eingezeichnet) immer genauer senkrecht zu \vec{v}

2.2

Statik starrer Körper

Einleitung

Die Statik behandelt den wichtigen

Sonderfall der Ruhe: Alle Geschwindigkeiten sind und bleiben Null. Das setzt voraus, dass sämtliche auf den ruhenden Körper wirkenden Kräfte sich kompensieren müssen; alle von ihnen ausgelösten Drehmomente müssen dies ebenfalls tun. Zuverlässig erfüllt werden diese Bedingungen im sog. stabilen Gleichgewicht. Damit ist eine Position gemeint, die der Körper nur verlassen kann, wenn ihm Energie zugeführt wird. Die auf Erden allgegenwärtige Kraft ist die Schwerkraft (Gewichtskraft); wer etwas gegen sie anhebt, leistet Hubarbeit. Der angehobene Körper speichert sie als potentielle Energie. Geschickt eingesetzte Hebel erlauben, eine vorgegebene Hubarbeit mit geringerer Kraft zu leisten.

Rechenbeispiel 2.5:

Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde? Welche Radialbeschleunigung erfährt ein Mensch am Äquator? (Radius der Erde: $6,38 \cdot 10^6$ m)

Lösung: Die Erde dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit einmal am Tag um ihre Achse. Die Winkelgeschwindigkeit entspricht also der Kreisfrequenz:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \text{ h}} = \frac{2\pi}{86400 \text{ s}} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

Daraus ergibt sich eine Bahngeschwindigkeit am Äquator von $v = \omega \cdot r = 464 \text{ m/s} = 1670 \text{ km/h}$. Die Radialbeschleunigung ist also

$$a_r = \frac{v^2}{r} = 0,034 \text{ m/s}^2.$$

Sie ist zum Glück viel kleiner als die Fallbeschleunigung g . Wäre sie größer als g , so würde man davonfliegen (Kapitel 2.5.2).

2.2.1

Kräfte

Der Mensch weiß aus Erfahrung, ob er sich einen Kartoffelsack aufladen kann oder ob

er dies besser lässt; er hat ein recht zuverlässiges Gefühl für die **Kraft** seiner Muskeln. Hier verwendet der Sprachgebrauch des Alltags das Wort *Kraft* genau im Sinn der Physik.

An eine allgegenwärtige Kraft hat sich jedes irdische Leben anpassen müssen: an die Schwerkraft, die Kraft des Gewichtes, die jeden materiellen Gegenstand nach unten zieht. Wer ein Buch vor sich in der Schwebe hält, um darin zu lesen, setzt die Muskelkraft seiner Arme gegen die Gewichtskraft des Buches ein. Beide Kräfte müssen sich genau kompensieren, wenn das Buch in der Schwebe bleiben, wenn es zu keinen Bewegungen kommen soll:

$$\text{Kraft} + \text{Gegenkraft} = 0.$$

Jede Gewichtskraft zieht nach unten; eine sie kompensierende Gegenkraft muss mit gleichem Betrag nach oben gerichtet sein. Kräfte sind demnach Vektoren. Wie misst man ihre Beträge?

Wer sich ins Bett legt, braucht seine Gewichtskraft nicht mehr selbst zu tragen; er überlässt es den Stahlfedern der Matratze, die nötige Gegenkraft aufzubringen, irgendwie. Je nach Konstruktion tun sie dies durch Stauchung oder durch Dehnung, auf jeden Fall also durch **Verformung**. Solche Verformungen bleiben oft unerkannt. Wer sich auf eine Bank setzt, biegt sie nicht merklich durch, aber er biegt sie durch, und mit einem messtechnischen Aufwand lässt sich das auch nachweisen. Wenn man aufsteht, federt die Bank wieder in ihre Ausgangslage zurück: Die Verformung war **elastisch**, im Gegensatz zu der bleibenden, der **plastischen** Verformung von Butter oder Kaugummi. Vater Franz biegt die Bank stärker durch als Töchterchen Claudia; elastische Verformungen liefern ein verwendbares Maß für angreifende Kräfte. Besonders bewährt haben sich Schraubenfedern (☞ Abb. 2.13).

Wer einen Kraftmesser kalibrieren will, braucht ein Verfahren zur Erzeugung definierter Kräfte; wer ihn obendrein noch eichen will, braucht zusätzlich eine Krafteinheit. Es liegt nahe, für beides die allge-

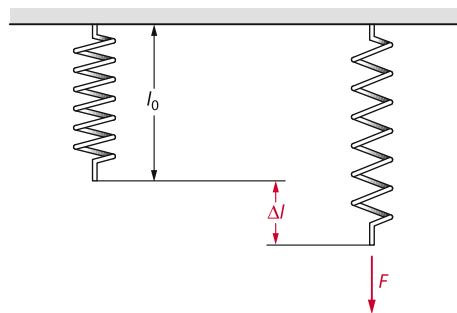


Abb. 2.13. Schraubenfeder, schematisch. Eine Kraft F dehnt eine Feder der Ausgangslänge l_0 um Δl . Lineares Kraftgesetz herrscht, wenn Δl und F zueinander proportional sind: $F = D \cdot \Delta l$ (D = Federkonstante)

genwärtige Schwerkraft zu benutzen. Vier Liter Wasser wiegen gewiss doppelt so viel wie zwei Liter Wasser, und die Gewichtskraft eines Liters Wasser ließe sich grundsätzlich als Einheit verwenden. Das hat man früher auch getan und ihr den Namen *Kilopond* (kp) gegeben. Den Anforderungen moderner Messtechnik genügt diese Einheit aber nicht mehr, denn leider erweisen sich Gewichtskräfte als ortsabhängig: In Äquatornähe wiegt ein Liter Wasser etwas weniger als in Polnähe. Die SI-Einheit der Kraft heißt **Newton**, abgekürzt N. Ihre Definition kann erst in Kap. 2.3.1 besprochen werden. Bis dahin muss genügen, dass es in Newton geeichte Kraftmesser zu kaufen gibt.

Eine Schraubenfeder der Länge l_0 dehnt sich unter einer Zugkraft F mit dem Betrag F um Δl auf $l(F) = l_0 + \Delta l(F)$. Geeichte Federwaagen folgen dabei dem **linearen Kraftgesetz**

$$F = D \cdot \Delta l$$

oder auch

$$l(F) = l_0 + F/D.$$

Hier bezeichnet D die **Federkonstante**, eine Kenngröße der jeweiligen Schraubenfeder. Ihre Längenänderung Δl und ihre **Dehnung** $\Delta l/l_0$ sind also über die Federkonstante D der angreifenden Kraft F proportional; im Diagramm gibt jede **Proportionalität** eine

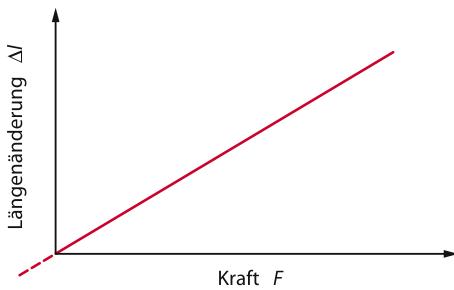


Abb. 2.14. Graph für eine Schraubenfeder mit linearem Kraftgesetz: Proportionalität zwischen Längenänderung Δl und damit auch zwischen Dehnung $\Delta l/l_0$ und Kraft F . Grundsätzlich kann eine Schraubenfeder auch gestaucht werden (gestrichelter Teil)

Gerade durch den Nullpunkt des Achsenkreuzes (☞ Abb. 2.14). Zwischen F und der gesamten Länge l der Feder besteht hingegen keine Proportionalität, sondern nur ein **linearer Zusammenhang**. Er gibt im Diagramm ebenfalls eine Gerade; sie läuft aber nicht durch den Nullpunkt, besitzt vielmehr einen **Achsenabschnitt** (☞ Abb. 2.15).

Die Schwerkraft (Gewichtskraft) zieht immer nach unten; so ist „unten“ definiert. Durch Seil und Rolle kann ihre Wirkung aber leicht in jede gewünschte Richtung umgelenkt werden, wie ☞ Abb. 2.16 zeigt. Kräfte sind eben Vektoren. Zwei entgegengesetzte gleiche horizontale Kräfte, nach ☞ Abb. 2.17, erzeugt durch zwei gleiche Gewichte an den Enden eines Seiles, heben sich auf; das System bleibt in Ruhe, es herrscht **Gleichgewicht**.

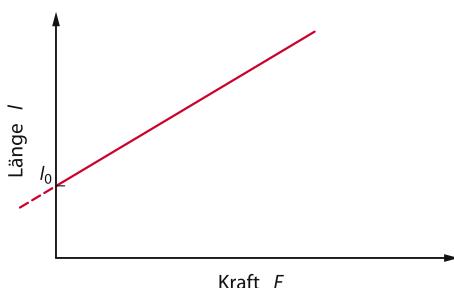


Abb. 2.15. Graph für eine Schraubenfeder mit linearem Kraftgesetz: linearer Zusammenhang zwischen Federlänge l und Kraft F

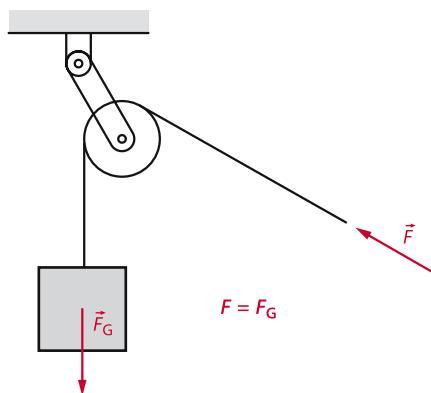


Abb. 2.16. Umlenken der Gewichtskraft F_G durch Seil und Rolle in eine beliebige Richtung. Der Betrag der Kraft bleibt unverändert

wicht. Das System bleibt auch dann in Ruhe, wenn man das eine Gewicht durch einen Haken in der Wand ersetzt (☞ Abb. 2.18). Jetzt müssen Haken und Wand die zum Gleichgewicht nötige Gegenkraft aufbringen, durch elastische Verformung.

Seile lassen sich nur auf Dehnung beanspruchen, nicht auf Stauchung. Infolgedessen können sie Kräfte nur in ihrer Längsrichtung übertragen. Werden sie wie in ☞ Abb. 2.16 über eine Rolle geführt, so muss die Halterung der Rolle die Vektorsumme der beiden dem Betrag nach gleichen Kräfte \vec{F}_G und $-\vec{F}$ aufnehmen und durch eine Gegenkraft \vec{F}_h kompensieren (☞ Abb. 2.19). Die drei Kräfte \vec{F}_G , $-\vec{F}$ und \vec{F}_h bilden aneinandergesetzt ein geschlossenes Dreieck, sie summieren sich also zu Null, wie es im Gleichgewicht eben sein muss.

Auch mehr als drei Kräfte können sich die Waage halten, dann nämlich, wenn sich ihr

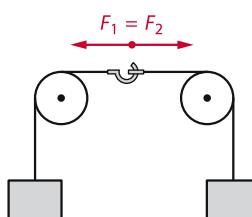


Abb. 2.17. Kraft = Gegenkraft

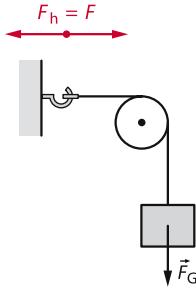


Abb. 2.18. Erzeugung der zum Gleichgewicht notwendigen Gegenkraft \vec{F}_h durch Verformung von Haken und Wand

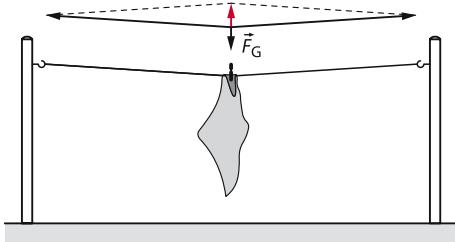


Abb. 2.20. Eine straffe Wäscheleine steht unter hoher Spannung, damit die Gewichtskraft \vec{F}_G von der Vektorsumme (rot) der Kräfte in der Leine kompensiert werden kann

Kräftepolygon schließt: Zeichnet man die Kraftpfeile hintereinander, so muss die Spitze des letzten mit dem Anfang des ersten zusammenfallen. Die erste Bedingung dafür, dass sich nichts bewegt, lässt sich demnach kurz und allgemein schreiben als

$$\sum_i \vec{F}_i = 0.$$

Bei unglücklicher Geometrie müssen auch geringe Kräfte nur durch relativ große Gegenkräfte gehalten werden. Musterbeispiel ist die Wäscheleine (Abb. 2.20): Je straffer man sie spannt, umso größer müssen die Kräfte in der Leine sein, damit ihre Vektorsumme (rot) die Gewichtskraft des Handtuchs noch kompensieren kann. Zum Klimmzug greift man vernünftigerweise in Schulterbreite an die Reckstange; wer die Arme spreizt, muss sich mehr anstrengen.

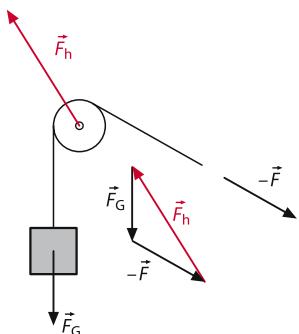


Abb. 2.19a-c. Vektoraddition der Kräfte am Beispiel der Abb. 2.16. Die Kräfte \vec{F}_G und $-\vec{F}$ werden durch die Gegenkraft der Halterung der Rolle \vec{F}_h kompensiert

Auf der anderen Seite spart eine **schiefe Ebene** Kraft: Über eine schräge Latte (Abb. 2.21) lässt sich ein Schubkarren auf das Baugerüst bugsieren, den kein Mensch mehr stemmen kann, denn für den Transport muss nur die Komponente \vec{F}_1 der Gewichtskraft \vec{F}_G überwunden werden. Die Komponente \vec{F}_2 wird von den Verformungskräften der Latte übernommen.

2.2.2 Gewichtskraft und Gravitation

Die Behauptung, eine Federwaage kompensierte mit der elastischen Kraft ihrer Schraubenfeder die **Gewichtskraft** der angehängten Last, sagt nur die halbe Wahrheit. Um eine Feder zu dehnen, muss man an beiden Enden ziehen. Die Federwaage funktioniert nur, wenn sie am oberen Ende festgehalten wird. Dort überträgt sie ihre Federkraft (plus eigene Gewichtskraft) auf die Halterung. Diese stützt sich ihrerseits über Gestell, Tischplatte, Fußboden und Mauerwerk auf den Baugrund, überträgt also mit all den zugehörigen Gewichtskräften auch die der Last an der Federwaage auf die Erde. Woher nimmt die jetzt die Gegenkraft?

Ursache aller Gewichtskräfte ist die **Gravitation**, eine in ihren Details noch nicht völlig erforschte Eigenschaft der Materie, nur mit deren Masse verknüpft, also mit der in Kilogramm gemessenen physikalischen

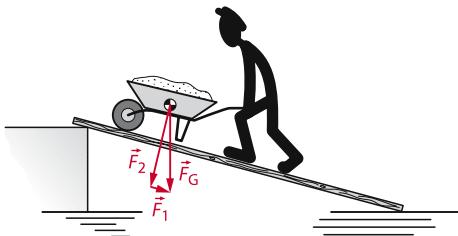


Abb. 2.21. Schiefe Ebene. Nur die Komponente \vec{F}_1 der Gewichtskraft \vec{F}_G muss beim Schieben überwunden werden; die Komponente \vec{F}_2 wird von der Latte übernommen

schen Größe, und nicht mit der chemischen Natur der Materie oder mit ihrem Aggregatzustand. Die Gravitation beherrscht die Himmelsmechanik, den Lauf der Planeten um die Sonne, den Lauf der Sonne um das Zentrum der Milchstraße, den Lauf der Wettersatelliten um die Erde. Ihre Wirkung sind durch nichts beeinflussbare Kräfte, mit denen sich alle materiellen Körper gegenseitig anziehen.

Das **Gravitationsgesetz** besagt: Zwei Massen m_1 und m_2 im Abstand r ziehen sich gegenseitig mit einer Kraft \vec{F} parallel zu der Verbindungsgeraden zwischen den Massen an, die zu beiden Massen proportional ist und umgekehrt proportional zu r^2 :

$$F_G = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Hier erscheint die

$$\text{Gravitationskonstante } G = 6,68 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2.$$

Lässt sich kein einheitliches r ansetzen, etwa weil die Körper zu ausgedehnt sind oder auch mehr als zwei, so muss über alle Masseteilchen integriert werden. Bei Kugeln, also auch der Erde, reicht r von Mittelpunkt zu Mittelpunkt.

wichtig

Gravitation: Massen ziehen sich an (Naturgesetz).

Die Gravitation der Erde wirkt weit hinaus in den Weltraum, sie wirkt aber auch auf alle

Gegenstände im Lebensraum des Menschen. Dadurch wird jeder Stein, jeder Mensch, jeder Kartoffelsack von der Erde mit seiner jeweiligen Gewichtskraft F_G angezogen und zieht seinerseits die Erde mit der gleichen Kraft an! Genauer: mit einer zu F_G antiparallelen Kraft gleichen Betrages. Sie ist die Gegenkraft, die zu Beginn des Kapitels gesucht wurde.

Die Gewichtskräfte, an die der Mensch sich gewöhnt hat, werden durch Masse und Radius der Erdkugel bestimmt und sind, dem Gravitationsgesetz zufolge, der Masse m des Probekörpers streng proportional. Allgemein darf man

$$F_G/m = 9,81 \text{ N/kg}$$

setzen.

Wäre die Erde eine mathematische Kugel mit homogen verteilter Massendichte, so wäre die letzte Gleichung überall auf der Erdoberfläche mit dem gleichen Zahlenwert gültig. Tatsächlich gilt aber in Jakarta $F_G/m = 9,7818 \text{ N/kg}$ und am Nordpol $F_G/m = 9,8325 \text{ N/kg}$. Wer das Kapitel, das den freien Fall behandelte (s. Kap. 2.1.3), noch gut in Erinnerung hat, dem sollten diese Zahlenwerte bekannt vorkommen: sie sind die der (in m/s^2 gemessenen) Fallbeschleunigung g . Das lässt einen Zusammenhang vermuten. In der Tat gilt

$$F_G = m \cdot g.$$

Nur macht diese Gleichung im Moment noch Schwierigkeiten bei den Einheiten. Das Kap. 2.3.1 wird sie lösen.

2.2.3

Arbeit und Energie

Es macht Mühe, eine Last zu heben; herunterfällt sie von allein. Aber auch, wenn die Last wieder herunterfällt, war doch die Mühe des Anhebens nicht ganz vergebens, denn beim Herunterfallen kann etwas bewirkt werden und sei es nur, dass die Last kaputtgeht. Die Physik beschreibt diese Vorgänge mit den Größen **Arbeit** und **Energie**. Mensch oder Kran leisten beim Heben der Last Arbeit oder

Hubarbeit, die von der Last als *potentielle Energie* gespeichert wird. Beim Herabfallen, -rollen oder -gleiten wird dann diese Energie wieder freigesetzt. Der Begriff *Arbeit* ist in der Physik eine recht klar und einfach definierte Größe und wird viel enger verstanden als in der Umgangssprache. Die zu leistende Hubarbeit ist umso größer, je höher die Hubhöhe Δh ist, um die die Last gehoben wird. Das Heben einer schwereren Last mit größerer Gewichtskraft F_G bedarf auch einer größeren Arbeit. Es liegt also nahe, die Hubarbeit W als das Produkt aus beidem festzulegen:

$$W = F_G \cdot \Delta h$$

Hebt man die Last mit einem Flaschenzug an (☞ Abb. 2.22), so spart man Kraft, Arbeit spart man nicht. Zwar ist die Kraft F , mit der gezogen werden muss, aufgrund der trickreichen Rollenkonstruktion geringer als die Gewichtskraft F_G , aber das Seil muss auch die längere Strecke h_2 gezogen werden. Das Produkt aus beidem bleibt gleich:

$$W = F \cdot h_2 = F_G \cdot \Delta h_1$$

Im Flaschenzug verteilt sich die Gewichtskraft F_G der Last gleichmäßig auf die n Teilstücke des Seiles. Die Gegenkraft F_2 braucht deshalb nur die Teilkraft F_G/n zu kompensieren. Zum Heben der Last um Δh muss freilich jedes Teilstück des Seiles entsprechend verkürzt werden, das gesamte Seil also um $s = n \cdot \Delta h$.

Die durch das Heben der Last hinzugewonnene *potentielle Energie* ΔW_{pot} entspricht gerade dieser geleisteten Hubarbeit. Man kann also auch schreiben:

$$\Delta W_{\text{pot}} = F_G \cdot \Delta h.$$

Arbeit und Energie haben die gleiche Einheit und sind eng verwandt.

wichtig

Hubarbeit = Gewichtskraft mal Hubhöhe; Hubarbeit erhöht die potentielle mechanische Energie.

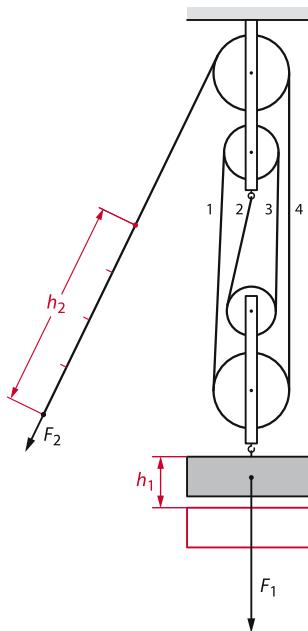


Abb. 2.22. Flaschenzug (Einzelheiten im Text)

Aus diesem Zusammenhang folgt, dass die Energie in der Einheit *Newtonmeter* (Nm) gemessen werden kann. Sie wird auch *Joule* (J) genannt und ist per Definition gleich der *Wattsekunde* (Ws), der Einheit der elektrischen Energie. Für den modernen Alltag ist sie zu klein; dort benutzt man lieber die *Kilowattstunde* (1 kWh = 3.600.000 J). Sie hat einen Kleinhandelswert von etwa 12 Cent.

wichtig

SI-Einheit der Energie: Newtonmeter = Joule = Wattsekunde.

Anders als Arbeit ist Energie ein recht komplizierter und sehr vielschichtiger Begriff in der Physik. Energie hat die bemerkenswerte Eigenschaft, in mancherlei unterschiedlichen Formen auftreten zu können und sich von der einen in die andere überführen zu lassen; insofern ist sie wandelbar. Sie kann aber weder geschaffen noch vernichtet werden; insofern ist sie unwandelbar, ihr Betrag bleibt konstant.

Ohne *elektrische Energie*, leicht zugänglich bereitgestellt von jeder Steckdose, kann

sich mancher ein Leben gar nicht mehr vorstellen. Gewonnen wird sie überwiegend aus *chemischer Energie*, durch Verbrennung von Kohle und Erdöl nämlich. Auch Mensch und Tier decken den Energiebedarf ihres Organismus aus chemischer Energie, enthalten in der Nahrung. Pflanzen haben sie vorher gespeichert, aus von der Sonne stammender *Strahlungsenergie*. Die Sonne bezieht sie aus *Kernenergie*, die grundsätzlich bei jeder spontanen Umwandlung von chemischen Elementen durch Radioaktivität, Kernspaltung oder Kernfusion frei wird. Im Gedankenversuch auf dem Papier lässt sich Energie aus jeder Form vollständig in jede andere Form überführen; in der Praxis bleibt freilich stets mehr oder weniger *Wärmeenergie* übrig.

Die eben besprochene *potentielle Energie* beim Heben ist nur eine mögliche Form potentieller Energie. Immer wenn die Kraft auf einen Gegenstand nur vom Ort des Gegenstandes abhängt, geht die am Gegenstand verrichtete Arbeit in potentielle Energie. Ein zweites Beispiel ist die in einer gespannten Feder gespeicherte potentielle Energie.

Im Fall der Feder ist die Kraft F nicht konstant wie die Gewichtskraft F_G beim Heben, sondern eine Funktion $F(s)$ der Position s . Eine einfache Multiplikation zur Berechnung der Arbeit genügt nicht mehr; es muss integriert werden:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s) \cdot ds$$

Bei der Schraubenfeder mit ihrem linearen Kraftgesetz $F(s) = D \cdot s$ (s. Kap. 2.2.1) ergibt sich damit die potentielle Energie der zusammengedrückten Feder nach dem gleichen mathematischen Schema wie beim freien Fall (s. Kap. 2.1.4):

$$\begin{aligned} W_{\text{pot}}(s) &= \int_{s_0}^s D \cdot \sigma d\sigma + W(s_0) \\ &= D \cdot \int_{s_0}^s \sigma d\sigma + W(s_0) = \frac{1}{2} D \cdot s^2 + W_0 \end{aligned}$$

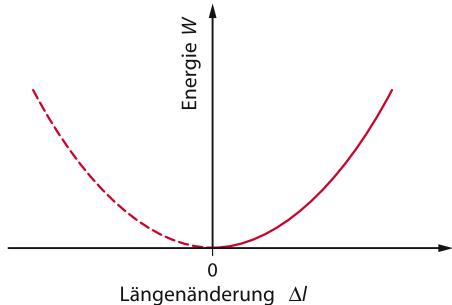


Abb. 2.23. Zum linearen Kraftgesetz einer Schraubenfeder (☞ Abb. 2.13) gehört eine parabolische Abhängigkeit der potentiellen Energie von der Dehnung (Stauchung gestrichelt)

Als Graph kommt also eine Parabel heraus (☞ Abb. 2.23).

Die von der Mathematik vorgeschriebenen Integrationskonstanten haben physikalische Bedeutung: Sie kennzeichnen die *Randbedingungen* eines Problems, die das Integral selbst nicht erfassen kann. Beim Wurf waren dies die *Anfangsbedingungen* zur Zeit $t = 0$, die Anfangsgeschwindigkeit v_0 nämlich, mit der abgeworfen wird, und die Ausgangsposition s_0 , von der aus geworfen wird. Für die potentielle Energie hat das eine merkwürdige Konsequenz: W_{pot} lässt sich überhaupt nur definieren *bis auf eine willkürliche additive Konstante W_0* ; es ist grundsätzlich gleichgültig, ob man den Nullpunkt der potentiellen Energie der angehobenen Last auf die Oberkante des Labortisches, auf Meereshöhe, auf das Zentrum der Erde oder auf sonst ein Niveau bezieht. Änderungen der potentiellen Energie werden von der Wahl des Nullpunkts nicht beeinflusst.

Kräfte sind Vektoren, die Energie ist ein Skalar. Wer sich nach Art der ☞ Abb. 2.24 vor einen Wagen spannt, zieht um den Winkel α schräg nach oben. Mit der vertikalen Komponente seiner Zugkraft F entlastet der lediglich die Vorderachse seines Wagens; nur die horizontale Komponente mit dem Betrag

$$F_h = F \cdot \cos \alpha$$

dient dessen Bewegung. Sie allein zählt bei der Berechnung der geleisteten Arbeit:

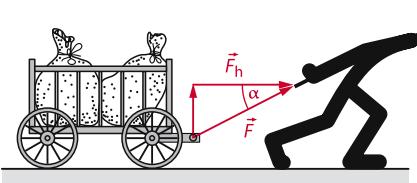


Abb. 2.24. Nur die horizontale Komponente der Zugkraft leistet Arbeit

$$W = F \cdot \Delta s \cdot \cos \alpha.$$

Diese Formel lässt offen, ob man die Komponente der Kraft in Richtung des Weges in sie eingesetzt hat oder die Komponente des Weges in Richtung der Kraft. Mathematisch handelt es sich um das *skalare Produkt* der beiden Vektoren \vec{F} und \vec{s} (s. Kap. 1.3.2). Sind F und α nicht konstant, muss integriert werden.

wichtig

Mechanische Arbeit:

$$W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s} \text{ (skalares Produkt)},$$

„Arbeit = Kraft · Weg“.

Ohne Weg keine Arbeit! Als „Weg“ zählt aber nur dessen Komponente in Richtung der Kraft. Wer sich einen Mehlsack auf die Schultern lädt, leistet Arbeit, Hubarbeit nämlich. Wer den Sack dann aber streng horizontal über den Hof trägt (Abb. 2.25), leistet im Sinn der Mechanik keine Arbeit mehr. Dass er trotzdem ermüdet, ist seine Ungeschicklichkeit: Hätte er einen Wagen gebaut und sorgfältig alle Reibung vermieden, so hätte er den Sack, einmal aufgeladen, mit dem kleinen Finger über den Hof schieben können, ohne Arbeit, weil (praktisch) ohne Kraft. Weg und Gewichtskraft stehen senkrecht aufeinander, ihr skalares Produkt ist null, weil $\cos 90^\circ$ dies auch ist.

Reine Haltebetätigung leistet keine mechanische Arbeit; der Weg fehlt. Für sie Energie einzusetzen, ist Verschwendug, kann aber aus mancherlei Gründen durch-

aus vernünftig sein. Hierfür ein technisches Beispiel: Ein Kran verlädt Eisenschrott mit Hilfe eines Elektromagneten. Für die Hubarbeit braucht er einen Elektromotor, der elektrische Energie umsetzt; das ist unvermeidlich. Zusätzlich setzt aber auch der Magnet elektrische Energie in Wärme um (der elektrische Strom erwärmt den Magneten), und das ist prinzipiell unnötig; ein Permanentmagnet hielte den Eisenschrott ja auch fest. Nur ließe er ihn nicht wieder los. Allein der Flexibilität wegen wird hier Energie zum (vorübergehenden) Festhalten eingesetzt.

Ähnliches gilt für Muskeln, wenn auch in ganz anderem Mechanismus. Sie können sich unter Kraftentwicklung zusammenziehen und dabei mechanische Arbeit leisten, beim Klimmzug etwa oder beim Aufrichten aus der Kniebeuge. Ein Muskel muss aber auch dann Energie umsetzen, wenn er sich lediglich von einer äußeren Kraft nicht dehnen lassen will. Die Natur hat Mensch und Tier so konstruiert, dass im Allgemeinen nur wenig Muskelarbeit für reine Haltebetätigung eingesetzt werden muss. Wer aufrecht steht, den trägt im Wesentlichen sein Skelett. Wer aber in halber Kniebeuge verharrt, dem zittern bald die Knie.

So wandelbar die Erscheinungsformen der Energie sind, so unwandelbar ist ihr Betrag. Der „Satz von der Erhaltung der Energie“, der *Energiesatz* also, gilt zuverlässig.

wichtig

Energiesatz: Energie kann weder ins Nichts verschwinden noch aus dem Nichts entstehen, sie kann lediglich von einer Energieform in eine andere umgewandelt werden.

Keinem Naturgesetz ist so viel Aufmerksamkeit gewidmet, keines so oft und so sorgfältig überprüft worden wie der Energiesatz. Schon bevor er entdeckt wurde, haben zahlreiche Erfinder vergeblich versucht, ihn durch die Konstruktion eines *Perpetuum mobile* experimentell zu widerlegen. Darum darf man sich von häufig benutzen Vokabeln wie „Energieerzeugung“ oder

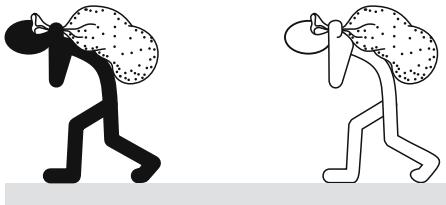


Abb. 2.25. Wer einen Mehlsack horizontal über den Hof trägt, leistet keine mechanische Arbeit gegen die Schwerkraft

„Energieverbrauch“ nicht irreleiten lassen. Insgesamt kann Energie weder erzeugt noch verbraucht werden. Freilich, des von der Technik verwöhnten Menschen liebste Energieform ist die elektrische, und die kann schon „verbraucht“ werden, umgewandelt in Licht, Wärme usw. Dazu muss sie ständig erzeugt werden, umgewandelt zumeist aus der chemischen Energie von Erdöl, Kohle und Erdgas, aber auch aus Kernenergie, seit eh und je aus der wenig ergiebigen Energie von Wind und Wasser, kaum aus der Strahlungsenergie der Sonne. Verschwendenderischer Umgang mit Energie schafft Lebensqualität und treibt Raubbau an den fossilen Energievorräten, die von der Natur in Jahr-millionen angelegt wurden.

Wer arbeitet, leistet etwas; wer schneller arbeitet, leistet mehr. Nach diesem Satz leuchtet die folgende Definition der physikalischen Größe **Leistung** unmittelbar ein:

$$\text{Leistung } P = \frac{\text{Energie } dW}{\text{Zeitspanne } dt} = \dot{W},$$

SI-Einheit ist Joule/Sekunde = Watt = W.

wichtig

$$\text{Leistung } P = \frac{dW}{dt} = \dot{W}, \text{ SI-Einheit J/s}$$

$$= \text{Watt} = W.$$

Um die Reaktionen des menschlichen Organismus auf körperliche Belastung zu untersuchen, benutzt der Sportarzt gern das sog. *Fahrradergometer*. Man setzt sich auf den

Sattel eines stationären „Fahrrades“ und hält die Tretkurbel in Gang. Die dem Sportler dabei abverlangte Leistung wird von einer Elektronik auf voreingestellten Werten konstant gehalten. 20 W, einer schwachen Nachttischlampe entsprechend, sind leicht zu leisten; 100 W, notwendig für eine kräftige Arbeitsplatzbeleuchtung, machen schon einige Mühe. 500 W für einen Toaströster kann der Mensch nur für kurze Zeit liefern. Wollte man die so gewonnene elektrische Energie verkaufen, so käme man allenfalls auf 1 Cent Stundenlohn; der Mensch ist zu wertvoll, um als reine Muskelkraftmaschine verschlissen zu werden. Übrigens kann man auch ohne Ergometer die Leistungsfähigkeit seiner Beine überprüfen: Man muss nur mit der Stoppuhr in der Hand eine Treppe hinauflaufen (☞ Abb. 2.26).

Rechenbeispiel 2.6:

Ein flotter Kleinwagen wiege 1000 kg und habe eine maximale Motorleistung von 66 kW (entspricht 90 PS). Wie schnell kann er günstigstenfalls einen 500 m hohen Berg hinauffahren?

Lösung: Die zu leistende Arbeit ist $W = h \cdot m \cdot g = 500 \text{ m} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot g = 4,9 \cdot 10^6 \text{ J}$. Leistet das Auto konstant 66 kW, so braucht es für diese Arbeit die Zeit

$$t = \frac{4,9 \cdot 10^6 \text{ J}}{66 \text{ kW}} = 74,3 \text{ s}.$$

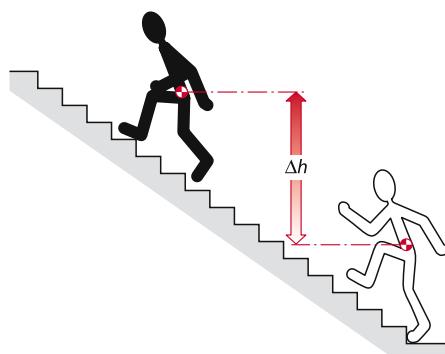


Abb. 2.26. Zur Leistung beim Treppesteigen

2.2.4 Kinetische Energie

Lässt man einen Stein (der Masse m) fallen, so verliert er potentielle Energie. Wo bleibt sie, da Energie doch nicht verschwinden kann? Lässt man einen Stein fallen, so gewinnt er die Geschwindigkeit \bar{v} ; zu ihr gehört

$$\text{kinetische Energie } W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2.$$

Dass diese Definition zumindest insofern vernünftig ist, als sie sich mit Energiesatz und Fallgesetz verträgt, sieht man leicht: Nach der Fallzeit Δt hat der Stein die Geschwindigkeit $v=g \cdot \Delta t$ erreicht, die Strecke $\Delta s = \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2$ durchfallen und die potentielle Energie $m \cdot g \cdot \Delta s = m \cdot g \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot \Delta t^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g^2 \cdot \Delta t^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ in kinetische Energie umgesetzt.

wichtig

$$\text{Kinetische Energie } W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Ein Musterbeispiel für ständige Umwandlung kinetischer Energie in potentielle und umgekehrt liefert das Fadenpendel (☞ Abb. 2.27). Die erste Auslenkung von Hand hebt den Schwerpunkt der Kugel um die Hubhöhe Δh an, erhöht also die potentielle Energie um

$$\Delta W_{\text{pot}} = m g \Delta h.$$

Dieser Betrag ist dann voll in kinetische Energie umgewandelt worden, wenn das Pendel durch seine Ruhelage schwingt; es tut dies mit der Geschwindigkeit v_0 :

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = \Delta W_{\text{pot}}.$$

Daraus folgt

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot \Delta W_{\text{pot}} / m} = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$$

Hinter der Ruhelage wandelt sich kinetische Energie wieder in potentielle um, und zwar so lange, bis die Pendelkugel in ihrem Umkehrpunkt zur Ruhe kommt. Sie tut dies auf der Höhe Δh über dem Tiefspunkt. Von nun an wiederholt sich das Spiel periodisch. Auf die Höhe Δh steigt die Kugel auch dann,

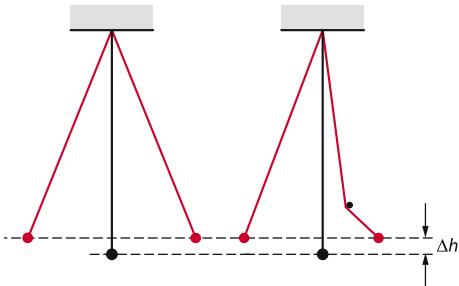


Abb. 2.27. Fadenpendel und Fangpendel. Die Umkehrpunkte liegen immer auf gleicher Höhe Δh über der Ruhelage, auch wenn ein Hindernis im Weg ist

wenn man ihrem Faden ein Hindernis in den Weg stellt (*Fangpendel* – ☞ Abb. 2.27).

Dies ist ein Beispiel für die Erhaltung der so genannten **mechanischen Energie**, die als die Summe aus kinetischer und potentieller Energie definiert ist.

wichtig

Mechanische Energie:

$$W_{\text{mech}} = W_{\text{pot}} + W_{\text{kin}}$$

bleibt bei vernachlässigbarer Reibung erhalten

Die Geschwindigkeit v_0 , mit der das Pendel durch seine Ruhelage schwingt, hängt nur von der Hubhöhe Δh ab, nicht von der Masse, nicht von der Fadenlänge, nicht von der Form der Bahn. v_0 stimmt mit der Geschwindigkeit eines Körpers überein, der die Strecke Δh aus der Ruhe frei durchfallen hat. Hier zeigt sich der Vorteil einer so allgemein gültigen Beziehung wie der des Energiesatzes: das Kind auf der Schaukel, der Skispringer am Schanzenplatz, der Wagen der Achterbahn, der Apfel, der vom Baum fällt: für alle Geschwindigkeiten gilt das gleiche Gesetz...

... sofern man die Reibung (Kapitel 2.3.3) vernachlässigen darf. Auch gegen eine Reibungskraft wird Arbeit geleistet; früher oder später zehrt sie die kinetische Energie jeder sich selbst überlassenen Bewegung auf und wandelt sie in Wärme um. Auch zur Wärme gehört kinetische Energie, die der ungeordneten Bewegung einzelner Atome und Moleküle nämlich. Diese

Unordnung hat aber eine so grundsätzliche Bedeutung, dass die Wärme mit vollem Recht als eigene Energieform angesehen wird.

Kinetische Energie wandelt sich freiwillig in Wärme um, immer und unvermeidlich: Vollkommen lässt sich Reibung nicht ausschalten. Zuweilen wird sie sogar dringend gebraucht, z.B. dann, wenn ein schnelles Auto plötzlich abgebremst werden muss, um eine Karambolage zu vermeiden. Dann soll sich viel kinetische Energie rasch in Wärme umwandeln: Die Bremsen werden heiß. Gelingt dies nicht schnell genug, so entsteht die restliche Wärme bei plastischer Verformung von Blech. Nicht jeder Autofahrer hat ein sicheres Gefühl für Geschwindigkeit und schon gar nicht für deren Quadrat. Wer bedenkt schon, wenn er mit 160 km/h über die Autobahn braust, dass er im Fall eines Falles das Zehnfache an kinetischer Energie wegbremsen muss gegenüber 50 km/h im Stadtverkehr und fast das Dreißigfache gegenüber den erlaubten 30 km/h in seinem Wohngebiet?

Auf freier, gerader, ebener Strecke arbeiten die Motoren der Fahrzeuge nur noch gegen die Reibung, sie leisten Reibungsarbeit. Beim Anfahren müssen sie zusätzlich kinetische Energie produzieren, d.h. Beschleunigungsarbeit leisten.

Rechenbeispiel 2.8: Ein letzter Wurf vom Turm

Nun haben wir noch eine andere Art kennen gelernt, wie wir im Rechenbeispiel 2.4 (schiefer Wurf vom Turm mit $v_0 = 15 \text{ m/s}$) die Auftreffgeschwindigkeit auf den Boden berechnen können. Es geht auch mit dem Energiesatz. Wie?

Lösung: Der Stein startet mit der kinetischen Energie $\frac{1}{2}m \cdot v_0^2$. Beim Fallen vom Turm wird zusätzlich noch die potentielle Energie $m \cdot g \cdot 10 \text{ m}$ in kinetische Energie umgewandelt. Die gesamte kinetische Energie beim Auftreffen ist also: $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m \cdot v^2 = \frac{1}{2}m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot 10 \text{ m}$. Daraus ergibt sich für die Geschwindigkeit v beim Auftreffen:

$$v^2 = v_0^2 + 2g \cdot 10 \text{ m} \Rightarrow \\ v = \sqrt{(15 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot 10 \text{ m}} = 20,5 \text{ m/s.}$$

Das hatten wir auf etwas umständlichere Art schon einmal herausbekommen. Der Abwurfwinkel geht in dieser Rechnung gar nicht ein. Die Auftreffgeschwindigkeit ist tatsächlich von ihm unabhängig. Nicht unabhängig vom Winkel ist natürlich die Wurfweite. Bei ihrer Berechnung hilft der Energiesatz nicht.

Rechenbeispiel 2.7: Beschleunigung des flotten Kleinwagens

Unser Kleinwagen ($m = 1000 \text{ kg}$, Motorleistung 66 kW) beschleunige aus dem Stand 10 Sekunden lang mit maximaler Leistung. Welche Geschwindigkeit hat er dann erreicht? Reibung wollen wir in dieser Abschätzung vernachlässigen.

Lösung: Die vom Motor geleistete Arbeit erhöht die kinetische Energie des Autos:

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 = 66 \text{ kW} \cdot 10 \text{ s} \Rightarrow \\ v = \sqrt{\frac{2 \cdot 66 \text{ kW} \cdot 10 \text{ s}}{1000 \text{ kg}}} = 36,3 \text{ m/s} \\ = 130,8 \text{ km/h}$$

2.2.5 Hebel und Drehmoment

Die Skelette der Wirbeltiere bestehen aus einer Vielzahl von *Hebeln*. Dazu gehört auch der linke Unterarm des Menschen (☞ Abb. 2.28). Hält man ihn horizontal, in der Hand eine Hantel, so versucht deren Gewichtskraft, das Ellbogengelenk zu öffnen. Der Bizeps kann das aber verhindern. Weil er direkt neben dem Ellbogen am Unterarm angreift, muss seine Muskelkraft allerdings deutlich größer sein als die Gewichtskraft der Hantel; der Bizeps „sitzt am kürzeren *Hebelarm*“. In seiner einfachsten Form lautet das *Hebelgesetz*:

Kraft mal Kraftarm = Last mal Lastarm.

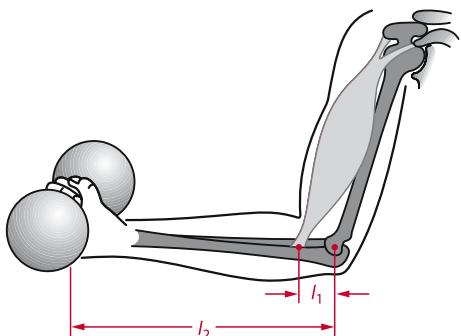


Abb. 2.28. Arm und Bizeps als einarmiger Hebel: Kraft und Last greifen, auf die Drehachse (Ellbogengelenk) bezogen, auf der gleichen Seite an; der Hebelarm des Muskels ($l_1 \sim 30 \text{ mm}$) ist wesentlich kleiner als der Hebelarm ($l_2 \sim 30 \text{ cm}$) der Hantel

Es liegt nahe, die Gewichtskraft der Hantel als „Last“ zu bezeichnen und die Muskelkraft des Bizeps als „Kraft“. Umgekehrt geht es aber auch. Länge des **Hebelarms** ist der Abstand zwischen dem Angriffspunkt der jeweiligen Kraft und der Drehachse. Für den Bizeps sind das ungefähr 30 mm, während der Unterarm etwa 30 cm lang ist.

wichtig

Einfachste Form des Hebelgesetzes:

Kraft mal Kraftarm = Last mal Lastarm.

Empirisch lässt sich das Hebelgesetz z.B. mit einer Stange untersuchen, die am linken Ende drehbar gelagert ist und in Längsrichtung verschiebbare Haken besitzt, nach unten zum Anhängen von Gewichtsklötzchen, nach oben zum Einhängen von Federwaagen. Im Gedankenversuch soll der Hebel zwei Bedingungen erfüllen, die sich im realen Expe-

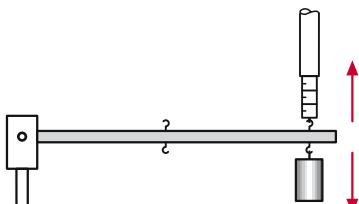


Abb. 2.29. Die Federwaage kompensiert die Gewichtskraft, ob der Hebel nun da ist oder nicht

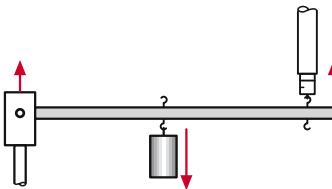


Abb. 2.30. Hängt man die Last auf halben Hebelarm, so braucht die Federwaage nur die halbe Kraft aufzubringen. Die andere Hälfte liefert das Lager

riment nur näherungsweise verwirklichen lassen: Der Hebel soll einerseits starr sein, sich also weder dehnen, noch stauchen, noch verbiegen lassen, und andererseits masselos, also keine Gewichtskraft haben.

Dann spielt der Hebel in einer Situation, wie sie Abb. 2.29 darstellt, keine Rolle: die Federwaage muss so oder so die Gewichtskraft übernehmen. Man kann aber auch sagen, Kraftarm und Lastarm seien gleich, und darum müssten es Kraft und Last ebenfalls sein. Halbiert man den Lastarm (Abb. 2.30), so kommt die Federwaage mit der halben Kraft aus. Umgekehrt muss sie die doppelte Kraft aufbringen, wenn man ihren Hebelarm halbiert (Abb. 2.31). Das Spiel lässt sich auf vielerlei Weise variieren. Was immer man tut, im Gleichgewicht gilt das Hebelgesetz, das sich jetzt auch mathematisch formulieren lässt. Nennt man die Beträge der Kräfte von „Kraft“ und „Last“ F_1 und F_2 und die zugehörigen Hebelarme l_1 und l_2 , so ist

$$l_1 \cdot F_1 = l_2 \cdot F_2$$

die Bedingung des Gleichgewichts, die Bedingung dafür, dass der Hebel ruhig bleibt und sich nicht bewegt.

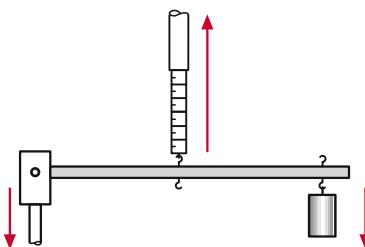


Abb. 2.31. Wird der Kraftarm halbiert, so muss die Kraft verdoppelt werden

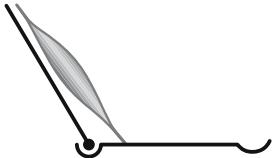


Abb. 2.32. Im Allgemeinen greift der Bizeps schräg am Unterarm an

Die letzte Gleichung ignoriert, dass Kräfte und Hebelarme Vektoren sind; sie kann sich das leisten, weil sie nur einen Sonderfall zu beschreiben braucht: horizontale Hebelarme \vec{l} und vertikale Gewichtskräfte \vec{F} , also rechte Winkel zwischen \vec{l} und \vec{F} . Beim Unterarm gilt das nicht; selbst wenn er waagerecht gehalten wird, zieht der Bizeps, abhängig von der Position des Oberarms, im Allgemeinen schräg nach oben (Abb. 2.32). Im Modellversuch kann man diesen Fall dadurch nachbilden, dass man die Federwaage ebenfalls schräg nach oben ziehen lässt, mit einem Winkel β zwischen ihr und dem Hebelarm (Abb. 2.33). Dann hat nur die vertikale Komponente \vec{F}_v der Federkraft \vec{F} Bedeutung für das Hebelgesetz, während die horizontale Komponente \vec{F}_h lediglich den Hebel zu dehnen versucht und letztlich vom Achslager aufgefangen werden muss (Abb. 2.34). Das Kräftedreieck ist rechtwinklig und erlaubt darum, die Beträge der Komponenten mit den Winkelfunktionen Sinus und Kosinus unmittelbar auszurechnen:

$$F_v = F_F \cdot \sin \beta; F_h = F_F \cdot \cos \beta.$$

Dadurch bekommt das Hebelgesetz die Gestalt

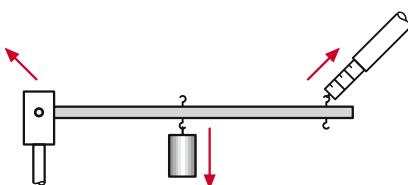


Abb. 2.33. Auch die Federwaage kann schräg am Hebel angreifen

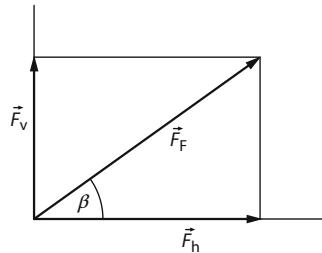


Abb. 2.34. Komponentenzerlegung der Federkraft F_F ; nur die Vertikalkomponente F_v hat Bedeutung für das Hebelgesetz

$$l_1 \cdot F_{v1} = l_2 \cdot F_{v2}$$

und ausmultipliziert die Form

$$l_1 \cdot F_1 \cdot \sin \beta_1 = l_2 \cdot F_2 \cdot \sin \beta_2.$$

Man kann den Sinus des Winkels zwischen Kraft und Hebelarm auch anders deuten, nämlich durch die Definition eines sog. *effektiven Hebelarms* l_{eff} . Er ist der kürzeste Abstand zwischen der Drehachse und der *Kraftwirkungslinie* (Abb. 2.35), steht also senkrecht auf beiden:

$$l_{\text{eff}} = l \cdot \sin \beta.$$

In dieser Interpretation schreibt sich das Hebelgesetz

$$l_{\text{eff}1} \cdot F_1 = l_{\text{eff}2} \cdot F_2,$$

was ausmultipliziert zu dem gleichen Ergebnis führt. Mathematisch spielt es keine Rolle, ob man den Sinus der Kraft zuordnet (Komponentenzerlegung) oder dem Hebelarm (effektiver Hebelarm); nur darf man nicht beides zugleich tun.

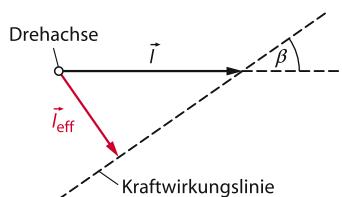


Abb. 2.35. Zur Definition des *effektiven Hebelarms* l_{eff} und der *Kraftwirkungslinie*

wichtig

In der einfachsten Form des

Hebelgesetzes stehen entweder „Kraft“ und „Last“ für deren Komponenten senkrecht zum Hebelarm oder „Kraftarm“ und „Lastarm“ für die effektiven Hebelarme.

Unabhängig von diesen beiden Deutungen bietet die Mathematik ihr vektorielles Produkt zweier Vektoren an. Die Physik folgt dem Angebot und definiert eine neue physikalische Größe, das

$$\text{Drehmoment } \vec{T} = \vec{l} \times \vec{F}$$

Es steht senkrecht auf \vec{l} und \vec{F} und liegt demzufolge parallel zur Drehachse.

wichtig

Drehmoment: Vektorprodukt aus Hebelarm und Kraft $\vec{T} = \vec{l} \times \vec{F}$

Vom Hebel wird erwartet, dass er sich nicht dreht. Dazu müssen sich Drehmoment und Gegendrehmoment gegenseitig kompensieren:

$$\sum \vec{T} = 0$$

wichtig

Allgemeine Form des Hebelgesetzes: $\sum \vec{T} = 0$

Mechanische Energie und Drehmoment werden beide in Newtonmeter gemessen, denn sie sind beide Produkte von jeweils einer Kraft und einer Länge, dem Schubweg bzw. dem Hebelarm. Der Einheit sieht man nicht an, dass es sich beim Drehmoment um ein vektorielles, bei der Energie aber um ein skalares Produkt zweier Vektoren handelt. Die Namen Joule und Wattsekunde bleiben aber der Energie vorbehalten.

Rechenbeispiel 2.9: Oktoberfest

Welche Kraft muss der Bizeps einer Kellnerin auf dem Oktoberfest ungefähr entwickeln, wenn sie in jeder Hand sechs volle Maßkrüge trägt? Ein voller Krug hat eine Masse von etwa 2 kg. Die Maße der Arme entnehme man Abb. 2.28.

Lösung: Der Bizeps sitzt am kürzeren Hebel und muss die zehnfache Gewichtskraft aufbringen:

$$F = \frac{30 \text{ cm}}{30 \text{ mm}} \cdot 12 \text{ kg} \cdot g = 1177 \text{ N}$$

2.2.6

Die Grundgleichungen der Statik

Die Überlegungen des vorigen Kapitels unterstellen als selbstverständlich, dass die Position der Achse, um die sich ein Hebel drehen kann, im Raum unverrückbar festliegt. Wie man das technisch erreicht, wurde nicht gesagt, in den Zeichnungen nur angedeutet. Mit etwas Phantasie kann man etwa Abb. 2.30 Folgendes entnehmen: Zwei quer am linken Ende des Hebels befestigte Achsstummel stecken drehbar in passenden Löchern des Lagerklotzes, der selbst über eine nicht gezeichnete Halterung zunächst vermutlich mit einem Tisch, am Ende aber mit dem Erdboden starr verbunden ist. Versucht nun eine von außen angreifende Kraft den Hebel wegzuziehen, so hält der Lagerklotz den Hebel dadurch fest, dass er durch winzige elastische Verformungen auf die Achsstummel die dort erforderliche *Lagerkraft* ausübt. Warum aber war es im vorigen Kapitel erlaubt, diese Lagerkraft mit keinem Wort zu erwähnen?

Wichtigste physikalische Größe beim Hebel ist das Drehmoment \vec{T} , im vorigen Kapitel als Kreuzprodukt aus Hebelarm \vec{l} und Kraft \vec{F} beschrieben: $\vec{T} = \vec{l} \times \vec{F}$. Der Hebelarm reicht von der Drehachse bis zur Kraftwirkungslinie. Nun greift eine Lagerkraft allemal an der Achse an. Folglich liefert

sie mangels Hebelarm kein Drehmoment; folglich kann das Hebelgesetz ohne Lagerkräfte formuliert werden. Damit der Hebel aber auch wirklich im statischen Gleichgewicht ist, muss auch noch das gelten, was in Kap. 2.2.1 formuliert wurde: die Summe aller an den Hebel angreifenden Kräfte muss Null sein. Die Summe der Kraft, die das Gewicht ausübt und der Kraft, die die Federwaage ausübt, sind aber in Abb. 2.31 keineswegs Null, da die Kraft der Federwaage doppelt so groß ist. Also muss das Lager mit einer nach unten gerichteten Kraft, die hier genauso groß ist, wie die Kraft des Gewichts, für den Ausgleich sorgen. Täte das Lager dies nicht, so würde der Hebel nach oben wegschlagen.

Entsprechend sind in den Abb. 2.30 bis 2.33 die Lagerkräfte eingezeichnet. Nur in der Situation von Abb. 2.29 hat das Lager nichts zu tun (außer natürlich den Hebel zum Teil zu tragen, aber dessen Gewicht sollte ja vernachlässigbar sein).

Bei Kräften und Drehmomenten denkt man instinktiv immer auch an Bewegungen, die sie ja grundsätzlich auslösen können, die in der Statik aber ausdrücklich ausgeschlossen werden. Häuser und Brücken sollen schließlich stehen bleiben und nicht einstürzen. Dazu müssen sich alle Kräfte \vec{F} und Drehmomente \vec{T} gegenseitig aufheben:

$$\sum \vec{F} = 0 \text{ und } \sum \vec{T} = 0.$$

wichtig

Die Bedingungen der Statik:

$$\sum \vec{F} = 0; \quad \sum \vec{T} = 0.$$

2.2.7 Gleichgewichte

Regen Gebrauch vom Hebelgesetz macht zunächst einmal die Natur, etwa bei den Skeletten der Wirbeltiere und den zugehörigen Muskeln; regen Gebrauch macht aber auch



Abb. 2.36. Einfache Balkenwaage

die Technik, z.B. bei den *Balkenwaagen*, die zwei von massenproportionalen Gewichtskräften erzeugte Drehmomente miteinander vergleichen. Die Waage der Justitia, auch Apothekerwaage genannt (Abb. 2.36), besitzt einen genau in der Mitte gelagerten zweiarmligen Hebel, den *Waagebalken*. Die Gleichheit der Hebelarme ist hier unerlässlich; jede Abweichung würde zu einem systematischen Fehler führen. Das Waagegut wird dann mit passenden Stücken aus einem Gewichtssatz verglichen. Moderne Waagen freilich zeigen ihren Messwert elektronisch an und verraten nicht, wie sie das machen.

Im Gleichgewicht geht die Apothekerwaage in Ruhestellung, Waagebalken horizontal. Unbelastet tut sie dies auch. Wieso eigentlich?

Hängt man irgendeinen Körper nacheinander an verschiedenen Punkten auf, und zieht man von jedem Aufhängepunkt eine

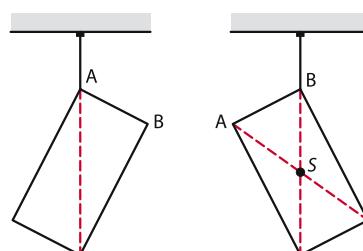


Abb. 2.37. Der Schwerpunkt S eines frei hängenden Körpers begibt sich unter den Aufhängepunkt

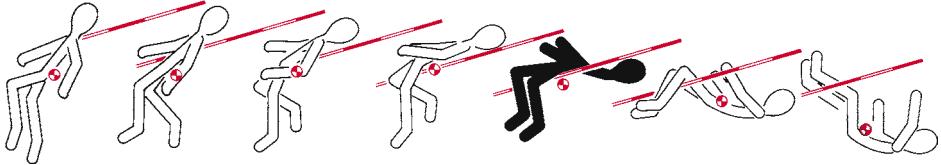


Abb. 2.38. Bei einem optimal ausgeführten Fosbury-Flop rutscht der Schwerpunkt des Springers knapp unter der Latte hindurch

Gerade senkrecht nach unten, so treffen sich alle Geraden in einem Punkt, dem **Schwerpunkt** (☞ Abb. 2.37). Bei der Gewichtskraft darf man so tun, als sei die gesamte Masse eines Körpers in seinem Schwerpunkt konzentriert; man bezeichnet ihn deshalb auch als **Massenmittelpunkt**. Er kann außerhalb des Körpers liegen, z.B. beim Hufeisen. Der Mensch kann seinen Schwerpunkt sogar durch Körperbewegungen verlagern, auch nach außen. Einem vorzüglichen Hochspringer gelingt es möglicherweise, ihn unter der Latte hindurchzumogeln (☞ Abb. 2.38); das spart Hubarbeit.

Wenn es die Halterung erlaubt, versucht jeder Schwerpunkt von sich aus, unter den Unterstützungspunkt zu kommen. Dann hat die Gewichtskraft keinen effektiven Hebelarm mehr und erzeugt kein Drehmoment. Der Waagebalken der Balkenwaage wird deshalb so konstruiert und aufgehängt, dass er dieses Ziel zu erreichen erlaubt und sich dabei waagerecht stellt. Dazu muss der Unterstützungspunkt über den Schwerpunkt gelegt werden.

Ein Waagebalken nimmt seine Ruhestellung auch dann ein, wenn beide Waagschalen gleiche Lasten tragen und mit ihnen entgegengesetzt gleiche Drehmomente erzeugen. Hat aber z.B. die linke Waagschale ein Übergewicht (☞ Abb. 2.39), so neigt sich der Waagebalken auf ihrer Seite und schiebt seinen Schwerpunkt nach rechts heraus. Das bedeutet effektiven Hebelarm, Gegendrehmoment und neues Gleichgewicht. Durch seine Schräglage zeigt der Waagebalken aber „Ungleichgewicht“ im Sinne von „Ungleichheit der Gewichte“ in den beiden Waagschalen an. Lenkt man den Waagebalken durch kurzes Antippen aus, so führt ihn das rück-

treibende Gegendrehmoment wieder in die Ausgangslage zurück, ob horizontal oder schräg. Man spricht immer dann von einem **stabilen Gleichgewicht**, wenn Störungen „von selbst“ rückgängig gemacht werden.

Ganz anders verhält sich ein Spazierstock, den man auf seine Spitze zu stellen versucht. Grundsätzlich müsste es möglich sein, seinen Schwerpunkt so exakt über den Unterstützungspunkt zu bringen, dass auch jetzt mangels effektiven Hebelarms kein Drehmoment auftritt (☞ Abb. 2.40). Hier genügt aber die kleinste Kippung, der kleinste Lufthauch, um ein Drehmoment zu erzeugen, das die Auslenkung vergrößert: **labiles Gleichgewicht**; der Stock fällt um. Umfallen braucht allerdings Zeit. Mit der nötigen Geschicklichkeit lässt sich der Unterstützungspunkt deshalb rechtzeitig nachführen; ein Jongleur kann ein volles Tablet auf einer Stange balancieren und ein Seelöwe einen Ball auf seiner Nase.

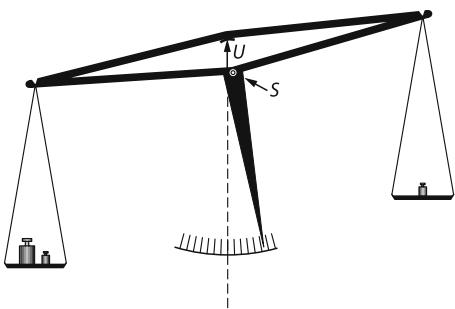


Abb. 2.39. Apothekerwaage. Außerhalb des Gleichgewichtes liegt der Schwerpunkt S des Waagebalkens nicht unter dem Unterstützungspunkt U und erzeugt deshalb ein rücktreibendes Drehmoment. Der Ausschlag der Waage und damit ihre Empfindlichkeit sind umso größer, je leichter der Balken, je länger die Hebelarme und je kleiner der Abstand des Schwerpunktes vom Unterstützungspunkt sind

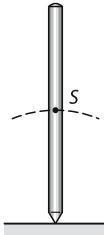


Abb. 2.40. Labiles Gleichgewicht. Der Schwerpunkt S fällt, wenn er nicht exakt über dem Unterstützungspunkt liegt: Abgabe potentieller Energie

Auf der Grenze zwischen labilem und stabilem Gleichgewicht liegt das *indifferentie Gleichgewicht*, das man durch eine „Auslenkung“ gar nicht verlässt. In ihm befindet sich z.B. eine Kreisscheibe oder eine Kugel auf exakt horizontaler Ebene. Symmetrische Massenverteilung vorausgesetzt, liegt der Schwerpunkt im Zentrum und damit genau über dem Unterstützungspunkt, dem Berührungs punkt mit der Ebene (☞ Abb. 2.41): kein effektiver Hebelarm, kein Drehmoment, Gleichgewicht. Daran ändert sich auch nichts, wenn man die Kugel zur Seite rollt. Sie kehrt weder in die Ausgangslage zurück, noch läuft sie weg.

wichtig

Gleichgewichte:

- ▶ stabil: Verrückung erfordert Energiezufuhr
- ▶ labil: Verrückung liefert Energie
- ▶ indifferent: Verrückung lässt Energie unverändert

Möbel stehen fest; offensichtlich befinden sie sich in stabilem Gleichgewicht, obwohl ihr

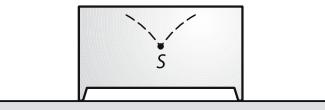


Abb. 2.42. Stabiles Gleichgewicht. Der Schwerpunkt S liegt zwar über den Unterstützungspunkten, muss aber beim Kippen angehoben werden (Bahnen gestrichelt): Erhöhung der potentiellen Energie

Schwerpunkt wie beim Spazierstock über dem Fußboden liegt. Wichtig: Sie berühren ihn in mehreren Berührungs punkten, mindestens drei. Hier empfiehlt es sich, mit Hilfe der Hubarbeit zu argumentieren. Wer eine Kommode kippen will, muss ihren Schwerpunkt anheben (☞ Abb. 2.42), also Hubarbeit leisten, und mit ihr die potentielle Energie der Kommode erhöhen. Das gilt auch für den Waagebalken. Es ist das Kennzeichen des stabilen Gleichgewichts. Beim Spazier stock liegt demgegenüber der Schwerpunkt im Gleichgewicht so hoch wie möglich. Die potentielle Energie besitzt ihr Maximum und wird beim Kippen teilweise freigesetzt: Kennzeichen des labilen Gleichgewichts. Die Kugel kann auf ihrer horizontalen Ebene herumrollen, ohne die Höhe ihres Schwerpunktes zu ändern: kein Energieumsatz, indifferentes Gleichgewicht. Dahinter steht ein ganz allgemeines Naturgesetz: Jeder Körper, jedes „System“ möchte potentielle Energie, wenn möglich, loswerden.

wichtig

Jedes „System“ versucht, potentielle Energie abzugeben.

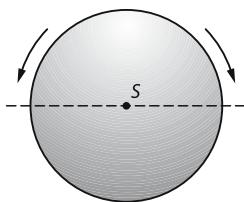


Abb. 2.41. Indifferentes Gleichgewicht. Beim Rollen bewegt sich der Schwerpunkt S exakt horizontal: kein Umsatz potentieller Energie

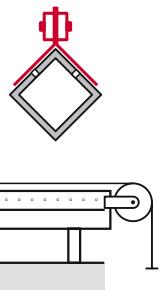
2.3

Dynamik der Translationsbewegung

Einleitung

Kräfte (\vec{F}) sind die Ursachen von Beschleunigungen (\vec{a}). Körper mit großer Masse (m) verlangen für die gleiche Beschleunigung größere Kräfte als leichte Körper. Diesen Zusammenhang beschreibt die

Grundgleichung der Mechanik $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$. Daraus folgt für die Einheit der Kraft: Newton = kg · m/s². Bei der Untersuchung von Stößen ist die Größe Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ von Nutzen. Für die Beschreibung von Drehbewegungen eignen sich die Größen Drehmoment und Drehimpuls. Alle irdischen Bewegungen kommen auf die Dauer durch Reibung zur Ruhe.



2.3.1 Die Grundgleichung der Mechanik

„Unten“ ist die Richtung der Fallbeschleunigung ebenso wie die der Gewichtskraft. Sollte zwischen beiden ein ursächlicher Zusammenhang bestehen? Dann dürfte es kein Privileg der Schwerkraft sein, Beschleunigungen auszulösen; andere Kräfte müssten dies, parallel zu ihren eigenen Richtungen, ebenfalls können. Dann brauchte aber auch ein kräftefreier Körper nur auf Beschleunigungen zu verzichten und nicht, wie in der Statik, auf jede Bewegung überhaupt. Eine gleichförmige mit konstanter Geschwindigkeit bliebe ihm gestattet.

wichtig

1. Newton'sches Gesetz:

Ein kräftefreier Körper behält seine Geschwindigkeit unverändert bei.

Um diese Vermutung experimentell zu verifizieren, muss man zunächst die Gewichtskraft des Probekörpers exakt kompensieren, ohne seine Bewegungsfreiheit allzu sehr einzuschränken. Das gelingt mit einer geraden Fahrbahn, die sich genau horizontal justieren lässt, sodass von der Gewichtskraft keine Komponente in Fahrtrichtung übrig bleibt. Ferner muss man die bremsenden Kräfte der Reibung vernachlässigbar klein machen, indem man gut schmiert. Bewährt hat sich ein hohler Vierkant als Fahrbahn; er wird auf eine Kante gestellt und bekommt in festen Abständen feine Löcher in beiden oberen Flächen (Abb. 2.43). Luft, in den am andern Ende verschlossenen Vierkant

Abb. 2.43. Luftkissenfahrbahn. Aus den Löchern der hohen Schiene wird Pressluft geblasen; sie hebt den Gleiter ein wenig an

eingepresst, kann nur durch diese Löcher entweichen und hebt einen lose aufgelegten Metallwinkel so weit an, dass er den Vierkant nirgendwo berührt: er gleitet praktisch reibungsfrei auf einem Luftpolster. Um seine Bewegungen auszumessen, postiert man längs der Gleitbahn an den Positionen s Lichtschranken, die mit elektrischen Stoppuhren die Zeitpunkte t feststellen, zu denen der Gleiter bei ihnen vorbeikommt.

1. Beobachtung: Wie immer man den Gleiter im Einzelfall angestoßen hat, man findet $\Delta s \sim \Delta t$, also konstante Geschwindigkeit, in Übereinstimmung mit dem 1. Newton'schen Gesetz.

Um eine konstante Antriebskraft auf den Gleiter auszuüben, lenkt man eine kleine Gewichtskraft über Faden und Rolle in Gleitrichtung um (Abb. 2.43). Dabei muss man der Reibung im Rollenlager einige Aufmerksamkeit schenken.

2. Beobachtung: Wie immer man den Versuch im Einzelnen durchführt, wenn man den Gleiter aus der Ruhe startet, findet man für die Abstände Δs und die Zeitspannen Δt ab Start die Beziehung $\Delta s \sim \Delta t^2$. Nach den Überlegungen zum freien Fall entspricht das einer konstanten Beschleunigung

$$a = \frac{2 \cdot \Delta s}{\Delta t^2},$$

also eine gleichförmig beschleunigte Bewegung.

3. Beobachtung: Wechselt man die Gewichte für die Antriebskraft F systematisch

aus, so findet man eine Proportionalität zwischen a und F .

4. **Beobachtung:** Erhöht man die Masse m des Gleiters, indem man ihm zusätzliche Lasten zu tragen gibt, so bemerkt man eine **Trägheit der Masse**: Der Gleiter kommt umso „schwerer“ in Bewegung, je „schwerer“ er ist (das Wort „schwer“ in unterschiedlicher Bedeutung verwendet). Quantitativ findet man bei konstanter Kraft F eine umgekehrte Proportionalität zwischen Beschleunigung und Masse, also $a \sim 1/m$.

Alle Beobachtungen lassen sich zusammenfassen zu $a \sim F/m$ oder auch $F \sim m \cdot a$. Die Proportionalitätskonstante lässt sich ausmessen; sie muss mit ihrer eigenen Einheit zwischen denen der beiden Seiten vermitteln. Freilich, die angenehmste aller Proportionalitätskonstanten ist die dimensionslose eins, denn sie macht aus der Proportionalität eine Gleichung. In der Tat darf man schreiben: $F = m \cdot a$. Man erklärt damit lediglich die Kraft zur abgeleiteten Größe des Maßsystems und ordnet ihr die Einheit $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ zu. Sie Newton zu nennen, bleibt erlaubt. Damit bekommt dann z.B. die Gravitationskonstante G von Kap. 2.2.2 die Einheit $\text{kg}^{-1} \text{m}^3 \text{s}^{-2}$, ohne ihren Zahlenwert zu wechseln.

Das 2. Newton'sche Gesetz

Kraft \vec{F} = Masse m · Beschleunigung \vec{a}

gilt vektoriell: \vec{F} und \vec{a} haben gleiche Richtung. Es ist von so grundlegender Bedeutung, dass man es auch **Grundgleichung der Mechanik** nennt.

wichtig

2. Newton'sches Gesetz, Grundgleichung der Mechanik:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad \text{Kraft} = \text{Masse mal Beschleunigung.}$$

Auch der freie Fall hält sich an die Grundgleichung:

$$|\vec{F}_G| = m \cdot g$$

Weil die Fallbeschleunigung g keine Naturkonstante ist, sondern ein wenig vom

Ort auf der Erdoberfläche abhängt, ist das veraltete *Kilopond*, die Gewichtskraft eines Kilogramms, keine gute Einheit. Auf dem Mond wiegt sowieso alles weniger und fällt langsamer.

wichtig

Gewichtskraft = Masse · Fallbeschleunigung.

Warum aber hat die Masse eines fallenden Körpers keinen Einfluss auf die Fallbeschleunigung? Jede Masse ist *schwer*; m steht im Gravitationsgesetz und erhöht die Gewichtskraft:

$$|\vec{F}_G| = G \cdot \frac{m \cdot M_E}{r_E^2}$$

(M_E, r_E : Masse und Radius der Erde).

Jede Masse ist aber auch *träg*; m steht in der Grundgleichung der Mechanik und vermindert die Beschleunigung. Beide Wirkungen heben sich bei der Fallbeschleunigung gegenseitig auf:

$$g = \frac{|\vec{F}_G|}{m} = G \cdot \frac{M_E}{r_E^2}$$

Dass in dem Gravitationsgesetz und in der Grundgleichung der Mechanik tatsächlich die gleiche Masse m steht, wurde von Albert Einstein (1879–1955) in seiner allgemeinen Relativitätstheorie aufgezeigt. Hier kann nur festgehalten werden, dass dem so ist. Gemessen wird die Masse so oder so in Kilogramm.

Mit der Grundgleichung der Mechanik im Kopf kann man nun auch nach den wirksamen Kräften bei dem in Kap. 2.1.4 besprochenen schießen Wurf fragen, vorsichtshalber allerdings nicht nach dem komplizierten Muskelspiel des Kugelstoßers. Als Beispiel soll eine Steinkugeln schleudernde Kanone aus alter Zeit genügen (☞ Abb. 2.44). Vor dem Schuss steckt die Kugel im Kanonenrohr; ihre Gewichtskraft \vec{F}_G wird von der Kanone und ihrem Gestell übernommen. Wenn die Treibladung

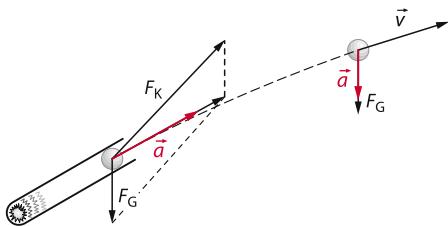


Abb. 2.44. Solange die Kanonenkugel noch im Rohr steckt, wird sie in Schussrichtung beschleunigt. Sowie sie das Rohr verlassen hat, weist die Beschleunigung senkrecht nach unten in Richtung der Schwerkraft.

explodiert, übt der Druck der heißen Verbrennungsgase zusammen mit dem Kanonenrohr eine Kraft \vec{F}_K auf die Kugel aus, die dieser eine Beschleunigung \vec{a} in Richtung der Rohrachse erteilt, zusätzlich aber auch die Gewichtskraft \vec{F}_G kompensiert. Die Kraft \vec{F}_K der Kanone und die Beschleunigung liegen also nicht parallel, wie Abb. 2.44 etwas übertrieben darstellt. Sobald die Kugel aber das Rohr verlassen hat, verteilt sich der Explosionsdruck nach allen Seiten, die Kanone gibt auch keine Unterstützung mehr und die Kugel unterliegt (Luftreibung vernachlässigt) wieder nur noch der Schwerkraft: Die Beschleunigung \vec{a} dreht (ziemlich schlagartig) ihre Richtung von schräg nach oben in senkrecht nach unten. Die hohe Geschwindigkeit folgt dem nur gemächlich, die Kugel folgt einer flachen Wurfsparabel.

Der Einfachheit halber wurde bisher angenommen, dass die Kanonenkugel oder ein Ball eine reine Translationsbewegung im Sinne von Kapitel 2.1.5 absolvieren: alle Teile bewegen sich mit der gleichen Geschwindigkeit und Beschleunigung. Das wäre ein seltener Glücksfall. Tatsächlich wird ein Ball praktisch immer auch rotieren und zuweilen wird im Sport ein solcher „Drill“ des Balles bewusst erzeugt. Dann bewegt sich aber jeder Teil des Balles mit einer anderen Geschwindigkeit und Beschleunigung. Was tun? Alles bisher gesagte stimmt wieder, wenn statt von „der“ Geschwindigkeit und „der“ Beschleunigung des Körpers von der Geschwindigkeit und Beschleunigung seines Schwerpunktes gesprochen wird. Es gilt der sogenannte

Schwerpunktsatz:

Der Schwerpunkt eines Körpers bewegt sich so, als wäre die gesamte Masse in ihm vereinigt und als würden alle auf den Körper wirkenden Kräfte in ihm angreifen.

Das 2. Newton'sche Gesetz erhält also die genauere Form:

$$\sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}_s$$

Die Kräftesumme ist die uns schon aus der Statik (Kapitel 2.2.1) bekannte *resultierende Kraft* und \vec{a}_s ist die Beschleunigung des Schwerpunktes. Das die Bewegung des Schwerpunktes nicht davon abhängt, wo die Kräfte am Körper angreifen, ist keineswegs selbstverständlich. Das es so ist, liegt am 3. Newton'schen Gesetz, von dem jetzt die Rede sein soll. Auf eine Herleitung des Schwerpunktsatzes soll in diesem Buch verzichtet werden.

Rechenbeispiel 2.10: Die Kraft auf den Kleinwagen

Unser Kleinwagen aus Beispiel 2.7 ($m = 1000\text{kg}$) beschleunigt in 10 Sekunden von Null auf 130,8 km/h. Welche Kraft wirkt dabei auf ihn?

Lösung: Nach der Grundgleichung der Mechanik ist:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{130,8 \text{ km/h}}{10 \text{ s}} = m \cdot \frac{36,33 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} \\ = 3633 \text{ N}$$

2.3.2 actio = reactio

Wenn ein Körper auf einen anderen eine Kraft ausübt, gibt ihm das keine Vorrechte; der andere Körper übt nämlich auf den einen auch eine Kraft aus, mit *gleichem* Betrag, aber in entgegengesetzter Richtung. Man sagt dazu:

wichtig

3. Newton'sches Gesetz:

actio = reactio: Die von zwei Körpern aufeinander ausgeübten Kräfte sind gleich groß und einander entgegengesetzt.

Für Drehmomente gilt das übrigens auch.

Am ehesten leuchtet das 3. Newtonsche Gesetz noch bei der Gravitation ein. Die Erde zieht den Mond mit einer Kraft an, die ihn auf seiner Bahn hält. Aber der Mond zieht auch die Erde mit einer (entgegengesetzt gleichen) Kraft an, der beispielsweise das Wasser der Meere nachgibt und so Ebbe und Flut produziert. Die Gravitation wirkt noch über astronomische Distanzen. Erde und Mond sind weit voneinander entfernt, die auf sie wirkenden Kräfte leicht auseinander zu halten. Beim Mann mit dem Bollerwagen der Abb. 2.24 ist es schon schwieriger. Der Mann zieht am Seil und dieses überträgt die Kraft auf den Wagen, der sich daraufhin in Bewegung setzt. Aber auch der Wagen übt über das Seil auf den Mann eine Kraft aus. Kappte man das Seil, so fiele er vornüber. Ist der Wagen beschleunigt, so ist diese Gegenkraft des Wagens größer als nur die Reibungskraft, die der Mann erst einmal überwinden muss, um den Wagen überhaupt vom Fleck zu bekommen. Die Gegenkraft hat eben immer den gleichen Betrag wie die Kraft, mit der der Mann zieht.

Wenn aber ein physikalisch gebildetes Pferd es ablehnt, sich ins Geschirr zu legen, und dazu sagt: „Hat doch gar keinen Zweck! Mit soviel Kraft ich mich auch nach vorn stemme, die Gegenkraft des Wagens ist ebenso groß und hebt meine Kraft auf.“ – Wo liegt da der Denkfehler? Das Pferd verwechselt das 3. Newton'sche Gesetz mit der Grundgleichung der Statik von Kap. 2.2.6. Die Kräfte und Drehmomente, die dort addiert werden, greifen alle an einem und demselben Körper an, und wenn sie sich kompensieren, passiert eben nichts. Das 3. Newton'sche Gesetz spricht hingegen von Kräften, die zwei Körper aufeinander

ausüben, und die darum selbst nur an jeweils einem der beiden Körper angreifen. Wenn das Pferd an dem Wagen zieht, wird sich dieser sehr wohl in Bewegung setzen. Die gleichgroße Gegenkraft wirkt ja auf das Pferd, nicht auf den Wagen.

Frage: Was übt eigentlich die Kraft aus, die unseren Kleinwagen aus Beispiel 2.10 beschleunigt?

Dumme Frage! Der Motor natürlich. Oder? Der Motor ist ja Teil des Autos und fährt mit. Würde er die das Auto beschleunigende Kraft ausüben wäre das so wunderbar wie der Graf Münchhausen, der sich am eigenen Zopf aus dem Sumpf zieht. Die Kraft muss schon von außen kommen, also von der Straße. Der Motor übt über die Räder eine Kraft auf die Straße aus. Die Gegenkraft beschleunigt das Auto. Sie beruht auf der Reibung zwischen Rädern und der Straße. Auf eisglatter Fahrbahn nützt der stärkste Motor nichts.

2.3.3 Reibung

So sorgfältig die Reibung bei Messungen zur Grundgleichung der Mechanik auch als störend unterdrückt werden muss, im Alltag ist sie lebenswichtig. Gehen kann der Mensch nur, wenn seine Füße fest genug am Boden haften, um die zur Bewegung notwendigen Kräfte zu übertragen. Übersteigen sie die Kräfte der *Hafreibung*, so gleitet der Mensch aus. Gebiete verminderter Haftreibung gelten geradezu sprichwörtlich als Gefahrenzonen: Man kann jemanden „auf's Glatteis führen“.

Ist die Hafreibung einmal überwunden, so meldet sich beim ausgleitenden Menschen die (etwas geringere) *Gleitreibung*. In der Verkehrstechnik ersetzt man sie, um Antriebskraft zu sparen, durch die (noch geringere) *rollende Reibung* der Räder auf Straße oder Schiene. Schmiermittel schließlich legen einen Flüssigkeitsfilm zwischen Achse und Achslager und tauschen dort die Gleitreibung ein gegen die *innere Reibung*.

in Fluiden wie Öl und Fett. Besonders gering ist die innere Reibung in Gasen; die Gleitbahn der Abb. 2.43 nutzt dies aus, aber auch die Magnetschweebahn der Zukunft. **Reibung** hindert Bewegungen. Sie erzeugt eine **Reibungskraft**, die bei der Haftreibung der angreifenden Kraft entgegensteht und mit ihr wächst, und bei den anderen Reibungen der Geschwindigkeit entgegensteht und mit dieser wächst.

wichtig

Reibung behindert Bewegungen;
Arten der Reibung: Haftreibung, Gleitreibung,
rollende Reibung, innere Reibung.

Verschiedene Reibungsarten können gleichzeitig auftreten. Ein Auto lässt sich nur deshalb lenken, weil seine Räder in Fahrtrichtung rollen, quer dazu aber von der Haftreibung in der Spur gehalten werden. Tritt der Fahrer so heftig auf die Bremse, dass die Räder blockieren, dann gibt es nur noch Gleitreibung ohne Vorentscheidung, und das Fahrzeug bricht aus.

Da Reibung auf einer komplizierten Wechselwirkung der Moleküle an der Grenzfläche der Reibpartner beruht, gibt es keine so ganz präzise formulierbaren Gesetzmäßigkeiten für Reibungskräfte. Ungefähr gibt es aber schon; sie sollen hier am Beispiel der Reibung zwischen zwei festen Oberflächen betrachtet werden. Eine Kiste möge auf einer Rampe stehen, die langsam mit wachsendem Winkel φ gekippt wird (Abb. 2.45). Auf die Kiste wirken zwei Kräfte: die Schwerkraft, die man sich am Schwerpunkt angreifend denken kann (Schwerpunktsatz, Kapitel 2.3.1), und die Kraft, die die Rampe auf die Kiste ausübt. In Abb. 2.45 sind beide Kräfte jeweils zerlegt in Komponenten parallel und senkrecht zur Rampe. Dies ist sinnvoll, weil sich die senkrechten Komponenten \vec{F}_N (Schwerkraft) und \vec{F}_R (Rampe) immer gerade kompensieren. Sonst würde die Kiste entweder in der Rampe versinken oder davonfliegen. Wesentlich sind also die parallelen Komponenten, die **Hangabtriebskraft** \vec{F}_H (Schwerkraft) und die

Haftreibeskraft \vec{F}_R (Rampe). Zunächst bleibt die Kiste auf der Rampe in Ruhe, weil \vec{F}_R die Hangabtriebskraft \vec{F}_H kompensiert (Abb. 2.45 a)). Irgendwann ist aber ein Grenzwinkel φ_g erreicht, bei dem die Kiste ins Rutschen kommt. Dann erreicht nämlich die Haftreibeskraft den größten Wert \vec{F}_{RH} , der zwischen Kiste und Rampe auftreten kann. Es leuchtet ein, dass \vec{F}_{RH} von der Beschaffenheit der Rampenoberfläche und der Kiste abhängt. Insbesondere hängt \vec{F}_{RH} aber von der Kraft ab, mit der die Kiste auf die Rampe gedrückt wird, also von \vec{F}_N , der Komponente der Gewichtskraft senkrecht zur Rampe. Es gilt näherungsweise:

$$|\vec{F}_{RH}| = \mu_H \cdot |\vec{F}_N|$$

μ_H heißt **Haftreibungskoeffizient**. Man kann ihn leicht aus dem Grenzwinkel α_g ermitteln, bei dem die Hangabtriebskraft \vec{F}_H gerade gleich der maximalen Haftreibeskraft ist. Wegen

$$|\vec{F}_H| = F_G \cdot \sin \alpha_g = \mu_H \cdot |\vec{F}_N| = \mu_H \cdot F_G \cdot \cos \alpha_g$$

gilt

$$\mu_H = \tan \alpha_g$$

Ein typischer Wert ist $\mu_H \sim 0,4$, entsprechend $\varphi_g \sim 22^\circ$, wie jeder leicht mit zum Beispiel einem Lineal und einem Radiergummi im Schreibtischexperiment nachprüfen kann. Versuche zeigen, dass der Haftreibungskoeffizient wie erwartet stark von der Beschaffenheit der Oberflächen abhängt, bemerkenswerter Weise aber praktisch gar nicht von der Größe der Auflagefläche.

Hat sich die Kiste erst einmal gelöst, so rutscht sie beschleunigt herunter, den nun wirkt nur noch Gleitreibungskraft \vec{F}_{RG} (Abb. 2.45 b)). Für sie gilt eine ganz ähnliche Beziehung wie für die Haftreibung:

$$|\vec{F}_{RG}| = \mu_{GL} \cdot |\vec{F}_N|$$

Der **Gleitreibungskoeffizient** μ_{GL} ist im allgemeinen etwas kleiner als der Haftreibungskoeffizient.

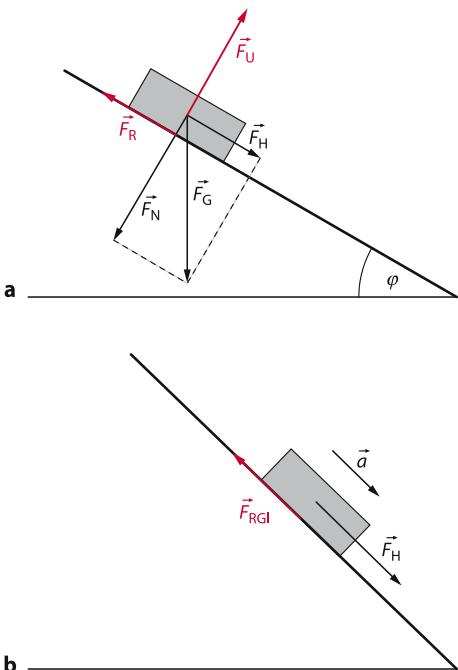


Abb. 2.45. a) Der Klotz bleibt auf der schießen Ebene in Ruhe, da die Reibungskraft \vec{F}_R die Hangabtriebskraft \vec{F}_H ausgleicht. b) Bei größerem Winkel überschreitet die Hangabtriebskraft die maximale Gleitreibungskraft und der Klotz gleitet beschleunigt hinab

koeffizient. Bemerkenswert: Er hängt fast gar nicht von der Gleitgeschwindigkeit ab.

Anders ist dies bei der *inneren Reibung* in Flüssigkeiten und Gasen. Für grobe Abschätzungen darf man so tun, als sei die Reibungskraft in Flüssigkeiten so ungefähr proportional zur Geschwindigkeit, in Gasen proportional zur Geschwindigkeit ins Quadrat. Wenn ein Auto anfährt, dann wird die vom Motor entwickelte Antriebskraft \vec{F}_A zur Beschleunigung des Wagens verwendet. Mit wachsender Geschwindigkeit wächst aber die Luftreibungskraft \vec{F}_R und lässt immer weniger Beschleunigungskraft \vec{F}_B übrig:

$$\vec{F}_B = \vec{F}_A - \vec{F}_R$$

Auf freier Strecke, bei konstanter Geschwindigkeit, kompensiert der Motor nur noch die Reibung. Beim Regentropfen ersetzt die Gewichtskraft den Motor. Weil \vec{F}_G ra-

scher mit dem Durchmesser wächst als \vec{F}_R , fallen dicke Tropfen schneller als kleine (Stokes'sches Gesetz, Kap. 3.5.1).

Rechenbeispiel 2.11: Hafreibung zwischen Rad und Straße

Wie groß muss der Reibungskoeffizient zwischen unserem Kleinwagen aus Beispiel 2.9 und der Straße mindestens sein, um die der Motorleistung entsprechende Beschleunigung auch wirklich zu erreichen?

Lösung: In Beispiel 2.10 hatten wir die notwendige Kraft berechnet (2570 N). Das Gewicht des Autos beträgt $1000 \text{ kg} \cdot g = 9810 \text{ N}$. Also gilt für den minimalen Reibungskoeffizienten

$$\mu = \frac{3633 \text{ N}}{9810 \text{ N}} = 0,37 .$$

Der tatsächliche Reibungskoeffizient ist bei trockener Fahrbahn höher. Ein doppelt so schnell beschleunigender Porsche braucht ja auch ein doppelt so großes μ .

Rechenbeispiel 2.12: Kiste auf der Rampe

Mit welcher Beschleunigung rutscht eine Kiste eine Rampe mit einem Neigungswinkel von 30° herunter, wenn der Gleitreibungskoeffizient zwischen Kiste und Rampe $\mu = 0,3$ ist?

Lösung: Masse mal Beschleunigung gleich resultierende Kraft:

$$\begin{aligned} m \cdot a &= m \cdot g \cdot \sin 30^\circ - \mu \cdot F_N \\ &= m \cdot g (\sin 30^\circ - \mu \cdot \cos 30^\circ) = m \cdot g \cdot 0,24 \Rightarrow a = 2,36 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

2.3.4 Bewegungsgleichung

Wirft man einen Ball, so wird dieser nie zick-zack durch die Luft sausen, sondern immer brav auf einer Wurfparabel entlang fliegen. Er kann nicht anders, denn er muss sich

an die Newton'schen Gesetze halten, und die schreiben ihm das so vor. Dieser Tatbestand wird mathematisch mit einer sog. **Bewegungsgleichung** beschrieben. Sie ist eine Gleichung für den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ des Balles (genauer gesagt: dessen Schwerpunkt), die dieser zu jedem Zeitpunkt t erfüllen muss. Lösungen der Bewegungsgleichung sind also Funktionen der Zeit. Das Rezept zum Aufstellen einer Bewegungsgleichung ist im Prinzip einfach: Man nehme die Grundgleichung der Mechanik $m \cdot \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ und setze die Kraft als Funktion des Ortes hinein:

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

Dies ist eine Gleichung für die Funktion $\vec{r}(t)$, in der auch eine Ableitung, in diesem Fall die zweite, der Funktion vorkommt. Man nennt sie **Differentialgleichung**. Wie man mit Differentialgleichungen fertig wird, ist Sache der Mathematik und braucht darum hier nicht besprochen zu werden. Die Lösungen der wichtigsten Differentialgleichungen der Physik kann man nachschlagen.

Für den Ball hängt die Gewichtskraft gar nicht vom Ort ab. Das macht die Bewegungsgleichung besonders einfach. Bei genauerem Hinsehen sind es ja drei Gleichungen, für jede Koordinate des Ortsvektors eine, nämlich:

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} r_x(t) = 0$$

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} r_y(t) = 0$$

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} r_z(t) = -m \cdot g$$

Die Gewichtskraft wirkt nur senkrecht nach unten und das Koordinatensystem wurde hier so gewählt, dass dies die zur z -Achse entgegengesetzte Richtung ist. Die Mathematik sagt, dass die ersten beiden Gleichungen nur durch Funktionen erfüllt werden, die entweder gar nicht oder linear von der Zeit abhängen. Die dritte Gleichung wird nur durch ein Polynom 2. Grades erfüllt,

also durch eine Parabelfunktion; daher die Wurfparabel. Die Bewegungsgleichung(en) schreibt dem Ball durchaus nicht genau vor, wo er sich zu einem bestimmten Zeitpunkt zu befinden hat. Nur wenn auch noch die *Anfangsbedingungen* festliegen, wenn bekannt ist, wo mit welcher Geschwindigkeit sich der Ball zum Zeitpunkt $t = 0$ bewegt, ist die weitere Flugbahn durch die Bewegungsgleichung eindeutig vorgegeben.

In dieser Betrachtung wurde, wieder einmal, die Reibung vernachlässigt. Ihre Berücksichtigung würde die Bewegungsgleichung und ihre Lösungen deutlich komplizierter machen. Ferner ist die Gewichtskraft nur näherungsweise vom Ort unabhängig. Auf dem Sportplatz gilt das vorzüglich, bei einem Satelliten, der um die Erde läuft, aber ganz und gar nicht. Für ihn steht auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung das Gravitationsgesetz:

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}(t) = -G \frac{m \cdot M_E}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Dies ist ein System von drei voneinander abhängigen Differentialgleichungen. Seine Lösungen sind Ellipsen- oder Kreisbahnen. Alle Satelliten und Planeten halten sich daran.

Die Diskussion der wichtigen Bewegungsgleichungen schwingender Körper folgt in Kapitel 4.1.2.

2.3.5 Impuls

Wer vor Freude in die Luft springt, gibt der Erde einen Tritt. Das macht ihr nichts aus, denn sie besitzt die größte Masse, die in der Reichweite des Menschen überhaupt vorkommt. Ein startendes Flugzeug kann sich nicht von der Erde abstoßen; es saugt Luft aus der Umgebung an und bläst sie in gerichtetem Strahl nach hinten weg. Eine Mondrakete findet keine Luft mehr vor; sie verwendet für den gleichen Zweck die Verbrennungsgase ihres Treibstoffes. Wer immer seine Bewegung ändern will, muss etwas haben, wovon er sich abstoßen kann.

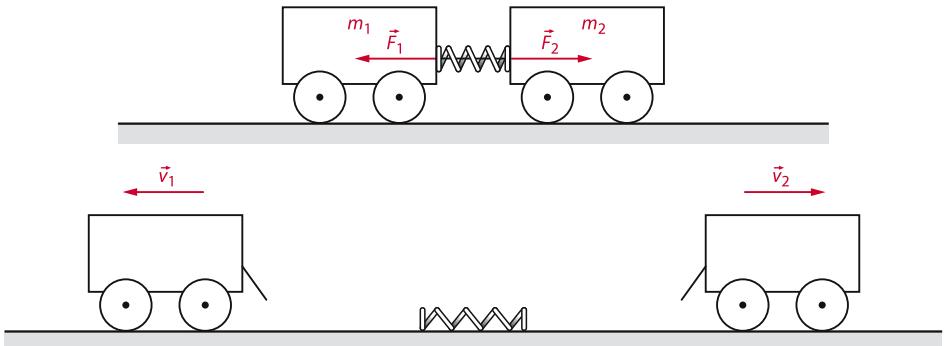


Abb. 2.46. Zum Impulssatz (Einzelheiten im Text)

Für quantitative Überlegungen eignet sich der in Abb. 2.46 skizzierte Versuch. Zwei Wägelchen mit den Massen m_1 und m_2 stehen (reibungsfrei) auf ebener Bahn, eine gespannte Sprungfeder zwischen sich. Diese drückt auf die beiden Wagen mit betragsgleichen, aber entgegengesetzten gerichteten Kräften:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Ein Zwirnsfaden hält die Wagen zusammen; er liefert die Gegenkräfte, die das ganze System in Ruhe halten. Brennt man den Faden mit der Flamme eines Streichholzes durch, so fahren die Wagen auseinander, für kurze Zeit beschleunigt, bis die Feder entspannt herunterfällt:

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = -m_2 \cdot \vec{a}_2.$$

Die Kräfte fallen rasch auf null; gleiches gilt für die beiden Beschleunigungen. Doch wie deren zeitliche Verläufe auch immer aussehen, sie führen zu einer Endgeschwindigkeit

$$\vec{v} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{a}(t) dt = \frac{1}{m} \cdot \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt.$$

Das Integral über \vec{F} wird *Kraftstoß* genannt. Auf einen Körper der Masse m überträgt es den

$$\text{mechanischen Impuls } \vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

mit der Einheit $\text{kg} \cdot \text{m/s}$; er ist ein Vektor.

Solange eine Kraft andauert, ändert sie den Impuls des Körpers mit der „Änderungsgeschwindigkeit“

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}.$$

Da im Versuch der Abb. 2.46 die auf die beiden Wägelchen wirkenden Federkräfte zu jedem Zeitpunkt bis auf das Vorzeichen gleich waren, gilt dies für die Impulse ebenfalls:

$$\vec{p}_1 = m_1 \cdot \vec{v}_1 = -\vec{p}_2 = -m_2 \cdot \vec{v}_2.$$

Die Summe der beiden Impulse ist also null:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$$

Vor Beginn des Versuchs war sie das auch, denn da befanden sich beide Wägelchen in Ruhe. Hinter dieser Feststellung steht ein Naturgesetz, der Satz von der Erhaltung des Impulses (**Impulssatz**); er besagt: In einem abgeschlossenen System kann sich die Summe aller Impulse, der Gesamtimpuls also, nicht ändern.

wichtig

Für den mechanischen Impuls

$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ gilt ein Erhaltungssatz; er wird *Impulssatz* genannt.

Als „abgeschlossen“ bezeichnet man ein System, auf das keine äußeren Kräfte wirken: Aus

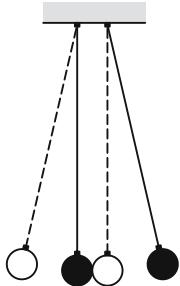


Abb. 2.47. Stoßpendel. Haben beide Kugeln gleiche Masse, so übernimmt die gestoßene von der stoßenden Impuls und kinetische Energie vollständig

$$\sum \vec{F} = \sum \dot{\vec{p}} = 0$$

folgt

$$\sum \vec{p} = \text{const.}$$

Die Mitglieder eines abgeschlossenen System können zwar Impuls untereinander austauschen, sie können aber Impuls weder schaffen noch vernichten.

Impuls wird bei jedem *Stoß* ausgetauscht, und Stöße gibt es viele in der Welt, nicht nur beim Boxen und beim Fußball. Elektronen stoßen mit Molekülen (Gasentladung, s. Kap. 6.6.9), Moleküle trommeln auf die Wände ihres Gefäßes (Gasdruck, s. Kap. 5.2.2). Bei zwei Billardkugeln ist es mühsam den Impulssatz zu bestätigen. Impulse sind ja Vektoren, die in ihre Komponenten zerlegt werden wollen. Man spart deshalb Rechenarbeit, wenn man sich auf den zentralen Stoß beschränkt, bei dem nur eine einzige Bewegungsrichtung vorkommt. Experimentell lässt sich dieser Fall hinreichend genau durch zwei Stahlkugeln repräsentieren, die als lange Fadenpendel nebeneinander hängen, und zwar an Doppelfäden, die sich nach oben V-förmig spreizen. Aus der Blickrichtung der Abb. 2.47 ist dies nicht zu erkennen. Jedenfalls erlaubt die Spreizung den Kugeln nur eine Bewegung in der Zeichenebene.

Im einfachsten Fall bestehen die Kugeln aus gehärtetem Stahl und haben die gleiche Masse. Lässt man jetzt die eine Kugel auf

die andere, vorerst in Ruhe belassene, aufschlagen, so vertauschen sie ihre Rollen: Die stoßende bleibt stehen, die gestoßene fliegt weg. Sie hat den Impuls der ersten Kugel voll übernommen. Eine freundliche Spielerei liefert die Pendelkette der Abb. 2.48. Sie erlaubt, mehrere Kugeln zur Seite zu ziehen und aufzuschlagen zu lassen. Die Kugeln am anderen Ende wissen genau, wie viele es waren: sie springen nach dem Stoß in gleicher Anzahl ab. Das ist kein Wunder. Man hat ja nur das erste Experiment mit einer einzigen stoßenden Kugel mehrmals rasch hintereinander ausgeführt. Die Zeitspanne, in der sich zwei Stahlkugeln beim Stoß berühren, liegt in der Größenordnung Millisekunden; sie ist so kurz, dass mehrere Stöße allemal nacheinander erfolgen.

Dass die beiden Stahlkugeln der Abb. 2.47 den Impulssatz erfüllen, leuchtet unmittelbar ein. Der wäre freilich auch zufrieden, wenn die Kugeln nach dem Stoß beisammen blieben und sich gemeinsam wegen ihrer jetzt doppelten Masse mit halber Geschwindigkeit zur Seite bewegten. Warum tun sie das nicht? Stoßpartner müssen nicht nur auf die Erhaltung des Impulses achten, sondern auch auf die Erhaltung der Energie. Stahlkugeln tun dabei etwas Übriges: Sie sorgen sogar dafür, dass die vor dem Stoß vorhandene kinetische Energie auch nach dem Stoß kinetische Energie bleibt. Dieser sog. *elastische Stoß* stellt einen Grenzfall dar, der ein wenig idealisiert ist und sich darum relativ leicht durchrechnen lässt.

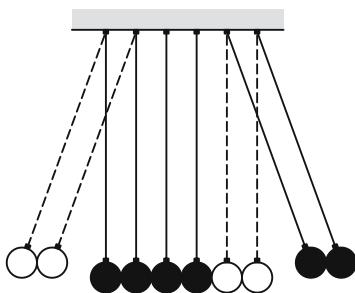


Abb. 2.48. Pendelkette. Auf der einen Seite fliegen stets ebenso viele Kugeln ab, wie auf der anderen Seite auftreffen (gleiche Kugelmassen vorausgesetzt)

Um die Schreibarbeit etwas zu erleichtern, sollen die Massen zweier stoßender Kugeln mit m und M bezeichnet werden, ihre Geschwindigkeiten in x -Richtung vor dem Stoß mit v und V und nach dem Stoß mit u und U . Dann verlangt der Impulssatz

$$m \cdot v + M \cdot V = m \cdot u + M \cdot U$$

und der auf die kinetische Energie reduzierte Energiesatz

$$\frac{1}{2} (m \cdot v^2 + M \cdot V^2) = \frac{1}{2} (m \cdot u^2 + M \cdot U^2).$$

Umstellen der Glieder liefert

$$m(v - u) = M(V - U)$$

und

$$m(v^2 - u^2) = M(V^2 - U^2).$$

Teilen der zweiten Gleichung durch die erste führt zu

$$v + V = u + U.$$

Einsetzen in den Impulssatz ergibt dann für die beiden Geschwindigkeiten nach dem Stoß:

$$u = \frac{v(m - M) + 2 \cdot M \cdot V}{m + M},$$

$$U = \frac{V(M - m) + 2 \cdot m \cdot v}{m + M}.$$

Nach der Rechnung sind beim elastischen Stoß zweier Körper die Endgeschwindigkeiten eindeutig durch die Anfangsgeschwindigkeiten und die Massen festgelegt. Haben beide Körper gleiche Massen ($m = M$) und befindet sich der eine vor dem Stoß in Ruhe ($V = 0$), so überträgt die erste Kugel in der Tat ihren Impuls beim Stoß vollständig auf die zweite:

$$u = 0 \text{ und } U = v.$$

Ungleiche Stoßpartner ergeben ein komplizierteres Ergebnis; erst bei extrem ungleichen Massen wird es wieder einfach: Der Ball, der beim Squash gegen die Wand gedonnert wird, kommt wegen $m \ll M$ mit (praktisch)

der gleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeit zurück ($V = -v$).

Wie schon erwähnt, stellt der elastische Stoß einen idealisierten Grenzfall dar. Streng genommen gibt es ihn nicht, denn auch bei den besten Stahlkugeln geht im Stoß immer noch ein wenig kinetische Energie in Wärme über. Das nennt man *inelastischen Stoß*. Er lässt sich nur dann berechnen, wenn der Verlust an kinetischer Energie genau bekannt ist. Einfach wird es erst wieder in dem anderen Grenzfall, dem sog. *unelastischen Stoß*, bei dem die Stoßpartner aufeinander kleben bleiben – experimentell realisierbar beispielsweise durch ein Stückchen Kaugummi dort, wo sich die beiden Kugeln berühren. Dann wird ihre gemeinsame Geschwindigkeit vom Impulssatz bestimmt:

$$u = U = \frac{m \cdot v + M \cdot V}{m + M}$$

Der Energiesatz legt dann fest, wie viel Wärme durch plastische Verformung des Kaugummis entwickelt werden muss.

Frage: Was ist schlimmer? Mit 50 km/h gegen die Wand fahren oder frontal mit einem mit ebenfalls 50 km/h fahrenden gleich schweren Auto zusammenstoßen?

Antwort: Nehmen wir an, es handele sich in beiden Fällen um einen unelastischen Stoß. Das Auto bleibt dann an der Wand stehen und die gesamte kinetische Energie des Autos entfaltet ihre zerstörerische Wirkung. Aber auch die beiden frontal zusammenstoßenden Autos bleiben stehen. Da sie sich mit gleicher Masse und Geschwindigkeit entgegengesetzt bewegt haben, war der Gesamtimpuls vor der Kollision Null. Also muss er es danach auch noch sein. Für das einzelne Auto ist die Wirkung also genau die selbe. Schlimmer ist der Frontalzusammenstoß nur, weil zwei Autos betroffen sind.

Rechenbeispiel 2.13:

Ein Kleinkind, welches in einem leichtgängigen Kinderwagen sitzt (Gesamtmasse Kind plus Kinderwagen: 10 kg) werfe seine volle Nuckelflasche (250 g) mit $v_N = 2 \text{ m/s}$

in Fahrtrichtung aus dem Wagen. Wenn der Kinderwagen zunächst in Ruhe war, welche Geschwindigkeit hat er nun?

Lösung: Der Gesamtimpuls war vor dem Wurf Null, also muss er es danach auch noch sein. Der Wagen wird sich also entgegengesetzt zur Wurfrichtung mit einer Geschwindigkeit v_W bewegen, für die gilt:

$$250 \text{ g} \cdot v_N = -10 \text{ kg} \cdot v_W \Rightarrow \\ v_W = \frac{0,25 \text{ kg}}{10 \text{ kg}} \cdot v_N = 0,05 \text{ m/s.}$$

2.4 Dynamik der Rotation

Einleitung

So wie nicht kompensierte Kräfte Translationen auslösen, lösen nicht kompensierte Drehmomente Rotationen aus. Zwischen beiden Bewegungen bestehen enge Analogien. Beispielsweise gibt es analog zum Impuls und seinem Erhaltungssatz einen Drehimpuls nebst Drehimpulserhaltungssatz. Hohe Drehimpulse sind selten und lösen darum, wenn sie auftreten, oft überraschende Effekte aus.

2.4.1 Analogien zur Translation

Wenn man eine *Translation* bzw. die Bewegung des Schwerpunktes aus der Ruhe anwerfen will, braucht man eine resultierende Kraft \vec{F} . Was dann passiert, sagt das 2. Newton'sche Gesetz: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}_s$, Kraft gleich Masse mal Beschleunigung (des Schwerpunkts). Da liegt nun die Vermutung nahe: Wenn man eine *Rotation* aus der Ruhe anwerfen will, dann braucht man ein Drehmoment \vec{T} (Kapitel 2.2.5). Und was dann passiert, sagt ein noch zu findendes Gesetz $\vec{T} = ? \cdot \vec{\alpha}$, Drehmoment gleich Irgendwas mal Winkelbeschleunigung. Für welche physikalische Größe steht das Fragezeichen?

Um diese Frage zu beantworten, soll zunächst nur ein kleiner Teil des rotierenden

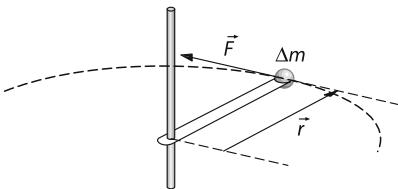


Abb. 2.49. Dynamik der Rotation (siehe Text)

Körpers betrachtet werden, der die Masse Δm haben möge. Dieser Teil befindet sich im Abstand r von der Drehachse und zufällig soll gerade auf diesen Teil eine resultierende Kraft \vec{F} wie in Abb. 2.49 wirken. Das bedeutet dann einerseits, dass er tangential beschleunigt wird:

$$\vec{F} = \Delta m \cdot \vec{a}_t,$$

da \vec{F} senkrecht zum Ortsvektor \vec{r} steht. Andererseits wirkt auf Δm ein Drehmoment mit Betrag $T = r \cdot F$. Es darf auch geschrieben werden:

$$T = r \cdot F = r \cdot \Delta m \cdot a_t = r^2 \cdot \Delta m \cdot \alpha$$

denn für die Winkelbeschleunigung α gilt $a_t = r \cdot \alpha$, wie in Kapitel 2.1.5 besprochen. Für diesen Teil des Körpers ist also das Fragezeichen $r^2 \cdot \Delta m$, und für jeden anderen Teil natürlich auch. Es bleibt nur, alle zusammenzuzählen. Für einen Körper mit kontinuierlicher Massenverteilung bedeutet dies eine Integration über infinitesimal kleine Massenelemente dm :

$$T = \alpha \cdot \int r^2 \cdot dm$$

wobei T nun das resultierende Drehmoment auf den Körper ist. Die Winkelbeschleunigung α kann vor das Integral, weil sie für alle Teile des starren Körpers gleich ist. Das Integral bekommt einen Namen:

$$\text{Trägheitsmoment } J = \int r^2 \cdot dm.$$

Im Detail erweist es sich als eine etwas vertrackte physikalische Größe; darum soll ihm ein eigenes Kapitel (2.4.3) gewidmet werden.

Man darf in vielen wichtigen Fällen das Ganze als Vektorgleichung schreiben:

$$\vec{T} = J \cdot \vec{\alpha}$$

Die Vektoren \vec{T} und $\vec{\alpha}$ zeigen dann gemeinsam in Richtung der Drehachse.

Diese **Grundgleichung der Rotation** ist nichts anderes als das 2. Newton'sche Gesetz. Es hat nur ein anders „mathematisches Kleid“ bekommen, das für die Behandlung von Drehbewegungen besser geeignet ist.

Die Analogie zur Translation kann noch etwas weiter getrieben werden. Mit der Definition des Impulses $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ ließ sich dort die Grundgleichung $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ umschreiben zu $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ (womit dann gleich der seltene Fall einer sich mit der Zeit ändernden Masse erfasst wurde). Es liegt deshalb nahe, für die Rotation einen

$$\text{Drehimpuls } \vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$$

zu definieren, der dann die Bedingung

$$\vec{T} = \dot{\vec{L}}$$

folgt. Ohne äußeres Drehmoment bleibt der Drehimpuls demnach konstant. Im abgeschlossenen System gilt deshalb neben dem schon bekannten Impulssatz auch ein **Drehimpulserhaltungssatz**. Er hat zuweilen recht überraschende Konsequenzen, von denen einige in den nächsten Kapiteln besprochen werden sollen.

wichtig

$$\text{Drehimpuls } \vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$$

Grundgleichung der Rotation:

$$\vec{T} = J \cdot \vec{\alpha} \quad \text{oder} \quad \vec{T} = \dot{\vec{L}}$$

Dass für die in einer Rotation enthaltene kinetische Energie die Formel

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2$$

gilt, kann nach alledem nicht mehr verwundern. Für den oben betrachteten Teil Δm des rotierenden Körpers gilt ja:

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \Delta m \cdot r^2 \cdot \omega^2.$$

Integration über den ganzen Körper liefert dann die obige Gleichung.

wichtig

Die wichtigsten Analogien sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Translation	Rotation
Wegstrecke s	Drehwinkel φ
Geschwindigkeit \vec{v}	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$
Beschleunigung \vec{a}	Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$
Kraft \vec{F}	Drehmoment \vec{T}
Masse m	Trägheitsmoment J
Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Drehimpuls $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$
$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = \dot{\vec{p}}$	$\vec{T} = J \cdot \vec{\alpha} = \dot{\vec{L}}$
$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$	$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2$

2.4.2

Dynamik der Kreisbewegung

Im Weltraum gibt es fast schon „Gedrängel“, allerdings nur in einem schmalen Ring rund 36.000 km über dem Äquator: dort versammeln sich alle Nachrichten- und Wittersatelliten der Erde. Man nennt sie *geostationär*, weil ein jeder senkrecht über seinem Punkt auf der Erde stehen bleibt, d.h. mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit um die Erde läuft, mit der sich diese selber dreht. Warum Äquator, warum $3,6 \cdot 10^7 \text{ m}^2$.

Wer auf einer Kreisbahn laufen will, braucht eine **Zentralbeschleunigung** \vec{a}_z , die ständig zum Mittelpunkt des Kreises zeigt, sich also mitdreht. Kapitel 2.1.5 hatte für ihren Betrag

$$a_z = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$$

ergeben (ω = Winkelgeschwindigkeit, v = Bahngeschwindigkeit, r = Radius der Kreisbahn). Nach der Grundgleichung der Mechanik muss \vec{a}_z von einer ebenfalls ständig zum Mittelpunkt des Kreises zeigenden Kraft geliefert werden. Sie heißt **Zentripetalkraft** und hat den Betrag

$$F_z = m \cdot a_z = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot v^2/r.$$

Der Hammerwerfer auf dem Sportplatz muss sie mit seinen Muskeln aufbringen und über das Seil des „Hammers“ auf diesen übertragen.

wichtig

Kreisbahn: zur Zentral(Zentripetal) beschleunigung a_z gehört eine zum Zentrum hin gerichtete Zentripetalkraft mit Betrag $F_z = m \cdot a_z = m \cdot \omega^2 \cdot r$.

Die geostationären Satelliten können sich ihre Zentripetalkraft nur von der Gravitation holen. Die aber zeigt zum Zentrum der Erde; deren Mittelpunkt ist Mittelpunkt der Kreisbahn, ob der Satellit nun über die Pole läuft oder anderswo. Geostationär kann er sich freilich nur in einer Äquatorbahn aufhalten; alle anderen Bahnen überstreichen verschiedene geographische Breiten.

In Satellitenhöhe darf man für die Fallbeschleunigung nicht mehr den erdnahen Wert g ansetzen, man muss das Gravitationsgesetz $F = G \cdot m \cdot M / r^2$ bemühen (s. Kap. 2.2.2, G = Gravitationskonstante, M = Masse der Erde). Vom geostationären Satelliten wird die Kreisfrequenz $\omega_E = 2\pi/24\text{ h}$ verlangt, mit der die Erde rotiert. Daraus folgt für den Betrag der Zentripetalkraft:

$$F_z = m \cdot \omega_E^2 \cdot r = G \frac{m \cdot M}{r^2}.$$

G ist eine Naturkonstante, M und ω_E sind fest vorgegeben, also kann die Bedingung „geostationär“ nur von einem einzigen Bahnradius erfüllt werden. Die Satelliten müssen sich drängeln.

Mit weniger Aufwand als eine Raumfähre dreht ein Kettenkarussell seine Passagiere im Kreis herum. Dabei schwenken die Gondeln nach außen; die Ketten, an denen sie hängen, können wie Seile nur Zugkräfte in ihrer eigenen Richtung übertragen (Abb. 2.55). Die Passagiere brauchen für ihre Kreisbahn eine horizontale Zentripetalkraft \tilde{F}_z ; die Ketten müssen sie liefern, mit der waagerechten

Komponente ihrer Zugkraft. Diese Komponente existiert nur, wenn die Gondeln nach außen schwenken, und die Ketten schräg nach oben ziehen (Abb. 2.55, rechtes Kräftedreieck). Gerade unter physikalischen Laien ist es sehr gängig zu sagen: auf die Passagiere wirkt eine nach außen gerichtete *Zentrifugalkraft*, die die Gondeln nach außen zieht. Eine sorgfältige Betrachtung zeigt leider, dass diese an sich so anschauliche Vorstellung ihre Tücken hat. Tatsächlich ist ja nichts und niemand da, der diese Kraft ausübt. Die Zentrifugalkraft ist eine sogenannte *Trägheitskraft* oder *Scheinkraft*, die es strenggenommen nur in beschleunigten Bezugssystemen gibt. Das wird in Kapitel 2.5.2 besprochen.

Auch alle Teile eines rotierenden Körpers bewegen sich auf Kreisbahnen und müssen von Zentripetalkräften auf ihnen gehalten werden. Der Körper muss genug Festigkeit haben, diese Zentripetalkräfte aufzubringen zu können. Bei sehr schnell rotierenden Turbinen ist das keine Selbstverständlichkeit. Hat das Turbinenrad ernsthafte Materialfehler oder wurde es falsch berechnet, kann es auseinander fliegen wie eine Bombe.

Rechenbeispiel 2.14: Geostationäre Bahn

Sind geostationäre Satelliten wirklich 36000 km über dem Äquator? (Nutzen Sie die Tabellen im Anhang.)

Lösung: Die oben angegebene Gleichung für die Zentripetalkraft lässt sich nach r^3 auflösen:

$$r^3 = \frac{G \cdot M}{\omega_E^2}.$$

Es ist:

$$\omega_E = \frac{2\pi}{24\text{ h}} = 7,27 \cdot 10^{-5}\text{ s}^{-1};$$

$G = 6,68 \cdot 10^{-11}\text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}$; $M = 5,97 \cdot 10^{24}\text{ kg}$. Damit ergibt sich: $r^3 = 7,54 \cdot 10^{22}\text{ m}^2$ und $r = 4,22 \cdot 10^4\text{ km}$. Will man die Höhe über dem Äquator wissen, muss man noch den Erdradius von $r_E = 6,38 \cdot 10^3\text{ km}$ abziehen und kommt tatsächlich auf $3,58 \cdot 10^4\text{ km}$.

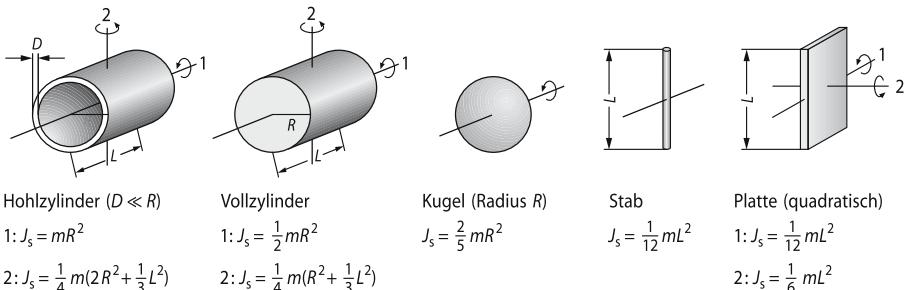


Abb. 2.50. Trägheitsmomente einiger symmetrischer Körper bezüglich verschiedener Achsen durch den Schwerpunkt

2.4.3 Trägheitsmoment

Das **Trägheitsmoment** J eines vorgegebenen Körpers lässt sich nicht als einfacher Messwert angeben, denn es hängt nicht nur von der Gestalt des Körpers ab, davon, wie er seine Masse im Raum verteilt, sondern auch von der Lage und der Richtung der Drehachse. Dadurch wird J formal zu einem *Tensor* mit neun Komponenten und einem besonderen Thema für Lehrbücher der Mathematik. Der Physiker hält sich am besten zunächst einmal an übersichtliche Sonderfälle. Der einfachste ist eine punktförmige Masse m die auf einer Kreisbahn mit Radius R umläuft. Definitionsgemäß hat sie ein Trägheitsmoment $J = m \cdot R^2$. Die gleiche Formel ergibt sich auch für ein Rohr, das um seine Längsachse rotiert, denn auch bei ihm befindet sich die ganze Masse im gleichen Abstand von der Mittelachse, nämlich dem Radius des Rohres. Bei einem homogen mit Masse gefüllten Zylinder, der ebenfalls um die Mittelachse rotiert, muss das Trägheitsmoment niedriger sein, da ja hier die Masse im Mittel näher an der Drehachse ist. Hier gilt es, das Integral:

$$J = \int r^2 \cdot dm$$

tatsächlich auszurechnen. Im allgemeinen Fall ist das ein keineswegs triviales Problem der Mathematik. Das Integral ist für den Zylinder mit einen Trick relativ leicht zu lösen. Es kommt heraus, dass das Trägheits-

moment gerade halb so groß ist wie beim Rohr, also:

$$J = \frac{1}{2} m \cdot R^2.$$

Der Rechentrick besteht darin, sich den Zylinder aus lauter Rohren in der Art einer Zwiebel zusammengesetzt zu denken. Jedes dieser Rohre mit Radius r und infinitesimaler Wandstärke dr hat eine Masse

$$dm = 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot l \cdot \rho$$

wobei l die Länge des Rohres und ρ die Dichte des Materials ist. Das Trägheitsmoment ist :

$$dJ = r^2 \cdot dm = 2\pi \cdot r^3 \cdot dr \cdot l \cdot \rho$$

Nun muss nur noch ein einfaches Integral über die Radiusvariable r von 0 bis zum Zylindrerradius R ausgeführt werden, die

$$J = \frac{1}{2} \pi \cdot R^4 \cdot l \cdot \rho = \frac{1}{2} m \cdot R^2.$$

liefert, da die Masse des Zylinders $m = \pi \cdot R^2 \cdot l \cdot \rho$ ist.

Man könnte den Zylinder natürlich auch um eine Querachse rotieren lassen. Dann ist die Rechnung viel schwieriger und es kommt eine andere Formel heraus. Die Tabelle Abb. 2.50 gibt einige Formeln für einfache Körper und verschiedene Achsen, die durch den Schwerpunkt des jeweiligen Körpers gehen.

Ist die Drehachse aus dem Schwerpunkt heraus parallelverschoben um einen Abstand a , so muss zu diesen Werten für das Trägheitsmoment noch ein Term $m \cdot a^2$ dazuaddiert werden (*Satz von Steiner*). Das ist

plausibel, denn dann läuft auch noch der Schwerpunkt auf einer Kreisbahn um die Drehachse herum.

Rechenbeispiel 2.15: Töpferscheibe

Eine Töpferscheibe mit $m = 500 \text{ g}$ und einem Radius von $R = 15 \text{ cm}$ soll in 5 Sekunden auf 3 Umdrehungen pro Sekunde gebracht werden. Welches Drehmoment muss dazu ausgeübt werden? Die Töpferscheibe kann als homogene Zylinderscheibe angenommen werden.

Lösung: Am Ende rotiert die Scheibe mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi \cdot 3 \text{ s}^{-1} = 18,8 \text{ s}^{-1}$. Die geforderte Winkelbeschleunigung beträgt:

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{2\pi \cdot 3 \text{ s}^{-1}}{5 \text{ s}} = 3,77 \text{ s}^{-2}.$$

Das Trägheitsmoment berechnet sich gemäß: $J = \frac{1}{2}m \cdot R^2 = 0,25 \text{ kg} \cdot (0,15 \text{ m})^2 = 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Das notwendige Drehmoment ist also: $T = J \cdot \alpha = 0,021 \text{ Nm}$.

Rechenbeispiel 2.16: Ein Klecks auf die Töpferscheibe

Auf die Töpferscheibe , die nun mit der oben berechneten Winkelgeschwindigkeit rotieren möge, falle nun ein Klecks Ton mit einer Masse von 20 g auf den Rand. Aufgrund des Drehimpulserhaltungssatzes vermindert sich daraufhin die Winkelgeschwindigkeit. Auf welchen Wert ω' ?

Lösung: Der Klecks erhöht das Trägheitsmoment der Scheibe. Wenn er so klein ist, dass wir ihn als punktförmige Masse betrachten können, um $\Delta J = m \cdot R^2 = 20 \text{ g} \cdot (0,15 \text{ m})^2 = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Der Klecks bringt keinen Drehimpuls mit, rotiert nun aber mit der Scheibe mit. Mangels eines äußeren Drehmoments bleibt der Gesamtdrehimpuls aber erhalten: $L = J \cdot \omega = (J + \Delta J) \cdot \omega'$. Die Töpferscheibe verlangsamt sich also auf:

$$\omega' = \frac{J}{J + \Delta J} \omega = 17,4 \text{ s}^{-1}.$$

2.4.4

Die Rollbewegung

Es ist nicht schwer, sich einen Zylinder vorzustellen, der eine schräge Ebene herunterrollt (☞ Abb. 2.51). Um welche Drehachse dreht er sich eigentlich? Dumme Frage, könnte man meinen: natürlich um seine durch den Schwerpunkt gehende Längsachse (Symmetriechse). Das ist aber nur eine mögliche Betrachtungsweise. Sie setzt voraus, dass man sich die Rollbewegung aus zwei Bewegungen zusammengesetzt denkt: aus einer linearen Translationsbewegung des Schwerpunktes und einer Rotationsbewegung um den Schwerpunkt. Bei schiefen Wurf (Kapitel 2.1.3) hatte es sich ja als nützlich erwiesen, die Bewegung längs der Wurfparabel aus einer horizontalen Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit und einer vertikalen Bewegung mit konstanter Beschleunigung zusammenzusetzen. Will man die Winkelbeschleunigung des Zylinders berechnen, geht es aber schneller, wenn man die Rollbewegung als reine Drehbewegung ohne Translation auffasst. Wie geht denn das?

Die Drehachse ist ja nach Kapitel 2.1.5 diejenige Achse, bezüglich der alle Teile des rotierenden Körpers die gleiche Winkelgeschwindigkeit haben. Das bedeutet insbesondere, dass der Körper am Ort der Drehachse ruht. Und das tut der Schwerpunkt beim herunterrollenden Zylinder nun sicher nicht. Hier ruht der Zylinder vielmehr

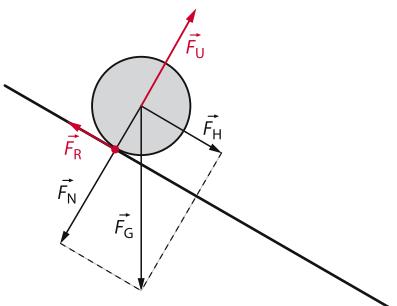


Abb. 2.51. Kräfte auf eine herabrollender Zylinder. Je nachdem, wo man sich die Drehachse hinkenkt, liefert die Reibungskraft oder die Hangabtriebskraft das Drehmoment auf den Zylinder

längs der Linie, längs der er die schiefe Ebene berührt, der Zylinder rollt und rutscht nicht. Er ruht dort natürlich nur für einen beliebig kurzen Moment, denn im nächsten Moment ist die Berührlinie schon wieder ein Stück weitergewandert, sowohl auf der schiefen Ebene als auch auf der Zylinderoberfläche. Die Berührlinie ist die Drehachse, um die sich der Zylinder dreht. Diese Drehachse ist aber nicht raumfest, sondern eine sogenannte **momentane Drehachse**, die ständig ihren Ort wechselt. Das macht die Sache etwas unübersichtlich und unanschaulich. Das Berechnen der Winkelbeschleunigung geht nun aber ganz schnell. Dazu muß man sich das Drehmoment und das Trägheitsmoment bessorgen. Das Drehmoment liefert die Hangtriebskraft F_H (Komponente der Schwerkraft parallel zur schiefen Ebene,  Abb. 2.51):

$$T = R \cdot F_H$$

Drehachse ist ja die Berührlinie. Die dort angreifende Reibungskraft F_R trägt nicht zum Drehmoment bei. Zu dem Trägheitsmoment laut Tabelle $\frac{1}{2}m \cdot R^2$ ist gemäß Steiner'schem Satz ein Term $m \cdot R^2$ dazuzuaddieren. Die Winkelbeschleunigung ist dann:

$$\alpha = \frac{T}{J} = \frac{R \cdot F_H}{\frac{1}{2}m \cdot R^2} = \frac{2}{3} \frac{F_H}{m \cdot R}$$

Der Schwerpunkt befindet sich im Abstand R von der momentanen Drehachse und erfährt die (Tangential-)Beschleunigung

$$a_S = \alpha \cdot R = \frac{2}{3} \frac{F_H}{m}$$

Würde der Zylinder nicht rollen, sondern reibungsfrei rutschen, so wäre seine Beschleunigung gerade

$$a_S = \frac{F_H}{m}$$

Rollend ist er langsamer, da die Drehbewegung gegen die Trägheit des Trägheitsmomentes beschleunigt werden muss. Wäre das Trägheitsmoment größer, wäre die Beschleunigung noch geringer. Dies wird in einem

beliebten Vorlesungsversuch demonstriert, in dem man einen homogenen Zylinder und ein Rohr gleicher Masse und gleichen Radius auf einer schießen Ebene miteinander um die Wette rollen lässt. Wer gewinnt?

Natürlich lässt sich alles auch mit der Idee der zusammengesetzten Bewegung (Translation plus Rotation um den Schwerpunkt) ausrechnen. Auch das soll geschehen: Für die Beschleunigung des Schwerpunktes liefert der Schwerpunktsatz:

$$m \cdot a_S = F_H - F_R$$

Die Normalkomponenten F_N und F_U kompensieren sich ja weg wie bei der Kiste auf der Rampe (Kapitel 2.3.3). Für die Winkelbeschleunigung ist nun Drehmoment und Trägheitsmoment bezüglich der Symmetrieachse durch den Schwerpunkt zuständig:

$$\alpha = \frac{T_S}{J_S} = \frac{R \cdot F_R}{\frac{1}{2}mR^2}$$

Das Problem liegt nun darin, dass die Reibungskraft F_R unbekannt ist. Zwei Gleichungen für die drei Unbekannten a_S , α und F_R reichen nicht. Das Wissen, dass es eine Rollbewegung ist, liefert aber noch einen Zusammenhang zwischen a_S und α :

$$a_S = \alpha \cdot R$$

Stöpselt man diese drei Gleichungen zusammen, so kommen natürlich die selben Gleichungen für α und a_S heraus, die in der ersten, eben etwas schnelleren Betrachtung gewonnen wurden. Dies zu prüfen, sei dem Leser als Übung überlassen.

Die Rollbewegung ist zwar schon deutlich komplizierter als die einfache Drehung um eine raumfeste Achse, aber die Bewegung eines starren Körpers kann noch viel komplizierter sein. Man denke an die Pleuelstange in einem Kolbenmotor. Welche wilden Bewegung hier die momentane Drehachse macht, muss nur der Maschinenbauingenieur wissen und das lernt er (hoffentlich) in der Technischen Mechanik.

Rechenbeispiel 17: Wettkampf zwischen Rohr und Walze

Beim Wettkampf auf der schiefen Ebene gewinnt die Walze, da sie bei gleicher Masse und Radius das kleinere Trägheitsmoment hat. Um welchen Faktor ist die Winkelbeschleunigung der Walze größer?

Lösung: Das Trägheitsmoment der Walze bezüglich der Berührlinie ist $\frac{1}{2}m \cdot R^2$, das des Rohres $2m \cdot R^2$. Das Trägheitsmoment der Walze ist also um einen Faktor $\frac{1}{4}$ kleiner, ihre Winkelbeschleunigung also um $\frac{4}{3}$ größer.

2.4.5 Drehimpulserhaltung

Warum segelt ein Frisbee (☞ Abb. 2.52) so elegant durch die Lüfte? Von allein tut es das nicht; der gekonnte Schlenker mit der Hand gehört beim Abwurf unbedingt dazu. Man lernt ihr durch eifriges Üben im Freien und nicht im stillen Kämmerlein durch Büffeln des Drehimpulserhaltungssatzes, obwohl der eine ganz wichtige Rolle spielt. Es gehört zu den Geheimnissen der Naturgesetze, dass man sie nutzen kann, ohne sie zu kennen.

Bei jedem aerodynamischen Flug, Flugzeug oder Frisbee, hat der *Anstellwinkel*, der Winkel der Tragfläche gegenüber dem Luftstrom, gegenüber der Flugbahn besondere Bedeutung. Der Pilot kann ihn während des Fluges einstellen, das Frisbee nicht. Es kann nicht mehr tun, als seine anfängliche Orientierung in der Luft einigermaßen beizubehalten – mit Hilfe des Drehimpulses. Der gekonnte Schlenker beim Abwurf lässt das Frisbee um eine Achse senkrecht zu seiner Hauptebene und senkrecht zum Anfang seiner Flugbahn rotieren. Im Flug bleibt der Drehimpuls weitgehend erhalten, behält die Drehimpulsachse weitgehend ihre Richtung,



Abb. 2.52. Aufgrund des stabilen Anstellwinkels gleitet das Frisbee weiter als ein Ball

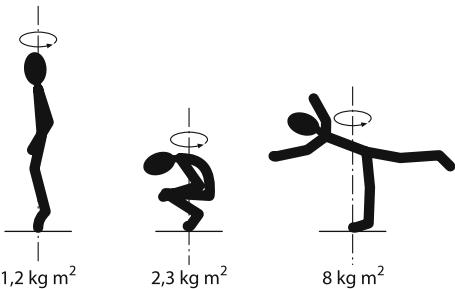


Abb. 2.53. Trägheitsmomente des Menschen in verschiedenen Körperhaltungen bei Drehung um die vertikale freie Achse (Anhaltswerte)

bekommt das Frisbee durch die Krümmung der Wurfparabel einen Anstellwinkel und segelt nun mit aerodynamischem Auftrieb deutlich über die Wurfparabel hinaus. Die alten Griechen kannten den Effekt auch schon und nutzten ihn beim Diskuswerfen.

Ob sie ihn nun kennen oder nicht, auch Eistänzerinnen und Kunstspringer nutzen den Drehimpulserhaltungssatz auf recht raffinierte Weise. Achsenferne Massen tragen ja in weit höherem Maß zum Trägheitsmoment bei als achsennahe; der Radius r geht quadratisch ein. Deshalb kann der Mensch sein Trägheitsmoment (im Gegensatz zu seiner Masse) beträchtlich verändern, wie ☞ Abb. 2.53 an drei Beispielen zeigt. Will nun die Eistänzerin eine Pirouette drehen, so besorgt sie sich zunächst mit dem Fuß ein Drehmoment \vec{T} , das ihr wegen $\vec{T} = \dot{\vec{L}}$ einen Drehimpuls verschafft. Diesen übernimmt sie in einer Stellung mit hohem Trägheitsmoment (drittes Teilbild der ☞ Abb. 2.53) und relativ kleiner Winkelgeschwindigkeit. Wenn sie sich jetzt aufrichtet und die Arme an den Körper und damit an die vertikale Drehachse heranholen, nimmt ihre Winkelgeschwindigkeit merklich zu, denn anders kann der Drehimpuls bei verminderter Trägheitsmoment nicht erhalten bleiben. Ähnliches tut der Kunstspringer beim Salto, nur rotiert er um eine horizontale Achse. Nach dem Absprung geht er in die Hocke, um I zu verringern und ω zu erhöhen; am Ende des Sprunges streckt er sich wieder, um bei kleinerem ω mit den Händen zuerst

sicher in das Wasser einzutauchen. Dort gibt er dann seinen Drehimpuls an die Erde zurück, von der er ihn beim Absprung vom Turm ausgeborgt hatte.

Für den nicht so sportlichen Physikprofessor im Hörsaal steht vielleicht ein *Drehschemel* zur Verfügung, einem Stühlchen, das sich in einem fest auf dem Hörsaalboden stehenden Gestell reibungssarm um eine vertikale Achse drehen kann. Rücken- und Armlehnen, dazu eine mitrotierende Fußbank erleichtern die Versuche, sind aber nicht unerlässlich. Wie kann sich der ruhende Professor mit- samt dem Schemel in Drehung versetzen, wenn man alle Gegenstände des Hörsals aus seiner Reichweite entfernt? Er kann eine Hand hoch strecken und den ganzen Arm auf einem Kegelmantel kreisen lassen. Damit erzeugt er einen vertikalen Drehimpuls und die Drehimpulserhaltung verlangt eine Gegendrehung von Mensch und Schemel, denn der gesamte Drehimpuls war zu Beginn null und muss es bleiben. Die Gegendrehung stoppt, sobald der Professor seinen Arm wieder stillhält. Hat sich der Professor irgendwie anders in Drehung versetzt und zwei schwere Hanteln genommen, so kann er sie dicht am Körper halten oder weit von sich strecken. Er ändert damit deutlich sein Trägheitsmoment und wird schneller (Hanteln am Körper) oder langsamer (Hanteln gestreckt). Er tut dann genau das gleiche wie die Eiskunstläuferin, hat es aber bequemer.

Weil achsenferne Körperteile mehr zum Trägheitsmoment beitragen als achsennahe, gehen z.B. Pferde auf Zehenspitzen: ihre kleinen und schmalen Hufe entsprechen anatomisch Finger- und Fußnägeln. Das ist schlecht im Sumpf, aber gut zum raschen Laufen auf festem Boden: die Beine lassen sich rasch bewegen, ohne viel Muskelkraft für hohe Drehmomente aufbringen zu müssen, die hohe Trägheitsmomente anfordern würden.

Wer einen Salto springt, rotiert um eine sog. *freie Achse*, im Gegensatz zum Geräteturner, der sich bei einer Riesenwelle die Reckstange als Drehachse vorgibt. Freie Achsen müssen immer durch den Schwerpunkt laufen, denn täten sie es nicht, so durchliefen der Massen-

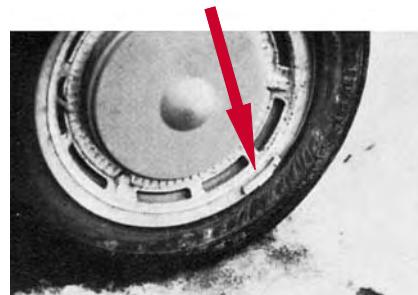


Abb. 2.54. Zusatzgewicht zum Auswuchten eines Autrades

mittelpunkt eine Kreisbahn: eine Zentrifugalkraft wäre die Folge. Die aber kann nur von einer festen Achse aufgefangen werden (bei einer Riesenwelle biegt sich die Reckstange ja auch ganz schön durch). Jedes Rad eines Autos muss durch eine kleine Zusatzmasse „ausgewuchtet“ werden (☞ Abb. 2.54), bis sein Schwerpunkt auf der konstruktiv vorgeschriebenen „Mechanikerachse“ liegt. Andernfalls „schlägt“ das Rad und reißt an seinem Lager. Der Springer im Salto hat kein Lager, ihm bleibt nur eine freie Achse. Beim Rad des Autos soll sie mit der Mechanikerachse zusammenfallen.

Menschliches und tierisches Leben ist Bewegung. Wer sich aber bewegt, muss den Impuls- und den Drehimpulserhaltungssatz einhalten. Auf der Erde macht das keine Schwierigkeiten, solange man mit den Füßen auf dem Boden bleibt: Die Erde ist groß genug, um alle Impulse und Drehimpulse menschlicher Größenordnung spielend aufzufangen. Kosmonauten bewegen sich nicht ganz so bequem, vor allem weil ihnen der durch Haftreibung sichere Kontakt mit der Raumkapsel fehlt. Doch was immer sie tun, der Schwerpunkt, den sie gemeinsam mit ihrer Raumfähre haben, zieht unabirrt seine von der Gravitation und Anfangsgeschwindigkeit bestimmte ballistische Kurve um die Erde, zum Mond oder irgendwohin. Er liegt aber nur dann ortsfest in der Kapsel, wenn alle Kosmonauten schlafen. Bewegen sie sich, so schubsen sie ihr Gehäuse mit allem, was daran festgeschraubt ist, hin und her. Das schließt Experimente bei echter „Schwereolo-

sigkeit“ in der Kapsel aus; man erreicht dort nur eine „Mikrogravitation“. Wenn das nicht genügt, setzt man ein unbemanntes „Beiboot“ aus und führt es quasi im Schlepp mit.

hergeworfen wird, und zwar von sog. Trägheitskräften. Wer mitfährt, spürt sie. Aber für den, der von außen zuschaut, existieren sie nicht.

Rechenbeispiel 18: Eistänzerin

Eine Eistänzerin starte ihre Pirouette mit $\omega = 6,28 \text{ s}^{-1}$ (Abb. 2.53, rechtes Teilbild). Welche Winkelgeschwindigkeit erreicht sie, wenn sie sich aufgerichtet hat? Um welchen Betrag hat sich dann ihre kinetische Energie erhöht? Wo kommt diese zusätzliche Energie her?

Lösung: Der Drehimpuls bleibt beim Aufrichten in etwa konstant:

$L = J \cdot \omega = 8 \text{ kgm}^2 \cdot 6,28 \text{ s}^{-1} = 1,2 \text{ kgm}^2 \cdot \omega'$. Damit folgt für die Winkelgeschwindigkeit nach dem Aufrichten: $\omega' = 41,9 \text{ s}^{-1}$. Die kinetische Energie ist dann:

$$W_{\text{kin}} = \frac{1,2 \text{ kgm}^2}{2} \omega'^2 = 1052 \text{ J}.$$

Beim Start der Pirouette waren es nur

$$W_{\text{kin}} = \frac{8 \text{ kgm}^2}{2} \omega^2 = 158 \text{ J}.$$

Die Tänzerin muss, wenn sie ihre Körperteile zum Schwerpunkt heranzieht, mit der Zentripetalkraft, die die Radialbeschleunigung bewirkt, Arbeit leisten. Diese erhöht die kinetische Energie. Anschaulicher ist es, zu sagen: die Eistänzerin muss ihre Körperteile gegen die nach außen gerichtete Zentrifugalkraft an sich heranziehen. Die aus der Umgangssprache geläufige Zentrifugalkraft ist aber eine Trägheitskraft; und was es mit diesen auf sich hat, darum geht es nun.

2.5 Trägheitskräfte

Einleitung

Die Wagen der Achterbahn müssen so gebaut sein, dass kein Passagier während der Fahrt hinausfliegen kann, obwohl er kräftig hin- und

2.5.1

Linear beschleunigte Systeme

Ein Mensch, der im Bett liegt und schläft, meint, er sei in Ruhe. Tatsächlich rotiert er aber mit samt der Erde um deren Achse und läuft mit ihr um die Sonne. Diese wiederum macht die Drehung der Milchstraße mit, die als Ganzes vermutlich auf eine andere Galaxis zuläuft. Eine „wahre“ Bewegung, eine „absolute“ Geschwindigkeit gibt es nicht – und zwar grundsätzlich nicht. Die Messung einer Geschwindigkeit setzt eine Ortsbestimmung voraus und diese verlangt ein Koordinatenkreuz als *Bezugssystem*. Jeder Beobachter bevorzugt das seine und behauptet gern, er befände sich mit ihm in Ruhe. Der Mensch neigt dazu, sich für den Mittelpunkt der Welt zu halten – in der Physik ist das in Grenzen sogar erlaubt: Koordinatensysteme, die sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig gegeneinander bewegen, sog. *Inertialsysteme*, haben keine Vorteile voreinander; von jedem darf jemand behaupten, es sei in Ruhe. Wenn sich die Geschwindigkeit eines Systems ändert, wenn es z.B. rotiert, ist es kein Inertialsystem und dann treten sog. Trägheitskräfte auf. Sie sind es, die Karussell und Achterbahn so attraktiv machen.

wichtig

Ein Inertialsystem ruht oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit, also ohne jede Beschleunigung.

Wenn ein Auto gegen einen Baum gefahren ist, dann liest man zuweilen in der Zeitung, die Insassen (nicht angeschnallt!) seien durch die Wucht des Aufpralls aus dem Wagen herausgeschleudert worden – gerade so, als habe sie eine plötzlich auftretende Kraft

von ihren Sitzen gerissen. Dies entspricht auch ihrem subjektiven Empfinden. Ein Augenzeuge am Straßenrand könnte aber glaubhaft versichern, zunächst sei das Auto mit hoher Geschwindigkeit auf den Baum zugefahren, dann sei es plötzlich stehen geblieben, die Insassen jedoch nicht. Nach dieser Darstellung sind sie gerade deshalb aus dem Wagen geflogen, weil *keine* Kraft auf sie wirkte, um sie zusammen mit dem Auto anzuhalten. Was ist nun „wirklich“ geschehen? Existierte eine Kraft auf die Insassen, ja oder nein? Das ist eher eine Frage an die Semantik als an die Physik. Physikalisch sind beide Darstellungen korrekt, je nach Standpunkt, je nach Bezugssystem.

Der Gedanke mag ausgefallen erscheinen, aber man kann auch in einem Fahrstuhl die Gewichtskraft eines Menschen mit einer Federwaage aus dem Badezimmer feststellen. Fährt der Fahrstuhl an, und zwar aufwärts, so muss auch der Passagier auf die Fahrstuhlgeschwindigkeit beschleunigt werden. Dazu bedarf es einer nach oben gerichteten Kraft, die nur über die Waage auf ihn übertragen werden kann. Prompt zeigt sie diese Kraft an, zusätzlich zu der des Gewichtes, die von der Waage ja auch durch eine nach oben gerichtete Federkraft kompensiert werden muss. Hat der Fahrstuhl seine volle Geschwindigkeit erreicht, so verschwindet mit der Beschleunigung auch die Zusatzkraft, und die Waage meldet wieder das normale Gewicht. Beim Bremsen im Obergeschoss wird der Fahrstuhlkorb verzögert, d.h. nach unten beschleunigt – und der Passagier auch. Die dazu notwendige Kraft lässt sich mühelos von seiner Gewichtskraft abzweigen; die Waage zeigt entsprechend weniger an. Sobald der Fahrstuhl steht, ist alles wieder beim alten. So beschreibt ein Physiker den Vorgang, der ihn zumindest in Gedanken von außen, aus einem Inertialsystem heraus, beobachtet.

Was aber sagt jemand, der im Fahrstuhl dabei gewesen ist und, weil der geschlossen war, nicht herausschauen und die Bewegungen seines Bezugssystems gar nicht feststellen konnte? Er kennt nur die vorübergehend geänderten Anzeigen der Waage und muss sie deuten. Grundsätzlich wäre denkbar, dass da eine fremde große Masse mit ihrer Gravitation im Spiel war, dass sie erst unter dem Fahrstuhl erschien, die Gewichtskraft erhöhend, und dann über ihm, die Gewichtskraft erniedrigend. Sehr wahrscheinlich klingt das nicht, darum wird der Beobachter im Fahrstuhl seine physikalischen Kenntnisse zusammenkratzen und sagen: „Wie ich gelernt habe, treten in einem Bezugssystem, das sich aus irgendwelchen Gründen mit einer Beschleunigung \ddot{a} durch die Gegend bewegt, massenproportionale

Trägheitskräfte $\vec{F}_T = -m \cdot \ddot{a}$

auf. Vermutlich waren die veränderten Angaben der Waage auf Trägheitskräfte zurückzuführen, vermutlich haben wir uns in einem beschleunigten Bezugssystem befunden. Dessen Beschleunigungen kann ich sogar ausrechnen.“ Die allgemeine Relativitätstheorie behauptet übrigens, mit physikalischen Methoden könne man Gravitationskräfte und Trägheitskräfte nicht unterscheiden.

Inertialsystem sind einfacher zu beschreiben, weil in ihnen keine Trägheitskräfte auftreten. Wenn man ihnen eine höhere Realität zubilligt, kann man sogar sagen, Trägheitskräfte gebe es nicht wirklich, sondern nur scheinbar, sie seien *Scheinkräfte*, „virtual forces“. Wer auf dem Rummelplatz Geld ausgibt, um in der Achterbahn Trägheitskräfte am eigenen Leib zu spüren, hält sie kaum für Scheinkräfte.

wichtig

wichtig

Auch Verzögerungen (Bremsungen) sind Beschleunigungen.

Trägheitskräfte existieren nur in beschleunigten Bezugssystemen, nicht in Inertialsystemen, und werden darum zuweilen Scheinkräfte genannt.

Könnte man einen Fahrstuhl frei fallen lassen, so wäre $a = g$, und die Trägheitskraft höbe die Gewichtskraft auf: Der Passagier fühlte sich „schwerelos“. Astronauten erleben diese Schwerelosigkeit tage- und monatelang, von dem Moment an nämlich, in dem das Triebwerk der Trägerrakete abgeschaltet wird, bis zum Wiedereintritt in die Erdatmosphäre, wenn die Bremsung durch Luftreibung beginnt. In der Zwischenzeit „fallen“ sie mitsamt ihrer Raumkapsel um die Erde herum, mit einer so hohen Geschwindigkeit in der „Horizontalen“, dass ihre Bahn die Erde nicht erreicht und zur Ellipse um deren Zentrum wird. Alles in der Kapsel, ob lebendig oder nicht, bewegt sich mit (praktisch) gleicher Geschwindigkeit und (praktisch) gleicher Beschleunigung auf (praktisch) parallelen, gekrümmten Bahnen. Im Bezugssystem der Kapsel fällt nichts zu Boden, es gibt gar kein „Unten“: Kennzeichen der **Schwerelosigkeit**. Das heißt keineswegs, dass Raumschiff und Inhalt der irdischen Schwerkraft entzogen wären; alles bewegt sich lediglich so, dass sich Gewichts- und Trägheitskräfte genau kompensieren. Beim Start war das ganz anders. Dort zeigte die Beschleunigung nach oben, die Trägheitskräfte addierten sich zu den Gewichtskräften (und übertrafen sie um etwa das Dreifache).

Ein Mensch, der ausgleitet und mit dem Hinterkopf aufschlägt, holt sich möglicherweise eine Hirnverletzung an der Stirn: Beim Aufprall wird die Fallgeschwindigkeit des Schädels auf einer Strecke von vielleicht nur wenigen Millimetern abgebremst; das keineswegs starre Gehirn drückt sich am Hinterkopf zusammen und kann, wenn es das Unglück will, an der Stirn von der Hirnschale abreißen. Mit anderen Worten: die im Bereich der Stirn auf Zug beanspruchte mechanische Verbindung zwischen Hirn und Schädel war den hohen Trägheitskräften beim Aufprall nicht gewachsen.

wichtig

Bei Unfällen können hohe momentane Beschleunigungen zu hohen momentanen Trägheitskräften mit entsprechenden Verletzungen führen.

Trägheitskräfte sind wie Gewichtskräfte massenproportional. Darum bildet die Fallbeschleunigung g ein anschauliches Maß für die Beschleunigung eines Bezugssystems. Während der 3 g beim Start hat der Astronaut auf der Liege ein Gefühl, als hockten drei Menschen auf ihm herum.

Rechenbeispiel 19: Wiegen im Aufzug

Wir steigen tatsächlich mit der Personenwaage unterm Arm in einen Aufzug und wiegen uns. Die Waage zeigt eine Masse an (70 kg), obwohl sie die Gewichtskraft misst. Der Hersteller hofft, dass der Umrechnungsfaktor von $9,81\text{ kgm/s}^2$ schon stimmen wird. Nun fährt der Aufzug nach oben und beschleunigt dazu für kurze Zeit mit $a = 1\text{ m/s}^2$. Auf welchen Wert erhöht sich für diese Zeit die Masse scheinbar?

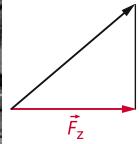
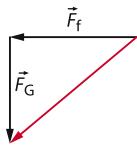
Lösung: zu der Gewichtskraft $m \cdot g$ tritt noch eine Trägheitskraft mit Betrag $m \cdot a$ hinzu. Die Waage rechnet aber natürlich unverändert mit ihrem Umrechnungsfaktor, sodass sie eine scheinbare Masse von

$$m' = \frac{(g + a)m}{g} = 77,1\text{ kg} \quad \text{anzeigt.}$$

2.5.2 Rotierende Systeme

Ein Kettenkarussell dreht seine Passagiere im Kreis herum. Dabei schwenken die Gondeln nach außen, damit die Ketten, an denen sie hängen, die notwendige **Zentripetalkraft** \bar{F}_Z , die für die Radialbeschleunigung \bar{a}_r der Kreisbewegung gebraucht wird, mit der waagerechten Komponente ihrer Zugkraft liefert (Kapitel 2.4.2). Diese Komponente existiert nur, wenn die Gondeln nach außen schwenken, und die Ketten schräg nach oben ziehen (☞ Abb. 2.55, rechtes Kräftedreieck). Der Passagier hingegen kann nun folgendes sagen: Ich sitze in einem rotierenden, also beschleunigten Bezugssystem, auf mich wirkt außer meiner vertikalen Gewichts-

Abb. 2.55. Kettenkarussell.
Links: Kräftedreieck aus der Sicht des Passagiers; die Ketten zeigen in Richtung der Resultierenden aus Zentrifugalkraft \vec{F}_f und Gewichtskraft \vec{F}_G . Rechts: Kräftedreieck aus der Sicht des Zuschauers; die Kettenkraft liefert mit ihrer Horizontalkomponenten die zur Kreisbewegung notwendige Zentripetalkraft \vec{F}_z



kraft \vec{F}_g eine horizontale Trägheitskraft, die **Zentrifugalkraft** $\vec{F}_f = -m \cdot \vec{a}_r$. Beide addieren sich zu einer schräg nach unten und außen gerichteten Gesamtkraft, der die Kette folgen muss (☞ Abb. 2.55, linkes Kräftedreieck). \vec{F}_z und \vec{F}_f haben die gleichen Beträge, nach der gleichen Formel zu berechnen. Von der Zentrifugalkraft darf nur der mitbewegte Beobachter im rotierenden Bezugssystem reden, der Zaungast im ruhenden Bezugssystem sieht nur die Zentripetalkraft.

wichtig

Zentripetalkraft: nach innen gerichtete Zentralkraft der Kreisbewegung;
Zentrifugalkraft: nach außen gerichtete Flieh-
kraft im rotierenden Bezugssystem.

Aber da ist er der einzige im ganzen Stadion. Alle anderen müssen sagen: Da hält einer mit seinen Muskeln den Hammer auf einer Kreisbahn, und plötzlich lässt er los; folglich fliegt der Hammer mit seiner momentanen Bahngeschwindigkeit ab, tangential zum Kreis – wie die Funken von einer Schleifscheibe (☞ Abb. 2.56).

Von den Fliehkräften rotierender Bezugssysteme macht die Technik eifrig Gebrauch. Ein Beispiel ist die Zentrifuge. Die Bestandteile einer Suspension lassen sich im Schwerfeld der Erde voneinander trennen, wie z.B. die

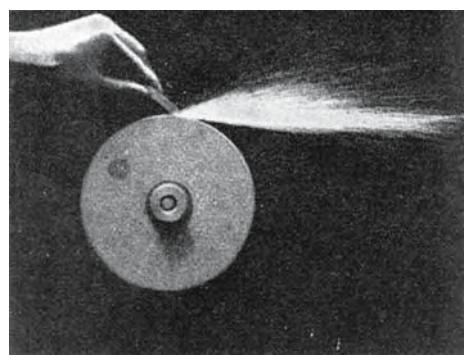


Abb. 2.56. Von einer Schleifscheibe tangential abfliegende Funken (nach R. W. Pohl)

Wenn man die beiden Bezugssysteme nicht auseinander hält, kann man Fehlschlüsse aufsitzen. In welcher Richtung fliegt der „Hammer“ weg, den der Hammerwerfer erst im Kreis herumschleudert und dann los lässt? Radial nach außen, in Richtung der Zentrifugalkraft – der Werfer darf das in der Tat sagen; er dreht sich ja mit, er gibt sein rotierendes Bezugssystem selber vor.

Blutsenkung beim Arzt zeigt. Das braucht aber Zeit und lässt sich wesentlich beschleunigen, wenn man für seine Probe die Gewichtskraft durch die Fliehkraft einer **Zentrifuge** ersetzt. Auch sie ist massenproportional. Mit hohen Drehzahlen können durchaus handliche Geräte Radialbeschleunigungen von mehr als 1000 g erzielen. Die eingesetzten Reagenzgläser stehen dann bei laufender Zentrifuge horizontal – und sind nicht ganz ungefährlich. 1000 g bedeuten tausendfache Gewichtskraft; da darf es keine mechanischen Schwachstellen geben, sonst fliegt die Zentrifuge auseinander.

Rechenbeispiel 2.20: Kettenkarussell

Mit ungefähr welcher Winkelgeschwindigkeit rotiert das Kettenkarussell in Abb. 2.55?

Lösung: Im Druck ist der zuschauende Familienvater etwa 23 mm hoch. Wenn er tatsächlich 1,80 m groß war, beträgt der Abbildungsmaßstab ungefähr 1 : 80. Im Bild ist eine Gondel etwa 36 mm von der vertikalen Drehachse entfernt, das entspräche in der Natur einem Bahnradius von ca. 3 m. Da aber der Vater näher an der Kamera stand als das Karussell, dürfte die Annahme $r \approx 4$ m korrekter sein. Aus der Schräglage der Gondel ergibt sich für das Verhältnis von Zentripetalkraft zu Gewichtskraft

$$\frac{F_z}{F_G} = \frac{17}{14} = 1,2.$$

Das ist auch das Verhältnis der dazugehörigen Beschleunigungen. Die Radialbeschleunigung ist also ca. $a_r = 12 \text{ m/s}^2$. In Kapitel 2.1.5 haben wir gelernt, dass

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2.$$

Damit ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_r}{r}} = 1,7 \text{ s}^{-1}.$$

Das entspricht etwa 16 Umdrehungen pro Minute.

2.5.3 Trägheitskräfte in der technischen Mechanik

Der Ingenieur muss Probleme lösen, zuweilen recht komplizierte. Da hilft es ihm, feste Regeln zu haben, wie Probleme anzugehen sind. Für die Berechnung der Dynamik eines starren Körpers (der Maschinenbauer spricht von **Kinetik**), besteht diese Regel in der Formulierung eines **dynamischen Gleichgewichts**; und das geht so:

Zunächst werden alle an einem Körper angreifenden Kräfte hingemalt (siehe zum Beispiel Abb. 2.51). Diese Kräfte werden **eingeprägte Kräfte** oder **Zwangskräfte** genannt. Dann wird im Schwerpunkt eine **Trägheitskraft** $\vec{F}_T = -m \cdot \ddot{a}_s$ aufgetragen, \ddot{a}_s ist die Beschleunigung des Schwerpunktes. Des Weiteren wird angenommen, dass auf den Körper ein **Trägheits-Drehmoment** $\vec{T}_T = -J_s \cdot \ddot{\alpha}$ wirkt (J_s : Massenträgheitsmoment; $\ddot{\alpha}$: Winkelbeschleunigung des Körpers). Nun wird gesagt, dass für all diese Kräfte und Drehmomente die Grundgleichungen der Statik gelten, also:

$$\vec{F}_T + \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \text{und} \quad \vec{T}_T + \sum_i \vec{T}_i = 0$$

Das wird zuweilen auch **Prinzip von d'Alembert** genannt. Das dynamische Problem ist damit auf ein Problem der Statik zurückgeführt. Das erfreut den Maschinenbauer, denn in der Statik kennt er sich sehr gut aus. Die erste Gleichung liefert die Beschleunigung des Schwerpunktes und die zweite die Winkelbeschleunigung. Damit weiß man alles, was man über die Beschleunigung des Körpers wissen kann.

Und wie ist das nun mit dem beschleunigten Bezugssystem, das zu jeder Trägheitskraft gehört? Der Ingenieur kümmert sich nicht dar-

um, denn seine Regel funktioniert auch, wenn er nicht über Bezugssysteme nachdenkt.

Da dies ein Physikbuch ist, soll aber einmal darüber nachgedacht werden. Das ist auch gar nicht schwer. Bei genauerem Hinsehen verfährt der Ingenieur nämlich genau so wie in der zweiten Betrachtung der Rollbewegung in Kapitel 2.4.4. Er denkt sich die Bewegung aus einer Translation des Schwerpunktes und einer Rotation um den Schwerpunkt zusammengesetzt und schreibt für jede Teilbewegung die Bewegungsgleichungen für \ddot{a}_s bzw. $\ddot{\alpha}$ hin. Man sieht das gleich, wenn man die Grundglei-

chungen für das *dynamische Gleichgewicht* ausschreibt:

$$-m \cdot \ddot{a}_s + \sum_i \ddot{F}_i = 0 \quad \text{und}$$

$$-J_s \cdot \ddot{\alpha} + \sum_i \ddot{T}_i = 0.$$

Nur wird hier statt von Newton'schem Gesetz und Bewegungsgleichung von d'Alembert'schem Prinzip und dynamischem Gleichgewicht geredet. Jede Profession pflegt ihr eigenes Fachchinesisch.

Lineare Bewegung

in Kürze

Im einfachsten Fall kann die Bewegung eines Körpers in einem *Weg-Zeit-Diagramm* dargestellt werden (☞ Abb. 2.2). Die **Geschwindigkeit** des Körpers entspricht dann der Steigung des Graphen in diesem Diagramm (☞ Abb. 2.1). Man berechnet sie durch Differenzieren des Weges $s(t)$ nach der Zeit t . Umgekehrt kann man aus der Geschwindigkeit $v(t)$ durch Integrieren den zurückgelegten Weg ermitteln. Die Geschwindigkeit ist genau genommen ein Vektor $\bar{v}(t)$, da sie nicht nur einen Betrag, sondern auch eine Richtung hat. Bei der Berechnung von Relativgeschwindigkeiten muss man daher oft zur Vektoraddition greifen (☞ Abb. 2.7). Wenn die Geschwindigkeit von der Zeit abhängt, ist der Körper beschleunigt. Die **Beschleunigung** \ddot{a} berechnet sich durch Differenzieren der Geschwindigkeit nach der Zeit und ist auch ein Vektor. Die **Beschleunigung ist immer in Richtung der sie verursachenden Kraft gerichtet**. Diese Richtung stimmt in vielen Fällen (z. B. schiefer Wurf, Kreisbewegung) *nicht* mit der Richtung der Geschwindigkeit überein.

Konstante Geschwindigkeit

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

s : Weg [m]

t : Zeit [s]

v : Geschwindigkeit [m/s]

s_0 : Anfangsort [m]

$$\text{Weg} \qquad s(t) = v \cdot t + s_0$$

Konstante Beschleunigung

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

a : Beschleunigung [m/s^2]

v_0 : Anfangsgeschwindigkeit [m/s]

Geschwindigkeit

$$v(t) = a \cdot t + v_0$$

Weg

$$s(t) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit

Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ω : Winkelgeschwindigkeit [1/s]

T : Umlaufzeit [s]

r : Radius [m]

v : Bahngeschwindigkeit [m/s]

$$\text{Bahngeschwindigkeit} \qquad v = \omega \cdot r$$

Radialbeschleunigung

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

a_r : Radialbeschleunigung [m/s^2]

F_z : Zentripetalkraft [N], nach innen gerichtet.

Zentripetalkraft

$$F_z = m \frac{v^2}{r}$$

Zentrifugalkraft

Im beschleunigten Bezugssystem ist die Zentrifugalkraft entgegengesetzt gleich der Zentripetalkraft.

Kräfte

Jegliche Beschleunigung wird durch **Kräfte** verursacht und ist proportional zur resultierenden Kraft. Die wichtigsten Kräfte in der Mechanik sind: **Kontaktkräfte** zwischen berührenden Körpern (das sind letztlich **elektromagnetische Kräfte**), insbesondere: **Reibungskräfte**, die Bewegung zu bremsen suchen und **Auftriebskräfte** in Flüssigkeiten (s. 3.3.3); die **Gravitationskraft** zwischen Massen; und Verformungskräfte wie zum Beispiel die **Federkraft**. Es gilt immer: Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus, so beruht dies auf Gegenseitigkeit: B übt eine gleich große, aber entgegen gesetzte Kraft auf A aus (**3. Newton-Gesetz**).

Schwerkraft

$$F_G = m \cdot g$$

F_G : Schwerkraft [N, Newton]

m: Masse [kg]

$g = 9.81 \text{ m/s}^2$: Fallbeschleunigung

Federkraft

$$F = D \cdot \Delta l$$

D: Federkonstante [$\frac{\text{N}}{\text{m}}$]

Δl : Auslenkung der entspannten Feder

Reibungskraft (zwischen Festkörpern)

$$F_R = \mu \cdot F_N$$

F_R : Reibungskraft

F_N : Normalkraft

μ : Reibungskoeffizient

Drehmoment

Eng mit dem Begriff der Kraft verwandt und bei Drehbewegungen wichtig ist das **Drehmoment T** „gleich Kraft mal Hebelarm“. Soll ein starrer Körper um eine Achse in **Rotation** versetzt werden, so kommt es nicht nur darauf an, welche Kraft F man ausübt, sondern auch in welchem Abstand von der Drehachse (mit welchem **Hebelarm l**) die Kraft angreift.

Drehmoment

$$T = F \cdot l_{\text{eff}}$$

$$\vec{T} = \vec{l} \times \vec{F}$$

T: Drehmoment [Nm]

\vec{l} : Vektor von der Drehachse zum Angriffspunkt der Kraft

l_{eff} : effektiver Abstand des Angriffspunktes der Kraft von der Drehachse [m]

„Last mal Lastarm gleich Kraft mal Kraftarm“

$$F_1 \cdot l_{\text{eff}_1} = F_2 \cdot l_{\text{eff}_2}$$

F_1 : Last-Kraft [N]

l_{eff_1} : Lastarm [m]

F_2, l_{eff_2} : Kraft, Kraftarm

Gleichgewicht

Die Vektorsumme aller Kräfte und Drehmomente muss Null sein

Grundgleichung der Mechanik

Zentral in der Mechanik ist das 2. Newton'schen Gesetz: Ist die Vektorsumme aller Kräfte ungleich null, so wird er beschleunigt. Die Beschleunigung hat also immer genau die Richtung der resultierenden Kraft und hängt auch noch von der Masse m ab.

Jede Beschleunigung erfordert eine resultierende Kraft

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

\vec{F} : Kraftvektor [N]

m: Masse [kg]

\vec{a} : Beschleunigungsvektor [m/s]

Arbeit

Der Begriff der Arbeit ist wesentlich für das Berechnen von Energiewerten

Arbeit gleich Kraft mal Weg

$$W = F \cdot \Delta s$$

W: Arbeit [J, Joule]

F: Kraft [N]

Δs: Weg [m]

$$W = \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{F}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}$$

Energie

Eine wichtige Größe in der Physik, die weit über die Mechanik hinausreicht, ist die **Energie**. Energie wird nicht erzeugt und nicht verbraucht, sie bleibt erhalten (**Energieerhaltungssatz**). Die Summe aus potentieller und kinetischer Energie in der Mechanik bleibt aber nur dann konstant, wenn keine Reibungskräfte wirken. **Reibung** wandelt kinetische Energie in Wärmeenergie um, weshalb alle mechanischen Geräte eines Antriebes bedürfen, um nicht stillzustehen. Der Antrieb führt dem Gerät laufend eine gewisse Energiemenge pro Zeit zu. Dies wird angegeben als **Leistung**

kinetische Energie
(**Bewegungsenergie**)

$$W_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2$$

W: Arbeit, Energie [J, Joule]
W_{kin}: kinetische Energie

potentielle Energie
(**Lageenergie**)

$$W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot \Delta h$$

(im Schwerfeld der Erde)

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D \cdot \Delta l^2$$

(Schraubenfeder)

W_{pot}: potentielle Energie
D: Federkonstante [$\frac{N}{m}$]
Δl: Dehnung der Feder

Leistung

$$P = \frac{dW}{dt}$$

P: Leistung [$\frac{J}{s} = W$, Watt]

Impuls

Bei der Betrachtung von Stößen ist der Impuls von Interesse. Wirken keine äußeren Kräfte, so bleibt er in einem System von Kugeln zum Beispiel erhalten (Impulserhaltungssatz). So kann man verstehen, was bei Stößen passiert.

Impuls

$$p = m \cdot v$$

p: Impuls $\left[\frac{kg \cdot m}{s} \right]$

Impulserhaltung

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Impulserhaltung: ohne äußere Kraft \vec{F} bleibt der Impuls erhalten.

Rotation starrer Körper

Für Drehbewegungen kann das 2. Newton'sche Gesetz auch mit Drehmoment, Winkelbeschleunigung und Trägheitsmoment formuliert werden (s. 2.3.7). Das Trägheitsmoment hängt von der Form und Massenverteilung in Körper ab und von der Lage der Drehachse (☞ Abb. 2.51).

Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

ω: Winkelgeschwindigkeit $\left[\frac{1}{s} \right]$

Tangentialbeschleunigung

$$a_t = \alpha \cdot r$$

r: Radius

Trägheitsmoment

$$J = \int r^2 \cdot dm; \text{ spezielle Formeln}$$

in ☞ Abb. 2.51

J: Trägheitsmoment [$kg \cdot m^2$]

Steinerscher Satz

$$J_A' = J_A + m \cdot a^2$$

a: Distanz, um die die Achse parallelverschoben wird

*m: Gesamtmasse des Körpers
 J_A, J_A' : Trägheitsmoment vor und nach dem Verschieben der Achse*

Grundgleichung

$$\vec{\tau} = J \cdot \vec{\alpha}$$

$\vec{\tau}$: Drehmoment [$N \cdot m$]

Drehimpuls

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$$

\vec{L} : Drehimpuls [$\frac{kg \cdot m^2}{s}$]

Drehimpulserhaltung

$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$; ohne äußeres Drehmoment bleibt der Drehimpuls erhalten.

Verständnisfragen

1. Die mittlere und die momentane Geschwindigkeit sind meist verschieden. Für welche Bewegung sind sie gleich?
2. Kann ein Auto um die Kurve fahren ohne beschleunigt zu sein?
3. Sie werfen einen Ball geradewegs nach oben in die Luft. Welche Werte haben die Geschwindigkeit und die Beschleunigung im höchsten Punkt der Bahn?
4. Ein Stein wird von der gleichen Höhe fallengelassen, von der ein Ball horizontal geworfen wird. Wer hat die höhere Geschwindigkeit beim Auftreffen auf den Boden?
5. Weil es in Ruhe ist, wirken keine Kräfte auf das Auto. Was ist falsch an dieser Aussage?
6. Sie sägen einen Besen im Schwerpunkt durch. Sind die beiden Teile gleich schwer?
7. Wenn Sie von einem Stuhl aufstehen, müssen Sie sich erst etwas nach vorn beugen. Warum geht es nicht anders?
8. Warum muss man vorsichtig bremsen, wenn man auf einer rutschigen Fahrbahn fährt
9. Warum muss man beim Anfahren mit dem Fahrrad stärker in die Pedale treten, wie wenn man mit konstanter Geschwindigkeit fährt?
10. Wer übt auf wen eine größere Kraft aus: die Erde auf den Mond oder der Mond auf die Erde? Wer ist stärker beschleunigt?
11. Eine konstante Kraft wird auf einen Wagen ausgeübt, der sich anfänglich in Ruhe auf einer Luftschiene befindet. Die Reibung zwischen dem Wagen und der Schiene sei vernachlässigbar. Die Kraft wirkt in einem kurzen Zeitintervall und bringt dem Wagen auf seine Endgeschwindigkeit. Wie lange muss eine halb so große Kraft auf den Wagen ausgeübt werden, um die gleiche Geschwindigkeit zu erreichen?
12. Betrachten Sie eine Person, die sich in einem nach oben beschleunigenden Fahrstuhl befindet. Ist die nach oben gerichtete Kraft, die vom Fahrstuhlboden auf die Person ausgeübt wird, größer, kleiner oder gleich der Gewichtskraft der Person?
13. Wenn eine Rakete startet, steigt sowohl ihre Geschwindigkeit als auch ihre Beschleunigung bei konstanter Schubkraft der Triebwerke. Warum ist das so?
14. Warum ist es einfacher, einen Berg einen Zickzack-Weg hoch zu wandern als einfach gerade hoch zu gehen?
15. Ein Block, der sich anfänglich in Ruhe befindet, wird losgelassen, um eine reibungslose Rampe hinunter zu rutschen. Am Boden erreicht er eine Geschwindigkeit v . Um am Boden eine doppelt so hohe Geschwindigkeit ($2v$) zu erreichen, um wie viel Mal so hoch müsste eine neue Rampe sein?

16. Ein Auto beschleunigt von 0 auf 100 km/h in 15 s. Ein anderes beschleunigt in 15 s von 0 auf 200 km/h. Wie ungefähr verhalten sie die Motorleistungen der Autos zueinander?
17. Ein Wagen auf einer Luftschiene bewegt sich mit 0,5 m/s, als die Luft plötzlich abgeschaltet wird. Der Wagen kommt nach einem Meter zum Stehen. Das Experiment wird wiederholt, aber nun bewegt sich der Wagen mit 1 m/s, als die Luft abgeschaltet wird. Wie lang ist der Bremsweg nun?
18. Stellen Sie sich vor, Regen fällt vertikal in einen offenen Wagen, der auf geradem Weg mit zu vernachlässigender Reibung eine horizontale Strecke entlang rollt. Ändert sich seine Geschwindigkeit?
19. Eine Person versucht mit einem Ball einen großen hölzernen Bowlingkegel umzuwerfen. Die Person hat zwei Bälle gleicher Größe und Masse – einer ist aus Gummi, der andere aus Knete. Der Gummiball springt zurück, während der Knetball am Kegel hängen bleibt. Welcher Ball kippt den Kegel am wahrscheinlichsten um?
20. Ist es möglich, dass ein Körper Impuls, aber keine kinetische Energie hat? Oder umgekehrt?
21. Ist ein Stoß zwischen zwei Körpern denkbar, bei dem die gesamte Kinetische Energie verloren geht?
22. Ein Lehmklumpen wird gegen eine Wand geworfen und bleibt dort kleben. Was passiert mit seinem Impuls? Gilt der Impulserhaltungssatz?
23. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit des Sekundenzeigers einer Uhr?
24. Muss ein resultierendes Drehmoment wirken, wenn ein Körper rotiert?
25. In einem Seifenkistenrennen rollten Autos ohne Antrieb einen Hügel hinunter. Wie sollten die Räder optimalerweise sein? Groß oder klein, leicht oder schwer? Oder ist es egal?
26. Eine Eiskunstläuferin steht auf einem Punkt auf dem Eis (Annahme: keine Reibung) und dreht sich mit ausgestreckten Armen. Wenn sie ihre Arme anzieht, verringert sie ihr Massenträgheitsmoment, und ihre Winkelgeschwindigkeit erhöht sich, so dass ihr Drehimpuls erhalten bleibt. Wie ist es mit der kinetischen Energie?

Übungsaufgaben

((I): leicht; (II): mittel; (III): schwer)

Beschleunigung

- 2.1: (I) Ein rasanter Sportwagen kommt in 6 Sekunden „auf Hundert“ (100 km/h). Wie groß ist die mittlere Beschleunigung im Vergleich zum freien Fall?
- 2.2: (I) Sie lassen einen Stein in einen Brunnen fallen und hören es nach 2 Sekunden „platschen“. Wie tief ist der Brunnen?
- 2.3: (I) Aus welcher Höhe muss man einen Dummy zu Boden fallen lassen, wenn man den Aufprall eines Motorradfahrers simulieren will, der mit 50 km/h auf eine Mauer fährt?
- 2.4: (I) Ein Auto beschleunigt in 6 s von 12 m/s auf 25 m/s. Wie groß ist die Beschleunigung? Welche Strecke legt das Auto in dieser Zeit zurück?
- 2.5: (II) Ein stehendes Polizeiauto nimmt die Verfolgung eines mit konstanten 110 km/h zu schnell fahrenden Autos in dem Moment auf, in dem das Auto am Polizeiauto vorbeifährt. Nach 700 m hat die Polizei das Auto eingeholt. Angenommen, die Polizei hat konstant beschleunigt: wie groß war die Beschleunigung? Wie lang hat die Aufholjagd gedauert? Mit welcher Geschwindigkeit erreicht das Polizeiauto das andere Auto?
- 2.6: (II) Ein Mensch gleitet aus und schlägt mit dem Hinterkopf auf den Boden. Dem Wievielfachen der Erdbeschleunigung ist der Schädel ausgesetzt? Zur Abschätzung sei angenommen: freier Fall aus 1,5 m Höhe; konstante Verzögerung beim Aufschlag auf einer Strecke von 5 mm.
- 2.7: (III) Ein Stein fällt in 0,3 s an einem 2 m hohen Fenster vorbei. Aus welcher Höhe über der Fensteroberkante wurde der Stein fallen gelassen?

zusammengesetzten Bewegung

- 2.8: (I) Wie muss der Bootsführer in Abb. 2.7 steuern, wenn er möglichst schnell ans andere Ufer kommen will?
- 2.9: (II) Regentropfen, die auf die Seitenfenster eines fahrenden Zugs treffen, hinterlassen eine schräg laufende Spur auf dem Fenster. Ein durchschnittlicher Regentropfen fällt senkrecht mit etwa 8 m/s und die Spur auf dem Fenster habe einen Winkel von 60° zur Senkrechten. Wie schnell fährt der Zug, Windstille vorausgesetzt?
- 2.10: (II) Wieviel weiter als auf der Erde kann eine Person auf dem Mond springen, wenn sie mit gleichem Absprungwinkel und gleicher Absprunggeschwindigkeit springt? Die Fallbeschleunigung auf dem Mond ist etwa ein Sechstel derjenigen auf der Erde.
- 2.11: (II) Mit welcher Anfangsgeschwindigkeit v_0 muss ein „Hammer“ unter 45° abgeworfen werden, wenn er 72 m weit fliegen soll? (Luftreibung darf vernachlässigt werden).
- 2.12: (II) Ein Känguru auf der Flucht macht 6 m weite und 1.5 m hohe Sprünge. Wie groß ist die horizontale Fluchtgeschwindigkeit?

Kraft

- 2.13: (I) Der statistische Einheitsmensch wiegt „70 Kilo“. Wie groß ist seine Gewichtskraft?
- 2.14: (I) Wie viel Kraft spart die schiefe Ebene der Abb. 2.21 quantitativ?
- 2.15: (II) Angenommen, die Gewichtskraft des Flaschenzuges von Abb. 2.22 könnte gegenüber den 10 kN der Gewichtskraft F_1 der Last vernachlässigt werden.
a. Welche Kraft F belastet die Decke, wenn das freie Ende des Seiles senkrecht nach unten gezogen wird?
b. Wird die Decke stärker belastet, wenn man, wie gezeichnet, schräg zieht, oder weniger stark?
- 2.16: (II) Durch welche konstruktiven Maßnahmen lässt sich die Empfindlichkeit einer Balkenwaage erhöhen?

- 2.17: (I) Ist Super-Reibung mit einem Reibungskoeffizienten größer als eins möglich?
- 2.18: (II) Ein Kind rutscht eine Rutsche mit 28° Winkel zur Horizontalen genau mit der halben Beschleunigung herunter die es ohne Reibung hätte. Wie groß ist der Reibungskoeffizient zwischen Kind und Rutsche?
- 2.19: (II) Ein Seil liegt auf einem Tisch. Dabei hängt ein Ende des Seils an der Tischkante herab. Das Seil beginnt zu rutschen, wenn der herabhängende Teil des Seils 20 % der gesamten Seillänge ausmacht. Wie groß ist der Reibungskoeffizient zwischen Seil und Tisch?
- 2.20: (II) Ein Fahrradfahrer fährt auf einer abschüssigen Straße (5° gegen die Horizontale) mit konstanten 6 km/h. Angenommen, die Reibungskraft (Luftwiderstand) ist genau proportional zur Geschwindigkeit, also $F_R = k \cdot v$, wie groß ist dann die Konstante k ? Die Masse des Fahrradfahrers samt Fahrrad sei 80 kg.

Energie und Leistung

- 2.21: (I) Wie viel Zeit hat man, um seine 70 kg die 16 Stufen je 17 cm eines Stockwerkes hoch zu schleppen, wenn man dabei 500 W umsetzen will? Wer leichter ist, muss schneller sein.
- 2.22: (I) Auch ein sparsamer Haushalt setzt heutzutage leicht 200 kWh elektrische Energie im Monat um. Wie viele Sklaven hätte ein alter Römer halten müssen, wenn er sich diese Energie über Fahrradergometer bei einem 12-Stunden-Arbeitstag und 100 W mittlerer Leistung pro Sklave hätte besorgen wollen?
- 2.23: (I) Welchen Kleinhandelswert hat die kinetische Energie eines Tankers von rund 200.000 Tonnen, der 15 Knoten läuft? (1 Knoten = 1 Seemeile/Stunde, 1 Seemeile = 1,852 km)
- 2.24: (II) Eine zur Zeit $t = 0$ ruhende Masse (2 kg) wird von einer konstanten Kraft (60 N) beschleunigt. Welche Arbeit W verrichtet die Kraft im Zeitraum zwischen der 5. und der 10. Sekunde (jeweils inklusive)?
- 2.25: (II) Jane, nach Tarzan Ausschau haltend, rennt so schnell sie kann (5,6 m/s), greift sich eine senkrecht herunterhängende Liane und schwingt nach oben. Wie hoch schwingt sie? Spielt die Länge der Liane eine Rolle?
- 2.26: (II) Ein 17 kg schweres Kind rutscht eine 3,5 m hohe Rutsche und kommt unten mit einer Geschwindigkeit von 2,5 m/s an. Wie viel Wärmeenergie wurde aufgrund der Reibung freigesetzt?
- 2.27: (III) Wenn Sie auf Ihrer Personenwaage stehen wird die Feder in ihr um 0,5 mm zusammengezogen und die Waage zeigt eine Gewichtskraft von 700 N. Nun springen Sie aus 1 m Höhe auf die Waage. Was für einen maximalen Ausschlag zeigt die Waage jetzt? Tipp: benutzen Sie den Energiesatz.

zum Impulssatz

- 2.28: (I) Was ist „schlimmer“: gegen eine Betonwand fahren, oder mit einem massegleichen Auto frontal zusammenstoßen, dass mit der gleichen Geschwindigkeit fährt?
- 2.29: (II) Bei einem Verkehrsunfall fahren zwei massegleiche Wagen aufeinander. Wie viel Energie wird bei unelastischem Stoß durch verbogenes Blech in Wärme umgesetzt, wenn
 a. der eine Wagen auf den stehenden anderen auffährt?
 b. beide Wagen mit gleichen Geschwindigkeiten frontal zusammenstoßen?
- 2.30: (III) Ein Polo (Masse 1000 kg) fährt auf einen S-Klasse Mercedes (2200 kg) auf, der mit angezogenen Bremsen auf der Straße steht. Dadurch werden beide Autos zusammen 2,8 m nach vorn geschoben. Der Reibungskoeffizient zwischen den Rädern des Mercedes und der Straße sei 0,7. Mit welcher Geschwindigkeit ist der Polo aufgefahren?
- 2.31: (II) Eine Explosion lässt ein Objekt in zwei Teilen auseinander fliegen, von denen eines 1,5 mal so schwer ist wie das andere. Wenn insgesamt eine Energie von 6000 J freigesetzt wurde, wie viel kinetische Energie bekommt jedes Teil mit?

- 2.32:** (II) Zwei gleiche Schlitten mit Masse $m_1 = m_2 = 20 \text{ kg}$ stehen direkt hintereinander im Schnee. Eine Katze ($m_K = 5 \text{ kg}$) springt mit einer Geschwindigkeit (relativ zur Erde) von 6 m/s von dem einen Schlitten auf den anderen. Infolgedessen bewegen sich die Schlitten auseinander (Reibung vernachlässigt); Mit welchen Geschwindigkeiten?
- Trägheitskräfte**
- 2.33:** (I) Wie reagiert der Abgleich einer Balkenwaage auf die Trägheitskräfte eines beschleunigten Bezugssystems?
- 2.34:** (II) Ein Passagier in einem Flugzeug, das gerade auf Starterlaubnis wartet, nimmt seine Armbanduhr an einem Ende und lässt sie senkrecht herunterbaumeln. Das Flugzeug bekommt die Starterlaubnis und beschleunigt. Dabei schwenkt die Uhr aus der senkrechten um ca. 25° nach hinten. Nach 18 Sekunden mit etwa konstanter Beschleunigung hebt das Flugzeug ab. Wie groß ist seine Startgeschwindigkeit?
- Drehbewegung**
- 2.35:** (I) Welche Drehfrequenz und welche Kreisfrequenz, welche Bahngeschwindigkeit und welche Winkelgeschwindigkeit hat die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne? (Erdbahnradius im Anhang).
- 2.36:** (II) Tarzan will, an einer Liane hängend, über einen Abgrund schwingen. Er kann sich maximal mit einer Kraft von 1400 N an der Liane festhalten. Welche maximale Geschwindigkeit am tiefsten Punkt seines Flugs kann er aushalten ohne abzustürzen? Tarzan habe eine Masse von 80 kg und die Liane sei $4,8 \text{ m}$ lang.
- 2.37:** (I) In Rechenbeispiel 2.10 wurde ausgerechnet, dass die Kraft zum Beschleunigen eines Kleinwagens 2750 N beträgt. Welches Drehmoment muss der Motor auf jedes Rad ausüben, wenn der Raddurchmesser 66 cm beträgt.
- 2.38:** (II) Die drei Rotorblätter eines Hubschraubers sind jeweils $3,75 \text{ m}$ lang und 160 kg schwer. Sie sind näherungsweise dünne Stangen. Wie groß ist das Trägheitsmoment des Rotors? Welches Drehmoment muss der Motor ausüben, wenn der Rotor in 8 s von Null auf 5 Umdrehungen pro Sekunde gebracht werden soll?
- 2.39:** (II) Eine Walze mit einer Masse von 2 kg und einem Durchmesser von 20 cm rollt mit einer Schwerpunktsgeschwindigkeit von 1 m/s . Wie groß ist ihre kinetische Energie?
- 2.40:** (II) Ein Karussell mit $4,2 \text{ m}$ Durchmesser rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit von $0,8 \text{ s}^{-1}$. Es hat ein Trägheitsmoment von $1760 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Vier Personen, jede mit einer Masse von 65 kg , stehen neben dem Karussell und steigen plötzlich auf den Rand. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit jetzt?

3.1	Die Aggregatzustände	94
3.2	Festkörper	95
3.2.1	Struktur der Festkörper	95
3.2.2	Verformung von Festkörpern	96
3.2.3	Viskoelastizität	99
3.3	Hydrostatik	100
3.3.1	Stempeldruck	100
3.3.2	Schweredruck	101
3.3.3	Auftrieb	103
3.3.4	Manometer	105
3.3.5	Pumpen	106
3.3.6	Kompressibilität	106
3.4	Grenzflächen	107
3.4.1	Kohäsion	107
3.4.2	Adhäsion	110
3.5	Hydrodynamik	112
3.5.1	Ideale Strömung	112
3.5.2	Zähigkeit (Viskosität)	115
3.5.3	Reale Strömung durch Rohre	116
3.5.4	Umströmung von Hindernissen	120

Der „starre Körper“ ist eine Fiktion: Auch der härteste „feste Körper“ lässt sich noch verbiegen und mit der nötigen Gewalt auch zerbrechen. Demgegenüber passt eine Flüssigkeit ihre Form dem Gefäß an, in dem sie sich befindet; sie behält aber ihr Volumen bei und bestimmt danach ihre Oberfläche. Ein Gas schließlich füllt (unter Laborbedingungen, nicht in astronomischem Maßstab) sein Gefäß vollständig und gleichmäßig aus. Eben weil Flüssigkeiten und Gase keine eigene Form besitzen, lassen sie sich etwa durch Strömung in Röhren relativ leicht transportieren.

3.1 Die Aggregatzustände

Einleitung

Bei einfachen Substanzen wie H_2O ist die Zuordnung zu den drei Aggregatzuständen fest, flüssig und gasförmig nahe liegend und unproblematisch. Beim Fensterglas mag verwundern, dass es zu den Flüssigkeiten gehört. Was aber macht man mit Kaugummi, Haut und Haaren?

Die Materie dieser Erde besteht aus Atomen. Jedes Atom besitzt eine lockere Elektronenhülle, die seinen Durchmesser bestimmt, und einen vergleichsweise kleinen Atomkern, der seine Masse bestimmt. Der Kern enthält Protonen und Neutronen. Protonen sind positiv elektrisch geladen, Elektronen negativ und Neutronen sind ungeladen (neutral); der Kern kann demnach seine Hülle durch elektrische Kräfte an sich binden. Diese Kräfte würden aber die positiven Protonen auseinander treiben, wären da nicht die anziehenden Kernkräfte zwischen ihnen und den Neutronen. Balance kann nur in bestimmten Kombinationen erreicht werden; Atome, Atomkerne existieren nur von den rund hundert chemischen Elementen.

Bis zum Element Nr. 83, dem Wismut, gibt es stabile Atomkerne, ab Nr. 84 (Polonium) zerfallen alle Kerne nach einer gewissen Zeit in kleinere, sind also radioaktiv. Elemente bis Nr. 92, dem Uran, kommen in der Natur vor, die Transurane müssen künstlich hergestellt werden. Stabile Atomkerne überdauern Jahrtausenden; die schweren Elemente der Erde sind irgendwann einmal im Innern eines Sternes entstanden. Die Vielfalt der Substanzen ist nur möglich,

weil sich die wenigen Atomsorten in den unterschiedlichsten Kombinationen zu Molekülen zusammenlegen können. Wie sie dies tun, warum sie dies tun, ist Thema der Chemie. Deren Formeln sagen, welche Atome in welchen Anzahlen welche Moleküle bilden. Die zugehörigen Bindungskräfte sind weit schwächer als die Kernkräfte. Bei chemischen Reaktionen wird deshalb auch weit weniger Energie umgesetzt als bei Kernreaktionen. Kohlekraftwerke müssen wesentlich mehr Brennstoff verfeuern und entsorgen als Kernkraftwerke. Moleküle sind klein, selbst Billionen liefern noch keine sichtbaren Krümel. Makroskopische Körper entstehen nur, weil sich Moleküle zu großen Komplexen zusammenlegen können. Die dabei auftretenden Bindungskräfte sind freilich so schwach, dass man sie mit Hammer und Meißel oder auch mit reiner Temperaturerhöhung überwinden kann. Wenn Wasser verdampft, treten einzelne Moleküle durch die Oberfläche der Flüssigkeit in den Dampfraum über. Auch diese Phänomene tragen zur Vielfalt der Substanzen bei. Ob Nebel oder Regen, ob Hagelkorn, Tropfen oder Schneeflocke, ob Pfütze, Raureif oder Glatteis, immer handelt es sich um die gleichen H_2O -Moleküle, nur in verschiedenen Aggregatzuständen. Ein **Festkörper** ist formstabil; verbiegt man ihn nur leicht, so kehrt er elastisch in seine Ausgangsform zurück. Überfordert man seine mechanische Festigkeit, so zerreißt, zerbricht, zerkrümelt er. Eine **Flüssigkeit** besitzt keine eigene Form; sie passt sich dem Gefäß an, in das sie eingefüllt wurde. Wasser braucht dazu allenfalls Sekunden, Kochkäse Stunden, antiken Gläsern haben zweitausend Jahre noch nicht genügt, wider

den Augenschein ist ein Glas kein Festkörper in der strengen Definition der Aggregatzustände (s. dazu auch Ende Kap. 5.3.1). Eine vorgegebene Flüssigkeitsmenge kennt ihr Volumen und behält es bei, wenn man sie umgießt. Die Molekülabstände liegen in der gleichen Größenordnung wie bei Festkörpern, die Dichten also auch. Ein Gas füllt dagegen jedes Volumen gleichmäßig aus, das man ihm als Gefäß anbietet (jedenfalls gilt das in irdischen Verhältnissen, solange die Schwerkraft keine nennenswerte Rolle spielt). Im *Gas* treffen sich die Moleküle nur noch selten, Kräfte zwischen ihnen können sich kaum auswirken. Die Abstände sind groß, die Dichten normalerweise um Zehnerpotenzen geringer.

wichtig

Aggregatzustände:

- ▶ **fest:** formstabil bis zur Festigkeitsgrenze
- ▶ **flüssig:** nicht form-, wohl aber volumenstabil
- ▶ **gasförmig:** weder form- noch volumenstabil

So ganz befriedigen kann die Einteilung in genau drei Aggregatzustände nicht. Was macht man mit Haut und Haaren? Sie sind weder richtige Festkörper noch richtige Flüssigkeiten. Als man die Aggregatzustände erfand, meinte man noch, Physik und Chemie brauchten und dürften sich nur mit toter Materie befassen, denn „das Leben“ habe eine völlig andere Qualität. Insofern war es eine Sensation, als Friedrich Wöhler 1828 mit dem Harnstoff zum ersten Mal eine den lebenden Organismen zugeordnete Substanz in der Retorte herstellte. Aber da gab es die Aggregatzustände schon.

3.2 Festkörper

Einleitung

Kennzeichen des Festkörpers ist seine kristalline Struktur. Sie verleiht ihm Formstabilität, macht ihn aber nicht starr. Der feste Körper lässt sich

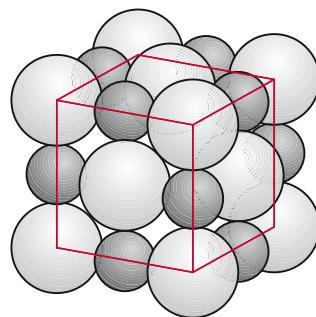


Abb. 3.1. Kristallgitter des NaCl (Kochsalz), schematisch. Die dicken Cl⁻-Ionen und die kleineren Na⁺-Ionen liegen dicht an dicht

elastisch (= vorübergehend) und plastisch (= dauernd) verformen. Seine Antwort auf äußere Kräfte wird durch Materialkenngrößen wie z.B. den Elastizitätsmodul erfasst.

3.2.1

Struktur der Festkörper

Festkörper sind formstabil: Wenn man sie vorsichtig verbiegt, kehren sie hinterher in ihre alte Form zurück. Das liegt an ihrer kristallinen Struktur. Im *Kristallgitter* herrscht Ordnung; jedem *Gitterbaustein* wird ein fester Platz zugewiesen. Kochsalz beispielsweise besteht aus elektrisch positiv geladenen Ionen des Natriums und aus den negativen Ionen des Chlors. Im NaCl-Gitter sind sie so angeordnet, dass jedes Na⁺-Ion sechs Cl⁻-Ionen als nächste Nachbarn hat und umgekehrt. Das führt zu einer würfelförmigen *Elementarzelle* des Gitters, wie sie Abb. 3.1 schematisch darstellt. Sehen kann man einen solchen Würfel nicht; dazu ist er zu klein. Seine Kantenlänge beträgt gerade ein halbes Nanometer.

Zeichnungen dieser Art stellen Gitterbausteine als Kugeln dar, die sich gegenseitig berühren. Das ist halbwegs realistisch, aber nicht sehr übersichtlich, weil man nicht in das Gitter hineinschauen kann. Insofern haben Zeichnungen nach Art der Abb. 3.2 ihre Vorteile. Sie sind Kristallmodellen nachempfunden, die man aus Holzkugeln

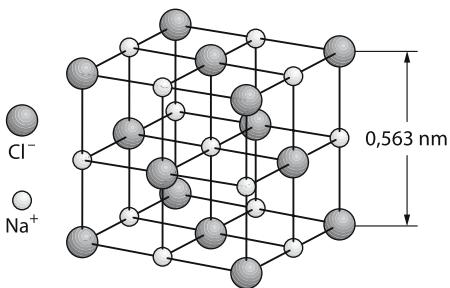


Abb. 3.2. Kubisch-flächenzentriertes Gitter (NaCl); Modelle dieser Art markieren nur die Lagen der Zentren der Gitterbausteine ohne Rücksicht auf deren Größe

und Metallstäbchen zusammenbastelt, um Symmetrien anschaulich darstellen zu können. Nur darf man sich nicht täuschen lassen: Die Bausteine eines Kristallgitters sind wirklich keine kleinen Kugeln, die von Stäben auf Distanz gehalten werden.

Im NaCl -Kristall liegen die Würfel der Elementarzelle dicht an dicht; das Gitter wiederholt sich identisch in allen drei Kantenrichtungen. Aber auch bei einer Drehung um eine Würfelkante landen nach 90° alle Gitterplätze wieder auf Gitterplätzen; viermal bis zur vollen Drehung. Die Kristallographen bezeichnen sie als *vierzählige Symmetriearchsen* und reden von einem *kubischen Gitter*.

Die Atome des Kohlenstoffs bilden gern 6er-Ringe. Mit chemisch gebundenem Wasserstoff gibt das die ringförmigen Moleküle des Benzols, ohne jeden Bindungspartner die 6-zählige, *hexagonale* Kristallstruktur des Graphit (☞ Abb. 3.3 rechts). Graphit ist

schwarz und so weich, dass man mit ihm schreiben kann. Kohlenstoff kann aber auch kubisch kristallisieren. Dann ist er glasklar durchsichtig und härter als jedes andere Mineral; man kann Glas mit ihm ritzten. Aus einleuchtendem Grund bezeichnet man die zugehörige Struktur als **Diamantgitter** (☞ Abb. 3.3 links).

Die Eigenschaften eines Festkörpers hängen nicht nur von der Natur seiner Bausteine ab, sondern auch von der Struktur des Kristallgitters. Dessen Bausteine müssen keine Atome sein wie beim Diamanten oder Ionen wie beim Kochsalz, ganze Moleküle sind ebenfalls erlaubt, wie beispielsweise bei Eis und Schnee. Auch die großen Moleküle des Insulins kann man mit einiger Mühe zu Kristallen zusammenlegen und sogar Viren, die im Grenzbereich zur lebenden Materie angesiedelt sind.

3.2.2

Verformung von Festkörpern

Auch die starken Bindungskräfte im Kristall halten die Gitterbausteine nicht unverrückbar auf ihren Plätzen fest, ein *fester Körper* ist noch kein *starrer Körper*. Er kann auch durch relativ schwache äußere Kräfte verbo gen werden. Allerdings lassen die Bindungen zunächst nur geringe Verschiebungen zu und holen die Gitterbausteine sofort in ihre Normallage zurück, sobald die äußere Kraft nachlässt: Die Verformung ist *elastisch* und

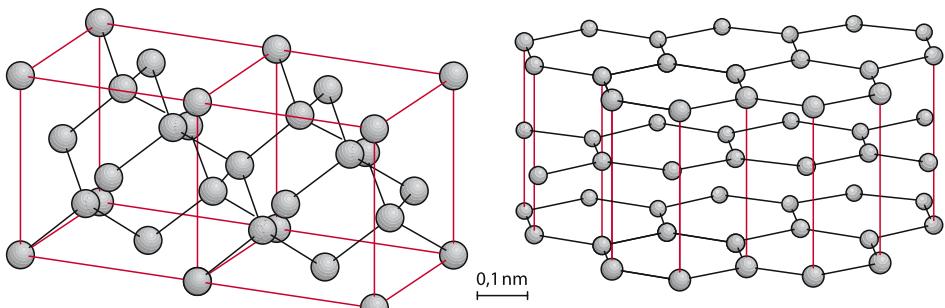


Abb. 3.3. Das kubische Diamantgitter und das hexagonale Graphitgitter des Kohlenstoffs

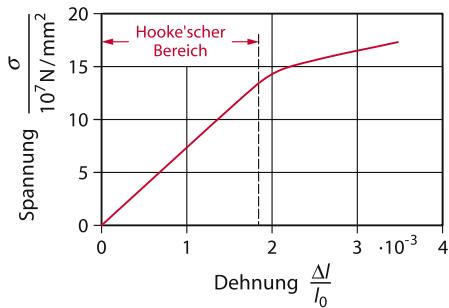


Abb. 3.4. Spannungs-Dehnungs-Diagramm vom Kupfer

verschwindet spurlos. Leicht untersuchen lässt sich ein Sonderfall, die Dehnung eines Drahtes unter Zug. Man darf ein lineares Kraftgesetz erwarten (s. Kap. 2.2.1): Proportionalität zwischen Längenänderung Δl und angreifender Kraft F . Weiterhin wird Δl mit der Ausgangslänge l_0 zu- und mit der Querschnittsfläche A des Drahtes abnehmen. Der Quotient $\Delta l/l_0$ bekommt den Namen **Dehnung**, der Quotient $F/A = \sigma$ heißt (mechanische) **Spannung**.

Sind Spannung und Dehnung einander proportional, so erfüllen sie das **Hooke-Gesetz**

$$\sigma = E \cdot \Delta l / l_0,$$

die Proportionalitätskonstante E heißt **Elastizitätsmodul** σ . σ und E haben die gleiche Einheit N/m^2 , denn die Dehnung ist eine dimensionslose Zahl. Die Elastizitätsmodule gängiger Metalle liegen in der Größenordnung 10^{11} N/m^2 .

zurück, er hat sich *plastisch* gedehnt. Dem sind aber Grenzen gesetzt; irgendwann reißt der Draht. Manche Substanzen lassen sich fast gar nicht plastisch verformen; wird ihre Elastizitätsgrenze überschritten, so brechen sie wie Glas. Man nennt sie *spröde*.

wichtig

Elastische Verformungen sind reversibel, plastische irreversibel.

Bei plastischer Verformung müssen ganze Bereiche eines Kristalls gegeneinander verschoben werden. Das geht nur, wenn Gitternachbarn sich voneinander trennen und mit neuen Nachbarn wieder zusammenlegen, ein schier unmögliches Vorgang, wäre der Kristall perfekt gebaut, hätte also ausnahmslos jeder Gitterbaustein wirklich alle Nachbarn, die ihm nach der Struktur zustehen. Tatsächlich springt ein Baustein innen nur in eine benachbarte Leerstelle, in einen aus irgendwelchen Gründen gerade nicht besetzten Gitterplatz.

Besondere Bedeutung haben hier linienförmige Anordnungen gleichartiger Leerstellen der Art, wie sie Abb. 3.5 etwas

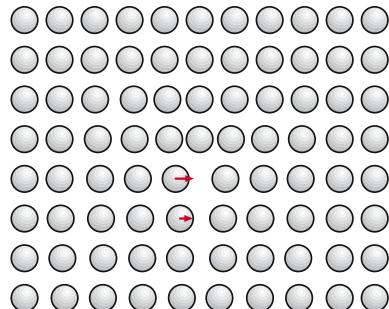


Abb. 3.5. Stufenversetzung, schematisch. In den oberen Teil des Kristalls hat sich, vier Gitterabstände weit, eine zusätzliche Netzebene vertikal eingeschoben; unter ihrem Ende ist das Gitter dadurch ein wenig aufgeweitet worden. Oberhalb und unterhalb der Zeichenebene setzt sich die Versetzung in gleicher Weise im Kristall fort: sie zieht sich wie ein Schlauch durch den Kristall hindurch. Springen die beiden markierten Gitterbausteine nach rechts, so verschiebt sich die Versetzung um einen Netzebenenabstand nach links

wichtig

- ▶ Mechanische Spannung $\sigma = \text{Kraft/Querschnittsfläche}$
- ▶ Dehnung = relative Längenänderung
- ▶ Hooke-Gesetz: Dehnung zu Spannung proportional

Erhöht man die Spannung über die sog. **Elastizitätsgrenze** hinaus, so nimmt die Dehnung überproportional zu (Abb. 3.4): Der Draht beginnt zu *fleßen* und kehrt nach Entlastung nicht zur alten Ausgangslänge

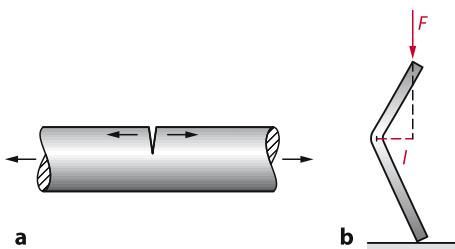


Abb. 3.6 a,b. Instabilität durch Hebelwirkung beim Bruch. Das Drehmoment (effektiver Hebelarm l mal Kraft F), das auf die Spitze der Kerbe (a) oder die Knickstelle (b) wirkt, nimmt zu, je weiter die Kerbe einreißt bzw. der Stab einknickt

schematisch skizziert (man nennt das eine *Stufenversetzung*). Hier kann eine ganze Atomreihe senkrecht zur Zeichenebene relativ leicht, z.B. nach rechts, in die Lücke hineinspringen und so die Versetzung um einen Atomabstand nach links verschieben. Ist nach diesem Mechanismus eine Stufenversetzung quer durch den Kristall hindurchgewandert, so ist dessen unterer Bereich gegenüber dem oberen um einen Atomabstand *abgeglitten*. Zur plastischen Verformbarkeit gehören demnach bewegliche Versetzungen. Diese können sich aber an anderen Gitterfehlern wie Fremdatomen oder Einschlüssen festhaken: Gusseisen ist spröde, es enthält mehrere Prozent Kohlenstoff; schmiedbarer Stahl dagegen meist weniger als 0,1 %.

Die Bruchfestigkeit hängt nicht nur von den Eigenschaften des Materials selbst ab. Schon winzige Kerben in der Oberfläche können sich verhängnisvoll auswirken, weil nämlich die oberflächennahen Anteile einer Zugkraft ein Drehmoment auf die Kerbenspitze ausüben (Abb. 3.6a). Es

wächst auch noch, je weiter es die Kerbe einreißt. Dünne Stäbe, auf Stauchung beansprucht, knicken ein. Wieder wirkt ein Drehmoment auf die Knickstelle; wieder wächst es, je weiter das Material nachgibt, weil dann der effektive Hebelarm größer wird (Abb. 3.6b).

Knickung bedeutet *Biegung*. Ein gebogener Stab wird auf der Außenseite gedehnt, auf der Innenseite gestaucht. Dazwischen liegt die *neutrale Faser*, die ihre Länge nicht ändert (Abb. 3.7). Zur Biegesteifigkeit eines Stabes tragen die von der neutralen Faser am weitesten entfernten Teile am meisten bei; man spart Material, wenn man sie auf Kosten des Mittelteils verstärkt. Technisches Beispiel: der Doppel-T-Träger (Abb. 3.8). Liegt die Richtung der Biegebeanspruchung nicht von vornherein fest, so empfiehlt sich ein kreisrundes Rohr mit relativ dünner Wand. Halme sind nach diesem Prinzip konstruiert, aber auch die hohen Knochen der Vögel.

Dehnung und Stauchung sind nicht die einzigen mechanischen Belastungen, denen festes Material ausgesetzt sein kann. Eine Achse, die ein Drehmoment übertragen soll, wird auf *Drillung* beansprucht, auf *Torsion*. Bei Tiefbohrungen kann es vorkommen, dass die Maschine am oberen Ende des Bohrgestänges schon ein paar Umdrehungen weiter ist als der Bohrkopf tief unten.

Schließlich: die mechanischen Eigenschaften mancher Materialien sind nicht einmal isotrop. Als Musterbeispiel kann ein Holzklotz dienen, der gestaucht werden soll (Abb. 3.9). Liegen seine Fasern längs oder quer zur Kraft, so besitzt er eine recht hohe

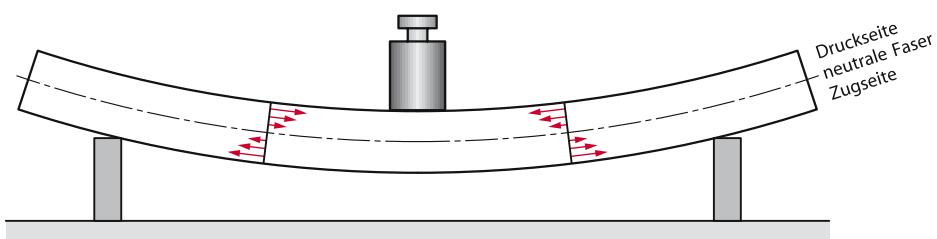


Abb. 3.7. Bei der Biegung ändert die *neutrale Faser* ihre Länge nicht

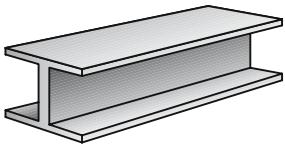


Abb. 3.8. Doppel-T-Träger; das von der neutralen Faser am weitesten entfernte Material trägt am meisten zur Biegefesteitkigkeit bei

Festigkeit. Sie ist deutlich geringer, wenn die Fasern einen Winkel von 45° bilden, denn jetzt können die einzelnen Lagen des Holzes relativ leicht gegeneinander abgescherzt werden wie schlecht verleimte Brettchen. Unter 45° erzeugt die stauchende Kraft eine besonders hohe *Schubspannung*, hier also in Richtung der Fasern. Die dazu senkrechte Komponente der Kraft führt zur *Normalspannung*, die vom Holz leichter aufgenommen werden kann.

Rechenbeispiel 3.1: Mensch am Draht

Welchen Durchmesser muss ein Kupferdraht mindestens haben, wenn er ohne plastische Verformung einen Menschen tragen soll? Beachte Abb. 3.4.

Lösung: Das Ende der Hooke'schen Gera den befindet sich etwa bei der Grenzspannung $\sigma_g = 13 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$. Wenn der Mensch ein Gewicht von 690 N hat (entspricht 70 kg), so ergibt sich für die minimal erforderliche Querschnittsfläche:

$$A_{\min} = \frac{F_G}{\sigma_g} = 5,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = \frac{1}{4} d_{\min}^2 \cdot \pi.$$

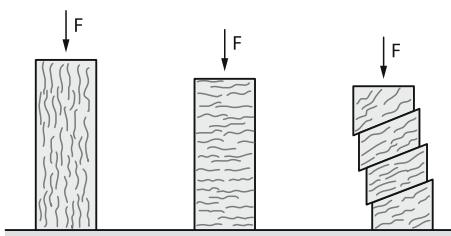


Abb. 3.9. Gegenüber gerichteter Belastung hängt die Festigkeit faserigen Materials von der Richtung der Fasern ab

Also ist der minimale Durchmesser $d_{\min} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,6 \text{ mm}$.

3.2.3

Viskoelastizität

Leben ist an Wasser gebunden; es ist in den Weltmeeren entstanden und hat sich in seiner Entwicklung an dessen Zusammensetzung angepasst. Auch menschliches Leben braucht Wasser; der Salzgehalt des Blutes ist dem der Meere nicht unähnlich. In gewissem Sinn haben die Tiere, als sie an Land gingen, ihre alte Umgebung mitgenommen, nur mussten sie nun sorglich einhüllen, was vorher Umwelt gewesen war. Der starre Panzer der Insekten hat konstruktive Nachteile, z.B. beim Wachsen, man muss sich häuten. Wirbeltiere verlegen darum ihr tragendes Skelett nach innen, brauchen nun aber eine Haut, die schlagfest und wasserdicht ist und trotzdem beweglich und biegsam. Die technische Lösung heißt *Hochpolymere*. Die chemische Industrie hat sich ihrer in großem Umfang angenommen.

Unter *Polymerisation* versteht man das Zusammenlagern relativ „kleiner“ Moleküle der organischen Chemie zu größeren Komplexen, die dann viele Tausende von Atomen umfassen können. Manche haben fadenförmige Struktur, sind in sich selbst biegsam und lagern sich verhakelt und verknäult ihrerseits zusammen. Dabei bleiben sie oftmals in weiten Grenzen gegeneinander verschiebbar, dürfen ihre Knäuel aufziehen, sich lokal voneinander trennen und umlagern. Die Körper, die sie bilden, sind weder so formstabil wie Kristalle noch so beweglich wie echte Flüssigkeiten. Man nennt sie *viskoelastisch*, denn sie können beispielsweise einer mechanischen Beanspruchung momentan und *elastisch* folgen, danach aber *viskos* weiterkriechen. Manche ändern ihre Form unter konstanter Belastung noch nach Minuten und Stunden. Hört die Belastung plötzlich auf, so kehren sie auf ähnlichem Weg mehr oder weniger genau in ihre Ausgangsform zurück, wie dies Abb. 3.10 recht grobschematisch andeutet.

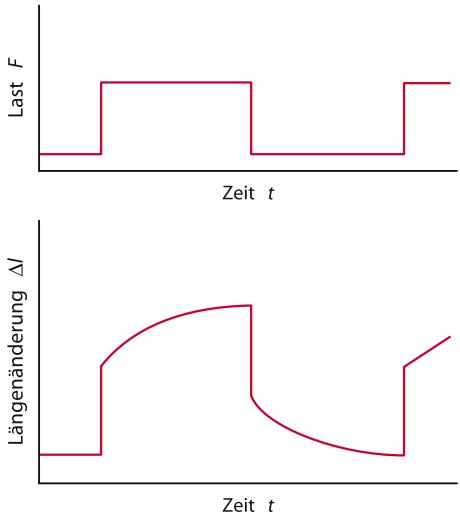


Abb. 3.10. Längenänderung eines viskoelastischen Stabes unter wechselnder Last, idealisiert

3.3 Hydrostatik

Einleitung

Bei Flüssigkeiten und Gasen haben Drücke ähnliche Funktionen wie Kräfte bei den Festkörpern. Ein Druck kann als Stempeldruck von außen aufgeprägt werden, er kann aber auch als Schweredruck eine Folge der Gewichtskraft sein. Er hat dann seinerseits den Auftrieb von Tauchkörpern zur Folge. Drücke lassen sich mit Pumpen erzeugen und mit Manometern messen. Sie haben erheblichen Einfluss auf die Dichte von Gasen, aber nur geringen auf die der Flüssigkeiten.

3.3.1 Stempeldruck

Jede plastische Verformung eines Festkörpers beruht auf Abgleitungen nach Art verleimter Brettchen. Durch die Struktur des Kristalls sind *Gleitebenen* vorgebildet, die Schubspannungen einen vergleichsweise geringen, aber immer noch beträchtlichen Widerstand entgegensetzen. Flüssigkeiten und erst recht Gase haben, zumindest im Idealfall, gar keine Schubfestigkeit, weil sich

ihre Moleküle grundsätzlich frei gegeneinander verschieben können: Flüssigkeiten sind nicht formstabil. Deshalb kann der Arzt ein flüssiges Medikament aus der Ampulle in die Spritze saugen und dann durch die enge Kanüle seinem Patienten injizieren.

Die Injektion erfordert eine Kraft, als Muskelkraft vom Daumen auf den Kolben der Spritze ausgeübt. Der Kolben muss „dicht“ schließen, d.h. die Querschnittsfläche der Spritze voll ausfüllen, und trotzdem einigermaßen reibungsarm gleiten. Dadurch gerät das flüssige Medikament unter den

$$\text{Druck } p = \frac{\text{Kraft } F}{\text{Fläche } A}.$$

Hier steht die Kraft immer senkrecht auf der Fläche, als Vektoren haben demnach \vec{F} und \vec{A} die gleiche Richtung und brauchen darum nicht vektoriell geschrieben zu werden: Der Druck p ist ein Skalar (deshalb stört nur wenig, dass er den gleichen Buchstaben trägt wie der Impuls \vec{p}).

Der Druck ist eine abgeleitete Größe mit der leider recht kleinen SI-Einheit

$$\text{Pascal} = \text{Pa} = \text{N/m}^2$$

Schon der normale Luftdruck am Erdboden liegt in der Nähe von 10^5 Pa , einem Wert, der auch ein Bar genannt wird. Meteorologen messen auf ein Promille genau und darum in Hektopascal ($1 \text{ hPa} = 100 \text{ Pa} = 1 \text{ mbar}$).

$$\text{Druck } p = \frac{\text{Kraft } F}{\text{Fläche } A}$$

$$\text{SI-Einheit: Pascal} = \text{Pa} = \text{N/m}^2$$

wichtig

Der Druck in einer ruhenden Flüssigkeit, der *hydrostatische Druck*, ist allseitig gleich (solange man Gewichtskräfte vernachlässigen kann). In einer Injektionspritze zum Beispiel wird er durch äußere Kraft auf den Kolben, den „Stempel“ erzeugt. Deshalb nennt man ihn auch *Stempeldruck*. Seine Allseitigkeit erlaubt der *hydraulischen Presse*, große Drücke zu erzeugen; → Abb. 3.11

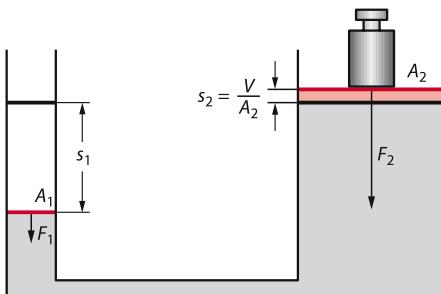


Abb. 3.11. Hydraulische Presse, schematisch (Einzelheiten im Text)

zeigt das Schema. Schiebt man den kleinen Kolben (Fläche A_1) mit der Kraft F_1 um die Strecke s_1 in seinem Zylinder vor, so pumpst man ein Flüssigkeitsvolumen $V = A_1 \cdot s_1$ mit dem Druck $p = F_1/A_1$ in den großen Zylinder hinüber. Dessen Stempel rückt um die Strecke $s_2 = V/A_2$ vor. Auf ihn wirkt die Kraft

$$F_2 = p \cdot A_2 = F_1 \cdot A_2 / A_1.$$

Sie ist um das Verhältnis der beiden Kolbenflächen größer als F_1 . Energie lässt sich so selbstverständlich nicht gewinnen, denn was der große Kolben an Kraft gewinnt, verliert er an Schubweg:

$$W_2 = F_2 \cdot s_2 = p \cdot A_2 \cdot V/A_2 = p \cdot V = p \cdot A_1 \cdot V/A_1 = F_1 \cdot s_1 = W_1.$$

Der Beziehung „Arbeit = Kraft mal Weg“ entspricht bei Fluiden die Beziehung „Arbeit = Druck mal Volumen“; sie wird **Volumenarbeit** genannt. Das Herz des Menschen leistet Volumenarbeit.

Volumenarbeit $\Delta W = \int_{V_0}^{V_1} p(v) dV$

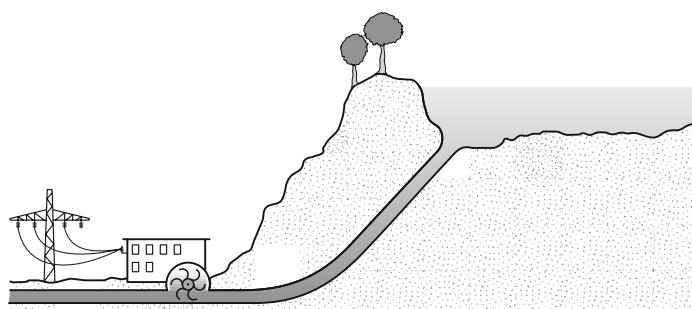
Volumenarbeit wird auch von den Turbinen eines Pumpspeicherwerkes geleistet (☞ Abb. 3.12), wenn sie in der Nacht, wo die Kapazität des Kraftwerkes nicht ausgelastet ist, überschüssigen „Strom“, überschüssige elektrische Energie also, dazu benutzen, Wasser in ein hochgelegenes Becken zu pumpen. Die dabei als Volumenarbeit geleistete Hubarbeit kann in der Verbrauchsspitze am nächsten Nachmittag wieder in elektrische Energie zurückverwandelt werden (allerdings nicht ohne einige Reibungsverluste).

3.3.2

Schweredruck

Pumpspeicherwerke nutzen den Druck aus, den Wasser durch seine Gewichtskraft erzeugt; er heißt **Schweredruck** und nimmt mit der Wassertiefe zu. Insofern bedarf der Satz von der Allseitigkeit und Gleichheit des hydrostatischen Druckes einer Präzisierung: der Satz gilt nur für den **Stempeldruck** im Zustand der Schwerelosigkeit. Sobald Gravitations- oder Trägheitskräfte eine Rolle spielen, überlagert sich der Schweredruck. Dessen Abhängigkeit von der Wassertiefe lässt sich für den Sonderfall eines senkrecht stehenden zylindrischen Gefäßes relativ

Abb. 3.12. Pumpspeicherwerk, schematisch. Nachts wird überschüssige elektrische Energie als Hubarbeit gespeichert; sie kann in der Leistungsspitze am Tag durch Volumenarbeit des Wassers wieder in elektrische Energie zurückverwandelt werden, freilich nur mit begrenztem Nutzeffekt



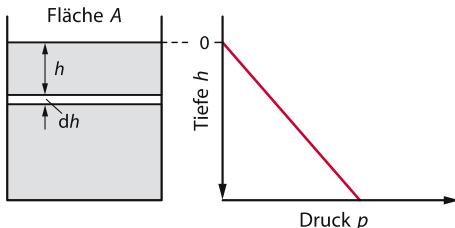


Abb. 3.13. Zur Herleitung der Formel für den Schweredruck; bei einer inkompressiblen Flüssigkeit ($\rho = \text{const.}$) steigt er proportional zur Wassertiefe h an

leicht ausrechnen (Abb. 3.13). Jede Wasserschicht der (differentiell kleinen) Dicke dh drückt auf die unter ihr liegenden Schichten mit der (differentiell kleinen) Gewichtskraft dF_G . Hat der Zylinder die Querschnittsfläche A , so gehört zu der Schicht das

- ▶ Volumen $dV = A \cdot dh$,
- ▶ die Masse $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot A \cdot dh$ ($\rho = \text{Dichte der Flüssigkeit}$) und die
- ▶ Gewichtskraft $dF_G = g \cdot dm = g \cdot \rho \cdot A \cdot dh$ ($g = \text{Fallbeschleunigung}$). Die Kraft erzeugt den (differentiell kleinen)
- ▶ Druck $dp = dF_G/A = g \cdot \rho \cdot dh$.

Mit steigender Wassertiefe summieren sich alle Beiträge zum Druck der einzelnen Schichten. Grundsätzlich muss man nun damit rechnen, dass die Dichte ρ selbst vom Druck abhängt und darum mit der Wassertiefe h zunimmt: $\rho = \rho(h)$. Der Zusammenhang zwischen Druck p und h kann deshalb allgemein nur als Integral geschrieben werden:

$$p(h) = g \cdot \int \rho(h) dh$$

Wasser ist freilich praktisch inkompressibel; es ändert seine Dichte mit dem Druck fast gar nicht. Dann verkümmert das Integral zum Produkt

$$p(h) = \rho \cdot g \cdot h,$$

der Schweredruck nimmt linear mit der Wassertiefe zu (Abb. 3.13, rechtes Teilbild). In einer geschlossenen Dose überlagert sich ihm ein etwa noch vorhandener Stempeldruck p_s . Der Gesamtdruck p_g ist dann

$$p_g(h) = \rho \cdot g \cdot h + p_s$$

(Abb. 3.14). In offenen Gewässern erzeugt schon die Lufthülle der Erde einen solchen Stempeldruck.

Wer taucht, registriert den Schweredruck des Wassers als Überdruck gegenüber dem Atmosphärendruck von rund 10^5 Pa , den er an Land gewohnt ist. Die Atemmuskulatur muss mit dem Überdruck fertig werden, solange der Sportler mit „Schnorchel“ taucht, die Atemluft also unter Normaldruck dicht über der Wasseroberfläche ansaugt. Das geht nur in geringer Tiefe. Wer weiter hinunter will, muss eine Pressluftflasche mitnehmen und vorsichtig wieder auftauchen, denn sonst bekommt er Schwierigkeiten mit dem Henry-Dalton-Gesetz (s. Kap. 5.3.9). Immerhin steigt der hydrostatische Druck im Wasser alle zehn Meter um rund 10^5 Pa .

wichtig

Schweredruck:
von der Gewichtskraft einer Flüssigkeit
(Dichte ρ) erzeugter Druck; er steigt mit der Tauchtiefe h : $p(h) = \rho \cdot g \cdot h$.

Auch die Blutgefäße des Menschen bilden eine „geschlossene Dose“ im Sinn der Überlagerung von Schwer- und Stempeldruck. Steht der Mensch aufrecht, so ist der Blutdruck in den Füßen notwendigerweise höher als im Kopf; liegt er horizontal, so sind beide Drücke ungefähr gleich. Das Gehirn braucht für seine Funktion aber unbedingt

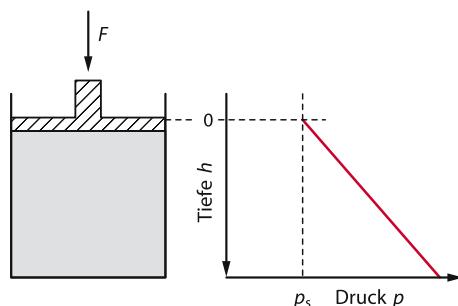


Abb. 3.14. Dem Schweredruck überlagert sich ein etwa vorhandener Stempeldruck p_s additiv

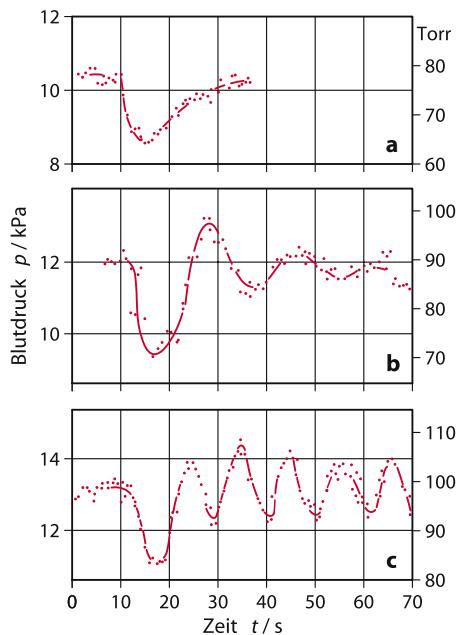


Abb. 3.15 a-c. Regelstörungen beim Blutdruck. Die Versuchsperson wird auf einer horizontalen Liege festgeschnallt und ohne eigene Muskelarbeit in die Vertikale gekippt. Dadurch nimmt der Blutdruck im Oberkörper zunächst ab („das Blut sackt in die Füße“). Beim Gesunden wird der Druck im Gehirn in weniger als einer halben Minute wieder auf den Normalwert eingeregelt (a). Ein krankhaft gestörter Regelkreis kann aber durch diese Belastung in eine gedämpfte (b) und sogar in eine nahezu ungedämpfte (c) Regelschwingung geraten

eine gleichmäßige Durchblutung; folglich muss ein Regelsystem dafür sorgen, dass Druckschwankungen im Kopf, wie sie Lageänderungen zunächst hervorrufen, in wenigen Sekunden aufgefangen werden. Krankhafte Störungen können die Einstellung des Solldrucks merklich verzögern oder gar *Regelschwingungen* auslösen (☞ Abb. 3.15).

Ideale Flüssigkeiten besitzen keine Scherfestigkeit. Infolgedessen müssen ihre freien Oberflächen immer horizontal stehen. Täten sie es nicht, bekäme die Gewichtskraft eine Komponente parallel zur Oberfläche, der die Flüssigkeit nachgeben müsste. Dies gilt auch, wenn in *kommunizierenden Röhren* die Oberfläche durch Gefäßwände unterbrochen ist: Eine ruhende Wasseroberfläche liegt immer senkrecht zu den angreifenden

Schwerkraft. Insofern bilden die Meere keine ebenen Oberflächen aus, sondern Ausschnitte aus einer Kugeloberfläche. Seeleute wissen das: Von einem entgegenkommenden Schiff tauchen zuerst die Mastspitzen über der Kimm auf, und der Mann im Mastkorb entdeckt sie früher.

Rechenbeispiel 3.2: Wasserturm

In flachen Gegenden sieht man zuweilen einen Wasserturm in der Landschaft stehen. Er enthält im oberen Teil einen großen Wassertank. Zweck der Konstruktion ist es, am Fuße des Turms in den umgebenden Häusern einen Überdruck des Wassers am Wasserhahn zu erzeugen. Wie hoch muss der Turm in etwa sein, damit der Überdruck das dreifache des Luftdrucks beträgt?

Lösung: Es gilt die Faustformel: alle 10 m Wassertiefe steigt der Druck um ein Bar bzw. 1000 hPa. Genaues Nachrechnen liefert:

$$\Delta p = \rho_w \cdot g \cdot 10 \text{ m} = 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ m} = 9,81 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 98,1 \text{ hPa.}$$

Der Wasserturm muss also etwa 30 m hoch sein. Man kann den Druck am Wasserhahn aber auch mit einer Pumpe aufrechterhalten.

3.3.3 Auftrieb

Jeder Körper wird, wenn man ihn unter Wasser taucht, von allen Seiten zusammengedrückt. Weil aber der Schweredruck mit der Wassertiefe zunimmt, übt er von unten eine größere Kraft auf den Körper aus als von oben: die Differenz liefert den *Auftrieb*, eine der Gewichtskraft entgegen, also aufwärts gerichtete Kraft F_A . Ihr Betrag entspricht der Gewichtskraft $g \cdot m_f$ der vom Tauchkörper verdrängten Flüssigkeit (*archimedisches Prinzip*), ist also seinem Volumen V_k und ihrer Dichte ρ_f proportional. Dies soll hier ohne Begründung einfach nur festgestellt werden. Für geometrisch einfache Sonderfälle lässt es sich leicht

nachrechnen; es allgemein herzuleiten, bedarf allerdings einer Integration.

wichtig

$$\text{Auftrieb } F_A = g \cdot m_f = V_k \cdot \rho_f \cdot g$$

Ein Körper, der mehr wiegt als die von ihm verdrängte Flüssigkeit, sinkt unter: Der Auftrieb kann das Gewicht nicht tragen, wenn die (mittlere) Dichte des Körpers größer ist als die der Flüssigkeit. Ist sie dagegen kleiner, so schwimmt der Körper; er taucht gerade so tief ein, dass die verdrängte Flüssigkeit ebenso viel wiegt wie er selber: Ein leeres Schiff liegt höher im Wasser als ein beladenes. Außerdem hat es auf hoher See einen etwas geringeren Tiefgang als im Hafen, denn der Salzgehalt gibt dem Meerwasser eine höhere Dichte. Die Tauchtiefe eines Aräometers (☞ Abb. 3.16) misst die Dichte der Flüssigkeit, in der es schwimmt. Man muss das Gerät nicht in g/cm^3 eichen; teilt man es in „Grad Öchsle“, so misst es als „Gleukometer“ das Mostgewicht zukünftiger Weine; es heißt „Laktometer“, wenn man mit ihm den Fettgehalt der Milch bestimmt, und „Urome-

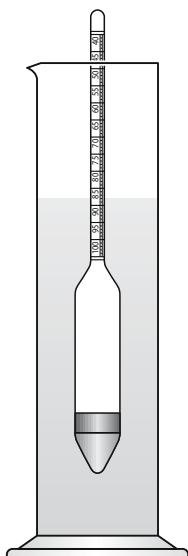


Abb. 3.16. Ein Aräometer taucht umso tiefer ein, je geringer die Dichte der Flüssigkeit ist

ter“ bei den entsprechenden Fachärzten. Jede Branche entwickelt ihre Fachsprache.

Wer schwimmen will „wie ein Fisch im Wasser“, muss seine mittlere Dichte der Umgebung genau anpassen, sonst treibt er auf oder geht unter. Fische besitzen dafür eine Schwimmblase, die sie mehr oder weniger weit mit Gas aufblähen können. Damit ändern sie Volumen und Auftrieb, nicht aber Masse und Gewicht.

Der Mensch besteht im Wesentlichen aus Wasser; seine mittlere Dichte liegt nur wenig über 1 g/cm^3 . Das erlaubt ihm, mit geringen Schwimmbewegungen den Kopf über Wasser zu halten. Der Auftrieb trägt den Körper und entlastet das Rückgrat.

Blut ist eine so genannte *Suspension*. In der Grundflüssigkeit Wasser befinden sich viele nicht gelöste Bestandteile wie zum Beispiel die Blutkörperchen. Blut bleibt deshalb gut durchmischt, weil sich die Dichten dieser Bestandteile und des Wassers nicht allzu sehr unterscheiden. Auftriebskraft und Schwerkraft halten sich in etwa die Waage. Aber nicht ganz. Blutkörperchen haben eine etwas höhere Dichte und sinken deshalb ganz langsam nach unten (Blutsenkung). Will man die Bestandteile des Blutes schnell trennen und nicht lange warten, so bedient man sich einer *Zentrifuge*. Die Sinkgeschwindigkeit v_s proportional zur Dichtedifferenz $\Delta\rho$ und der Fallbeschleunigung:

$$v_s \sim \Delta\rho \cdot g$$

In der Zentrifuge wird nun die Fallbeschleunigung durch die Radialbeschleunigung der Drehbewegung bzw. die Schwerkraft durch die Zentrifugalkraft ersetzt (s. Kap. 2.3.5). Diese kann mehr als 1000-mal höher sein. Dann geht es 1000-mal schneller.

Frage: Die Krone des Hiëron

Der Sage nach hat Archimedes mit Hilfe seines Prinzips den Goldschmied des Betruges überführt, bei dem König Hiëron von Syrakus eine Krone in Auftrag gegeben hatte. Hiëron ließ dafür einen abgewogenen Klumpen reinen Goldes aus seiner Schatzkammer holen und überzeugte sich später

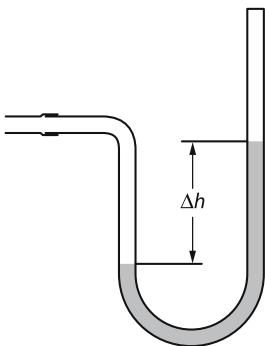


Abb. 3.17. Flüssigkeitsmanometer; auf dem linken Schenkel lastet ein Überdruck

durch Nachwiegen, dass die fertige Krone das richtige Gewicht besaß. Trotzdem hatte der Schmied einen guten Teil des Goldes für sich behalten und durch zulegiertes Silber ersetzt; der Krone sah man das nicht an. Archimedes wusste, dass Silber „leichter“ ist als Gold, d.h. eine geringere Dichte besitzt. Er wies den Betrug nach mit einer Waage, einem hinreichend großen, wassergefüllten Bottich und einem zweiten Klumpen Gold, der so schwer war wie die Krone. Wie machte er das?

Antwort: Klumpen und Krone haben gleiche Masse und bringen eine Waage ins Gleichgewicht. Die Krone hat wegen des Silbers eine kleinere Dichte und ein größeres Volumen; folglich ist ihr Auftrieb im Wasser größer. Taucht man Klumpen und Krone, während sie an der Waage hängen, ins Was-

ser, so kommt die Waage aus dem Gleichgewicht: die Krone erscheint leichter.

3.3.4

Manometer

Der Schweredruck erlaubt die Konstruktion technisch besonders einfacher Druckmesser, der **Flüssigkeitsmanometer**. Steht Wasser in einem zum U gebogenen Glasrohr, so wie Abb. 3.17 zeigt, muss der Gasdruck über dem linken Meniskus höher sein als über dem rechten, und zwar um einen Betrag Δp , der genauso groß ist wieder Schweredruck einer Wassersäule der Höhe Δh :

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h.$$

Ein Flüssigkeitsmanometer lässt sich mit dem Lineal oder auch mit hinterlegtem Millimeterpapier ablesen; in die Eichung gehen dann noch die Dichte ρ der Manometerflüssigkeit und die Fallbeschleunigung g ein.

Schließt man den einen Schenkel des Flüssigkeitsmanometers und hält man ihn luftleer, so misst man den vollen Gasdruck auf der anderen Seite. Wäre dies normaler Luftdruck, so steige Wasser rund 10 m hoch; höher kann auch die beste Saugpumpe auf dieser Erde Wasser nicht heben. Mit seiner großen Dichte verkürzt Quecksilber die Steighöhe auf 760 mm (Abb. 3.18). Erfunden wurde das **Quecksilber-Barometer** 1643 von Evangelista Torricelli. Von ihm hat die Druckeinheit „Torr“ ihren Namen, die praktisch mit der Einheit „mmHg“ übereinstimmt. Beide sind keine „guten“ Einheiten, weil die Fallbeschleunigung vom Ort abhängt und die Dichte des Quecksilbers von der Temperatur.

Flüssigkeitsmanometer lassen sich zwar leicht herstellen, sind aber unhandlich; sie müssen senkrecht stehen und können auslaufen. Darum verwendet man lieber dünnwandige Hohlkörper, die sich verbiegen, wenn eine Druckdifferenz zwischen innen und außen besteht. Die Verbiegung wird dann mechanisch oder auch elektrisch über-

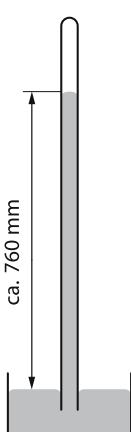


Abb. 3.18. Quecksilber-Barometer

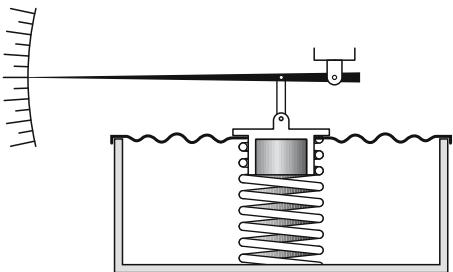


Abb. 3.19. Dosenbarometer: Der äußere Luftdruck biegt den gewellten Deckel durch und staucht die Schraubenfeder; nach ähnlichen Prinzipien lassen sich auch Manometer für hohe Drücke herstellen

tragen und gleich als Druck(differenz) angezeigt. Abbildung 3.19 zeigt ein Beispiel.

3.3.5 Pumpen

Mit einer Kammer, die periodisch ihr Volumen ändert, kann man pumpen; zwei Ventile braucht man auch noch dazu. Technisch einfach ist die **Kolbenpumpe** (Abb. 3.20), die abgesehen von notwendigen Dichtungen ganz aus Metall gefertigt werden kann. Die Ventile haben den zunächst nur pendelnden Strom der Flüssigkeit oder des Gases in eine Vorzugsrichtung zu steuern. Dazu muss ihre Bewegung mit der des Kolbens koordiniert werden, zwangsläufig durch eine entsprechende Mechanik oder eleganter dadurch, dass die entsprechend konstruierten Ventile vom Strom des Fördergutes im richtigen Takt mitgenommen werden.

Jeder Kolben braucht eine Dichtung gegenüber seinem Zylinder, ein technisch keineswegs einfache zu lösendes Problem. Darum ersetzt man zuweilen den Kolben

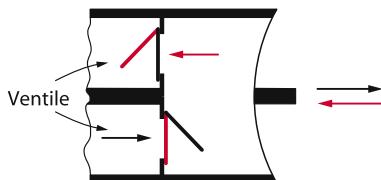


Abb. 3.21. Membranpumpe, schematisch

durch eine biegsame Membran, die hin und her gebogen wird (**Membranpumpe**, Abb. 3.21). Nach ähnlichem Prinzip arbeiten Herzen, nur verwendet die Natur weitaus raffinierteres Baumaterial: Muskeln, die sich auf Kommando zusammenziehen.

3.3.6 Kompressibilität

Die Moleküle der Festkörper und Flüssigkeiten kommen sich bis zur Berührung nahe; freien Platz zwischen ihnen gibt es kaum. Die **Kompressibilität** ist gering, denn die Massendichte lässt sich durch äußerer Druck nur geringfügig erhöhen; sie liegt in der Größenordnung von einigen Tonnen/Kubikmeter.

Ganz anders bei einem Gas. Seine Dichte liegt leicht um drei Zehnerpotenzen niedriger (normale Zimmerluft: ca. 1,2 kg/m³). Die Moleküle halten großen Abstand voneinander und treffen sich in ihrer thermischen Bewegung nur selten einmal. Zwischen ihnen ist viel Platz. Daraus folgt eine hohe Kompressibilität.

Gasmoleküle bewegen sich thermisch, ohne eine Richtung zu bevorzugen. Auf Gefäßwandungen, die ihren Bewegungsdrang einschränken, üben die einen Druck dadurch aus, dass sie bei jedem Stoß auf die Wand Impuls übertragen. Das geschieht umso öfter, je mehr sie sind, je größer ihre Anzahl N , genauer: ihre

$$\text{Anzahldichte } n = \frac{\text{Anzahl } N}{\text{Gasvolumen } V}$$

ist. Jeder Einzelimpuls ist aber auch der Masse m des einzelnen Moleküls proportional.

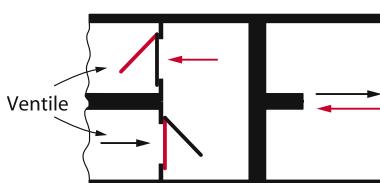


Abb. 3.20. Kolbenpumpe, schematisch

Zusammengenommen bedeutet das eine Proportionalität des Druckes p zur Massendichte ρ des Gases und eine umgekehrte Proportionalität zu dessen spezifischen Volumen $V_s = 1/\rho$. Das lässt sich auch so schreiben:

$$p \cdot V_s = \text{const.}$$

Dieses sog. **Gesetz von Boyle-Mariotte** gilt allerdings nur bei konstanter Temperatur; anders gesagt: die Konstante ist temperaturabhängig. Außerdem gilt das Gesetz nur für sog. *ideale Gase* (s. Kap. 5.1.3), zu denen Zimmerluft aber gehört.

Die inkompressible Flüssigkeit und das hochkompressible ideale Gas markieren zwei mathematisch einfache Grenzfälle, zwischen denen sich die realen Substanzen herumtreiben. Bei ihnen muss man empirisch bestimmen, um welchen Betrag ΔV das Ausgangsvolumen V abnimmt, wenn man den äußeren Druck um Δp erhöht. Eine Proportionalität zu V darf man erwarten, eine zu Δp nicht unbedingt. Es ist deshalb vernünftig, die

$$\text{Kompressibilität } k = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}$$

differentiell zu definieren (negatives Vorzeichen, weil V mit p abnimmt). Der Kehrwert wird **Kompressionsmodul** Q genannt. Für den Grenzfall des inkompressiblen Fluides gilt $k = 0$.

wichtig

$$\text{Kompressionsmodul } Q = -V \cdot \frac{dp}{dV}$$

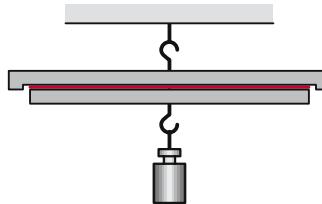


Abb. 3.22. Zerreißfestigkeit eines Ölfilms zwischen zwei Metallplatten (die obere trägt einen Randwulst, um ein Abgleiten der unteren zur Seite zu verhindern)

3.4.1 Kohäsion

Wenn ein Kristall schmilzt, nimmt normalerweise die Dichte ab, aber nicht sehr. Auch in der Schmelze liegen die Moleküle noch „dicht an dicht“; die zwischenmolekularen Kräfte existieren nach wie vor, nur ist die Wärmebewegung so heftig geworden, dass sich die Bindungen auf feste Gitterplätze nicht länger aufrechterhalten lassen. Die Moleküle sind jetzt frei verschiebbar; die Flüssigkeit hat keine Schubfestigkeit, für eine Zerreißfestigkeit reichen die Kräfte der **Kohäsion** aber noch. Ein Ölfilm zwischen zwei Aluminiumplatten von etwa 20 cm Durchmesser vermag ein Kilogramm zu tragen (☞ Abb. 3.22); herzlich wenig, wenn man an den Kupferdraht der Frage 3.2 denkt.

Am deutlichsten verspüren die oberflächennahen Teilchen die zwischenmolekularen Kräfte der Kohäsion, denn diese versuchen nicht nur, Moleküle zurückzuhalten, die in den Gasraum ausbrechen möchten, sie behindern schon deren Eindringen in die letzte Moleküllage (☞ Abb. 3.23). Moleküle meiden darum die Oberfläche und halten sie so klein wie möglich: Die natürliche Form des Tropfens, der keinen äußeren Kräften unterliegt, ist die Kugel. Gießt man Quecksilber aus einem feinen Röhrchen in ein Uhrglas, so bildet es zunächst viele winzige Tröpfchen; sie schließen sich aber rasch zu größeren zusammen, bis nur ein einziger übrig bleibt, denn dadurch verringern sie ihre gemeinsame Oberfläche. ☞ Abbildung 3.24 zeigt diesen Vorgang in

3.4 Grenzflächen

Einleitung

Moleküle halten zusammen; zwischen ihnen herrschen „zwischenmolekulare Kräfte“ kurzer Reichweite, mit denen sie sich gegenseitig anziehen. Diese Kräfte bekommen besondere Bedeutung an den Grenz- und Oberflächen der Flüssigkeiten.

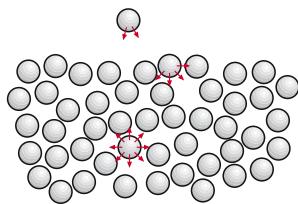


Abb. 3.23. Kohäsion. Die zwischenmolekularen Kräfte wirken im Innern der Flüssigkeit allseitig, behindern aber bereits das Eintreten eines Moleküls in die letzte Lage unter der Oberfläche und vor allem den Übertritt in den Gasraum

einigen Momentaufnahmen. Die Kräfte der Kohäsion wirken auf die Moleküle wie eine sie einschließende, gespannte Haut. Für kleine Insekten kann sie lebensgefährlich werden; nicht alle sind stark genug, sich aus einem Wassertropfen zu befreien, der sie benetzt hat. Umgekehrt können Wassерläufer sich auf der Oberfläche halten, indem sie die „Haut“ ein wenig eindellen.

Wer eine Seifenblase herstellen will, muss pusten. In der Blase herrscht ein Überdruck, wenn auch kein großer. Gegen ihn muss Volumenarbeit geleistet werden, wenn der Durchmesser der Blase vergrößert werden soll. Dabei vergrößert sich naturgemäß auch die Fläche der Seifenhaut. Einige Moleküle, die sich anfangs noch im Innern aufhalten durften, müssen in die Oberfläche gebracht werden. Das bedeutet Arbeit gegen die Kräfte der Kohäsion; für jedes neue Flächenelement ΔA eine bestimmte Energie ΔW . Ein Molekül, das sich in die Oberfläche drängelt, kann nicht wissen, wie groß die Oberfläche schon ist; es wäre unwahrscheinlich, wenn der Quotient $\Delta W/\Delta A$ von A abhinge. Vernünftigerweise schreibt man deshalb weder Differenzen- noch Differentialquotient, sondern definiert eine „flächenbezogene Oberflächenenergie“ W_A/A ; sie wird

$$\text{Oberflächenspannung} = \frac{\text{Oberflächenenergie } W_A}{\text{Oberfläche } A}$$

genannt und bekommt die SI-Einheit $J/m^2 = N/m = kg/s^2$.

Oberflächenspannung

$$\sigma = \frac{\text{Oberflächenenergie } W_A}{\text{Oberfläche } A}$$

Um die Oberflächenspannung zu messen, kann man einen leichten Ring an einer Federwaage aufhängen (☞ Abb. 3.25) und in die zu untersuchende Flüssigkeit eintauchen. zieht man ihn nun mitsamt der Waage vorsichtig nach oben, so zieht er einen Flüssigkeitsfilm hinter sich her. Dieser hat die Form eines Zylindermantels und hält dank seiner Oberflächenspannung den Ring

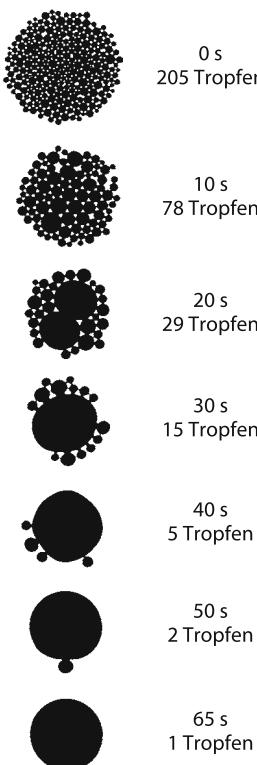


Abb. 3.24. Oberflächenspannung. Hg-Tropfen verringern ihre gemeinsame Oberfläche, indem sie sich zu einem einzigen Tropfen zusammenschließen. Momentaufnahmen in 10 Sekunden Abstand; der Vorgang wird durch ein Gemisch von Wasser und Glycerin verlangsamt. Große Tropfen können unregelmäßig erscheinen, wenn sie im Moment der Belichtung noch schwingen, weil sie kurz zuvor einen kleinen Tropfen aufgenommen haben (nach R. W. Pohl)

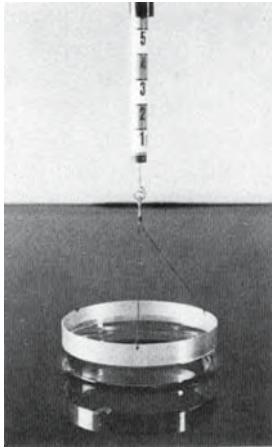


Abb. 3.25. Messung der Oberflächenspannung mit Hilfe eines eingetauchtes Ringes und einer Federwaage; Einzelheiten im Text

fest, mit einer Kraft F , die zusätzlich zur Gewichtskraft von der Waage angezeigt wird. Man liest ihren Grenzwert F_σ in dem Moment ab, in dem die Kraft der Waagenfeder den Ring aus der Flüssigkeit herausreißt.

Der Ring hat z.B. den Durchmesser d , also den Umfang $d \cdot \pi$. zieht er die zylindermanntelförmige Flüssigkeitshaut um das Stückchen Δx weiter nach oben heraus, so vergrößert er deren Oberfläche um

$$\Delta A = 2\pi \cdot d \cdot \Delta x.$$

Der Faktor 2 röhrt daher, dass die Haut eine Haut ist: sie hat nicht nur eine Oberfläche „nach außen“, sondern auch eine zweite (praktisch ebenso große) „nach innen“, d.h. mit Blickrichtung zur Zylinderachse. Die zur Schaffung der neuen Oberfläche ΔA nötige Energie ΔW beträgt

$$\Delta W = \sigma \cdot \Delta A = 2\pi \cdot \sigma \cdot d \cdot \Delta x.$$

Für die Waage bedeutet dies eine Zusatzkraft

$$F_\sigma = 2\pi \cdot \sigma \cdot d = \Delta W / \Delta x.$$

Die Messung von F_σ erlaubt also, die Oberflächenspannung σ zu bestimmen. Die Rechnung zeigt zugleich, dass sich eine gespannte

Flüssigkeitslamelle nicht so verhält wie eine Gummihaut oder eine Feder: F_σ ist unabhängig von x , die Kraft wächst nicht mit der Dehnung.

Bei Patienten, die „ihre Tropfen nehmen“ dient die Oberflächenspannung zur Dosierung von Medikamenten. Dabei verlässt man sich darauf, dass alle vom Schnabel der Flasche fallenden Tropfen zumindest so ungefähr die gleiche Größe haben. Wodurch wird sie bestimmt? An einem Röhrchen mit dem Außendurchmesser d kann sich ein Tropfen festhalten, weil er beim Abfallen erst einmal zusätzliche Oberfläche schaffen muss, und zwar für einen Zylinder mit dem Umfang $d \cdot \pi$ (☞ Abb. 3.26). Dazu gehört die Kraft

$$F_\sigma = \pi \cdot d \cdot \sigma$$

(hier tritt der Faktor 2 der Seifenblase nicht auf, denn im Gegensatz zu ihr ist der Tropfen „massiv“; das beim Abfallen erzeugte Stückchen Zylinder hat nur eine Oberfläche, die nach außen). Der Tropfen reißt ab, sobald sein Volumen V_T so groß geworden ist, dass seine Gewichtskraft

$$F_G = \rho \cdot g \cdot V_T$$

(ρ = Dichte der Flüssigkeit) die haltende Kraft F_σ erreicht hat. Ein vorgegebenes Volumen V_0 der Flüssigkeit bildet also $n = V_0/V_T$ Tropfen:

$$n = \frac{g}{\pi \cdot d} \frac{\rho}{\sigma}$$

Kennt man ρ und d , so kann man auf diese Weise auch die Oberflächenspannung bestimmen (*Stalagmometer*). Bei alledem wird

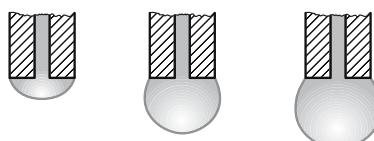


Abb. 3.26. Die Oberflächenspannung hält einen Tropfen am Röhrchen fest, weil dieser beim Abfallen zunächst zusätzlich Oberfläche für einen Zylinder vom Röhrchendurchmesser schaffen müsste

die Tropfengröße entscheidend vom Rohrdurchmesser d bestimmt: Eine Tropfflasche mit beschädigter Tülle dosiert falsch.

In einem Tropfen vom Radius r erzeugt die Oberflächenspannung einen Binnendruck

$$p = 2 \cdot \sigma / r,$$

was hier nicht abgeleitet werden soll. In einer Seifenblase ist er doppelt so hoch. Allgemein gilt: Je kleiner Tropfen oder Blase, desto größer der Binnendruck, gerade umgekehrt wie bei einem Kinderluftballon.

Rechenbeispiel 3.3:

Wie groß ist der Binnendruck in einem kugelförmigen Wassertropfen mit einem Zentimeter Radius? Die Oberflächenspannung sauberen Wassers ist ca. 72 mN/m. Ist der Binnendruck in einer gleichgroßen Seifenblase kleiner oder größer?

Lösung: Die Oberflächenspannung trägt einen Anteil:

$$\rho_{\sigma} = \frac{144 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}}{0,01 \text{ m}} = 14,4 \text{ Pa}$$

bei. Dazu kommt aber natürlich noch der äußere Luftdruck von ca. 1000 hPa. Bei der Seifenblase trägt die Oberflächenspannung zwar doppelt bei, da sie eine innere und eine äußere Oberfläche hat. Durch die Seife im Wasser ist aber die Oberflächenspannung auf etwa 30 mN/m herabgesetzt, so dass in der Summe der Binnenüberdruck in der Seifenblase niedriger ist. Deshalb geht das Seifenblasen Blasen mit reinem Wasser sehr schlecht: der Binnenüberdruck ist viel höher und die Blase platzt zu leicht.

3.4.2 Adhäsion

Jedes Gerät zur Bestimmung der Oberflächenspannung enthält einen Bauteil aus einem festen Körper, an dem die Flüssigkeit haftet: sie muss ihn „benetzen“. Eine Flüssigkeit *benetzt*, wenn die Kräfte, die ihre

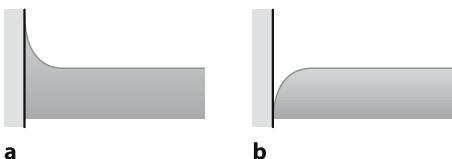


Abb. 3.27 a,b. Benetzende (a) und nichtbenetzende (b) Flüssigkeit an einer Gefäßwand

Moleküle aufeinander ausüben, geringer sind als die Kräfte gegenüber den Molekülen in der festen Oberfläche: die *Adhäsion* muss die *Kohäsion* übertreffen.

Das tut sie oft, aber keineswegs immer. Man braucht eine Glasplatte nur hauchdünn einzufetten und schon perlt das Wasser, das vorher noch benetzte, in dicken Tropfen ab: die zunächst *hydrophile* Oberfläche ist *hydrophob* geworden. Gewissenhafte Autofahrer machen den Lack ihrer Lieblinge unempfindlich gegen Wind und Wetter, indem sie ihn regelmäßig mit Hartwachs einreiben. Schwimmvögel wie die Enten besitzen Talgdrüsen eigens zu dem Zweck, das Gefieder hydrophob zu erhalten; dann bleibt der Bauch trocken und warm, und die eingeschlossene Luft trägt auch noch beim Schwimmen. Beim Tauchen ist das freilich hinderlich. Fischfangende Landvögel fetten darum ihr Gefieder meist nicht ein und müssen es dann von Zeit zu Zeit in der Sonne trocknen. Wasserläufer stehen auf der Oberflächenspannung wie auf einer Membran, denn ihre Füßchen sind hydrophob. Umgekehrt müssen Öle darauf gezüchtet werden, dass sie Kolben, Zylinder, Zahnräder und Achslager gut benetzen. Ähnliches gilt für Klebstoffe.

Ob eine Flüssigkeit benetzt oder nicht, sieht man an der Form ihrer Oberfläche: zieht sie sich an einer Gefäßwand hoch, so überwiegt die Adhäsion; wird die Oberflä-

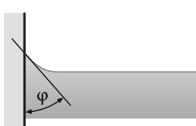


Abb. 3.28. Bei unvollkommener Benetzung bildet die Flüssigkeit einen Winkel φ mit der Gefäßwand

che heruntergedrückt wie beim Quecksilber, so ist die Kohäsion stärker (☞ Abb. 3.27). Sind Benetzung oder Nichtbenetzung vollkommen, so kommt die Oberfläche asymptotisch an die Gefäßwand heran, wenn nicht, so stoßen beide in einem bestimmten Winkel aufeinander (☞ Abb. 3.28).

Stehen sich zwei Gefäßwände auf hinreichend kurzem Abstand gegenüber, so kann sich eine benetzende Flüssigkeit an beiden zugleich hinaufhangeln und so der Regel von den kommunizierenden Röhren (s. Kap. 3.3.2) widersprechen. Besonders wirksam funktioniert dies in feinen Röhren: Bäume transporieren mit Hilfe der **Kapillarwirkung** Wasser von den Wurzeln zu den Blättern. Wie groß kann die Steighöhe h werden? Für eine kreisrunde Kapillare mit dem Innendurchmesser $2r$ lässt sich h leicht angeben. Angenommen, das Wasser benetze vollkommen, dann bildet seine Oberfläche in der Kapillare im Wesentlichen eine Halbkugel mit dem Radius r (☞ Abb. 3.29). Die Folge ist ein Druck mit Kräften in Richtung Kugelmittelpunkt, erzeugt von der Oberflächenspannung σ :

$$p_\sigma = 2 \cdot \sigma / r.$$

An ihm kann sich der Flüssigkeitsfaden so lange aufhängen, wie sein Schweredruck

$$p_s = \rho \cdot g \cdot h$$

unter p_σ bleibt. Die Steighöhe vermag also einen Grenzwert nicht zu überschreiten:

$$h < \frac{2 \cdot \sigma}{r \cdot \rho \cdot g}$$

Der Durchmesser einer Kapillare braucht nicht konstant zu sein. Was zählt, ist allein das r an der Oberfläche der Flüssigkeit, an der Grenze zur Luft. Darunter verlässt sich ein Baum auf die Zerreißfestigkeit des Wassers, das er freilich sorgfältig entgast: ein noch so kleines Luftbläschen könnte durch seine Kerbwirkung gefährlich werden.

Benetzt die Flüssigkeit nicht, so kommt es zu einer Kapillardepression (☞ Abb. 3.29, rechtes Teilbild). Auf sie muss man achten, wenn man ein Quecksilbermanometer abliest.

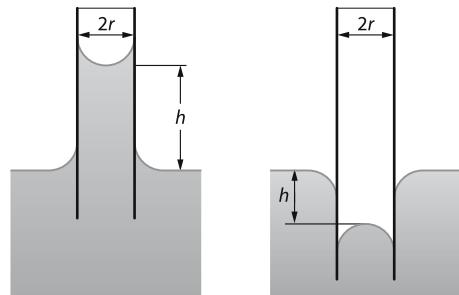


Abb. 3.29. Kapillaranhebung und -depression (Einzelheiten im Text)

Bestimmt wird die Oberflächenspannung von den vergleichsweise wenigen Molekülen, die sich wirklich in der Oberfläche herumtreiben. Manche Molekülsorten haben sich darauf spezialisiert. Wenige Tropfen eines modernen Spülmittels genügen, um Wasser so zu „entspannen“, dass es ein Weinglas gleichmäßig benetzt, also keine Tropfen bildet und damit beim Verdunsten auch keine Tropfränder. Eine Ente, in entspanntes Wasser gesetzt, wundert sich sehr, weil sie nicht schwimmen kann: das Wasser drängt sich zwischen ihre sorgsam gefetteten Bauchfedern und vertreibt dort das Luftpulster, dessen Auftrieb die Natur bei der Konstruktion der Ente einkalkuliert hat. Spülmittel im Abwasser sind nicht unbedingt umweltfreundlich, Spülmittel, vom Teller in die Nahrung gelangt, nicht unbedingt gesundheitsfördernd.

wichtig

- ▶ Kohäsion: Wirkung zwischenmolekularer Kräfte in einer Flüssigkeit
- ▶ Adhäsion: Wirkung zwischenmolekularer Kräfte zwischen Flüssigkeit und Festkörper
- ▶ Benetzung: Adhäsion überwiegt

Rechenbeispiel 3.4: Loch im Blatt

Bäume saugen Wasser aus den Wurzeln in die Blätter, wo es tagsüber in die Luft verdampft. Ein großer Baum verdampft leicht 200 l pro Stunde. Der Saugdruck wird durch

Kapillareffekt erzeugt: In Zellzwischenräumen (den Stomata) bildet sich ein Wasserfilm, dessen Oberfläche einen hinreichend kleinen konkaven Krümmungsradius (wie in Abb. 3.29, linkes Bild) aufweisen muss. Wie klein muss er sein bei einem 10 m hohen Baum?

Lösung: Die Oberflächenspannung muss ein p_σ von etwa 1000 hPa aufbringen. Bei reinem Wasser hieße das für den Krümmungsradius:

$$r < \frac{2 \cdot 72 \text{ mN/m}}{10^5 \text{ N/m}^2} = 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1,4 \mu\text{m}.$$

Da im Pflanzensaft Stoffe gelöst sind, die die Oberflächenspannung herabsetzen, muss der Radius eher noch kleiner sein. Diese Abmessung entspricht in etwa der Größe der Zellen im Blatt.



Abb. 3.30. Wasser aus dem Wasserhahn: bei fast zuge drehtem Hahn ist die Strömung laminar (links); dreht man stärker auf, so wird sie turbulent (rechts)

3.5 | Hydrodynamik

Einleitung

Flüssigkeiten fließen. Das erleichtert ihren Transport. Wagen, Straßen und Schienen werden nicht benötigt; Regenwasser findet seinen Weg allein zum Meer, die Technik verwendet Röhren, der Warmblüter Adern. Freilich, je zäher eine Flüssigkeit ist, desto mehr nähert sie ihr Verhalten des einen festen Körpers an. Blut fließt laminar durch die Adern, was geringen Energieverlust bedeutet; Strömungen in der Technik sind aber meistens turbulent. Auf den ersten Blick überrascht, dass der Druck einer Flüssigkeit in einer Verengung der Röhre abnimmt („hydrodynamisches Paradoxon“).

3.5.1 | Ideale Strömung

Die Strömung von Flüssigkeiten und Gasen ist meistens sehr komplex, nämlich *turbulent*. Sie enthält dann viele Wirbel und schnell wechselnde Bewegungen, so wie es das Foto des aus einem Wasserhahn fließenden Wassers in Abb. 3.30 rechts zeigt.

Luftwirbel hinter Masten lassen Fahnen im Winde flattern; Strudel in Flüssen bringen Gefahr nicht nur für Schwimmer; Zyklone können ganze Landstriche verwüsten. Solch eine Strömung im Computer nachzurechnen, fällt selbst ausgeklügelter Spezialsoftware schwer. Besser ist es mit glatter, *laminarer* Strömung, in der die Flüssigkeit ruhig entlang glatter Linien strömt. Beim Wasserhahn gibt es diese Art von Strömung, wenn man ihn fast zudreht (Abb. 3.30 links).

Die Abb. 3.31 zeigt solche laminare Strömung entlang *Stromfäden* bei der Umströmung einer Platte. Diese Bilder entstanden, indem eingefärbtes Wasser per Kapillareffekt sehr langsam durch Löschpapier strömte. Ob eine Strömung laminar oder turbulent ausfällt, kann mit der Reynoldszahl abgeschätzt werden, wie im übernächsten Kapitel beschrieben wird.

Wenn eine Strömung nicht durch Pumpen oder Gefälle angetrieben wird, so kommt sie früher oder später zum Erliegen. Das liegt an der *inneren Reibung* in Flüssigkeiten. Wie jede Reibung bremst sie die Bewegung ab. Auch das macht die Berechnung einer Strömung komplizierter.

Einige Grundtatsachen sollen deshalb

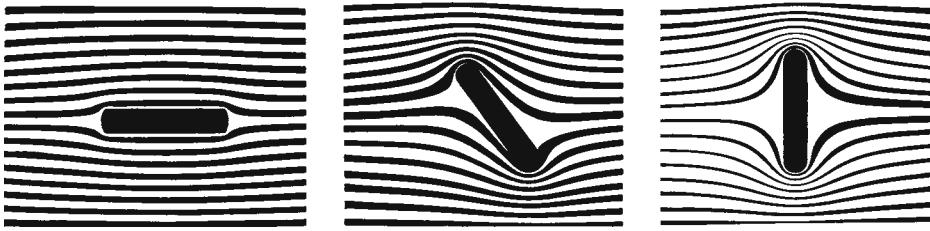


Abb. 3.31. Stromfäden laminarer Strömung um ein Hindernis (nach R. W. Pohl)

hier erst einmal an idealer Strömung klar gemacht werden, Strömung, die laminar ist und in der die innere Reibung vernachlässigt werden kann.

Außerdem soll die Flüssigkeit **inkompressibel** sein, also ihr Volumen mit dem Druck nicht ändern. Für Flüssigkeiten ist das immer eine gute Annahme, aber sogar bei Gasen kann man das annehmen, wenn die Strömungsgeschwindigkeiten hoch sind.

Eine solche Flüssigkeit ströme nun durch ein Rohr mit variablem Durchmesser (☞ Abb. 3.32). Die Strömung kann zunächst mit dem **Volumenstrom I** beschrieben werden, der angibt, wie viel Flüssigkeit pro Zeit durch das Rohr fließt:

$$\text{Volumenstrom } I = \frac{dV}{dt} = A \cdot v_m$$

Dabei ist A die Querschnittsfläche des Rohres und v_m die mittlere Strömungsgeschwindigkeit. Die Einheit des Volumenstromes ist m^3/s . Da dieser Volumenstrom überall im Rohr gleich sein muss, strömt die Flüssigkeit dort, wo die Querschnittsfläche kleiner ist, schneller. Die Strecke Δx (☞ Abb. 3.32), die die Flüssigkeit in einer Zeit t zurücklegt, ist

entsprechend größer. Es gilt die so genannte **Kontinuitätsgleichung**:

$$v_{m1} \cdot A_1 = v_{m2} \cdot A_2$$

Interessantes passiert bei der Querschnittsänderung mit dem Druck in der Flüssigkeit. Strömung transportiert mechanische Arbeit. Das kann man sich ganz gut anschaulich machen, wenn man sich vorstellt, dass in beiden Enden des Rohres Kolben stecken. Der eine fährt in das Rohr hinein und drückt mit einer Kraft $F_1 = p_1 \cdot A_1$ in das Rohr. Er leistet dabei die Volumenarbeit

$$W_1 = p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot \Delta V$$

Am anderen Ende wird der Kolben gegen die Kraft $F_2 = p_2 \cdot A_2$ herausgedrückt und die Flüssigkeit leistet an ihm die Arbeit

$$W_2 = p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 = p_2 \cdot \Delta V$$

(☞ Abb. 3.33). Ist hineingesteckte und herauskommende Arbeit gleich?

Nein! Denn da das Rohr verengt, muss die Flüssigkeit schneller werden, ihre kinetische

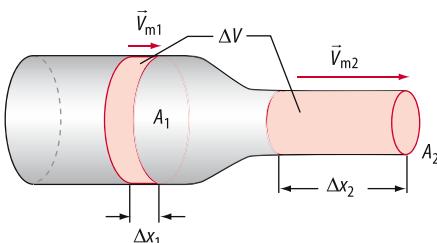


Abb. 3.32. Ein Volumenelement ΔV strömt durch ein Rohr. Ist das Rohr enger, so strömt es schneller

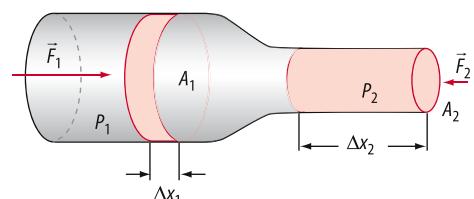


Abb. 3.33. Wo die Strömung schneller ist, ist der Druck kleiner

Energie wird größer. Diese kinetische Energie muss von der Volumenarbeit geliefert werden, sodass weniger Arbeit (aber nicht weniger Energie) herauskommt, als hineingesetzte wurde:

$$W_1 - W_2 = \Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(\rho \cdot \Delta V) \cdot (v_{m2}^2 - v_{m1}^2)$$

Teilen durch ΔV liefert eine Druckdifferenz:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \cdot v_{m2}^2 - \frac{1}{2} \rho \cdot v_{m1}^2.$$

Umstellen liefert eine Summe, die an beiden Rohrenden gleich ist:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_{m1}^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \cdot v_{m2}^2$$

Diese Formel sagt etwas Bemerkenswertes: Dort, wo die Geschwindigkeit hoch ist, also das Rohr eng, ist der Druck klein, und dort, wo die Geschwindigkeit klein ist, der Druck hoch. Da man es intuitiv vielleicht umgekehrt vermutet hätte, wird dies das *Hydrodynamische Paradoxon* genannt (☞ Abb. 3.34). Wird der Querschnitt wieder größer und die Flüssigkeit langsamer, so steigt der Druck auch wieder an. Man kann auch allgemeiner sagen:

$$p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \text{konstant entlang eines Stromfadens.}$$

Dies gilt nicht nur für Strömung in einem Rohr, sondern für jede beliebige Strömung

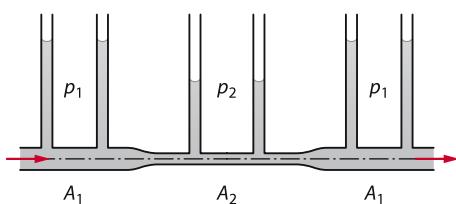


Abb. 3.34. Hydrodynamisches Paradoxon: In der Querschnittsverengung nimmt der statische Druck ab (die Zeichnung unterstellt, dass die innere Reibung der Flüssigkeit vernachlässigt werden kann)

und nennt sich der *Bernoulli-Effekt*. Der Zusammenhang wird zuweilen auch so formuliert: Der Druck p wird *statischer Druck* genannt und der Term $\frac{1}{2} \rho \cdot v^2$ wird *Staudruck* genannt. Der Gesamtdruck p_0 = statischer Druck p + Staudruck $\frac{1}{2} \rho \cdot v^2$ bleibt in reibungsfreien Flüssigkeiten konstant. Den Namen *Staudruck* macht das *Staurohr* verständlich.

☞ Abbildung 3.35 zeigt es schematisch im Schnitt, der Luftstrom komme von links. Dann herrscht an den seitlichen Öffnungen nur der statische Druck p . Vorn am Staurohr wird aber die Strömungsgeschwindigkeit auf null abgebremst, dort steht also der Gesamtdruck p_0 . Das Flüssigkeitsmanometer zeigt als Differenz den Staudruck an. Flugzeuge können so ihre Geschwindigkeit messen.

Der Bernoulli-Effekt kann in einem Handexperiment leicht demonstriert werden: man nehme zwei Blatt Papier und hänge sie sich an spitzen Fingern mit etwa 10 cm Abstand voneinander vor den Mund: pusten treibt sie nicht etwa auseinander, sondern sie werden durch den Unterdruck im Luftstrom zusammengedrückt.

Das $p + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2$ entlang der Strömung konstant bleibt, stimmt nur, solange die innere Reibung in der Flüssigkeit vernachlässigt werden kann. Reibung entnimmt der Strömung mechanische Energie und wandelt sie in Wärme um. Auch dies führt dazu, dass die am einen Rohrende hineingesetzte Arbeit nicht ganz am anderen Ende ankommt und

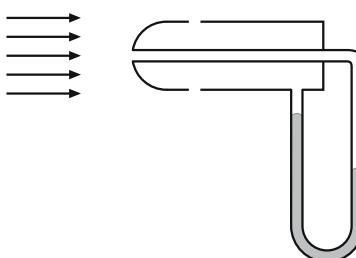


Abb. 3.35. Staurohr. Das Manometer misst den Staudruck als Differenz von statischem und Gesamtdruck; das umgebende Medium strömt von links an. Der Staudruck ist ein Maß für seine Strömungsgeschwindigkeit

deshalb der Druck auch bei einem Rohr mit konstantem Querschnitt sinkt. Die innere Reibung wird durch die Materialgröße Zähigkeit oder Viskosität beschrieben. Darum geht es im nächsten Kapitel.

Rechenbeispiel 3.5: Staudruck am Flugzeug

Welchen Staudruck wird ein Staurohr an einem Passagierflugzeug, das mit 900 km/h fliegt, in etwa anzeigen?

Lösung: Wir müssen die Dichte der Luft wissen. Diese ist in verschiedenen Höhen sehr unterschiedlich, den diese Dichte ist proportional zum Luftdruck (Gasgesetz, Kapitel 5.1.3). Der Luftdruck ist ein Schweredruck, der mit zunehmender Höhe exponentiell abnimmt. In 5 Kilometer Höhe ist die Luftdichte etwa $0,5 \text{ kg/m}^3$ und der Staudruck $p = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = 156 \text{ hPa}$.

3.5.2 Zähigkeit (Viskosität)

Folge der zwischenmolekularen Kräfte in einer Flüssigkeit ist die **innere Reibung**. Ohne ständig treibendes Druckgefälle kommt eine strömende Flüssigkeit bald zur Ruhe: Von der Strömung wird Volumenarbeit in Reibungswärme übergeführt. Die Vorgänge der Reibung aber sind komplex, unübersichtlich im Detail und Modellvorstellungen nur schwer zugänglich. Darum fasst man sie für Flüssigkeiten zu einer recht summarischen Größe zusammen, **Zähigkeit** oder auch **Viskosität** genannt. Sie ist eine Materialkenngroße, die zumeist deutlich mit steigender Temperatur abnimmt. Ihre Definition merkt man sich am leichtesten anhand eines Gedankenexperiments, das sich auf dem Papier ganz einleuchtend darstellt, praktisch aber nur in abgewandelter Form durchzuführen ist.

Gegeben seien zwei ebene Platten im Abstand d , zwischen ihnen die Flüssigkeit in einer solchen Menge, dass sie auf beiden Platten die Fläche A benetzt. Hält man nun

die untere Platte fest und zieht die obere mit einer Kraft F zur Seite, so gleitet diese ab, ganz am Anfang beschleunigt, bald aber wegen der inneren Reibung im Flüssigkeitsfilm nur noch mit einer konstanten Geschwindigkeit v_0 . Als Folge der Adhäsion haftet der Film an beiden Platten: unten bleibt er demnach in Ruhe, oben bewegt er sich mit v_0 . Dazwischen gleiten ebene Flüssigkeitsschichten aufeinander und bilden ein lineares Geschwindigkeitsprofil aus: v steigt proportional mit dem Abstand x von der unteren Platte an, bis es bei $x = d$ den Wert v_0 erreicht. Es stellt sich ein konstantes **Geschwindigkeitsgefälle**

$$\frac{dv}{dx} = v_0/d$$

ein (Abb. 3.36). Ändert man in einer Messreihe lediglich den Plattenabstand d , so wird man eine Proportionalität zwischen v_0 und d finden. Die benötigte Kraft F ihrerseits wächst proportional zur benetzten Fläche A und vor allem zur Zähigkeit η der Flüssigkeit: $F = \eta \cdot A \cdot v_0/d$. Auflösen nach η gibt die Definitionsgleichung für die Zähigkeit:

$$\eta = \frac{F \cdot d}{v_0 \cdot A}$$

Ihre SI-Einheit ist Ns/m^2 ; deren zehnter Teil wird als **Poise** (P) bezeichnet (nach J.L. Poiseuille, 1799–1869).

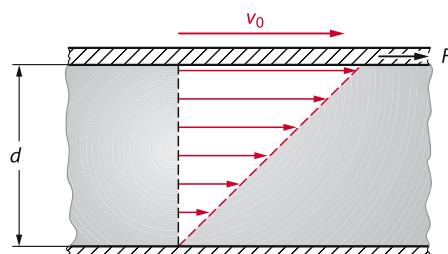


Abb. 3.36. Gedankenversuch zur Definition der Zähigkeit η für einen (übertrieben dick gezeichneten) Flüssigkeitsfilm, der zwischen zwei parallelen Platten eine Fläche A ausfüllt. Eine Scherspannung F/A führt zu einem linearen Geschwindigkeitsgefälle $dv/dx = v_0/d = F/(\eta \cdot A)$

Gemessen wird die Zähigkeit in *Viskosimetern*, technischen Geräten, zu denen der Hersteller Gebrauchsanweisung und Eichung mitliefert. Dem Gedankenversuch sehr nahe kommt ein Kreiszylinder, der in einer Röhre mit etwas größerem Durchmesser koaxial rotiert. Die zu untersuchende Flüssigkeit kommt in den Hohlraum zwischen beiden. Primär werden das Drehmoment und die mit ihm erzielte Drehfrequenz gemessen. Meist lässt man aber ein vorgegebenes Volumen durch eine präzise Kapillare laufen und stoppt die dafür benötigte Zeit. An kleine Zähigkeiten kommt man mit einer Kugel heran, die in einem flüssigkeitsgefüllten Rohr nur wenig größeren Durchmessers zu Boden sinkt. Gute Viskosimeter besitzen einen Wassermantel zur Thermostatisierung.

wichtig

Zähigkeit = Viskosität; Maß für die innere Reibung eines Fluids;

Messung in geeichten Viskosimetern;
Einheit: Ns/m².

Kleine Kugeln (Radius r), sinken, wenn sie sich gegenseitig nicht stören, mit der Geschwindigkeit

$$v_0 = \frac{2r^2}{9 \cdot \eta} g \cdot \Delta\rho$$

(*Stokes-Gesetz*) – hier ist F der Anteil der Gewichtskraft, den das archimedische Prinzip (s. Kap. 3.3.3) den Kugeln wegen ihres Dichteüberschusses $\Delta\rho$ gegenüber der Flüssigkeit noch lässt.

Man kann es niemandem verargen, wenn er Glas als Festkörper bezeichnet. Der Augenschein spricht dafür und der allgemeine Sprachgebrauch ebenfalls. Trotzdem handelt es sich streng genommen um eine Flüssigkeit, wenn auch um eine extrem zähe. Kristallographen stellen keine kristalline Struktur fest. Mit weniger Aufwand kann man sich aber auch selbst überzeugen, indem man einen Glasstab erhitzt: Er wird weicher und weicher, lässt sich schon bald

plastisch biegen, danach zu einem dünnen Faden ausziehen und beginnt schließlich wie eine richtige Flüssigkeit zu tropfen. Mit steigender Temperatur nimmt die Zähigkeit kontinuierlich ab. Ein Festkörper aber schmilzt: bei einer ganz bestimmten Temperatur bricht sein Kristallgitter plötzlich zusammen, die Substanz wechselt am *Schmelzpunkt* abrupt vom festen in den flüssigen Aggregatzustand und kehrt später beim Abkühlen genauso abrupt wieder in den festen Zustand zurück.

3.5.3

Reale Strömung durch Rohre

Das Gedankenexperiment des vorigen Kapitels ist so übersichtlich, weil die einfache Geometrie für ein lineares Geschwindigkeitsprofil sorgt. Schon bei der Strömung durch Rohre wird es komplizierter: Auch hier haftet die Flüssigkeit an der Wand und fließt dann konsequenterweise am schnellsten in der Rohrmitte. Im kreisrunden Rohr nimmt das Geschwindigkeitsprofil die Form eines Rotationsparaboloides an, wenn die Strömung *laminar* ist, das Profil ist abgeflacht bei *turbulenter* Strömung (☞ Abb. 3.37).

Wirbel und Fluktuationen schaffen gegenüber laminarer Strömung zusätzliche *Reibungsflächen* zwischen Flüssigkeitsschichten und setzen so vermehrt kinetische Energie in Wärme um. Turbulente Strömung wird durch die Viskosität also stärker gebremst und ist deshalb in Rohren ungünstiger.

Als Folge ihrer Viskosität entwickelt jede strömende Flüssigkeit Reibungskräfte gegen die Strömung, die diese bremsen; eine Pumpe muss die Reibungskräfte kompensieren, indem sie einen erhöhten Eingangsdruck aufrecht erhält. Ein Druckabfall Δp längs der Röhre wird gebraucht, um die Volumenstromstärke I gegen den

$$\text{Strömungswiderstand } R = \frac{\Delta p}{I}$$

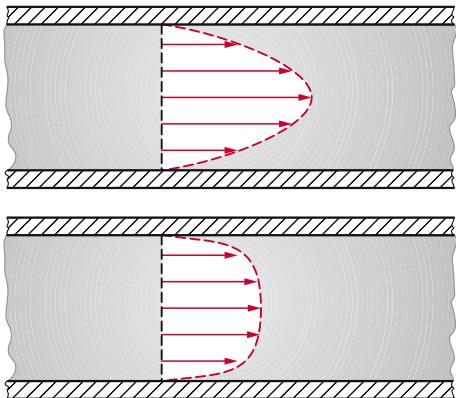


Abb. 3.37. Das Geschwindigkeitsprofil einer in einem reisrunden Rohr strömenden Flüssigkeit. Oben: bei laminarem Strom ein Rotationsparaboloid, dessen ebener Schnitt eine Parabel ist. Unten: bei turbulenter Strömung flacht das Profil ab

aufrechthalten (Einheit Ns/m^5). Den Kehrwert $1/R$ bezeichnet man als Leitwert.

wichtig

Strömungswiderstand

$$R = \frac{\text{Druckdifferenz } \Delta p}{\text{Volumenstärke } I}$$

Der Strömungswiderstand ist bei turbulenter Strömung generell größer als bei laminarer, da Wirbel und Fluktuationen zusätzliche *Reibungsflächen* zwischen Flüssigkeitsschichten schaffen und so vermehrt kinetische Energie in Wärme umsetzen. Turbulente Strömung wird durch die Viskosität also stärker gebremst und ist deshalb in Rohren ungünstiger.

Im Fall *laminarer* Strömung ist R oft vom Druck unabhängig. Dann ist I proportional zu Δp und es besteht eine formale Analogie zum ohm'schen Gesetz der Elektrizitätslehre (s. Kap. 6.2.2).

Einen elektrischen Widerstand, definiert als Quotient von elektrischer Spannung und elektrischer Stromstärke, nennt man *ohmsch*, wenn er von Strom und Spannung unabhängig ist. Flüssigkeiten, die das *ohmsche Gesetz der Hydrodynamik* erfüllen, heißen *newtonsch*. Manche Flüssigkeit wie zum Beispiel Dispersionen, in denen feste

Teilchen eingemischt sind (Farben, Blut), sind nicht newtonsch. Bei ihnen wächst Δp überproportional zu I an.

In zwei Punkten unterscheiden sich die wandernden Teilchen in der Flüssigkeitsströmungen allerdings markant von den Elektronen im elektrischen Strom: Elektronen sind sehr viel kleiner als Moleküle, und es gibt nur eine Sorte von ihnen. Auf ihrem Marsch durch den Draht stoßen die Elektronen so gut wie gar nicht mit Artgenossen zusammen, sondern weit überwiegend mit den Gitterbausteinen des Metalls. Flüssigkeitsmoleküle stehen sich immer nur gegenseitig im Weg. Das hat zwei Konsequenzen: Erstens hängt ein elektrischer Widerstand von einer Materialkenngröße des Drahtes ab, in dem die Elektronen laufen (von der Resistivität nämlich), ein Strömungswiderstand aber nicht von einer Materialeigenschaft der Röhre, sondern der Flüssigkeit (von der Viskosität nämlich). Zum andern driften im Draht alle Elektronen mit der gleichen Geschwindigkeit (ebenes Geschwindigkeitsprofil); die elektrische Stromstärke ist darum der Elektronenanzahl direkt proportional und damit auch der Querschnittsfläche des Drahtes, unabhängig von dessen Form; Flüssigkeitsmoleküle haften an der Wand und driften umso schneller, je weiter sie von ihr weg sind: die Strömungsgeschwindigkeit wächst mit dem Wandabstand, d.h. mit dem Rohrdurchmesser.

Im einfachen Fall eines Rohres mit der Länge l und einer kreisförmigen Querschnittsfläche vom Radius r gilt bei laminarer Strömung das *Gesetz von Hagen-Poiseuille*

$$I = \frac{\pi r^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} = \frac{\pi r^4}{8\pi \cdot \eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l}$$

Die Gleichung leuchtet ein. Es kann nicht überraschen, wenn die Volumenstromstärke direkt proportional zum Druckgefälle ist und umgekehrt proportional zur Zähigkeit. Weiterhin wächst die im Rohr vorhandene Flüssigkeitsmenge proportional zu dessen Querschnittsfläche und somit zum Quadrat

des Radius. Genau so wächst, des parabolischen Geschwindigkeitsprofils wegen, aber auch die maximale Strömungsgeschwindigkeit in der Rohrmitte und mit ihr die mittlere Geschwindigkeit. Beide Effekte zusammen liefern einen Anstieg der Stromstärke mit dem Quadrat der Fläche und mit der vierten Potenz des Radius. Den Zahlenfaktor bekommt man allerdings nur durch mathematisch-formale Integration.

Die vierte Potenz im Zähler signalisiert eine ungemein starke Abhängigkeit der Stromstärke und des Widerstandes vom Radius der Röhre: Nur 20 % Aufweitung verdoppeln schon Strom und Leitwert! Das erlaubt der Natur, mit kleinen Änderungen des Durchmessers von Adern die Durchblutung eines Organs wirksam zu steuern. Bei der Haut ist das für die Regelung der Körpertemperatur wichtig. Die vom Organismus entwickelte Wärme muss ja unbedingt an die Umgebung abgegeben werden, und zwar exakt und nicht nur einigermaßen, denn auf längere Zeit kann der Körper keine Wärme speichern. Darum ziehen sich die Blutgefäße der Haut bei Kälte ein wenig zusammen, vermindern kräftig die Durchblutung und senken so mit der Oberflächentemperatur die Wärmeabgabe. Täten sie es nicht, könnte der Mensch erfrieren. Diese Gefahr besteht ganz ernsthaft für einen Betrunkenen in kalter Winternacht, denn Alkohol erweitert die Blutgefäße, wirkt also dem physiologischen Regelprozess entgegen.

Das Gesetz von Hagen-Poiseuille gilt freilich nur für laminare Strömung. In der Technik sind Strömungen überwiegend turbulent. Ob eine Strömung laminar oder turbulent sein wird, kann mit der **Reynold-Zahl** R_e abgeschätzt werden:

$$R_e = \frac{\rho \cdot v_m \cdot 2r}{\eta}$$

Hierin ist ρ die Dichte der Flüssigkeit. Liegt diese dimensionslose Zahl R_e für die betrachtete Strömung über ca. 2200, so ist mit

turbulenter Strömung zu rechnen. Die Strömung von Öl in einer Hydraulik oder von Blut im Blutkreislauf ist eher laminar, denn die Flüssigkeit sind zäh und die Rohrdurchmesser und Strömungsgeschwindigkeiten eher klein. Die Strömung von Luft in einer Klimaanlage oder von Wasser in einer Kühlung ist turbulent, denn die Viskosität ist klein, Rohrdurchmesser und Strömungsgeschwindigkeit eher groß.

Bei turbulenter Strömung durch ein Rohr (Länge l ; Radius r) ist der Strömungswiderstand überhaupt nicht mehr von dem Volumenstrom unabhängig. Hier gibt man üblicherweise die Druckdifferenz Δp als Funktion der mittleren Strömungsgeschwindigkeit v_m an und bekommt einen in etwa quadratischen Zusammenhang:

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{l}{4 \cdot r} \cdot \rho \cdot v_m^2$$

Der Zusammenhang ist nur in etwa quadratisch, denn der **Widerstandsbeiwert** λ des Rohrs enthält alle Kompliziertheiten der turbulenten Strömung und kann auch etwas von der Strömungsgeschwindigkeit abhängen. Insbesondere hängt er aber von der Rauhigkeit der Rohrwände ab, denn diese beeinflusst wesentlich die Ausbildung der Turbulenzen. Schreibt man das Gesetz von Hagen-Poiseuille für die laminare Strömung in gleicher Form, so ergibt sich:

$$\Delta p = \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{r^2} v_m$$

Δp proportional zu v_m ist das „ohm'sche“ Verhalten der laminaren Strömung. Δp proportional zu $1/r^2$ ist die oben diskutierte starke Abhängigkeit des Strömungswiderstandes vom Radius, die auf das parabolische Geschwindigkeitsprofil bei laminarer Strömung zurückzuführen ist. Bei turbulenten Strömung ist der Druckabfall in etwa proportional zu $1/r$. Das kommt von dem flachen Geschwindigkeitsprofil bei turbulenten Strömung (☞ Abb. 3.37)

wichtig

Für kreisrunde Röhren (Radius r , Länge l) gilt:

bei laminarer Strömung das Gesetz von Hagen-Poiseuille:

$$I = \frac{\pi r^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} \text{ bzw. } \Delta p = \frac{8 \cdot \eta \cdot l}{r^2} \cdot v_m$$

bei turbulenten Strömungen:

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{l}{4 \cdot r} \cdot \rho \cdot v_m^2$$

wobei der Widerstandsbeiwert λ insbesondere von der Rauigkeit der Rohrwände abhängt.

Die Druckdifferenz entsteht aufgrund der inneren Reibung in der Flüssigkeit, die zu einem Verlust an mechanischer Energie in der Strömung führt. Die Pumpe, die die Strömung antreibt und aufrechterhält, muss diese Energie nachliefern. In Kapitel 3.5.1 wurden schon Energiebetrachtungen ange stellt. Die Differenz zwischen der am Rohreingang hineingehenden Arbeit W_1 und der am Rohrausgang herauskommenden Arbeit W_2 ist:

$$W_1 - W_2 = p_1 \cdot \Delta V - p_2 \cdot \Delta V$$

Teilt man diese Gleichung durch die Zeit, so erhält man den Zusammenhang zwischen Volumenstrom I und der von der Pumpe zu erbringenden Leistung P :

$$P = \frac{\Delta W}{t} = (p_1 - p_2) \cdot I = \Delta p \cdot I$$

Rechenbeispiel 3.6: Wie schnell strömt das Blut?

Die Hauptarterie im Körper hat einen Durchmesser von ca. 2 cm und transportiert etwa 6 Liter Blut pro Minute. Wie schnell strömt durch sie das Blut (mittlere Strömungsgeschwindigkeit)?

Lösung: Die Querschnittsfläche der Aorta beträgt: $A = \pi \cdot (1 \text{ cm})^2 = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. A mal

der Strecke s , die das Blut in einer Sekunde zurücklegt, ist das Volumen, dass in einer Sekunde durch die Aorta fließt. Für den Volumenstrom gilt also:

$$I = A \cdot \frac{ds}{dt} = A \cdot v_m$$

und für die Geschwindigkeit:

$$v_m = \frac{10^{-4} \text{ m}^3 / \text{s}}{3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 32 \text{ cm/s.}$$

Rechenbeispiel 3.7: Wasserrohr

Durch ein Rohr (Länge 10 m; Radius 5 cm) sollen 15 Liter Wasser in der Sekunde fließen. Welche Druckdifferenz muss die Pumpe hierfür aufrechterhalten und welche Leistung muss sie erbringen? Diese Strömung ist turbulent (überprüfen Sie die Reynoldszahl!). Für den Widerstandsbeiwert des Rohres sollen typische $\lambda = 0,02$ angenommen werden. (Wasser: $\eta = 10^{-3} \text{ kg/ms}$; $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)

Lösung:

mittlere Strömungsgeschwindigkeit

$$v_m = \frac{I}{A} = \frac{0,015 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}}{\pi \cdot (0,05 \text{ m})^2} = 1,91 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Die Reynoldszahl

$$R_e = \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1,91 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,1 \text{ m}}{10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{ms}}} = 191000$$

ist viel größer als 2200.

Druckdifferenz:

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{l}{4 \cdot r} \cdot \rho \cdot v_m^2$$

$$= 0,02 \cdot \frac{10 \text{ m}}{0,2 \text{ m}} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (1,91 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2$$

$$= 3648 \text{ Pa}$$

Leistung der Pumpe:

$$P = \Delta p \cdot I = 3648 \text{ Pa} \cdot 0,015 \frac{\text{m}^3}{\text{s}} \\ = 54,7 \text{ W}$$

Rechenbeispiel 3.8: Viele kleine Rohre

Wenn ein kreisrundes Rohr vorgegebener Länge und Querschnittsfläche aufgeteilt wird in 100 parallel geschaltete, ebenfalls kreisrunde Röhrchen gleicher Länge, gleicher Gesamtquerschnittsfläche und mit untereinander gleichen Einzelquerschnitten, um welchen Faktor steigt der Strömungswiderstand gegenüber einer newtonischen Flüssigkeit bei laminarer Strömung?

Lösung: Nach Hagen-Poiseuille ist der Strömungswiderstand umgekehrt proportional zur Querschnittsfläche ins Quadrat: $R \sim 1/A^2$. Die Querschnittsfläche des Einzelröhrchens ist 100-mal kleiner als die des Rohrs, sein Strömungswiderstand also 10.000-mal größer. 100 Röhrchen parallel haben dann einen 100-mal höheren Strömungswiderstand als das Rohr.

3.5.4 Umströmung von Hindernissen

Umströmung von Hindernissen tritt praktisch vor allem dann auf, wenn sich ein Fahrzeug durch Luft oder Wasser bewegt. Um Energie zu sparen, wäre es hier wünschenswert, wenn möglichst geringe Luftreibung auftrate. Ganz verhindern lässt sie sich wegen der inneren Reibung nie. Wesentlich für den Luft- bzw. Wasserwiderstand sind aber vor Allem Turbulenzen hinter dem Fahrzeug, die mechanische Energie vernichten; wie viel, das kann man durch die Form beeinflussen. Denn die Bildung von Turbulenzen hängt sehr wesentlich von der Geometrie der Strömung ab. Darum können Vögel, Fische, Verkehrsflugzeuge und manche Autos durch **Stromlinienform** Energie fressende Wirbelbildung am Heck vermindern (☞ Abb. 3.38).

Flugzeuge wollen zwar auch durch Reduktion der Wirbelbildung den Luftwiderstand vermindern, für das Fliegen brauchen sie aber unbedingt eine Wirbelbildung am Anfang.

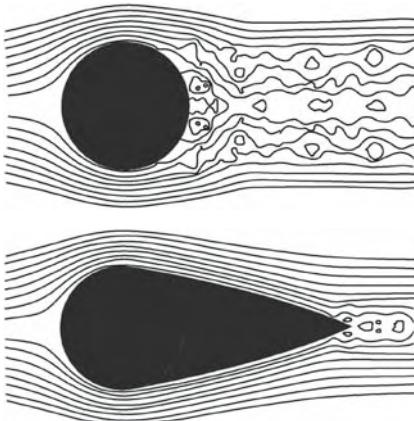


Abb. 3.38. Der Bereich turbulenter Strömung ist hinter einem Ball (oben) größer als hinter einem stromlinienförmigen Körper (unten)

Wird eine Tragfläche rein laminar umströmt (☞ Abb. 3.39 erstes Teilbild), wie es in den ersten Sekundenbruchteilen nach Bewegungsbeginn noch der Fall ist, so tritt gar keine nach oben gerichtete Auftriebskraft auf. Bei einer solchen **Potentialströmung** müssen die Stromlinien an der Hinterkante der Tragfläche aber scharf nach oben abknicken. Scharfes Abknicken der Stromlinien bedeutet einen hohen Druckgradienten senkrecht zu den Stromlinien. Dieser Druckgradient liefert die für das Umlenken der Luft notwendige Kraft. Weit weg von der Tragfläche herrscht Luftdruck. An der Hinterkante der Tragfläche herrscht wegen des Druckgradienten also starker Unterdruck. Unterdruck bedeutet hohe Strömungsgeschwindigkeit (der Bernoulli-Effekt rückwärts sozusagen). Aufgrund der inneren Reibung kann die Luft so nah an der Tragfläche aber gar nicht so schnell strömen und dies führt zum Einrollen eines **Anfahrwirbels** (☞ Abb. 3.39 mittleres Bild). Ein solcher Wirbel hat einen Drehimpuls, den er mit sich fort trägt. Da der Drehimpuls bei der Wirbelentstehung aber erhalten bleiben muss, bildet sich gleichzeitig ein entgegengesetzt rotierender Wirbel, der die ganze Tragfläche umströmt und damit das ganze Stromlinienbild um die Tragfläche herum

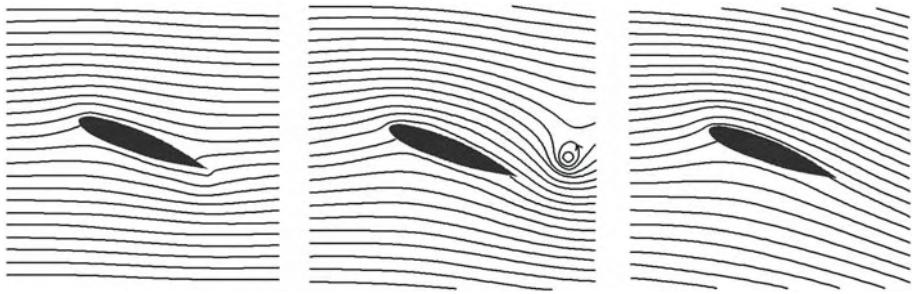


Abb. 3.39. Das Ablösen eines Anfahrtwirbels verändert drastisch die Strömung um die Tragfläche und bedingt den Auftrieb

grundlegend verändert (☞ Abb. 3.39 rechtes Bild). Nun kann die Luft an der hinteren Tragflächenkante glatt abströmen. Eine gewisse kontinuierliche Wirbelbildung gibt es dort trotzdem, die der Übersichtlichkeit halber in der Zeichnung weggelassen wurde. Entscheidend ist, dass nun die Luft im Bereich der Tragfläche nach unten abgelenkt wird. Der Rückstoß treibt das Flugzeug nach oben. Der nun vorhandenen Auftriebskraft entsprechen die Druckverhältnisse an der Tragfläche. Ein gekrümmter Stromlinienverlauf erfordert wie gesagt ein Druckgefälle senkrecht zur Strömung, das die Kraft zum Umlenken der Luft aufbringt. An der Außenseite der Krümmung ist der Druck höher als an der Innenseite. Die Oberseite der Tragfläche liegt an der Innenseite der Stromlinienkrümmung. Der Druck oben an der Tragfläche ist deshalb kleiner als der umgebende Luftdruck. An der Unterseite,

die außen an der Krümmung liegt, ist der Druck höher. Das passt auch mit dem Bernoulli – Effekt zusammen, denn oberhalb der Tragfläche strömt die Luft schneller als unterhalb: das ergibt der Wirbel um die Tragfläche. Weiter hinten hinter der Tragfläche und schon außerhalb der Zeichnungen in ☞ Abb. 3.39 krümmen sich die Stromlinien wieder zurück nach oben in ihre alte Bahn vor der Tragfläche. Man kann also sagen, dass die Luft das Flugzeug „trägt“. Das gilt auch für die Rotorblätter eines Hubschraubers. Es ist also nicht so, wie es den Anschein haben mag, dass der Hubschrauber dadurch fliegt, dass er gewaltige Luftmassen nach unten pustet wie ein Zimmerventilator. Für das Pusten braucht man sehr breite Rotorblätter, die sich fast überlappen, so, wie es beim Zimmerventilator eben der Fall ist. Zum Erzeugen von Rückstoß ist das gar nicht optimal.

Elastische Verformung eines Festkörpers

Um einen Festkörper zu verformen, muss man eine mechanische Spannung (Einheit: Kraft durch Fläche) ausüben. Das führt zu einer Dehnung des Festkörpers. Ist der Festkörper elastisch, so gilt das Hooke-Gesetz: Spannung und Dehnung sind proportional zueinander. Dehnt man einen Körper zu stark, so wird er plastisch, d. h. dauerhaft verformt oder er reißt.

Mechanische Dehnung

$$\frac{\Delta l}{l_0}$$

Δl : Längenänderung [m]

l_0 : Anfangslänge [m]

Mechanische Spannung

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

σ : mechanische Spannung [$\frac{N}{m^2}$]

F : Kraft auf A [N]

A : Querschnittsfläche [m^2]

Hooke'sches Gesetz

$$\frac{\Delta l}{l_0} = E \cdot \sigma$$

E : Elastizitätsmodul [$\frac{m^2}{N}$]

Druck

Druck kann durch einen Stempel (Kolben) in einer Pumpe erzeugt werden, entsteht aber auch durch das Eigengewicht der Flüssigkeit (Schweredruck). Je tiefer man im Wasser taucht, umso höher wird der Schweredruck. Für Wasser gilt: je 10 m Wassertiefe bewirken etwa 1 bar Schweredruck. Bemerkenswerterweise hängt der Schweredruck nicht von der Gefäßform ab.

Druck

$$p = \frac{F}{A}$$

p : Druck [$\frac{N}{m^2} = Pa$, Pascal]

$10^5 Pa \approx 1 \text{ bar} = 760 \text{ mmHg}$

F : Kraft [N]

A : Stempelfläche [m^2]

Schweredruck

$$p = \rho \cdot g \cdot h$$

ρ : Dichte der Flüssigkeit [$\frac{kg}{m^3}$]

g : Fallbeschleunigung [$\frac{m}{s^2}$]

h : Tiefe unter Oberfläche [m]

Auftrieb

Schweredruck ist auch die Ursache für die Auftriebskraft, die auf alle Körper in einer Flüssigkeit oder einem Gas wirkt. Hat der Körper eine ähnliche Dichte wie die umgebende Flüssigkeit, so kompensiert diese Kraft fast die Gewichtskraft.

Auftriebskraft

(gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit)

$$F = V_K \cdot \rho_{fl} \cdot g$$

F : Auftriebskraft [N]

V_K : verdrängtes Volumen [m^3]

ρ_{fl} : Dichte der Flüssigkeit [$\frac{kg}{m^3}$]

g : Fallbeschleunigung [$\frac{m}{s^2}$]

Strömung

Soll eine Flüssigkeit durch ein Rohr strömen, so muss sie mit einer Druckdifferenz Δp zwischen den Rohrenden durch das Rohr gedrückt werden. Dies liegt an der inneren Reibung in der Flüssigkeit, die ihr eine Zähigkeit η verleiht. Es gelten ähnliche Beziehungen wie im elektrischen Stromkreis. Wird ein Rohr dünner, so erhöht sich dort die Strömungsgeschwindigkeit (Flüssigkeiten sind praktisch inkompressibel) und zugleich sinkt dort der Druck (Hydrodynamisches Paradoxon). Überschreitet die Strömungsgeschwindigkeit eine bestimmte Grenze, wird die Strömung turbulent und der Strömungswiderstand steigt stark an.

Volumenstromstärke	$I = \frac{\Delta V}{\Delta t}$	I : Volumenstromstärke $\left[\frac{m^3}{s}\right]$
Gesetz von Hagen-Poiseuille Laminare Strömung durch ein Rohr	$I = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot l}$	l : Rohrlänge [m] r : Rohrradius [m] η : Viskosität $\left[\frac{Ns}{m^2}\right]$ Δp : Druckdifferenz [Pa] v_m : mittlere Strömungsgeschwindigkeit
	oder $\Delta p = \frac{8 \cdot l \cdot \eta}{r^2} v_m$	
turbulente Strömung durch ein Rohr	$\Delta p = \lambda \cdot \frac{l}{4 \cdot r} \cdot \rho \cdot v_m^2$	λ : Widerstandsbeiwert ρ : Dichte der Flüssigkeit
Strömungswiderstand	$R = \frac{\Delta p}{I}$	R : Strömungswiderstand $\left[\frac{Ns}{m^5}\right]$
Für Strömungswiderstände gelten die gleichen Regeln wie für elektrische: Addition bei Reihenschaltung, Addition der Kehrwerte bei Serienschaltung		
Gesetz von Bernoulli	Gesamtdruck gleich statischer Druck plus Staudruck	
	$p_{ges} = p_0 + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2$	p_{ges} : Gesamtdruck [Pa] p_0 : statischer Druck [Pa] ρ : Dichte $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$ v : Strömungsgeschwindigkeit [m/s]

Oberflächen und Grenzflächen

An der Oberfläche einer Flüssigkeit werden die Moleküle nach innen gezogen. Deshalb bedarf es mechanischer Arbeit und damit Energie, die Oberfläche einer Flüssigkeit zu vergrößern. Ein Maß hierfür ist die Oberflächenspannung σ (Energie pro Fläche). Auch im Inneren der Flüssigkeit halten die Moleküle zusammen. Man spricht von Kohäsion. Es bestehen auch anziehende Kräfte zwischen einer Flüssigkeit und der Gefäßwand (Adhäsion). Ist die Adhäsion stärker als die Kohäsion, so wird die Gefäßwand benetzt und es kann zum Beispiel zur Kapillarwirkung kommen. Ist die Kohäsion stärker, so benetzt die Flüssigkeit nicht.

Kohäsion	Kräfte zwischen den Molekülen der Flüssigkeit
Adhäsion	Kräfte zwischen Flüssigkeit und Wand
Oberflächenspannung	$\sigma = \frac{W_A}{A}$ σ : Oberflächenspannung $\left[\frac{J}{m^2}\right]$ W_A : Oberflächenenergie [J] A : Oberfläche $[m^2]$

Verständnisfragen

1. Warum sind Grashalme röhrenförmig?
2. Die horizontale Querschnittsfläche Ihres Kopfes sei 100 cm^2 . Wie groß ist das Gewicht der Luft über Ihrem Kopf?
3. Stellen Sie sich vor, sie halten zwei identische Ziegelsteine unter Wasser. Ziegelstein A befindet sich genau unter der Wasseroberfläche, während sich Ziegelstein B in größerer Tiefe befindet. Ist die Auftriebskraft bei beiden Ziegelsteinen gleich?
4. Zwei identische Gläser sind bis zur gleichen Höhe mit Wasser gefüllt. Eines der beiden Gläser enthält Eiswürfel, die im Wasser schwimmen. Welches Glas wiegt mehr? Wenn die Eiswürfel nun schmelzen, in welchem Glas steht dann der Wasserspiegel höher?
5. Ein Boot, das einen großen Felsblock trägt, schwimmt auf einem See. Der Felsblock wird über Bord geworfen und sinkt. Ändert sich der Wasserspiegel des Sees (in Bezug auf das Ufer)?
6. Stellen Sie sich einen Gegenstand vor, der in einem Wasserbehälter schwimmt. Ändert sich seine Position, wenn der Behälter in einem Fahrstuhl platziert wird, der nach oben beschleunigt?
7. Kleine Seifenblasen sind immer genau rund. Große Seifenblasen können durch Wind oder anpusten verformt werden. Warum?
8. Wenn man in die Seite eines mit Wasser gefüllten Behälters ein Loch macht, dann fließt Wasser heraus und folgt einer parabolischen Bahn. Was geschieht mit dem Wasserstrom, wenn der Behälter im freien Fall fallengelassen wird?
9. Der Wasserstrahl aus einem Wasserhahn wird nach unten hin dünner (☞ Abb. 3.30). Warum?
10. Rauch steigt in einem Schornstein schneller auf, wenn ein Wind über den Schornstein weht. Warum?

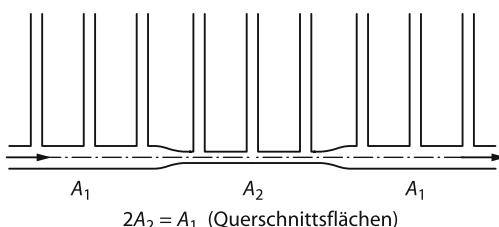
Übungsaufgaben

zur Elastizität

- 3.1: (I) Wie groß ist der Elastizitätsmodul des Kupfers? Siehe Abb. 3.4
3.2: (I) Eine 1,6 m lange Klaviersaite aus Stahl habe einen Durchmesser von 0,2 cm. Wie groß ist die Zugspannung, wenn sich die Saite um 3 mm beim Spannen dehnt? Das Elastizitätsmodul von Stahl sei $2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$.

zur Hydrodynamik

- 3.3: (II) In einer Injektionsspritze muss der Kolben 15 mm vorgeschoben werden, um 1 ml zu injizieren. Der Arzt drückt mit 15 N auf den Kolben. Mit welchem Druck wird injiziert?
3.4: (I) Um wie viel Prozent müsste der Blutdruck eines aufrecht stehenden Menschen in den Füßen höher sein als im Kopf, wenn der Druckabfall durch den Blutstrom längs der Adern vernachlässigt werden könnte?
3.5: (II) Ein Geologe findet heraus, dass ein Mondstein mit einer Masse von 8,2 kg eingetaucht in Wasser nur noch eine scheinbare Masse von 6,18 kg hat. Wie groß ist die Dichte des Steins?
3.6: (II) Die Dichte von Eis ist 917 kg/m^3 und die von Seewasser 1025 kg/m^3 . Wie viel Prozent des Volumens einens Eisberges schaut aus dem Wasser heraus?
3.7: (II) Ein Eimer Wasser wird mit 3,5 mal der Fallbeschleunigung nach oben beschleunigt. Wie groß ist die Auftriebskraft auf einen 3 kg - Granitstein? Wird er schwimmen? Die Dichte von Granit ist $2,7 \text{ g/cm}^3$.
3.8: (II) Nimmt die Anzahl der Quecksilbertropfen in Abb. 3.24 exponentiell mit der Zeit ab? Wenn ja: Zeitkonstante?
3.9: (II) Ein Aluminiumring (50 mm Durchmesser, Masse 3,1 g) wird entsprechend der Abb. 3.25 in Wasser getaucht und herausgezogen. Im Moment, in dem der Wasserfilm reißt, zeigt die Waage 53 mN an. Wie groß ist die Oberflächenspannung des Wassers?
3.10: (II) Wenn die „Füße“ eines Insekts einen Radius von 0,03 mm haben und das Insekt 0,016 g wiegt, würden Sie erwarten, dass es mit seinen sechs Beinen auf der Wasseroberfläche stehen kann (wie ein Wasserläufer)?
3.11: (III) Muss man die Gleichung $p = 2\sigma/r$ für den Binnendruck eines Tropfens glauben oder kann man sie auch herleiten?
3.12: (II) Welche mittlere mechanische Leistung muss das Herz eines Menschen liefern, wenn es bei einem Druck am Auslauf (Aorta) von 174 hPa eine mittlere Blutstromstärke von 6 l/min aufrechterhalten soll? Das Blut kommt aus der Vene ohne nennenswerten Druck zurück.
3.13: (II) Wie hoch stehen die Flüssigkeitssäulen in den Röhrchen der Abbildung, wenn eine zähe Flüssigkeit von links nach rechts durch das untere Rohr strömt?



- 3.14: (III) Wasser fließe mit 0,65 m/s durch einen Schlauch mit dem Innendurchmesser 3 cm. Der Durchmesser einer Düse am Ende des Schlauches betrage 0,3 cm. Mit welcher Geschwindigkeit tritt das Wasser aus der Düse aus? Die Pumpe auf der einen Seite und die Düse auf der anderen Seite des Schlauches befinden sich auf gleicher Höhe, sodass der Wasserfluss nicht durch einen Schweredruck unterstützt wird. Der Druck auf der Ausgangsseite der Düse ist gleich dem Luftdruck. Welchen Druck muss dann die Pumpe erzeugen (reibungsfreie Strömung angenommen)?
- 3.15: Mit welcher Geschwindigkeit steigt eine kleine Luftblase im Sprudel auf, wenn sie einen Durchmesser von 0,5 mm hat? (Stokes-Gesetz; Wasser: $\eta = 10^{-3}$ kg/ms; $\rho = 1000$ kg/m³; Luft: $\rho = 1,29$ kg/m³)
- 3.16: In ein Wohnhaus kommt Wasser durch ein Zuleitungsrohr mit 4 cm Durchmesser bei einem Druck von $4 \cdot 10^5$ Pa im Keller an. Eine Leitung mit einem Durchmesser von 2 cm führt in den zweiten Stock 5 m höher ins Badezimmer. Die Strömungsgeschwindigkeit im Zuleitungsrohr am Erdboden betrage 2 m/s. Wie groß ist dann im Badezimmer
a) die Strömungsgeschwindigkeit?
b) die Volumenstromstärke?
c) der Druck in der Leitung?
Berücksichtigen Sie für c) die Druckänderung aufgrund des Schweredruckes, des Bernoulli-Effekts und der innere Reibung. Die Strömung ist turbulent und der Widerstandsbeiwert sei $\lambda = 0,02$. (Wasser: $\eta = 10^{-3}$ kg/ms; $\rho = 1000$ kg/m³)

4.1	Mechanische Schwingungen	128
4.1.1	Oszillatoren	128
4.1.2	Harmonische Schwingungen	128
4.1.3	Gedämpfte Schwingungen	132
4.1.4	Erzwungene Schwingungen	134
4.1.5	Überlagerung von Schwingungen	136
4.2	Seilwellen	138
4.3	Schallwellen	141
4.3.1	Schallerzeugung	142
4.3.2	Schallnachweis	144
4.3.3	Schallausbreitung	146

Mechanische Schwingung und Wellen

Übersicht

Der Mensch informiert sich über den momentanen Zustand seiner Umwelt mit Hilfe seiner 5 Sinne. Die beiden am besten entwickelten Sinne benutzen zur Informationsübertragung Wellen: der Gesichtssinn die elektromagnetischen des Lichtes, das Gehör die mechanischen des Schalls. Physikalisch kann man eine räumliche Welle als koordinierte Schwingungen räumlich verteilter Oszillatoren auffassen.

4.1

Mechanische Schwingungen

Einleitung

Ein „schwingungsfähiges Gebilde“ besitzt eine wohldefinierte Ruhelage, in der es dauernd verbleiben kann. Wird es aus ihr ausgelenkt, so versuchen rücktreibende Kräfte, das Pendel in die Ruhelage zurückzuholen. Dort angekommen schwingt es wegen seiner Massenträgheit über die Ruhelage hinaus. Kenngröße eines Pendels ist seine Eigenfrequenz, zusätzliche Kenngröße einer Schwingung deren Amplitude. Die einfachsten Schwingungen, die so genannten harmonischen Schwingungen, werden mathematisch durch die Winkelfunktionen Sinus oder Kosinus beschrieben. Kompliziertere Schwingungen können als Überlagerung solcher einfacher Schwingungen aufgefasst werden.

4.1.1 Oszillatoren

Das Pendel einer alten Standuhr kann schwingen, eine Klaviersaite auch; beide sind dafür gebaut. Ein Dachziegel ist das nicht. Trotzdem kann er sich lockern und, wenn er im Wind klappert, eine Art von Schwingungen ausführen. Die Vielfalt all dessen, was da schwingen kann, ob es das nun soll oder nicht, ist so groß, dass man bei allgemeinen Betrachtungen gern auf die farblose Bezeichnung *schwingungsfähiges Gebilde* oder *Oszillator* ausweicht.

Das Pendel der Standuhr kann man schwingen sehen. Eine Quarzuhr und auch Computer bekommen ihren Takt von einem kleinen schwingenden Quarzkristall vorgegeben. Der ist gut verpackt und nicht zu sehen. Aber nicht nur Gegenstände kön-

nen schwingen, sondern auch zum Beispiel der Luftdruck in einer Schallwelle oder das elektromagnetische Feld in einer Lichtwelle. Die Physik der Schwingungen kann durchaus kompliziert werden.

Ein schwingungsfähiges Gebilde kann schwingen, muss aber nicht. Ein jedes besitzt eine *Ruhelage*, in der es beliebig lange verharrt, wenn es nicht gestört wird. Wird es gestört, so muss es seine Ruhelage in mindestens zwei Richtungen verlassen können, rechts-links, oben-unten, vorn-hinten, hoch-tief, stärker-schwächer, hin und zurück. Manchen Pendeln sind noch mehr Richtungen erlaubt, aber zwei, *Richtung und Gegenrichtung*, sind das Mindeste.

Wenn ein Pendel schwingt, kommt es in regelmäßigen Zeitabständen an seiner Ruhelage vorbei, aber es bleibt dort nicht, sondern läuft durch sie hindurch und kehrt nach einer Weile von der anderen Seite zurück, jetzt in Gegenrichtung durchlaufend. Uhren werden auf Konstanz dieser Zeitabstände hin gezüchtet, mit beachtlichem Erfolg. Eine Armbanduhr, die am Tag um nicht mehr als eine Zehntelsekunde falsch geht, ist gar nicht mal so sehr gut. Aber sie hält ihren relativen Fehler bei $\sim 10^{-6}$. Ein Zollstock von 1 m Länge müsste bei gleicher Präzision auf ein Tausendstel Millimeter genau sein.

4.1.2 Harmonische Schwingungen

Ein besonders einfach zu verstehendes schwingungsfähiges Gebilde in der Mechanik ist das *Federpendel* der Abb. 4.1a. Es besitzt einen Klotz mit der Masse m , der längs einer Schiene (beispielsweise nach Art des Luftkissenfahrzeugs der Abb. 2.41

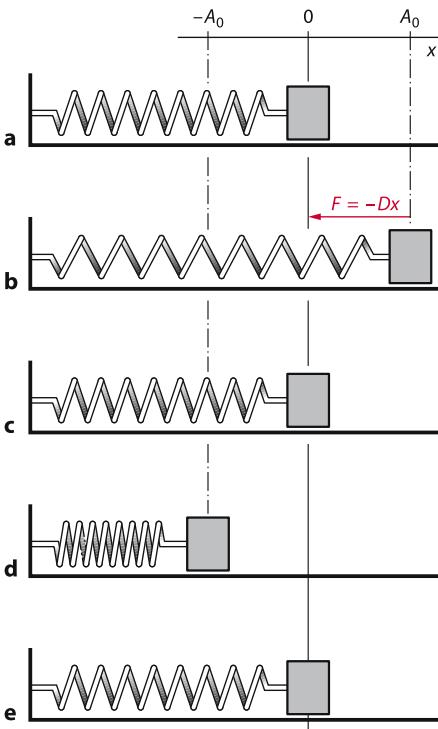


Abb. 4.1. Federpendel; Ablauf einer Schwingungsdauer

von Kap. 2.3.1) „reibungsfrei“ streng horizontal gleiten kann, dies aber zunächst nicht tut, weil er von einer Schraubenfeder in seiner Ruhestellung $x = 0$ gehalten wird. Dort kann er bleiben, kräftefrei, denn die Feder ist entspannt, und die Gewichtskraft wird von der Schiene aufgefangen.

Um das Pendel in Gang zu setzen, kann man den Klotz per Hand zur Seite ziehen ([Abb. 4.1b](#)), ihm also eine *Auslenkung* x (hier $= A_0$) verpassen. Dabei spannt man die Feder. Sie soll dem linearen Kraftgesetz des Kap. 2.2.1 gehorchen, also entsprechend ihrer Federkonstanten D den Pendelkörper mit der Kraft

$$F(x) = -D \cdot x$$

in Richtung Ruhelage zurückziehen: negatives Vorzeichen, *rücktreibende Kraft*. Lässt man den Klotz bei der Auslenkung A_0 los, so verlangt die Grundgleichung der Mechanik,

also das 2. Newton'sche Gesetz (s. Kap. 2.3.1.), dass sich der Klotz nach links in Bewegung setzt, und zwar mit der Beschleunigung

$$a_0 = F(A_0)/m = -A_0 \cdot D/m.$$

Folge: Abnahme der Auslenkung x , mit ihr (des Betrages) der rücktreibenden Kraft $F(x)$, aber Zunahme (des Betrages) der nach links gerichteten Geschwindigkeit $v(t)$. Sie ist eine Funktion der Zeit und wächst, bis der Pendelkörper seine Ruhelage $x = 0$ erreicht. Dort bleibt er aber nicht stehen, sondern läuft, für den Moment kräftefrei, mit momentan konstanter Geschwindigkeit weiter nach links, als Folge seiner Trägheit ([Abb. 4.1c](#)). Von da ab wird die Schraubenfeder gestaucht, x und F wechseln ihre Vorzeichen, und die Kraft bleibt, jetzt nach rechts gerichtet, rücktreibende Kraft. Sie bremst den Pendelkörper ab, bis er im linken *Umkehrpunkt* der Schwingung, also bei $-A_0$, momentan zur Ruhe kommt ([Abb. 4.1d](#)). Dort hat die Kraft ihren (momentanen) Höchstwert und beschleunigt den Pendelkörper, jetzt nach rechts. Wieder läuft er kräftefrei durch die Ruhelage ([Abb. 4.1e](#)) hindurch, jetzt weiter nach rechts, und dehnt die Feder, bis deren rücktreibende Kraft ihn im rechten Umkehrpunkt bei $+A_0$ momentan zur Ruhe bringt. Eine *Schwingungsdauer* T ist abgelaufen. Von nun ab wiederholt sich der ganze Vorgang *periodisch*, d.h. in immer der gleichen Weise, in immer gleichen Zeitspannen.

Beim Vergleich des Textes mit der [Abb. 4.1](#) darf man sich nicht irritieren lassen. Dem obersten Teilbild a sieht man ja nicht an, ob es das Federpendel noch in Ruhe darstellt, wie der Text annimmt, oder bereits schwingend im Nulldurchgang von links nach rechts, wie die Bildunterschrift annimmt.

Diese Bewegung der Masse kann mit einer Sinusfunktion beschrieben werden:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi_0\right) \\ &= A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) \end{aligned}$$

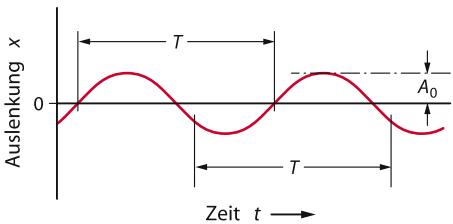


Abb. 4.2. Diagramm einer harmonischen Schwingung mit der Amplitude A_0 der Auslenkung $x(t)$ und der Schwingungsdauer T

(☞ Abb. 4.2). Man könnte auch die Kosinusfunktion nehmen. Eine solche Bewegung, die durch Kosinus oder Sinus beschrieben wird, nennt man *harmonische Schwingung*.

wichtig

Die Winkelfunktionen Sinus und Kosinus beschreiben harmonische Schwingungen.

Für die Schwingungsdauer T eines Pendels ist es gleichgültig, ob man sie von Umkehrpunkt zu Umkehrpunkt (auf der gleichen Seite), von Nulldurchgang zu Nulldurchgang (in gleicher Richtung) oder irgendeiner Auslenkung dazwischen zur nächsten gleichen danach zählt. Den Kehrwert der Schwingungsdauer $f = 1/T$ nennt man die *Frequenz* der Schwingung. Sie gibt an, wie viel Perioden in einer Sekunde ablaufen und hat die SI-Einheit $1/\text{s} = \text{s}^{-1}$. Es ist üblich, diese Einheit *Hertz* zu nennen und mit Hz abzukürzen.

wichtig

Einheit der Frequenz: Hertz = Hz = 1/s

Da die Mathematiker der Sinusfunktion eine Periode von 2π gegeben haben, steht in der Klammer der Sinusfunktion nicht einfach die Frequenz vor der Zeitvariable t , sondern Frequenz mal 2π : $\omega = 2\pi \cdot f \cdot \vartheta$ wird *Kreisfrequenz* genannt. Diese ist verwandt mit der Winkelgeschwindigkeit von Kap. 2.1.5 und hat deshalb den selben Buch-

stab. Vor der Sinusfunktion steht die *Amplitude* A_0 . Sie entspricht gerade der maximalen Auslenkung aus der Ruhelage $x = 0$, denn die Sinusfunktion wird maximal 1. In der Klammer steht noch der *Phasenwinkel* φ_0 , der bestimmt, wo die Schwingung bei der Zeit $t = 0$ startet. Meistens interessiert dieser Phasenwinkel nicht.

wichtig

Kenngrößen der Harmonischen Schwingung:

- Amplitude = Maximalausschlag
- Schwingungsdauer T
- Frequenz $f = 1/T$
- Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot f$

Die Amplitude, mit der das Federpendel schwingt, kann man offenbar frei wählen. Man startet die Bewegung eben mit einer mehr oder weniger starken Auslenkung. Die Schwingungsdauer sucht sich das Pendel aber selbst. Wie lange dauert nun eine Schwingungsdauer T ? Soviel kann man sich denken: Je größer die Masse m des Pendelkörpers ist, desto langsamer kommt sie in Bewegung und wieder heraus. In einer Formel für T wird man m über dem Bruchstrich erwarten. Umgekehrt, je stärker die Feder, desto schneller die Schwingung: In der Formel für T wird man die Federkonstante D unter dem Bruchstrich vermuten. Dass freilich

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

herauskommt, kann man sich auf solche Weise nicht überlegen; da muss man rechnen.

Definitionsgemäß ist beim Federpendel die Beschleunigung a gleich der zweiten Ableitung d^2x/dt^2 der Auslenkung nach der Zeit. Die Formel für die rücktreibende Kraft $F = -D \cdot x$ führt zusammen mit der Grundgleichung der Dynamik (2. Newton'sches Gesetz) auf die Gleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = -\frac{D}{m} \cdot x(t)$$

Eine Gleichung, die neben der Variablen (hier x) auch einen ihrer Differentialquotienten enthält, heißt **Differentialgleichung**. Tatsächlich ist diese Gleichung nichts anderes als die Bewegungsgleichung von Kapitel 2.3.4 für dieses Federpendel. Die Lösung einer solchen Gleichung ist nicht einfach eine Zahl, sondern eine Funktion $x(t)$. Diese Lösungsfunktion beschreibt eben gerade die Bewegung des Pendels. Der Mathematiker löst eine Differentialgleichung mit Scharfsinn, Phantasie und festen Regeln; der mathematische Laie, auch der Physiker, schlägt die Lösung in entsprechenden Büchern nach. Im vorliegende Fall geht es um die **Schwingungsdifferentialgleichung** in ihrer einfachsten Form. Sie wird durch eine Sinusfunktion $x(t) = A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ gelöst (es darf auch der Kosinus sein und es darf auch noch ein Phasenwinkel φ_0 in der Klammer stehen). Davon überzeugt man sich durch Ableiten und Einsetzen. Es gilt:

wenn

$$x(t) = A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

dann

$$\dot{x}(t) = A_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

und

$$\ddot{x}(t) = -A_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = -\omega^2 \cdot x(t)$$

Den Faktor ω bei jeder Ableitung schleppt die **Kettenregel** der **Differentiation** herein.

In der letzten Gleichung muss nun nur noch

$$\omega^2 = \frac{D}{m}$$

gesetzt werden, und die Schwingungsdifferentialgleichung steht da. Also löst die Sinusfunktion die Differentialgleichung wenn

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

gesetzt wird.

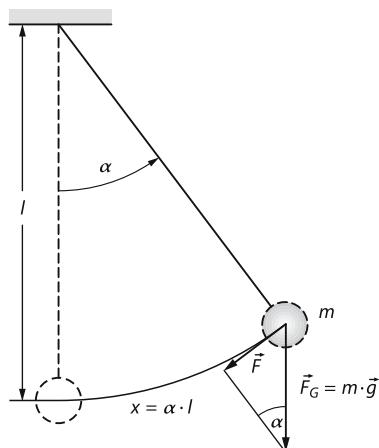


Abb. 4.3. Fadenpendel. Die Gewichtskraft \vec{F}_G kann in zwei zueinander senkrechte Komponenten zerlegt werden, von denen die eine (\vec{F}) rücktreibend wirkt und die andere vom Faden aufgefangen wird. Bei kleinen Ausschlägen kann $\sin \alpha = \alpha$ gesetzt werden. Dann schwingt das Pendel harmonisch mit der Schwingungsdauer $T = 2\pi \cdot \sqrt{l/g}$

Das Federpendel schwingt gemäß einer Sinusfunktion, also harmonisch, weil die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist. Ohne dieses funktioniert die ganze Rechnung nicht. Eine Schwingung kann immer noch herauskommen, aber keine harmonische.

Eben deswegen ist das technisch so einfache **Fadenpendel**, also ein mit langem Faden irgendwo aufgehängter Stein, genau betrachtet, kein harmonisch schwingendes Gebilde. Das Fadenpendel zweigt seine rücktreibende Kraft \vec{F} von der Gewichtskraft \vec{F}_G der Pendelmasse ab, und da besteht keine Proportionalität zum Auslenkwinkel α , sondern zu dessen Winkelfunktion $\sin(\alpha)$ (☞ Abb. 4.3). Bei sehr kleinen Winkeln macht das freilich nichts aus; $\sin(4,4^\circ) = 0,076719$ ist gegenüber $4,4^\circ$ im Bogenmaß (= 0,076794) erst um ein Promille zurückgeblieben, da darf man noch $\sin(\alpha) = \alpha$ setzen. Für kleine Winkel schwingt das Fadenpendel doch fast harmonisch und eine Rechnung entsprechend der obigen liefert:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Bemerkenswerterweise hängt die Kreisfrequenz also nur von der Pendellänge l und der Fallbeschleunigung g ab, aber nicht von der Masse m .

In einem Experiment kann man sich leicht überzeugen, dass die Schwingungsdauer bei großen Auslenkungswinkeln aber auch noch von der Amplitude abhängt. Dies ist ein untrügliches Zeichen für eine nicht harmonische Schwingung, denn bei der Sinusfunktion sind Amplitude und Frequenz völlig unabhängig voneinander.

Rechenbeispiel 4.1: Fahrwerksfeder

Eine vierköpfige Familie mit einer Gesamtmasse von 200 kg steigt in ihr Auto mit einer Masse von 1200 kg. Das Auto senkt sich um 3 cm. Wie groß ist die Federkonstante der vier Fahrwerksfedern zusammengenommen? Mit welcher Frequenz beginnt das Auto zu schwingen, wenn es durch ein Schlagloch fährt?

Lösung: Die zusätzlich Gewichtskraft beträgt $200 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 1962 \text{ N}$. Die Federkonstante ist also:

$$D = \frac{1962 \text{ N}}{3 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 6,54 \cdot 10^4 \text{ N/m.}$$

Bei einer Gesamtmasse von 1400 kg ist dann die Eigenfrequenz des Autos:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} = 1,1 \text{ Hz.}$$

Rechenbeispiel 4.2: Trägheitskraft im Auto

Nehmen wir an, unser Auto schwingt mit einer Amplitude von 10 cm. Mit wie viel Prozent der Gewichtskraft wird dann ein Insasse maximal zusätzlich in den Sitz gedrückt?

Lösung: Die Beschleunigung berechnet sich aus der zweiten Ableitung der Ortsfunktion:

$$\begin{aligned} a(t) &= \ddot{x}(t) = -A_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = -\omega^2 \cdot x(t) \\ &= -a_0 \cdot \sin(\omega \cdot t). \end{aligned}$$

$$a_0 = A_0 \cdot \omega^2$$

ist die maximal auftretende Beschleunigung, in unserem Fall: $a_0 = 4,8 \text{ m/s}^2$. Das sind immerhin fast 50 % der Fallbeschleunigung, die der Passagier als zusätzliche Trägheitskraft empfindet. Das ist unangenehm. Deshalb sind alle Autos mit Stoßdämpfern ausgestattet, die die Schwingung möglichst gleich wieder wegdämpfen.

4.1.3 Gedämpfte Schwingungen

Wie sieht es mit der Mechanischen Energie bei einer Schwingung aus? Wenn eine Masse m mit der Geschwindigkeit v läuft, besitzt sie die kinetische Energie $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m \cdot v^2$. Wenn eine Feder mit der Federkonstanten D um das Stück x gedehnt oder gestaucht wird, ändert sich die potentielle Energie um $W_{\text{pot}} = \frac{1}{2}D \cdot x^2$. Folglich besitzt ein Federpendel eine Schwingungsenergie W_s , die sich irgendwie aus W_{kin} und W_{pot} zusammensetzt. Wie?

Beim Nulldurchgang ist die Feder momentan entspannt: $W_{\text{pot}} = 0$. Folglich muss der Pendelkörper die Schwingungsenergie ganz allein tragen. Das kann er auch, denn er ist ja auf seiner Höchstgeschwindigkeit $\pm v_0$. Die geht quadratisch in W_{kin} ein, folglich spielt die Richtung der Geschwindigkeit keine Rolle. In den Umkehrpunkten ist der Pendelkörper momentan in Ruhe: $W_{\text{kin}} = 0$. Folglich muss die Feder die Schwingungsenergie ganz allein tragen. Das kann sie auch, denn sie ist ja mit der Amplitude $\pm A_0$ maximal gedehnt oder gestaucht. A_0 geht quadratisch in W_{pot} ein, folglich spielt das Vorzeichen keine Rolle. Für die vier genannten Positionen darf man also schreiben

Schwingungsenergie

$$W_{\text{S0}} = \frac{1}{2}m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2}D \cdot A_0^2.$$

Eine harmonische Schwingung erreicht immer wieder die gleiche Amplitude A_0 ; demnach hat die Schwingungsenergie W_s zumindest alle halbe Schwingungsdauer den genannten Wert.

Da darf man erwarten, dass es zwischendurch nicht anders ist und sich W_{pot} und W_{kin} bei jeder momentanen Auslenkung $x(t)$ ständig zum gleichen W_{S0} addieren:

$$W_{S0} = W_{\text{kin}}(t) + W_{\text{pot}}(t) \\ = \frac{1}{2} m \cdot v^2(t) + \frac{1}{2} D \cdot x^2(t) = \text{const.}$$

Mit anderen Worten:

wichtig

Beim harmonisch schwingenden Oszillator wechselt die volle Schwingungsenergie ständig zwischen der potentiellen Energie der Feder und der kinetischen Energie des Pendelkörpers hin und her.

Die harmonische Schwingung hält ihre Amplitude $A = A_0$, der harmonische Oszillator seine Schwingungsenergie W_S eisern konstant, auf immer und ewig. Das ist graue Theorie. In der Wirklichkeit schwingt ein Pendel aus, wenn die Uhr abgelaufen ist: jede folgende Amplitude bleibt um ein Stückchen ΔA kleiner als die letzte, die Schwingung ist *gedämpft* und verliert Schwingungsenergie. Das darf man so sagen, obwohl Energie als solche selbstverständlich nicht verloren gehen kann. Das verbietet der Energiesatz. Es wird lediglich Schwingungsenergie in eine andere Energieform umgewandelt, üblicherweise durch Reibung in Wärme. In die Schwingungsdifferentialgleichung muss dann also noch ein Term für die Reibungskraft F_R eingefügt werden:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t) = -\frac{D}{m} \cdot x(t) + \frac{F_R}{m}$$

Die sich dann ergebende Differentialgleichung kann schon recht schwer zu lösen sein. Eine einigermaßen leicht zu lösende Schwingungsgleichung ergibt sich dann, wenn die Reibungskraft geschwindigkeitsproportional angenommen wird:

$$F_R = -\mu \cdot \frac{dx}{dt}$$

F_R ist negativ, da sie der Bewegung wie die Federkraft entgegenwirkt. μ ist ein Re-

bungskoeffizient. Dann lautet die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t) = -\frac{D}{m} \cdot x(t) - \frac{\mu}{m} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Wie man sich durch Einsetzen überzeugen kann, lautet die Lösung nun:

$$x(t) = A_0 e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Die Dämpfungskonstante δ ergibt sich zu

$$\delta = \frac{\mu}{2 \cdot m}.$$

Die Amplitude $A(t)$ und die Schwingungsenergie $W_S(t)$ nehmen exponentiell mit der Zeit ab, und zwar A mit der Dämpfungskonstanten $-\delta$:

$$A(t) = A_0 e^{-\delta \cdot t}$$

und W_S , weil dem Amplitudenquadrat proportional, mit -2δ :

$$W_S(t) = W_{S0} e^{-2\delta \cdot t}.$$

☞ Abbildung 4.4 zeigt eine in dieser Weise *gedämpfte Schwingung* graphisch. Ihre Formel benutzt zwar weiter die Winkelfunktion Kosinus, um eine harmonische Schwingung handelt es sich aber nicht mehr, nicht einmal um einen periodischen Vorgang.

Mit wachsendem δ kommt das gedämpfte Pendel immer schneller zum Stillstand, bis es

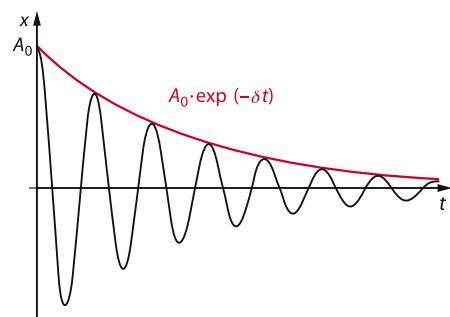


Abb. 4.4. Gedämpfte Schwingung. Die blaue gezeichnete Kurve läuft durch die Maximalausschläge der Schwingung und ist eine Exponentialfunktion

schließlich, ohne auch nur einmal durchzuschwingen, auf schnellstem Weg in die Ruhelage zurückkehrt. Das ist der sog. *aperiodische Grenzfall*, um den sich die Stoßdämpfer im Auto und auch die Instrumentenbauer bemühen. Eine Waage soll ihren Messwert ja möglichst rasch anzeigen und nicht lange um ihn herumpendeln. Die Instrumente im Armaturenbrett des Autos müssen grobe Erschütterungen ertragen. Darum dämpft man sie bis in den sog. *Kriechfall*, in dem sie nur betont langsam auf den Messwert zumarschieren.

Ein Kind, zum ersten Mal auf eine Schaukel gesetzt, muss angestoßen werden und nach wenigen Schwingungen wieder. Es lernt aber bald, durch geschickte Bewegung des Oberkörpers und der Beine, die Schaukel in Gang zu halten, also verlorene Schwingungsenergie durch Muskelarbeit zu ersetzen, ohne im Geringsten zu verstehen, wie das eigentlich funktioniert.

Die rhythmische Energiezufuhr muss nicht gefühlsmäßig oder gar durch Nachdenken besorgt werden, eine rein mechanisch oder auch elektromechanisch vom Pendel selbst ausgelöste *Selbststeuerung* tut es auch, wie alle Uhren beweisen. Was bei ihnen Ziel der Konstruktion ist, kann bei Regelkreisen ausgesprochen stören: Selbsterregung unerwünschter Schwingungen, (Abb. 3.15 brachte ein medizinisches Beispiel (Regelung des Blutdrucks). Wichtiges, wenn auch nicht einziges Mittel zur Abhilfe, bildet eine Erhöhung der Dämpfung.

4.1.4 Erzwungene Schwingungen

Die regelmäßige Energiezufuhr für eine ungedämpfte Schwingung muss nicht vom Pendel selbst ausgelöst werden, sie kann auch von einem unabhängigen Erreger ausgehen. Wird z.B. das linke Ende der Pendelfeder in (Abb. 4.5 von irgendeiner Mechanik periodisch hin und her gezogen, so schwingt der Pendelkörper auch jetzt ungedämpft, allerdings nicht mit seiner Eigenfrequenz f_0 , sondern mit der Frequenz f des Erregers: Das Pendel führt eine *erzwungene Schwingung*.



Abb. 4.5. Federpendel zur Untersuchung erzwungener Schwingungen, schematisch. Das linke Ende der Feder wird mit vorgebbarer Frequenz und Auslenkungsamplitude sinusförmig hin- und herbewegt

gung aus. Dabei hat es seine Eigenfrequenz freilich nicht vergessen; zumeist schwingt es nämlich mit umso größerer Amplitude, je näher f und f_0 beieinander liegen. Nicht selten klappert ein altes Auto bei einer ganz bestimmten Geschwindigkeit besonders laut: irgendein Stück Blech hat sich gelockert, ist dadurch schwingungsfähig geworden und gerät in **Resonanz**, wenn seine Eigenfrequenz vom Motor getroffen wird.

Die Schwingungsdifferentialgleichung erhält nun noch einen weiteren Term, der die periodisch anregende Kraft $F(t) = F_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}(t) \\ = -\frac{D}{m} \cdot x(t) - \frac{\mu}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m} \sin(\omega \cdot t)$$

Komplizierte Differentialgleichungen haben komplizierte Lösungen. Wird an dem zunächst ruhenden Pendel die anregende Kraft plötzlich eingeschaltet, so gibt es einen komplizierten Einschwingvorgang (Abb. 4.6). Nach einer Weile stellt sich aber ein stabiler **stationärer Zustand** ein, in dem das Pendel harmonisch schwingt. Wird die anregende Kraft wieder abgeschaltet, so schwingt das Pendel in einer gedämpften Schwingung aus. Im stationären Zustand hängen Amplitude und Phase der Pendelschwingung von der Erregerfrequenz ab (Abb. 4.7). Bei kleinen Frequenzen folgt der Oszillatator dem Erreger unmittelbar, beide erreichen ihre Maximalausschläge zum gleichen Zeitpunkt: Sie schwingen *in Phase*, ohne Phasenverschiebung also, d.h. mit dem Phasenwinkel $\varphi = 0$. Erhöht man die Frequenz des Erregers, so wächst im Allgemeinen die Amplitude des Oszillators. Sie erreicht ihren Höchstwert so ungefähr bei dessen Eigenfrequenz und geht von da ab asymptotisch auf null zurück. Erreger und Pendel schwingen

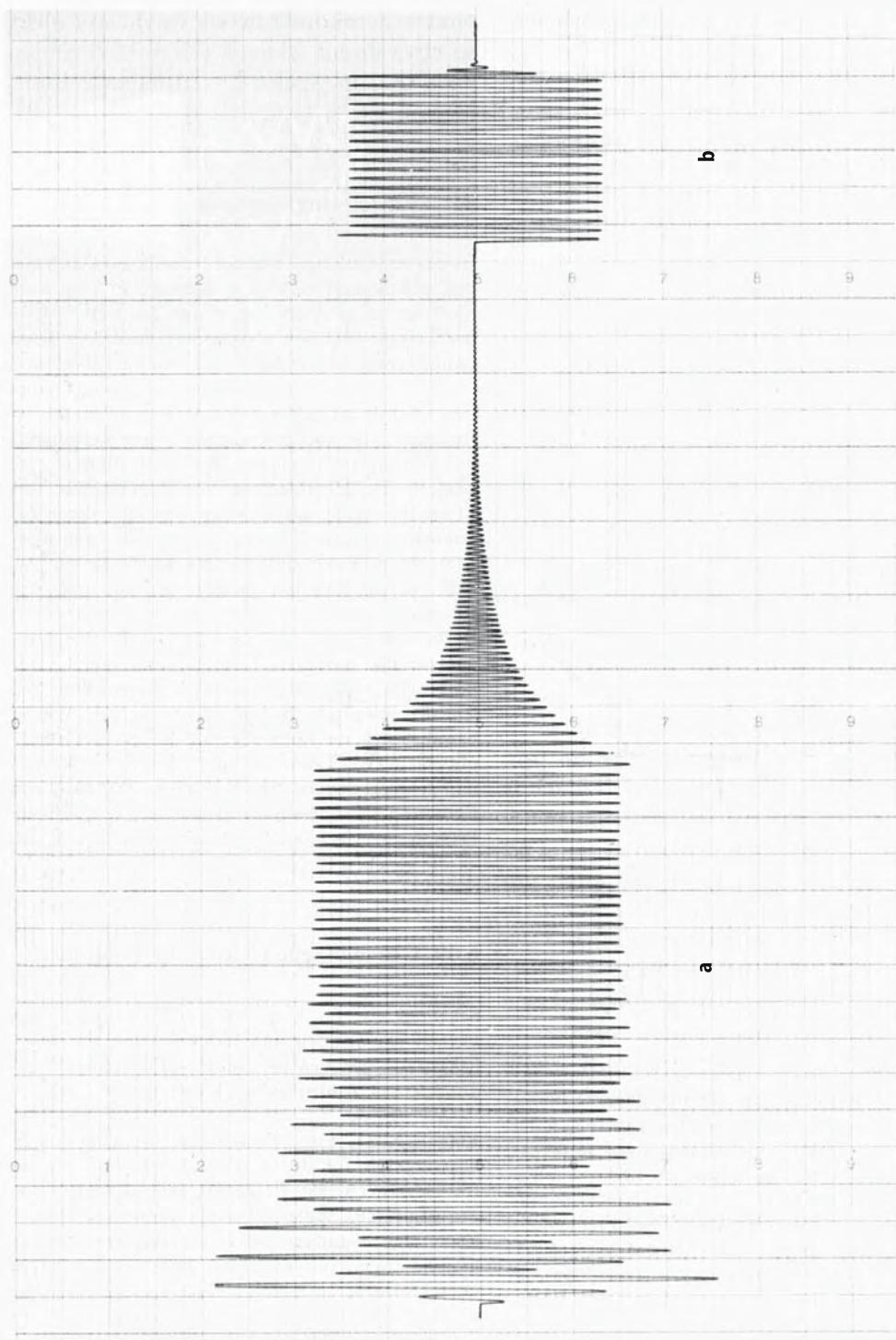


Abb. 4.6. Einstichingsvorgänge brauchen nicht weniger Zeit als das Ausschwingen. a) schwache Dämpfung; b) nahezu aperiodische Dämpfung (hier ist die Amplitude um den Faktor 5 überhöht gezeichnet)

schließlich in *Gegenphase* ($\varphi = \pi$). In unglücklichen Fällen kann die Resonanzamplitude so groß werden, dass der Oszillatork dabei zu Bruch geht. Durch seinen Blechtrommler Oskar Matzerath, der gläserne Gegenstände aller Art „zersingen“ kann, hat Günter Grass der *Resonanzkatastrophe* zu literarischem Ruhm verholfen. Physikalisch setzt sie Oszillatoren mit extrem geringer Dämpfung voraus. Bis in den Kriegsfall hinein gedämpfte Resonatoren sind zu einer *Resonanzüberhöhung* über die Amplitude des Erregers hinaus gar nicht fähig.

4.1.5 Überlagerung von Schwingungen

Wenn man die momentanen Auslenkungen mehrerer gleichzeitig ablaufender Schwingungen addiert, so spricht man von einer

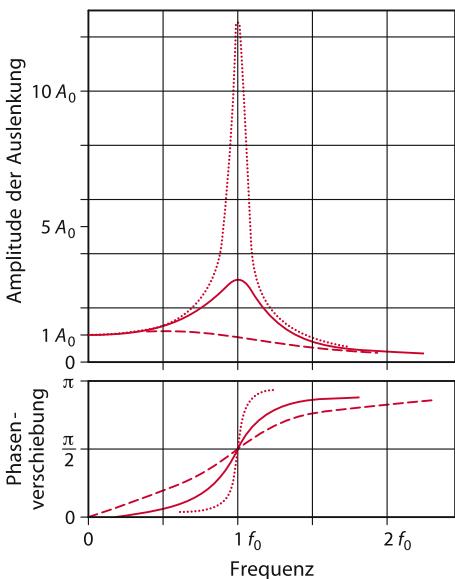


Abb. 4.7. Resonanzkurven eines Oszillators mit der Eigenfrequenz f_0 (sie ist zugleich Einheit der Abszisse). Einheit der Ordinate ist die Amplitude A_0 der Auslenkung bei kleinen Frequenzen. Mit stärkerer Dämpfung nimmt die Resonanzüberhöhung ab und die Phasenverschiebung zwischen Erreger und Resonator zu. Das Maximum der Resonanzkurve verschiebt sich zu kleinen Frequenzen (nach R. W. Pohl)

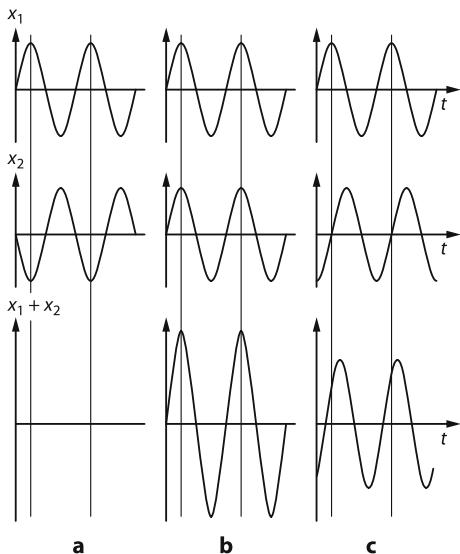


Abb. 4.8 a-c. Überlagerung zweier Schwingungen mit gleicher Frequenz und Amplitude der Auslenkung. a) Auslöschung bei Gegenphase, destruktive Interferenz; b) Amplitudenverdopplung bei Überlagerung in Phase, konstruktive Interferenz; c) mittlere Amplitude und Phasenlage bei Fällen zwischen den beiden Extremen

Überlagerung von Schwingungen. Rein mathematisch geht es also um die Summe

$$x(t) = \sum_n A_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t + \varphi_n).$$

Der Phasenwinkel φ schiebt die zugehörige Teilschwingung in die richtige Position auf der Zeitachse. Am besten lässt man sich die Summe von einem Computer nicht nur ausrechnen, sondern gleich als Kurve auf Papier oder Bildschirm aufzeichnen. Dabei handelt es sich keineswegs um eine mathematische Spielerei; die Überlagerung von Schwingungen hat durchaus praktische Bedeutung, wie sich noch herausstellen wird.

In besonders einfachen Fällen kann man auch ohne Rechnung herausfinden, was bei einer Überlagerung von Schwingungen herauskommen muss, etwa bei der Addition zweier Sinusschwingungen gleicher Amplitude und Frequenz, d.h. bei

$$x(t) = A_0 \{ \sin(\omega \cdot t) + \sin(\omega \cdot t + \varphi) \}.$$

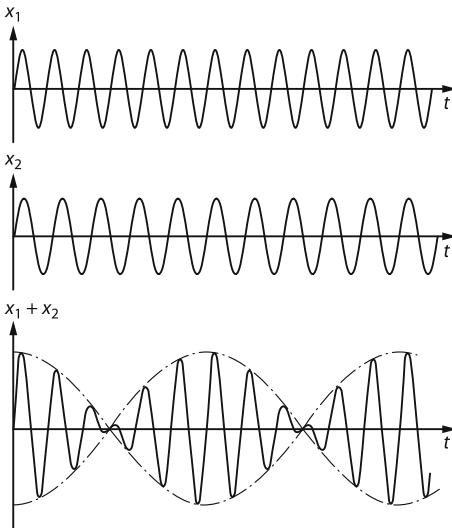


Abb. 4.9. Schwingung: Überlagerung zweier Schwingungen mit gleicher Auslenkungsamplitude und nahezu gleichen Frequenzen

Hier darf der Phasenwinkel φ auf keinen Fall vergessen werden; er spielt eine entscheidende Rolle. Bei $\varphi = 0$ sind beide Schwingungen *in Phase*, ihre Auslenkungen stimmen zu jedem Zeitpunkt nach Betrag und Vorzeichen überein. Demnach ist auch die Summe

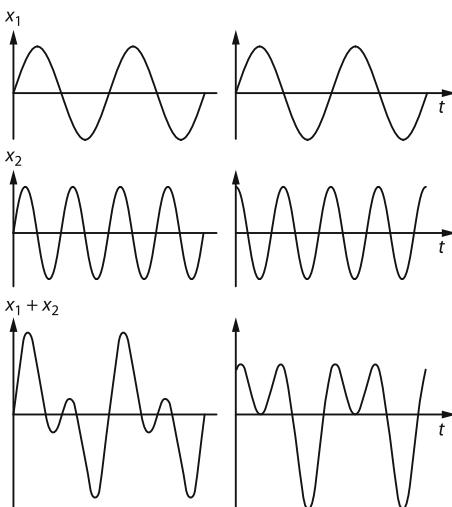


Abb. 4.10. Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Auslenkungsamplitude im Frequenzverhältnis 1:2. Die Phasenbeziehung ist wesentlich

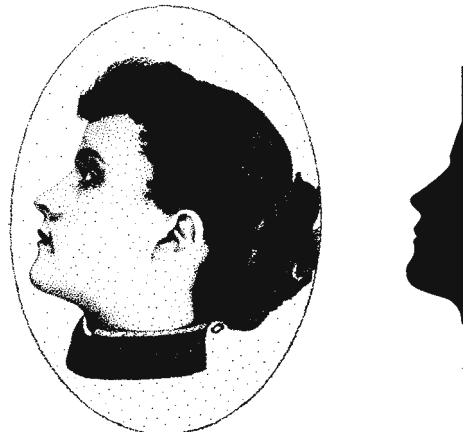


Abb. 4.11. Auch die Grenzkurve eines (geeigneten) Scherenschnittes kann in Sinusschwingungen zerlegt werden (sofern man sich diesen periodisch wiederholen darf). Die Fourieranalyse des gezeichneten Profils lautet:

$$\begin{aligned}
 1,00 \sin(x+5,27) &+ 0,35 \sin(2x+5,20) \\
 +0,28 \sin(3x+3,40) &+ 0,14 \sin(4x+3,75) \\
 +0,09 \sin(5x+1,40) &+ 0,01 \sin(6x+2,98) \\
 +0,54 \sin(7x+0,59) &+ 0,01 \sin(8x+4,22) \\
 +0,03 \sin(9x+5,78) &+ 0,03 \sin(10x+3,63) \\
 +0,01 \sin(11x+1,55) &+ 0,01 \sin(12x+4,00) \\
 +0,01 \sin(13x+1,78) &+ 0,01 \sin(14x+5,32) \\
 +0,01 \sin(15x+2,95) &+ 0,01 \sin(16x+4,01) \\
 +0,01 \sin(17x+3,61) &+ 0,01 \sin(18x+1,12)
 \end{aligned}$$

mit beiden Schwingungen in Phase, hat aber doppelte Amplitude (☞ Abb. 4.8b); man spricht hier von **konstruktiver Interferenz**. Bei $\varphi = \pi = 180^\circ$ befinden sich die beiden Schwingungen *in Gegenphase*; ihre Auslenkungen stimmen nur noch im Betrag überein, haben aber entgegengesetzte Vorzeichen. Folglich ist die Summe zu jedem Zeitpunkt null; die Schwingungen löschen sich gegenseitig aus: **destruktive Interferenz** (☞ Abb. 4.8a). Jeder andere Phasenwinkel führt zu einem Ergebnis zwischen diesen beiden Grenzfällen; ☞ Abb. 4.8c zeigt ein Beispiel.

Bemerkenswert ist die Überlagerung zweier Schwingungen von nicht genau, aber fast gleicher Frequenz: Sie führt zur **Schwebung** (☞ Abb. 4.9). Verstärken sich die beiden Schwingungen zu irgendeinem Zeitpunkt, weil sie gerade gleiche Phase haben, so wird ein Weilchen später die eine Schwingung der anderen um genau eine halbe Schwingungsdauer davongelaufen sein: beide geraten in

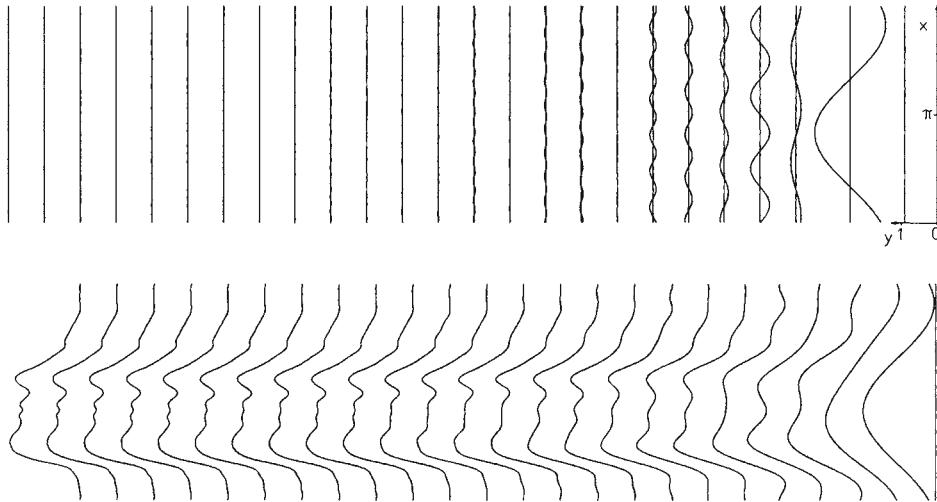


Abb. 4.12. Oberes Teilbild: *Fourier-Analyse* – Zeichnungen der ersten 26 Fourier-Glieder des vorgegebenen Profils; unteres Teilbild: *Fourier-Synthese* die Fourier-Glieder werden nacheinander von rechts nach links aufaddiert. (Computer-Rechnung und -Zeichnung von W. Steinhoff)

Gegenphase und löschen sich aus. Dieses Spiel wiederholt sich regelmäßig und zwar mit der halben *Differenzfrequenz*, der halben Differenz der beiden Einzelfrequenzen.

Etwas schwieriger zu übersehen ist die Überlagerung zweier Schwingungen im Frequenzverhältnis 1:2. Auch hier hängt das Resultat wesentlich von der Phasenlage ab (Abb. 4.10). Grundsätzlich darf man auch mehr als zwei Schwingungen einander überlagern. Treibt man es weit genug, so kann man grundsätzlich jeden periodisch ablaufenden Vorgang, jede noch so komplizierte Schwingungsform aus einzelnen Sinusschwingungen zusammensetzen (*Fourier-Synthese*) oder auch in sie zerlegen (*Fourier-Analyse*). In mathematischer Strenge lässt sich beweisen: Die Frequenz f_0 , mit der sich ein beliebiger Vorgang periodisch wiederholt, erscheint in der Analyse als Frequenz der **Grundschwingung**. Ihr überlagern sich Oberschwingungen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz f_0 sind. Über die Phasenwinkel dieser sog. **Harmonischen** lässt sich Allgemeines nicht aussagen, sie hängen vom Einzelfall ab. Dies gilt auch für die Amplituden, die allerdings normalerweise mit steigender Frequenz schließlich einmal monoton gegen null gehen.

So lässt sich zum Beispiel das Profil einer Frau, das man sich allerdings periodisch fortgesetzt denken muss, durch Überlagerung von Sinusfunktionen synthetisieren (Abb. 4.11 und Abb. 4.12). Oft genügt es, über die Amplituden der vorkommenden Sinusfunktionen bescheid zu wissen. Dann bietet es sich an, ein **Spektrum** in Histogammform darzustellen. Die Abb. 4.13 gibt Beispiele solcher Spektren für drei verschiedene Schwingungsverläufe.

wichtig

Anharmonische Schwingungen können als Überlagerung harmonischer Schwingungen aufgefasst werden.

4.2 Seilwellen

Einleitung

Koppelt man viele Pendel so aneinander, dass sie eine Pendelkette bilden, dann wird die an einem Ende z.B. von Hand zugeführte Schwingungsenergie von Pendel zu Pendel weitergereicht: Eine Welle läuft

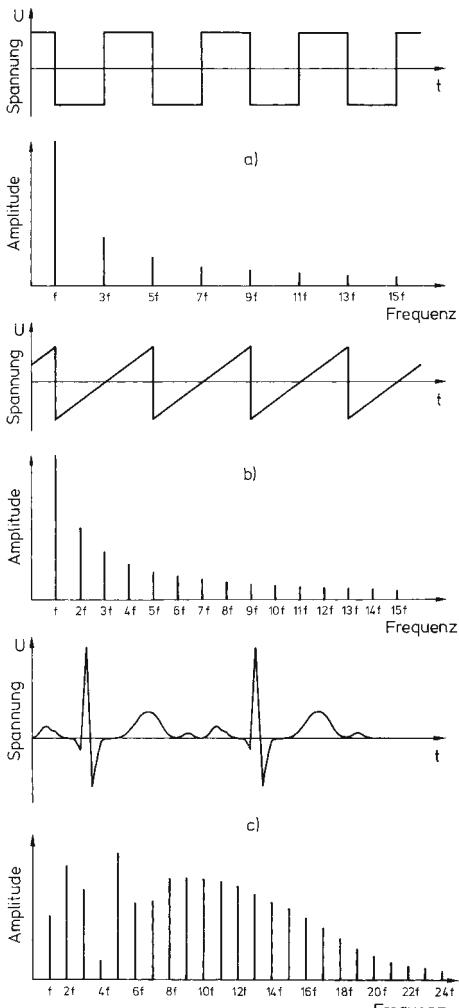


Abb. 4.13. Spektren verschiedener Schwingungsformen. Das Rechteck (a) enthält nur ungradzahlige Oberschwingungen (in gleicher Phase), der Sägezahn (b) alle ganzzahligen Oberschwingungen (abwechselnd) in Phase und Gegenphase, im EKG (c) fallen die Amplituden der Oberschwingungen nicht monoton ab. Schneidet ein Tiefpass die hohen Frequenzen eines Spektrums ab, so verzerrt er den Verlauf der Schwingung.

die Pendelkette entlang. Sie transportiert Energie, aber keine Materie. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit hängt von den mechanischen Details der Pendelkette ab, ist aber bei einer harmonischen Welle stets das Produkt aus Wellenlänge und Frequenz. Zwei gegenläufige Wellen gleicher Frequenz bilden eine stehende Welle.

Ein Federpendel schwingt harmonisch. Es hält sich an die Resonanzkurve, sobald seinem Federende eine sinusförmige Bewegung aufgezwungen wird. Was aber geschieht, wenn man zwei Federpendel so aneinander koppelt, wie Abb. 4.14 das zeigt? Einem Pendelkörper macht es weiter nichts aus, wenn er statt von einer nun von zwei Federn in die Ruhelage gezogen wird; für ihn addieren sich lediglich die beiden Federkonstanten.

Stößt man zunächst nur ein Pendel an, so glaubt es, zwischen zwei fest eingespannten Federn zu schwingen; der andere Pendelkörper bleibt ja zunächst noch in Ruhe. Aus seiner Sicht führt aber eines seiner Federen den eine sinusförmige Schwingung aus, und zwar genau in seiner Eigenfrequenz. Folglich erinnert er sich der Resonanzkurve und beginnt seinerseits zu schwingen. Die dafür notwendige Energie kann ihm aber nur vom ersten Pendel geliefert werden; dessen Amplitude nimmt also ab. Wenn sie auf null angekommen ist, haben beide Oszillatoren ihre Rollen vertauscht; die Energie läuft zurück und das Spiel wiederholt sich. Jedes der beiden Pendel führt die Bewegung einer Schwebung aus (Abb. 4.15), sie tauschen die Schwingungsenergie periodisch untereinander aus. Die Schwingungsfrequenz derartiger **gekoppelter Pendel** hängt wesentlich von der Stärke der koppelnden Feder ab.

Merklich anders verhält sich eine lange Kette gleicher Oszillatoren, zumal wenn sie relativ stark gekoppelt sind (Abb. 4.16). Hier gibt jedes Pendel mit nur geringer Zeitverzögerung Schwingungsenergie bereits an seinen Nachbarn zur Rechten weiter, während es noch weitere Energie vom Nachbarn zur Linken aufnimmt: Die Erregung läuft auf diese Weise von dem einen Ende der Kette zum andern und möglicherweise auch wieder zurück. Das einzelne Pendel verlässt dabei seinen Platz in der Kette nicht, es schwingt lediglich um seine Ruhelage. Materie wird nicht transportiert, sondern lediglich ein Erregungszustand, repräsentiert durch lokale Pendelbewegungen und die mit ihnen verbundene Schwingungsenergie: Entlang der Pendelkette läuft eine **Welle**.

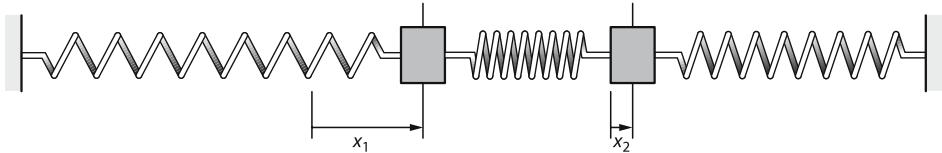


Abb. 4.14. Zwei gekoppelte Federpendel mit den momentanen Auslenkungen x_1 und x_2

wichtig

Eine Welle läuft eine Kette gekoppelter Oszillatoren entlang.
Wellen transportieren Energie, aber keine Materie.

Grundsätzlich sind den Oszillatoren der Pendelkette beim Transport der Welle verschiedene gemeinsame Schwingungsrichtungen erlaubt. Man unterscheidet zwei Grenzfälle (☞ Abb. 4.17):

wichtig

Longitudinale Welle: Oszillatoren schwingen in Ausbreitungsrichtung;
Transversale Welle: Oszillatoren schwingen quer zur Ausbreitungsrichtung.

Dabei übernimmt jedes einzelne Pendel den Schwingungsablauf von seinem Nachbarn: Die Welle läuft durch die ganze Kette, ob sie

nun aus einem kurzen Impuls oder einem längeren Wellenzug besteht. Übrigens wird nicht verlangt, dass man Pendelmassen und Kopplungsfedern deutlich voneinander trennen kann. Auch eine lange Schraubenfeder vermag Längs- und Querwellen zu transportieren, sogar ein Seil, eine Wäschleine; hier sind allerdings nur Querwellen leicht zu erkennen.

Die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** einer Welle hängt von den mechanischen Eigenschaften der Pendelkette, des „Mediums“ ab, in dem die Welle läuft. Auf jeden Fall muss aber eine sinusförmige Welle während einer Schwingungsdauer T um genau eine Wellenlänge fortschreiten (☞ Abb. 4.18). Kehrwert von T ist die Frequenz f . Daraus folgt $c = \lambda \cdot f$.

wichtig

Ausbreitungsgeschwindigkeit
= Wellenlänge mal Frequenz.
 $c = \lambda \cdot f$

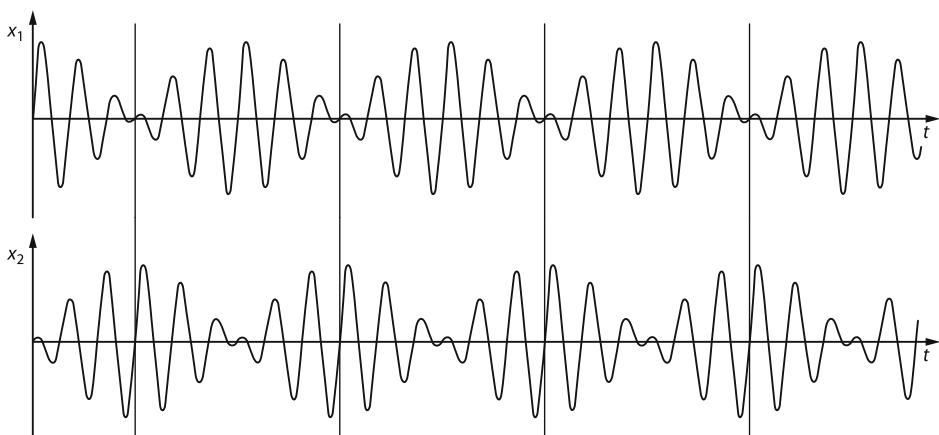


Abb. 4.15. Schwingungen gekoppelter Pendel: Die Schwingungsenergie wechselt mit der Schwingungsfrequenz zwischen beiden Pendeln hin und her



Abb. 4.16. Pendelkette

An diese Beziehung hält sich jede sinusförmige Welle, ob sie nun Seil-, Schall-, Licht-, Wasser- oder sonst eine Welle ist. Im Allgemeinen muss man allerdings damit rechnen, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Frequenz abhängt: $c = c(f)$. Diese *Dispersion* spielt z.B. bei der optischen Abbildung durch Linsen eine bedeutsame Rolle (s. Kap. 7.2.4). Ihre Folge: Die Fourier-Komponenten eines Impulses laufen in der Welle unterschiedlich schnell, ändern also ihre gegenseitigen Phasenbeziehungen während der Laufzeit und damit auch die Form des Impulses. Wer es ganz genau nimmt, muss deshalb zwischen der *Phasengeschwindigkeit* der (unendlichen) Sinuswelle und der meist kleineren *Gruppengeschwindigkeit* eines begrenzten Wellenzuges unterscheiden.

Kommt eine Welle an das Ende der Pendelkette, so kann sie (unter geeigneten Bedingungen) reflektiert werden und die Pendelkette zurücklaufen. Die Überlagerung zweier gegenläufiger Wellen gleicher Frequenz und Amplitude führt zu einer **stehenden Welle**: Einzelne Oszillatoren bleiben ständig in Ruhe, sie liegen in *Schwingungsknoten*; andere sind in maximaler Bewegung, sie liegen in *Schwingungsbäuchen* (☞ Abb. 4.19). Der Abstand zwischen benachbarten Knoten oder Bäuchen beträgt eine halbe Wellenlänge, der zwischen Knoten und Bauch ein Viertel.

wichtig

Zwei gegenläufige Wellen gleicher Amplitude und Frequenz liefern eine stehende Welle mit ortsfesten Schwingungsbäuchen und -knoten.

Rechenbeispiel 4.3: Was für eine Welle?

Welche Ausbreitungsgeschwindigkeit hat eine Welle mit einer Frequenz von 10^{10} Hz und einer Wellenlänge von 3 cm.

Lösung: $c = \lambda \cdot f = 3 \cdot 10^8$ m/s. Das ist eine ziemlich hohe Geschwindigkeit, tatsächlich die höchste, die es gibt: die von Licht im Vakuum. Es handelt sich wohl um eine elektromagnetische Mikrowelle (Kapitel 7.1).

4.3

Schallwellen

Einleitung

Druckwellen in Luft, aber auch in anderen Gasen, in Flüssigkeiten und Festkörpern bezeichnet man als Schall. Das Gehör des Menschen vermag Schall in einem Frequenzbereich von ca. 16 Hz bis ca. 16 kHz wahrzunehmen (Hörschall). Zwischen Hörschwelle und Schmerzschwelle liegen bei 1 kHz etwa 12 Zehnerpotenzen in der Schallstärke. Einen so großen Bereich kann das Gehör nur mit einer ungefähr logarithmisch verlauf-

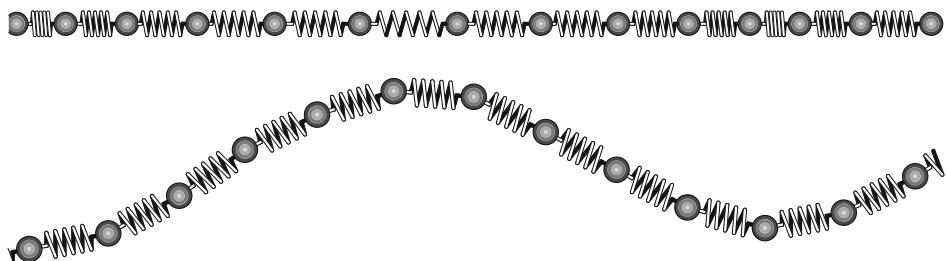


Abb. 4.17. Längs- und Querwelle, „Momentaufnahmen“, schematisch

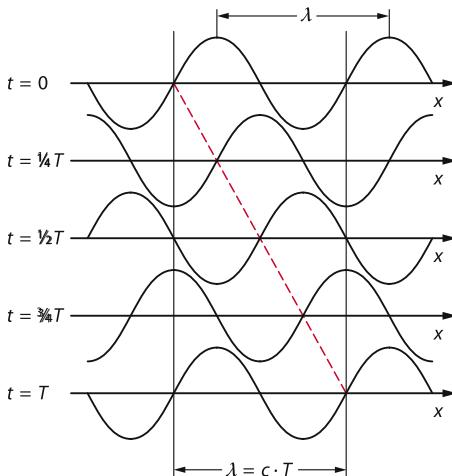


Abb. 4.18. Eine Welle läuft in der Schwingungsdauer T um eine Wellenlänge λ weiter: Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \lambda \cdot f$

fenden Empfindlichkeit überbrücken (Weber-Fechner-Gesetz). Dies versucht die Phonskala der Lautstärke zu berücksichtigen.

4.3.1 Schallerzeugung

Mechanische Schwingungen im Frequenzbereich von etwa 16 Hz bis etwa 16 kHz kann der Mensch hören; man nennt sie **Hörschall**. Schwingungen kleinerer Frequenz werden als Bewegungen empfunden, unterhalb von 3 Hz lassen sie sich unmittelbar abzählen; in der Akustik nennt man sie **Infraschall**. Die obere Hörgrenze hängt vom Lebensalter ab und geht mit den Jahren zurück. Schall, dessen Frequenz über der Hörgrenze liegt, heißt **Ultraschall**.

wichtig

Hörschall: Frequenzen zwischen ca. 16 Hz und ca. 16 kHz,
Ultraschall: Frequenzen über dem Hörbereich.

Alles, was sich in Luft bewegt, erzeugt Schall; bewegt es sich periodisch und im Bereich des Hörschalls, so erzeugt es einen Ton oder

einen Klang; bewegt es sich nichtperiodisch, so gibt es nur ein Geräusch. Die Zähne einer Kreissäge greifen periodisch ins Holz und kreischen dementsprechend; die Tonhöhe sinkt, wenn es dem Motor Mühe macht, das Sägeblatt durchzuziehen. Auch Drehbewegungen sind periodische Bewegungen; der Bohrer des Zahnarztes singt penetrant und drehzahlabhängig.

Vielseitigste Form der Schallerzeugung ist die mit der Membran eines Lautsprechers: Sie vermag Stimmen von Mensch und Tier zu imitieren und alle Musikinstrumente. Dazu wird eine meist konische Membran aus starkem Papier von einem Elektromagneten gewaltsam hin und her gezogen, und zwar im Takt eines Wechselstromes, den ein elektronischer Verstärker liefert. Bewegt sich die Membran momentan nach rechts, so schiebt sie dort Luftmoleküle zusammen, erzeugt also einen (geringen) Überdruck;

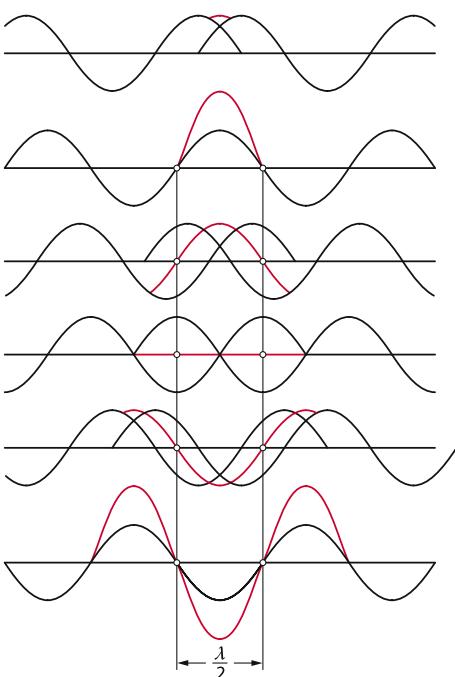


Abb. 4.19. Zwei gegenläufige Wellen mit gleicher Auslenkungsamplitude und gleicher Frequenz geben eine stehende Welle mit ortsfesten Schwingungsknoten (Ruhe) und ortsfesten Schwingungsbäuchen (maximale Amplitude der Auslenkung)

entsprechend führt eine Bewegung in Geigenrichtung zu einem Unterdruck. Überwie Unterdruck breiten sich mit Schallgeschwindigkeit aus:

wichtig

Schallwellen in Gasen und Flüssigkeiten sind Druckwellen.

Edelste Form der Musikerzeugung ist die mit der Geige. Ihre Saiten schwingen in der Form stehender Seilwellen. Da eine Saite an ihren Enden fest eingespannt ist, müssen dort Schwingungsknoten liegen. Sie haben den Abstand einer halben Wellenlänge und liefern damit den einen bestimmenden Faktor (Saitenlänge l) zur **Grundfrequenz** f_0 der Saitenschwingung:

$$f_0 = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{l/2} = \frac{2c}{l}$$

Diese Frequenz lässt sich erhöhen, wenn man die wirksame Länge der Saite verkürzt: so werden Geigen gespielt. Die Grundfrequenz steigt aber auch, wenn man die Saite straffer spannt, denn damit erhöht man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c der Seilwelle: so werden Geigen gestimmt. Die Forderung nach Knoten an den Enden der Saite verbietet nicht, dass weitere Knoten auftreten, z.B. einer genau in der Mitte oder zwei auf je einem Drittel der wirksamen Länge (Abb. 4.20). Unterteilen können die Knoten ihre Saite aber nur in ganzzahligen Bruchteilen; die zugehörigen Frequenzen sind demnach ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz. Derartige **Ober töne** erzeugt jedes Musikinstrument, sie machen seine **Klangfarbe** aus. Freilich, nicht die Saite be-

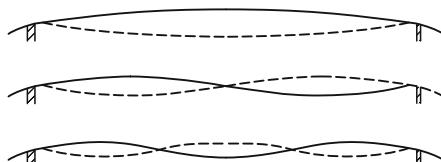


Abb. 4.20. Geigensaiten in ihrer Grundschwung und den beiden ersten Oberschwingungen

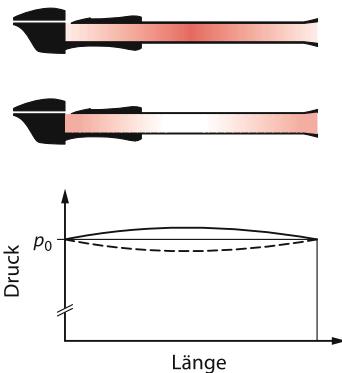


Abb. 4.21. Offene Pfeife (Blockflöte). Der Luftdruck p hat an beiden Enden einen Knoten und schwankt im Schwingungsbauch ein ganz klein wenig um den Barometerdruck p_0

stimmt die Schönheit des Geigenklanges, sondern der Geigenkörper. Die Saite allein kann des akustischen Kurzschlusses wegen so gut wie gar nicht abstrahlen, sie braucht den Geigenkörper als Resonanzboden. Desse ungeheuer zahlreiche Eigenfrequenzen, von der Saite mehr oder weniger angeregt, machen den Klang einer Stradivari.

Nicht nur Festkörper haben ihre Eigenfrequenzen, sondern auch in Hohlräumen eingesperzte Gase. Der Detektiv klopft die Wände nach geheimen Fächern ab und der Arzt den Brustkorb seines Patienten nach dessen Lunge. Die Resonanztöne signalisieren beiden die Grenzen des Hohlraumes. Flöten geben ihm die Form einer gestreckten Röhre und bilden damit die Verhältnisse der schwingenden Saite nach. Die Blockflöte ist an beiden Enden offen: Dort liegen die Schnellebäuche und Druckknoten einer stehenden Schallwelle, ihr Abstand beträgt eine halbe Wellenlänge des Grundtones (Abb. 4.21, Schalldruck wird im übernächsten Kapitel behandelt). Welche Frequenz zur Wellenlänge gehört, bestimmt die Schallgeschwindigkeit der Luft; bläst man eine Blockflöte mit Wasserstoff an, steigt ihre Tonhöhe um mehr als eine Oktave.

Die für den Menschen wichtigste Form der Schallerzeugung ist die mit dem **Kehlkopf**. Dieser besitzt zwei **Stimmbänder**, die

er über den *Stellknorpel* willkürlich anspannen kann. Durch die *Stimmritze* zwischen ihnen wird beim Sprechen und Singen Luft gepresst. Die in Grenzen einstellbaren Eigenfrequenzen der Stimmbänder bestimmen die Tonlage, nicht aber den Laut, der den Mund verlässt. Hier spielen Unterkiefer und vor allem die bewegliche Zunge die entscheidenden Rollen: Sie legen die momentane Form des Rachenraumes fest und damit die Eigenfrequenzen dieses Hohlraumes, die von den Stimmbändern zu Resonanz angeregt werden können.

4.3.2 Schallnachweis

Das Organ, mit dem der Mensch Schallschwingungen in Nervensignale überführt, ist das *Corti-Organ*, mechanisch gekoppelt an das Trommelfell, einer dünnen, schallweichen Haut, die quer im Gehörgang steht. Dem Prinzip des schallweichen Trommelfells folgen auch die Membranen technischer Mikrofone. Diese Geräte haben die Aufgabe, ankommende Schallschwingungen so getreu wie möglich in synchrone elektrische Schwingungen zu übertragen, die dann elektronisch weiterverarbeitet werden. Vollkommen kann das nie gelingen, denn notwendigerweise bilden Membran und Elektronik schwingungsfähige Gebilde mit Eigenfrequenzen und der Neigung zu Resonanzüberhöhungen. Die technischen Tricks, mit denen man gute und teure, oder auch nicht ganz so gute, dafür aber billigere Mikrofone herstellt, brauchen hier nicht besprochen werden.

Der Überschallknall der Düsenjäger ist zumindest unangenehm. Als ein Warnsystem, das auch im Schlaf nicht abgeschaltet wird, hat das Gehör seine Empfindlichkeit bis an die Grenze des Sinnvollen gesteigert; noch ein wenig mehr, und es müsste die thermische Bewegung der Luftmoleküle als permanentes Rauschen wahrnehmen. Zum Hörschall normaler Sprechlautstärke

gehören Druckschwankungen, *Schalldruck* oder auch *Schallwechseldruck* genannt, deren Amplituden in der Größenordnung Zentipascal (10^{-2} Pa) liegen. Sie bedeuten Schwingungen der Moleküle mit Amplituden im Bereich 10 nm und mit Geschwindigkeitsamplituden von 0,1 mm/s. Wie jede Welle transportiert Schall Energie. Wieviel, das sagt die *Energiestromdichte* mit der SI-Einheit W/m^2 , die auch *Schallintensität* genannt wird und den Buchstaben *I* bekommt. Sie ist ein rein physikalisches, vom menschlichen Gehör unabhängiges und darum auch für Ultraschall verwendbares Maß für die Leistung, die ein Mikrophon oder auch Ohr mit seiner Empfängerfläche aufnehmen kann:

$$\text{Schallintensität } I = \frac{\text{Energiestrom } P}{\text{Empfängerfläche } A}.$$

wichtig
Schallintensität = Energiestromdichte = Energiestrom/Empfängerfläche (W/m^2).

Erträglicher Schalldruck liegt um Zehnerpotenzen unter dem Luftdruck. Der Schalldruck darf nicht mit dem Schallstrahlungsdruck verwechselt werden, den eine Schallwelle auf jedes Hindernis ausübt, das ihr im Wege steht. Auch der Strahlungsdruck ist gering; für den Effekt der Posaunen von Jericho hat er gewiss nicht ausgereicht.

Geräte zur Messung von Schallstärken benötigen grundsätzlich ein Mikrophon, einen Verstärker und einen Anzeigemechanismus. Die Eichung in W/m^2 macht im Prinzip keine Schwierigkeiten. Dem Arbeitsphysiologen aber, der sich für den Krach in einer Kesselschmiede interessiert oder die Störung der Nachtruhe durch den nahe gelegenen Flugplatz, ist damit wenig gedient. Schall stört nur, wenn man ihn hört: Ultraschall macht keinen Lärm (was nicht heißt, dass er harmlos ist). Auch im Hörbereich wertet das Ohr Schall verschiedener

Frequenzen höchst unterschiedlich. Seine höchste Empfindlichkeit liegt bei 3 kHz; nicht ohne Grund brüllen Babys bevorzugt auf dieser Frequenz: Hier hört die Mutter bereits eine Schallstärke von 10^{-12} W/m^2 . Schon bei 1 kHz erfordert die Hörschwelle zehnfache Schallstärke. Den Frequenzgang des normalen menschlichen Gehörs versucht man durch eine neue Messgröße zu berücksichtigen, durch die Lautstärke mit der Einheit **Phon**.

Im empfindlichsten Bereich des Gehörs liegen zwischen Hör- und Schmerzschwelle ungefähr 12 Zehnerpotenzen der Schallstärke. Kein Gerät mit linearer Skala kann einen derart großen Bereich überdecken. Das gilt auch für Sinnesorgane. Folglich reagieren sie logarithmisch, das postuliert jedenfalls das **Weber-Fechner-Gesetz**. Es hat bei der Festlegung der Phonskala Pate gestanden, der das in der Technik übliche **Pegelmaß** zugrunde liegt. Es wird in **Dezibel** (dB) angegeben.

Wem das Dezibel nicht geläufig ist, dem kann es Kummer bereiten. Der Name lässt eine Einheit vermuten, tatsächlich handelt es sich aber eher um eine Rechenvorschrift. Ist eine Energie W_1 im Laufe der Zeit auf irgendeine Weise auf $W_2 = 0,01 W_1$ heruntergegangen, so beträgt der Unterschied der beiden **Pegel** 20 dB. Um das herauszufinden, bildet man zunächst den Bruch W_1/W_2 , logarithmiert ihn dekadisch und multipliziert anschließend mit 10. Das Ergebnis ist der Pegelunterschied in Dezibel:

$W_1/W_2 = 100$; $\lg 100 = 2$; $10 \cdot 2 = 20$; also 20 dB Pegelunterschied.

Ein „Unterschied“ der Pegel von 0 dB bedeutet $W_1 = W_2$, weil

$\lg 1 = 0 = 10 \cdot \lg 1$ ist.

Bei linearem Kraftgesetz der Schraubenfeder ist die Schwingungsenergie W des Federpendels dem Quadrat der Amplitude A proportional:

$$W_1/W_2 = A_1^2/A_2^2.$$

Daraus folgt

$$10 \lg(W_1/W_2) = 10 \lg(A_1/A_2)^2 = 20 \lg(A_1/A_2).$$

Man kann das Pegelmaß also auch aus dem Amplitudenverhältnis bestimmen, aber dann verlangt

die Rechenvorschrift einen Faktor 20 zum Logarithmus.

Echt logarithmisch wie das Pegelmaß ist die Phonskala allerdings nur für den Normalton von 1000 Hz: Hier wird der Hörschwelle der Messwert 4 Phon zugeordnet; jede Zehnerpotenz in der Schallstärke bringt dann 10 Phon mehr. Damit liegt eine Vergleichsskala fest. Versuchspersonen müssen nur noch sagen, bei welcher Schallstärke sie Töne anderer Frequenzen gleich laut wie einen Normalton hören: Beiden Tönen wird dann die gleiche Lautstärke zugeordnet. Einige Anhaltswerte zur Phonskala liefert die folgende Aufstellung:

- ▶ Blätterrauschen 10 Phon
- ▶ Flüstern 20 Phon
- ▶ Umgangssprache 50 Phon
- ▶ starker Straßenlärm 70 Phon
- ▶ Presslufthammer in der Nähe 90 Phon
- ▶ Motorrad in nächster Nähe 100 Phon
- ▶ Flugzeug Motor 3 m entfernt 120 Phon

Lautstärken über 120 Phon schmerzen. Eine Lautstärke ist übrigens nur für den Ort des Empfängers definiert, nicht etwa für eine Schallquelle.

wichtig

Die Lautstärke mit der Einheit **Phon** ist ein an die spektrale Empfindlichkeit des menschlichen Gehörs angepasstes und im Wesentlichen logarithmisches Maß der Schallstärke.

Die Phonskala birgt Überraschungen für jeden, dem der Umgang mit Logarithmen nicht geläufig ist. Knattert ein Moped in einiger Entfernung mit 62 Phon, so schaffen vier vom gleichen Typ zusammen nicht mehr als 68 Phon. Umgekehrt kann der Hersteller von Schalldämmstoffen schon ganz zufrieden sein, wenn es ihm gelingt, von 59 Phon auf 39 Phon herunterzukommen, denn das bedeutet die Reduktion der Schallstärke auf 1 %.

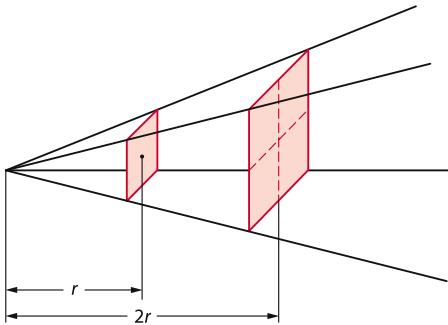


Abb. 4.22. Zum quadratischen Abstandsgesetz. Die in einen festen Raumwinkel hinein abgestrahlte Leistung erfasst eine Fläche, die mit dem Quadrat des Abstandes r vom Sender wächst

4.3.3 Schallausbreitung

Eine frei im Raum aufgehängte Schallquelle könnte grundsätzlich gleichmäßig nach allen Seiten abstrahlen. Die von ihr ausgesandte Schalleistung erfasst dann mit wachsendem Abstand r immer größere Kugelflächen, die proportional zu r^2 anwachsen. Die Schallstärke I nimmt dementsprechend ab:

$$I(r) \sim 1/r^2.$$

Dieses quadratische Abstandsgesetz gilt auch für eine gerichtete Strahlung, die nur einen begrenzten Raumwinkel erfasst (☞ Abb. 4.22), und es gilt für Strahlungen aller Art. Es findet sich also in der Optik wieder, aber auch in der Kernphysik. Seine Gültigkeit setzt freilich voraus, dass von dem Medium, in dem sich die Strahlung ausbreitet, keine Energie absorbiert wird. Tatsächlich setzen aber alle schalleitenden Substanzen einen Teil der Schalleistung in Wärme um, im Idealfall entsprechend einer Exponentialfunktion. In Luft ist diese Absorption relativ gering; eben deswegen kann man sich auch noch auf einige Entfernung etwas zurufen, eben deswegen kann aber auch Bau- und Straßenlärm so lästig werden.

Nur ein Teil der Schallenergie läuft auf kürzestem Wege vom Sender zum Empfänger, der Rest erreicht den Hörer erst nach Reflexionen, also nach unterschiedlichen

Laufwegen und -zeiten. Für Frequenzgemische bedeutet das unterschiedliche Phasenverschiebungen der einzelnen Schwingungen gegeneinander. Das Gehör nimmt sie vernünftigerweise gar nicht erst wahr, es achtet bei seiner Frequenzanalyse nur auf das Spektrum der Schallwelle.

Fledermäuse nutzen dahingegen Laufzeitunterschiede zur Orientierung: Sie senden kurze Ultraschallimpulse scharf gerichtet aus und bestimmen aus der Ankunftszeit des Echoes die Entfernung des Reflektors. Nach dem gleichen Prinzip, aber mit Wasserschall, arbeitet das „Sonarsystem“ der Marine zur Ortung von Unterseebooten. In der Medizin heißt das Verfahren **Sonographie**. Es muss mit dem Problem der **Ankopplung** fertig werden. Der Schallkopf mit Ultraschallsender und Mikrofon, mit dem der Arzt die Bauchdecke seines Patienten abtastet, ist relativ schallhart, der akustisch im Wesentlichen aus Wasser bestehende Patient ist dies auch. Ein schallweiches Luftpölster zwischen Schallkopf und Bauchdecke hätte Reflexionen zur Folge, die den Ultraschall gar nicht erst in den Patienten hineinließen. Folglich muss der Zwischenraum mit einem ebenfalls leidlich schallharten Gel ausgefüllt



Abb. 4.23. Sonogramm des Kopfes eines ungeborenen Kindes (Aufnahme: Prof. Dr. M. Hansmann, Bonn)

werden. Jede Ultraschalldiagnose beginnt deshalb mit dem Aufbringen dieses Gels.

☞ Abbildung 4.23 zeigt das aus Ultraschallechos rekonstruierte Bild vom Kopf eines Ungeborenen. Man kann sich in dieser Weise aber zum Beispiel auch Risse in Schweißnähten ansehen.

Das Beispiel der Ultraschalldiagnostik zeigt, dass nicht nur Gase, sondern auch feste, flüssige und viskoelastische Körper Schall übertragen. Verwunderlich ist das nicht. Die Atome eines Kristalls etwa können um ihre offiziellen Gitterplätze herum schwingen. Dabei übertragen sie ihre Bewegungen durch zwischenatomare Kräfte auf ihre Gitternachbarn. Alle zusammen bilden ein dreidimensionales System von Pendelketten. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c des Schalls steigt mit der Härte der „Kopplungsfedern“, repräsentiert durch den Elastizitätsmodul E des Materials; sie sinkt mit der Masse der Pendelkörper, repräsentiert durch die Dichte ρ . Quantitativ ergibt sich für Längswellen auf langen dünnen Stäben

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Gase haben keine Zerreißfestigkeit und keinen Elastizitätsmodul. An seine Stelle tritt der Kompressionsmodul Q , definiert in Kap. 3.3.6. Erst in Kap. 5.2.2 kann gezeigt werden, dass Q ebenso wie ρ proportional zum Druck ist. Folge: in Gasen hat der Druck keinen nennenswerten Einfluss auf die Schallgeschwindigkeit, wohl aber die Molekülmasse und mit ihr die Gasdichte bei vorgegebenem Druck. Allerdings ist die Schallgeschwindigkeit c in Gasen verhältnismäßig klein, ca. 330 m/s in Luft gegenüber 1480 m/s in Wasser und ungefähr 5 km/s in Aluminium.

Im Prinzip breiten sich Schallwellen nach den gleichen Gesetzen aus wie sichtbares Licht: Welle ist Welle. Schallwellen zeigen alle Erscheinungen der Beugung, Brechung und Interferenz, die im Kap. 7.4 für Licht ausführlich besprochen werden; nur verlangen die vergleichsweise großen Wellenlängen größere Apparaturen. Für die Schallreflexion des Echos nimmt man am besten gleich eine ganze Bergwand; für echten Schattenwurf sind normale

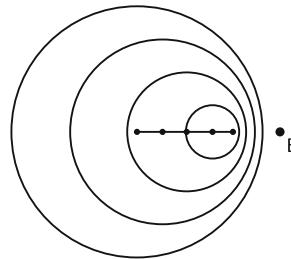


Abb. 4.24. Doppler-Effekt. Wenn sich die Schallquelle auf den Beobachter B zu bewegt, registriert dieser eine erhöhte Schallfrequenz

Häuser schon zu klein. Immerhin dringt der tiefe, d.h. langwellige Ton der großen Trommel einer Militäkapelle leichter in Seitenstraßen ein als die hohen Töne der Querpfeifen.

Normalerweise hört das Ohr einen Ton mit eben derjenigen Frequenz, mit der ihn die Schallquelle ausgesandt hat. Das muss aber nicht so sein. In dem Moment, in dem die Feuerwehr an einem vorbeifährt, sinkt die Tonhöhe des Martinshorns, für den Passanten auf der Straße, nicht für die mitfahrenden Feuerwehrmänner. Die Ursache dieses **Doppler-Effekts** liegt in der Relativbewegung der Schallquelle gegenüber Luft und Hörer. Fährt die Quelle auf einen zu, so treffen die Druckmaxima das Ohr in rascherer Folge, als sie vom Horn ausgesandt werden, denn der Schallweg wird immer kürzer. Folge: man hört einen zu hohen Ton. Das Umgekehrte tritt ein, wenn sich die Schallquelle fortbewegt (☞ Abb. 4.24). Näherungsweise ist die Frequenzänderung Δf proportional zur Frequenz f_0 der Schallquelle und zur Relativgeschwindigkeit Δv zwischen Quelle und Empfänger:

$$\Delta f = f_0 \frac{\Delta v}{c}.$$

c ist hier die Schallgeschwindigkeit.

wichtig

Als Doppler-Effekt bezeichnet man die Frequenzverschiebung, die eine Relativgeschwindigkeit zwischen Wellenquelle und Wellenempfänger erzeugt.

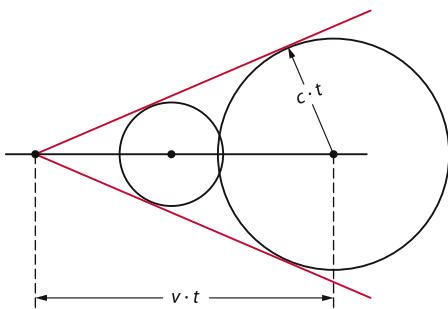


Abb. 4.25. Kopfwelle eines mit der Geschwindigkeit v nach links fliegenden Überschallflugzeuges (c = Schallgeschwindigkeit). Die Kopfwelle ist die Einhüllende der vom Flugzeug ständig ausgesandten Kugelwellen

Wer mit mehr als Schallgeschwindigkeit durch die Luft fliegt, kann nach vorn keinen Schall mehr abstrahlen. Dafür erzeugt er einen Druckstoß, den er als kegelförmig sich ausbreitende *Kopfwelle* hinter sich zieht (☞ Abb. 4.25). Eine plötzliche Druckänderung empfindet das Ohr als Knall. Überschallflugzeuge lösen mit ihrer Kopfwelle einen zumindest lästigen Überschallknall aus, und zwar nicht *in* dem Moment, in dem sie die Schallgeschwindigkeit überschreiten („die Schallmauer durchbrechen“), sondern *von da ab*. Sie ziehen eine Knallschleppe hinter sich her, solange sie schneller sind als der Schall.

Rechenbeispiel 4.4: Echolot

Delphine benutzen Schallwellen, um ihre Beute zu lokalisieren. Ein 10 cm großes Objekt kann er so auf 100 m Entfernung wahrnehmen. Wie lange war eine Schallwelle zum Objekt und zurück dann unterwegs?

Lösung: die Schallgeschwindigkeit im Wasser beträgt etwa 1500 m/s. Für 200 m braucht

ein Schallpuls also etwa 0,13 Sekunden. Ein modernes Ultraschalldiagnosegerät kann aus dieser Laufzeit die genaue Distanz des Objektes und aus einer eventuellen Frequenzverschiebung aufgrund des Dopplereffektes auch noch die Geschwindigkeit des Objektes in Sichtrichtung bestimmen.

Rechenbeispiel 4.5: Erdbebenstärke

Die Intensität einer Erdbebenwelle 100 km von der Quelle entfernt sei $I_1 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2$. Wie hoch ist sie 400 km von der Quelle entfernt?

Lösung: Die Intensität sinkt mit eins durch Abstand ins Quadrat, also:

$$I_2 = \left(\frac{100 \text{ km}}{400 \text{ km}} \right)^2 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2 \\ = 6,2 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2$$

Rechenbeispiel 4.6: Dopplerverschiebung

Die Beute bewege sich mit 3 m/s auf unseren Delphin zu. Welche Frequenzverschiebung ergibt das im reflektierten Signal, wenn die Schallwelle eine Frequenz von 5000 Hz hat?

Lösung: Tatsächlich gibt es hier zwei Dopplerverschiebungen: An der Beute hat die Welle eine höhere Frequenz, da die Beute sich auf die Quelle zu bewegt. Die Beute reflektiert die Welle auch mit dieser höheren Frequenz. Sie ist dann selber wieder eine bewegte Quelle, deren Signal am Ort des Delphins frequenzerhöht war genommen wird. Also bekommen wir:

$$\Delta f = 2 \cdot f_0 \cdot \frac{3 \text{ m/s}}{1480 \text{ m/s}} = 20,3 \text{ Hz} .$$

Harmonische Schwingungen

Harmonische Schwingungen werden durch eine Sinusfunktion oder Kosinusfunktion beschrieben. Nichtharmonische Schwingungen können mathematisch immer als eine Überlagerung solcher sinusförmiger Schwingungen aufgefasst werden. Mechanische Schwingungen sind praktisch immer durch Reibungskräfte gedämpft (☞ Abb. 4.4). In einfachen Fällen klingt die Amplitude exponentiell ab. Durch periodisches Anstoßen des schwingenden Systems kann diese Dämpfung kompensiert werden. Der Oszillatator führt dann eine erzwungene Schwingung mit der Frequenz aus, mit der er angestoßen wird. Entspricht diese Frequenz seiner Eigenfrequenz, so liegt Resonanz vor und der Oszillatator schwingt besonders stark (☞ Abb. 4.6).

Harmonische Schwingungen

$$\begin{aligned}x(t) &= A_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) \\&= A_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t) \\&= A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)\end{aligned}$$

A_0 : Amplitude [m]
 f : Frequenz [Hz (Hertz)]
 $T = 1/f$: Schwingungsdauer, Periodendauer [s]
 $\omega = 2\pi \cdot f$: Kreisfrequenz [1/s]

gedämpfte Schwingung

$$x(t) = A_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

δ : Dämpfungskonstante [1/s]

Tritt bei der Schwingung ein Energieverlust ein, so liegt eine **gedämpfte Schwingung** vor (☞ Abb. 4.4)

Pendel

Welche Schwingungsdauer sich einstellt, hängt beim harmonischen schwingenden Oszillatator nur von seiner Bauart ab. Beim Federpendel wird die Schwingungsdauer von der Masse und der Federkonstante bestimmt.

Federpendel

$$\omega_c = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

ω_c : charakteristische Frequenz
 D : Federkonstante [N/m]

Fadenpendel

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

m : Masse
 g : Fallbeschleunigung
 l : Fadenlänge

Harmonische Wellen (Schall, Licht)

Mechanische Wellen breiten sich in einem Medium (Luft, Wasser, Festkörper) aus. Dabei transportieren sie Energie, aber keine Materie. An jedem Ort in der Welle schwingen die Teilchen des Mediums. Schwingen sie senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle, so spricht man von einer **transversalen Welle**, schwingen sie in Ausbreitungsrichtung, so spricht man von einer **longitudinalen Welle**. Die Frequenz f der Welle wird von der erzeugenden Quelle bestimmt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c hingegen, mit der Wellenberge und -täler fortschreiten, ist für das Medium charakteristisch. Der Energietransport der Welle wird durch die **Intensität** beschrieben, die proportional zum Quadrat der Amplitude ist. Präzise gesprochen ist sie eine Energiedichte und gibt an, wie viel Energie in einer bestimmten Zeit durch eine bestimmte Fläche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung hindurch tritt. Ist die Quelle der Welle punktförmig, so sinkt die Intensität umgekehrt proportional zum Abstand r von der Quelle ins Quadrat

$$I \sim 1/r^2$$

Phasengeschwindigkeit

$$c = \lambda \cdot f$$

c : Phasengeschwindigkeit [$\frac{m}{s}$]
 λ : Wellenlänge [m]
 f : Frequenz [Hz]

Polarisation	<i>Transversal</i> – Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle <i>Longitudinal</i> – Auslenkung parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle	
Intensität	Intensität I einer Welle: Energiestromdichte $\left[\frac{J}{m^2 \cdot s}\right]$	
quadratisches Abstandsgesetz	$I \sim \frac{1}{r^2}$, r : Abstand von einer punktförmigen Quelle	
Schall		
<p>Schall ist eine longitudinale Druckwelle (Ausbreitungsgeschwindigkeit: in Luft ca. 330 m/s; in Wasser: ca. 1500 m/s). Das menschliche Ohr ist empfindlich für Frequenzen etwa zwischen 1 Hz und 16 kHz und kann Schallintensitäten über ca. 12 Größenordnungen hinweg wahrnehmen. Dieser gewaltige Intensitätsbereich ist möglich, da das Ohr in etwa logarithmisch reagiert. Entsprechend wird die Lautstärke im logarithmischen Pegelmaß angegeben. Eine Erhöhung der Intensität um einen Faktor 100 (das bedeutet eine Erhöhung der Amplitude um einen Faktor 10) entspricht einer Pegelerhöhung um 20 dB. Schallwellen haben in Medien unterschiedlicher Dichte und Härte unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten. Tritt eine Schallwelle von einem in ein anderes Medium über, so wird deshalb ein Teil von ihr an der Grenzfläche zwischen den Medien reflektiert. Dieser Effekt ist die Basis der Sonographie, die mit Hilfe reflektierter Ultraschallwellen (nichthörbarer Schall hoher Frequenz) ein Bild vom Inneren eines Werkstücks oder des Körpers erzeugt. Bewegen sich Schallquelle, Empfänger oder auch eine reflektierende Grenzfläche, so treten Frequenzverschiebungen auf (Doppler-Effekt). Auch dies kann technisch genutzt werden, um zum Beispiel die Strömungsgeschwindigkeit von Flüssigkeiten in Röhren oder von Blut im Körper zu messen.</p>		
<p>Für die Schallausbreitung gilt weitgehend das Gleiche wie in der Optik für Licht (Brechungsgesetz, Reflexionsgesetz). Aber:</p> <p>Schall ist eine longitudinale Welle.</p>		
Schallpegel	$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{10^{-12} \text{ W/m}^2}$	
Lautstärke	Mit der Ohrempfindlichkeit gewichteter Schallpegel [Phon]	
Pegelmaß (Dezibel)	Eine Intensitätserhöhung um den Faktor 100 entspricht einer Erhöhung des Pegels um 20 Dezibel (dB).	
Dopplereffekt	Näherungsformel: $\Delta f = f_0 \cdot \frac{\Delta v}{c}$	Δf : Frequenzänderung f_0 : Frequenz des Senders Δv : Relativgeschwindigkeit Sender – Empfänger c : Schallgeschwindigkeit
<p>Bewegen sich Quelle und Empfänger aufeinander zu, so erhöht sich die Frequenz beim Empfänger, entfernen sich beide voneinander, so erniedrigt sich die Frequenz.</p>		

Verständnisfragen

1. Eine an einer Feder aufgehängte Masse schwingt auf und ab. Gibt es einen Zeitpunkt, an dem die Masse ruht aber beschleunigt ist? Gibt es einen Zeitpunkt, an dem die Masse ruht und auch nicht beschleunigt ist?
2. Können bei einer Schwingung die folgenden Größen gleichzeitig in dieselbe Richtung gehen: Geschwindigkeit und Beschleunigung; Auslenkung und Geschwindigkeit; Auslenkung und Beschleunigung?
3. Ein Objekt hängt bewegungslos an einer Feder. Wenn das Objekt nach unten gezogen wird, wie ändert sich dann die Summe der elastischen potentiellen Energie der Feder und der potentiellen Energie der Masse des Objekts?
4. Beim der Formel für die Eigenfrequenz des Federpendels wurde angenommen, dass die Feder selbst näherungsweise masselos ist. Wie ändert sich die Frequenz, wenn die Masse der Feder doch zu berücksichtigen ist?
5. Eine Person schaukelt auf einer Schaukel. Wenn die Person still sitzt, schwingt die Schaukel mit ihrer Eigenfrequenz vor und zurück. Wie ändert sich die Frequenz, wenn stattdessen zwei Personen auf der Schaukel sitzen?
6. Ein Fadenpendel hängt in einem Aufzug und schwingt. Ändert sich seine Frequenz, wenn der Aufzug nach oben oder unten beschleunigt ist?
7. Die Schallgeschwindigkeit hängt nicht von der Frequenz des Tones ab. Können Sie das aus Ihrer Erfahrung belegen?
8. Warum gibt es in einem Gas nur longitudinale Wellen?
9. Warum nimmt die Amplitude einer kreisförmigen Wasserwelle mit zunehmendem Radius ab?
10. Selbst bei ruhiger Hand kann es einem leicht passieren, dass bei gehen der Kaffee im Becher, den man trägt, heraus schwippt. Was hat das mit Resonanz zu tun und was könnte man dagegen unternehmen?

Übungsaufgaben

Schwingungen

- 4.1: (II) In welcher Beziehung müssen Kraft und Auslenkung zueinander stehen, damit es a) überhaupt zu Schwingungen kommen, b) zu harmonischen Schwingungen kommen kann?
- 4.2: (II) Die Amplitude einer ungedämpften harmonischen Schwingung betrage 5 cm, die Schwingungsdauer 4 s und der Phasenwinkel $\pi/4$. Welchen Wert besitzt die Auslenkung und die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$. Welche maximale Beschleunigung tritt auf?
- 4.3: (I) Als Sekundenpendel bezeichnet man ein Fadenpendel, das genau eine Sekunde braucht, um von einem Umkehrpunkt zum anderen zu kommen. Wie groß ist seine Pendellänge?
- 4.4: (II) Eine kleine Fliege (0,15 g) wird in einem Spinnnetz gefangen. Dort schwingt sie mit etwa 4 Hz. Wie groß ist die effektive Federkonstante des Netzes? Mit welcher Frequenz würde die ein Insekt mit einer Masse von 0,5 g schwingen?
- 4.5: (II) Zwei Federpendel haben gleiche Masse und schwingen mit der gleichen Frequenz. Wenn eines die 10-fache Schwingungsenergie hat wie das andere, wie verhalten sich dann ihre Amplituden?
- 4.6: (II) Auf dem Ende eines Sprungbretts im Schwimmbad liegt ein Backstein. Das Sprungbrett schwingt mit einer Frequenz von 3,5 Hz. Ab welcher Schwingungsamplitude fängt der Stein an, auf dem Brett zu hüpfen?
- 4.7: (I) Muss Resonanz zu Resonanzüberhöhung führen?

Wellen

- 4.8: (I) Die Schallquellen der Ultraschallgeräte beim Arzt arbeiten meist bei Frequenzen in der Größenordnung 1 MHz. Wie groß ist die zugehörige Wellenlänge im Gewebe? (Zur Abschätzung darf die Schallgeschwindigkeit im Gewebe des Wassers gleichgesetzt werden). Nur Objekte, die größer sind als die Wellenlänge, können von einer Welle gut wahrgenommen werden.
- 4.9: (II) Sie gehen mit einer Tasse Kaffee (Durchmesser der Tasse: 8 cm) die Treppe hinauf und machen dabei in jeder Sekunde einen Schritt. Der Kaffee schaukelt sich in der Tasse auf und nach ein paar Schritten kleckert er Ihnen auf die Schuhe. Welche Geschwindigkeit haben die Oberflächenwellen auf Ihrem Kaffee?
- 4.10: (II) Was ergibt $0 \text{ dB} + 0 \text{ dB}$?
- 4.11: (II) Wenn jeder der 65 Sänger eines Chores für sich allein den Chorleiter mit 65 Phon „beschallt“, mit welcher Lautstärke hört der Chorleiter den ganzen Chor?
- 4.12: (II) Sie stehen zwischen zwei Musikern, die beide den Kammerton A spielen. Einer spielt ihn richtig mit 440 Hz, einer falsch mit 444 Hz. Mit welcher Geschwindigkeit müssen Sie sich auf welchen Musiker zu bewegen, um beide Töne mit gleicher Tonhöhe zu hören?
- 4.13: (I) Angenommen, eine Schallquelle bewegt sich gerade genau im rechten Winkel zur Sichtlinie zu Ihnen. Tritt in diesem Moment Dopplereffekt auf?
- 4.14: (I) Welchen Öffnungswinkel hat der Kegel der Kopfwelle eines Flugzeuges, das mit „Mach 2“, also mit doppelter Schallgeschwindigkeit fliegt?

5.1	Temperatur	154
5.1.1	Temperaturmessung	154
5.1.2	Ausdehnungskoeffizienten	157
5.1.3	Das ideale Gas	158
5.1.4	Partialdruck und Partialvolumen	160
5.2	Thermische Bewegung	160
5.2.1	Wärme	161
5.2.2	Molekularbewegung	163
5.2.3	Wärmeleitung	165
5.2.4	Temperaturstrahlung	167
5.2.5	Diffusion	169
5.2.6	Osmose	171
5.3	Phasenumwandlungen	173
5.3.1	Umwandlungswärmen	173
5.3.2	Schmelzwärme	174
5.3.3	Lösungs- und Solvatationswärme	176
5.3.4	Verdampfung	177
5.3.5	Dampfdruck und Dampfdichte	177
5.3.6	Luftfeuchtigkeit	179
5.3.7	Verdampfungsenthalpie	179
5.3.8	Zustandsdiagramme	180
5.3.9	Absorption und Adsorption	183
5.4	Wärmenutzung	184
5.4.1	Die Sonderstellung der Energieform „Wärme“	184
5.4.2	Zustandsänderungen	186
5.4.3	Der Ottomotor	190
5.4.4	Wahrscheinlichkeit und Ordnung	192
5.4.5	Entropie	193
5.4.6	Wärme- und Entropiehaushalt der Erde	194

Übersicht

Wärme ist eine Form der Energie. Wird sie einem Körper zugeführt, so erhöht er normalerweise seine Temperatur. Lediglich bei Phasenumwandlungen, insbesondere beim Wechsel des Aggregatzustandes, wird Energie ohne Temperaturänderung als latente Wärme aufgenommen oder abgegeben. Als Warmblüter muss der Mensch seine Körpertemperatur konstant halten, d.h. für einen ausgeglichenen Wärmehaushalt seines Organismus sorgen. Aber auch der Wärmehaushalt der Erde darf vom Menschen nicht ernsthaft gestört werden, weil sonst klimatische Veränderungen mit unabsehbaren Folgen eintraten. Dabei hat die Sonderstellung der Wärme unter allen Energiefomren besondere Bedeutung.

5.1 Temperatur

Das internationale Maßsystem (SI) billigt der Wärmelehre eine spezielle Grundgröße zu: die Temperatur. Üblicherweise wird sie in „Grad Celsius“ ($^{\circ}\text{C}$) angegeben, muss aber in Formeln mit der Einheit Kelvin (K) eingesetzt werden. Haushaltsthermometer nutzen zur Anzeige meist die thermische Ausdehnung von Flüssigkeiten aus, die allerdings prinzipiell zu ungleichmäßigen Skalenteilungen führt. Unhandlich, aber als Eichinstrument verwendbar ist das Gasthermometer. Es beruht auf dem „Gasgesetz“, der Zustandsgleichung idealer Gase.

5.1.1 Temperaturmessung

Als Warmblüter muss der Mensch seine Körpertemperatur recht genau konstant halten; 2 % Abweichung sind tödlich. Aber was ist das eigentlich: *Temperatur*?

Das Système International d'Unités erkennt die Temperatur zur Grundgröße und weist ihr die nicht sehr bekannte Einheit **Kelvin** (K) zu. Im Alltag messen die Angelachsen in *Grad Fahrenheit* ($^{\circ}\text{F}$) und der Rest der Welt in *Grad Celsius* ($^{\circ}\text{C}$). Die Frage ist damit nicht beantwortet.

Die Atome und Moleküle, aus denen alles zusammengesetzt ist, halten nicht still, sondern führen eine ständige Wimmel- und Zitterbewegung aus. In dieser Bewegung ist kinetische Energie gespeichert. Die Temperatur ist ein Maß für diese kinetische Energie der Atome und Moleküle.

wichtig

Die Temperatur ist ein Maß für die thermische Wimmelbewegung.

Abschnitt 5.2.2 geht noch genauer auf diese Bewegung ein. Wie misst man nun die Temperatur?

Die meisten Eigenschaften der meisten Substanzen hängen ein wenig von der Temperatur ab und können deshalb grundsätzlich zu deren Messung herangezogen werden. Ein bewährter Effekt ist die **thermische Ausdehnung**: Von ganz wenigen Ausnahmen abgesehen nimmt die Dichte einer Substanz mit wachsender Temperatur ab, ihr spezifisches Volumen also zu. Der Effekt ist gering; man muss schon einen Glaskolben mit angeschmolzener Kapillare bis zum Rand mit einer Thermometerflüssigkeit (z.B. Quecksilber) füllen, in die allein sie sich thermisch ausdehnen kann. Der kleine Kapillarquerschnitt A übersetzt eine geringe Volumenausdehnung ΔV in eine relativ große Längenänderung $\Delta l = \Delta V / A$ des Flüssigkeitsfadens. Damit man ihn besser sehen kann, bekommt das Kapillargefäß oft die Form einer als Lupe wirkenden Zylinderlinse. Wichtig ist dabei natürlich, dass die thermische Ausdehnung normaler Flüssigkeiten größer ist als die der Gläser. Fieberthermometer älterer Bauart (☞ Abb. 5.1) funktionieren so.

wichtig

Thermische Ausdehnung: Mit steigender Temperatur nimmt die Dichte einer Substanz ab und das spezifische Volumen zu.



Abb. 5.1. Fieberthermometer

Moderne elektronische Fieberthermometer nutzen einen anderen Effekt zur Temperaturmessung. Bei fast allen leitfähigen Materialien steigt mit der Temperatur der elektrische Widerstand (s. Kap. 6.4.2), und zwar oft genau proportional zur Temperatur. Der Vorteil ist, dass der elektrische Widerstand leicht elektronisch erfasst und das Thermometer so mit Mikroprozessoren-intelligenz ausgestattet werden kann. Ein modernes Fieberthermometer piept, wenn es fertig gemessen hat.

Wer ein Thermometer benutzt, verlässt sich darauf, dass es die Temperatur seiner Umgebung annimmt, denn die soll schließlich gemessen werden. Etwas Zeit kostet dieser Temperaturausgleich; ein Fieberthermometer braucht üblicherweise etwa zwei Minuten dazu. Aber *dass* der Ausgleich erfolgt, gehört zum Wesen der Temperatur.

wichtig

Zwei Körper, die in thermischem Kontakt stehen, gleichen ihre Temperaturen an.

Die Celsiuskala hält sich an zwei *Fixpunkten* fest: Unter dem normalen Luftdruck von

1013 hPa erstarrt reines Wasser bei 0 °C und siedet bei 100 °C. Der Bereich dazwischen wird in einhundert „gleiche“ Teile geteilt, mit diesen werden die außen liegenden Bereiche aufgefüllt. Für die Gleichmäßigkeit der Teilung sorgt die sog. *thermodynamische Temperaturskala*, um deren Definition und Reproduktion sich die Spezialisten der Eichämter kümmern.

wichtig

Fixpunkte der Celsiusskala:

Gefrierpunkt des Wassers (Eispunkt): 0 °C;
Siedepunkt des Wassers: 100 °C
(beide bei 1013 hPa Luftdruck).

In begrenzten Bereichen lässt sich die thermodynamische Temperaturskala recht gut mit einem Gas als Thermometersubstanz reproduzieren. Das Gesetz von Boyle-Mariotte (s. Kap. 3.3.6) bietet dazu zwei Möglichkeiten: Entweder misst man in Abhängigkeit von der Temperatur das Volumen einer Gasmenge bei konstantem Druck oder den Druck bei konstantem Volumen. Das Gasthermometer der Abb. 5.2 geht den zweiten Weg. Eine gasgefüllte Glaskugel geht in eine Kapillare über, die in einem Flüssigkeitsmanometer endet. Dessen rechter Schenkel ist über einen Gummischlauch angeschlossen, sodass man ihn heben und senken kann. Dadurch lässt sich

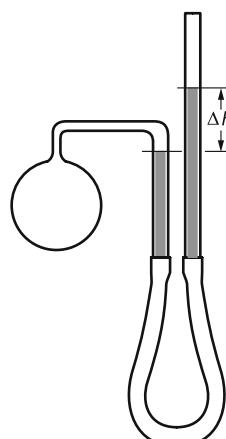


Abb. 5.2. Gasthermometer (Einzelheiten im Text)

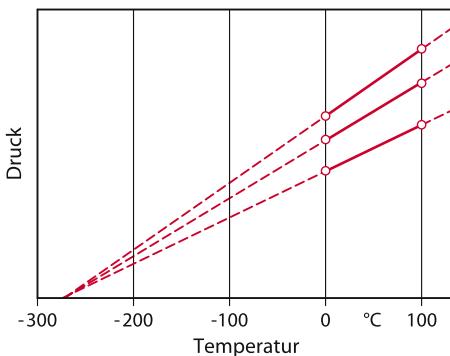


Abb. 5.3. Messungen mit dem Gasthermometer, schematisch (Einzelheiten im Text)

der linke Meniskus auf eine feste Marke bringen und das Gasvolumen auf einem festen Wert halten. Messreihen ergeben, dass die Art des Gases keine Rolle spielt, solange man sich an „vernünftige“ Gase wie Wasserstoff, Stickstoff, Sauerstoff, oder Helium hält. Verbindet man die bei den beiden Fixpunkten gemessenen Drücke mit einer Geraden und extrapoliert sie zu tiefen Temperaturen, so schneiden sie die Abszisse bei $-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$ (☞ Abb. 5.3). Dort liegt der **absolute Nullpunkt der Temperatur**, bei dem die Wimmelbewegung der Atome erstirbt. Kälter geht es nicht und dieser Nullpunkt kann grundsätzlich nicht unterschritten werden. Von ihm aus zählt die Kelvin-Skala. Ihre Teilstriche haben den gleichen Abstand wie die der Celsius-Skala: Die Differenz der beiden Fixpunkte beträgt nicht nur $100\text{ }^{\circ}\text{C}$, sondern auch 100 K . Beide Skalen sind um $273,15$ Einheiten gegeneinander versetzt. Das macht die Umrechnung einfach: Die Maßzahl der Kelvin-Skala ist um $273,15$ größer als die der Celsius-Skala:

$$\{T_{\text{K}}\} = \{T_{\text{C}}\} + 273,15.$$

Korrekt lässt sich dieser Zusammenhang nur als Zahlenwertgleichung schreiben. Zuweilen liest man freilich auch

$$T = 273 + t$$

mit der Anmerkung, T sei die „absolute Temperatur“ und t die „Celsius-Temperatur“. Wer

Bescheid weiß, kann sich das leisten. Tatsächlich gibt es aber nur eine einzige Temperatur, und die ist, wie jede andere messbare Größe auch, unabhängig von der Maßeinheit.

wichtig

Die Kelvin-Skala zählt vom absoluten Nullpunkt der Temperatur aus. Man erhält ihre Maßzahl, indem man die der Celsius-Skala um $273,15$ erhöht.

Weil der absolute Nullpunkt nicht unterschritten werden kann, gibt es keine negativen Temperaturen, wohl aber mit negativer Maßzahl in der Celsius-Skala, die ihren eigenen Nullpunkt willkürlich auf $273,15\text{ K}$ legt. Die Fahrenheit-Skala versuchte um 1700 herum, negative Vorzeichen zu vermeiden; aber damals wusste man noch nicht, wie kalt es grundsätzlich werden kann. Darum ist es nur für den Wetterbericht einigermaßen gelungen: $0\text{ }^{\circ}\text{F}$ entsprechen $-18\text{ }^{\circ}\text{C}$ und $100\text{ }^{\circ}\text{F}$ ungefähr der Körpertemperatur des Menschen:

$$\{T_{\text{F}}\} = 1,8 \cdot \{T_{\text{C}}\} + 32.$$

Einen gewissen Überblick über die Temperaturskalen geben die folgenden Werte (unter Verzicht auf Stellen hinter dem Komma):

- ▶ Absoluter Nullpunkt:
 $0\text{ K} = -273\text{ }^{\circ}\text{C} = -460\text{ }^{\circ}\text{F};$
- ▶ Eispunkt: $273\text{ K} = 0\text{ }^{\circ}\text{C} = 32\text{ }^{\circ}\text{F};$
- ▶ Körpertemperatur des Menschen:
 $310\text{ K} = 37\text{ }^{\circ}\text{C} = 99\text{ }^{\circ}\text{F};$
- ▶ Siedepunkt des Wassers (1013 hPa):
 $373\text{ K} = 100\text{ }^{\circ}\text{C} = 212\text{ }^{\circ}\text{F}.$

Der Einsatz von Flüssigkeitsthermometern ist begrenzt auf den Bereich zwischen Schmelzpunkt und Siedepunkt der Thermometersubstanz, zwischen $-35\text{ }^{\circ}\text{C}$ und $350\text{ }^{\circ}\text{C}$ beim Quecksilber beispielsweise. Bei elektrischen *Widerstandsthermometern* ist der Einsatzbereich nach unten gar nicht und nach oben durch den Schmelzpunkt des Metalls gegeben ($1773\text{ }^{\circ}\text{C}$ bei Platin). Besonders elegant arbeitet das *Thermoelement*

(s. Kap. 6.8.2): Zwei an ihren Enden leitend verbundene Drähte aus verschiedenen Metallen erzeugen eine elektrische Spannung, wenn sich die Kontaktstellen auf verschiedenen Temperaturen befinden. Diese *Thermospannungen* sind klein, aber messbar. Vor allem aber sind die Messfühler klein und damit schnell: Die Körpertemperatur eines Patienten kann in wenigen Sekunden angezeigt werden.

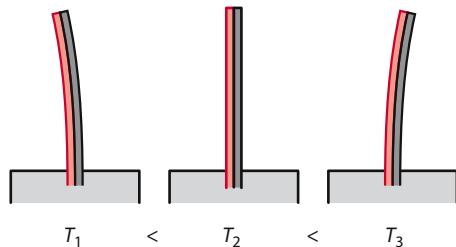


Abb. 5.4. Ein Bimetallstreifen biegt sich bei Änderung der Temperatur wie gezeichnet, wenn sich das linke Metall stärker ausdehnt als das rechte

5.1.2 Ausdehnungskoeffizienten

Auch Festkörper dehnen sich bei Erwärmung aus; Drähte und Stäbe werden in erster Linie länger. Bei hinreichend kleinen Temperaturänderungen ΔT darf man erwarten, dass die Längenänderung Δl sowohl zu ΔT wie zur Ausgangslänge l_0 proportional ist:

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T.$$

Die Proportionalitätskonstante α wird *linearer Ausdehnungskoeffizient* genannt. Er erweist sich, wenn man sehr genau misst, als etwas temperaturabhängig. Bei Metallen liegt er in der Größenordnung 10^{-5} K^{-1} . Das ist nicht viel; zwischen Zimmertemperatur und dem absoluten Nullpunkt ändert sich die Länge eines Kupferdrahtes um noch nicht 1 %. Trotzdem lässt sich die thermische Ausdehnung der Metalle zur Temperaturmessung verwenden, z.B. dadurch, dass man zwei Bleche mit unterschiedlichem α aufeinander schweißt. Ein solcher *Bimetallstreifen* krümmt sich bei Erwärmung nach der einen und bei Abkühlung nach der anderen Seite (☞ Abb. 5.4). Er ist kräftig genug, um einen elektrischen Kontakt zu öffnen oder zu schließen und so beispielsweise die Temperatur eines Bügeleisens oder eines Kühlschrankes zu regeln.

Selbstverständlich dehnt sich ein homogener Draht prozentual in seiner Längsrichtung thermisch nicht stärker aus als quer dazu. Mit der Länge nimmt auch das Volumen V zu:

$$\Delta V = \beta \cdot V_0 \cdot \Delta T;$$

für den *Volumenausdehnungskoeffizienten* β gilt generell:

$$\beta = 3\alpha.$$

Wieso? Für den Sonderfall eines Würfels mit der Kantenlänge a und dem Volumen $V = a^3$ lässt es sich leicht zeigen. Bei der Temperaturerhöhung ΔT wächst V auf

$$V(1+\beta \cdot \Delta T) = a^3 (1+\alpha \cdot \Delta T)^3 \\ = a^3 [1+3\alpha \cdot \Delta T + 3(\alpha \cdot \Delta T)^2 + (\alpha \cdot \Delta T)^3].$$

Nun ist aber $\alpha \cdot \Delta T$ allemal klein gegen die eins. Seine höheren Potenzen sind es erst recht und können nach den Überlegungen zur Fehlerrechnung (s. Kap. 1.3.1) vernachlässigt werden:

$$1+\beta \cdot \Delta T \sim 1+3\alpha \cdot \Delta T.$$

Für Flüssigkeiten kann nur der Volumenausdehnungskoeffizient angegeben werden. Auch er ist klein, liegt aber meist ein bis zwei Zehnerpotenzen über denen der Metalle. Einige Werte finden sich im Anhang.

wichtig

Thermische Ausdehnung:
linearer Ausdehnungskoeffizient α :
 $\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T$;
Volumenausdehnungskoeffizient
 $\beta = 3\alpha$: $\Delta V = \beta \cdot V_0 \cdot \Delta T$.

Ein Körper, der sich thermisch ausdehnt, ändert seine Masse nicht. Folglich nimmt

sein spezifisches Volumen V_s zu und seine Dichte ρ ab:

$$V_s(\Delta T) = V_s(T_0) (1 + \beta \cdot \Delta T);$$

$$\rho(\Delta T) = \rho(T_0) (1 - \beta \cdot \Delta T).$$

Generell können Ausdehnungskoeffizienten von der Temperatur abhängen. Wasser zeigt eine markante Anomalie: Es hat seine größte Dichte bei 4 °C. Für Fische kann dies überlebenswichtig sein, denn ein Teich hält an kalten Wintertagen auf seinem Grund die 4 °C auch dann noch bei, wenn er oben zufriert: das kältere Wasser ist „leichter“ und sinkt nicht nach unten. Diese Anomalie hat übrigens nichts damit zu tun, dass Eisschollen schwimmen. Die Besonderheit, sich beim Erstarren auszudehnen, ist nicht auf Wasser beschränkt.

wichtig

Anomalie des Wassers: größte Dichte bei 4 °C.

Rechenbeispiel 5.1: Stahlbrücke

Das freitragende Teil einer Stahlbrücke sei bei 20 °C 200 m lang. Wie viel Längenspiel müssen die Konstrukteure einplanen, wenn die Brücke Temperaturen von -20°C bis +40°C ausgesetzt ist? Der Ausdehnungskoeffizient von Eisen beträgt $12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Lösung: Da die Kelvinskala die gleiche Gradinteilung hat wie die Celsiusskala könnte man die Einheit des Ausdehnungskoeffizienten auch in $^{\circ}\text{C}^{-1}$ schreiben. Die Schrumpfung der Brücke im kältesten Fall wäre: $\Delta l = \alpha \cdot 200 \text{ m} \cdot (-20 \text{ }^{\circ}\text{C}) = -4,8 \text{ cm}$, die Ausdehnung $\Delta l = \alpha \cdot 200 \text{ m} \cdot 40 \text{ }^{\circ}\text{C} = 9,6 \text{ cm}$. Es muss also insgesamt ein Spielraum von 14,4 cm eingeplant werden.

5.1.3 Das ideale Gas

Festkörper und Flüssigkeiten sind praktisch inkompressibel; unter Druck ändern sie

Dichte, Volumen und Ausdehnungskoeffizienten fast gar nicht. Anders sieht es bei den Gasen aus. Nach dem *Gesetz von Boyle-Mariotte* (s. Kap. 3.3.6) sind ihre Dichten dem Druck proportional, ist das Produkt Druck · Volumen konstant:

$$p \cdot V = \text{const.}$$

Das Gasthermometer (s. Kap. 5.1.1) postuliert für dieses Produkt eine Proportionalität zur Temperatur T :

$$p \cdot V \sim T.$$

Nun leuchtet ein, dass die doppelte Menge Wasserstoff auch den doppelten Platz beansprucht; $p \cdot V$ ist auch der Gasmenge proportional. Nimmt man die Masse des eingesperrten Gases als Maß für dessen Menge, so bekommt man für jede Gasart eine andere Proportionalitätskonstante. Rechnet man aber mit der Anzahl N der eingesperrten Moleküle, so gilt für alle Gase die gleiche Konstante. Sie bekommt den Buchstaben k oder k_B und den Namen

$$\text{Boltzmann-Konstante } k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K.}$$

Gase, die sich tatsächlich an die hier skizzierten Gesetzmäßigkeiten halten, werden „ideale Gase“ genannt. Für sie gilt die *Zustandsgleichung der idealen Gase*, das *Gasgesetz* also:

$$p \cdot V = N \cdot k_B \cdot T.$$

Dahinter steht eine bemerkenswerte Tatsache: Überall dort, wo das Gasgesetz gilt, spielt nur die Anzahl N der Moleküle eine Rolle, nicht deren Namen, nicht deren chemische Natur. Da kann man auch schon ahnen, wo die Grenzen der Gesetzmäßigkeit liegen: beim „idealen Gas“ wird angenommen, dass die Moleküle nicht miteinander wechselwirken, sich insbesondere nicht gegenseitig anziehen. Tatsächlich ist das nicht immer der Fall und bei hinreichend tiefen Temperaturen führt dies zum Verflüssigen und Er-

starren des Stoffes. Diese gegenseitigen Anziehungskräfte der Moleküle und damit der Schmelzpunkt und der Siedepunkt hängen natürlich sehr wohl von der chemischen Natur ab. Trotzdem ist die Zustandsgleichung des idealen Gases als Näherungsformel sehr nützlich, da bei hinreichend hohen Temperaturen die Anziehungskräfte zwischen den Molekülen vernachlässigt werden können. Die kinetische Energie der Moleküle ist dann viel höher als die potentielle Energie, die sich aus der gegenseitigen Anziehung ergibt.

wichtig

Ideales Gas: die Anziehungskräfte zwischen den Molekülen werden vernachlässigt. Die Moleküle werden als Punktmassen angenommen. Gute Näherung für hohe Temperaturen.

Man kann das Gasgesetz auch auf die von den N Molekülen repräsentierte *Stoffmenge* n beziehen. Dazu muss man, wie in Kap. 1.2.1 beschrieben, N durch die *Avogadro-Konstante* N_A ($= 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$) dividieren, danach aber zum Ausgleich die Boltzmann-Konstante mit N_A multiplizieren. Dieses Produkt bekommt den Namen

Allgemeine Gaskonstante

$$R = N_A \cdot k = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

und gibt dem Gasgesetz die Form

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T.$$

Der Quotient V/n ist das Molvolumen V_n . Man kann das Gasgesetz deshalb auch

$$p \cdot V_n = R \cdot T$$

schreiben. Soweit ist alles korrekt. Wenn man den Index n beim Molvolumen einspart, also $p \cdot V = R \cdot T$ schreibt, sollte man ausdrücklich dazusagen, dass V kein (z.B. in Litern zu messendes) Volumen darstellt, sondern ein (z.B. in Liter/Mol zu messen-

des) Molvolumen. Unter *Normalbedingungen*, d.h. einem Druck $p = 1013 \text{ hPa}$ und der Temperatur $T = 0^\circ\text{C}$, beträgt das Molvolumen eines idealen Gases $22,4 \text{ l/mol}$. Wenn man sein Gas jetzt auch noch wiegt, also seine Masse m bestimmt, kann man die Molekülmasse (bei Gasgemischen die mittlere Molekülmasse) $m_M = m/N$ ausrechnen, denn das Produkt aus Stoffmenge und Avogadro-Konstante ist ja die Molekülanzahl N .

wichtig

Gasgesetz (Zustandsgleichung der idealen Gase)

$$p \cdot V = N \cdot k_B \cdot T = n \cdot R \cdot T$$

$$\begin{aligned} k &= k_B = \text{Boltzmann-Konstante} \\ &= 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= \text{allgemeine Gaskonstante} \\ &= 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1} \end{aligned}$$

Rechenbeispiel 5.2: Wie viel Moleküle in einem Atemzug?

Ungefähr wie viel Moleküle atmet man bei einem 1 Liter - Atemzug ein?

Lösung: Luft unter Normalbedingungen ist in guter Näherung ein ideales Gas. Das Molvolumen ($6,02 \cdot 10^{23}$ Moleküle) ist etwa $22,4 \text{ l}$. Man atmet also etwa

$$\frac{11}{22,4 \text{ l}} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 2,7 \cdot 10^{22}$$

Moleküle ein.

Rechenbeispiel 5.3: Reifendruck

Ein Reifen ist bei 10°C auf einen Überdruck von 200 kPa aufgepumpt. Nachdem das Auto 100 km gefahren ist, ist die Reifentemperatur auf 40°C gestiegen. Welcher Überdruck herrscht nun im Reifen?

Lösung: Das Volumen des Reifens bleibt in etwa konstant. Wir haben also:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

Um diese Formel nutzen zu können, müssen wir zwei Dinge tun: die Temperaturen in absolute Temperaturen umrechnen (273 K addieren) und zum Überdruck den Luftdruck (101 kPa) addieren, um auf den Gesamtdruck zu kommen. Dann bekommen wir:

$$p_2 = \frac{313\text{K}}{283\text{K}} \cdot 301\text{kPa} = 333\text{kPa}.$$

Das entspricht dann wieder einem Überdruck von 232 kPa. Das ist ein Anstieg um immerhin 15%. Deshalb soll man Reifendrücke immer im kalten Zustand messen.

5.1.4 Partialdruck und Partialvolumen

Dass sich Luft im Wesentlichen aus Stickstoff und aus Sauerstoff zusammensetzt, dass diese Elemente zweiatomige Moleküle bilden, die Atome der Edelgase aber für sich allein bleiben, kümmert das Gasgesetz wenig: Ihm sind alle Moleküle gleich, und Atome hält es auch für Moleküle. Ihm geht es nur um deren Anzahl N . Bei einem Gasgemisch aus n Komponenten darf man deren Molekülzahlen N_1 bis N_n darum einfach aufzaddieren:

$$p \cdot V = (N_1 + N_2 + \dots + N_n) \cdot kT = kT \cdot \sum_{i=1}^n N_i$$

Auch das Produkt aus Druck p und Volumen V auf der linken Seite der Gleichung darf man den Komponenten zuordnen; formal gibt es dafür zwei Möglichkeiten:

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_n) \cdot V = kT \cdot \sum_{i=1}^n N_i$$

$$p(V_1 + V_2 + \dots + V_n) = kT \cdot \sum_{i=1}^n N_i.$$

Beide Formeln suggerieren jeweils eine andere Modellvorstellung. Im ersten Fall tut man so, als stünde jeder Molekülsorte das ge-

samte Volumen V zur Verfügung; dann trägt jede Komponente mit dem *Partialdruck* p_i ihren Anteil zum Gesamtdruck p bei:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^n p_i.$$

Im zweiten Fall behauptet man, jede Molekülsorte stünde unter dem gleichen Druck p , habe aber nur ihr *Partialvolumen* V_i zur Verfügung:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \sum_{i=1}^n V_i.$$

Definitionsgemäß stehen die Partialdrücke und die Partialvolumina untereinander in den gleichen Verhältnissen wie die Molekülzahlen:

$$p_1 : p_2 : p_3 = V_1 : V_2 : V_3 = N_1 : N_2 : N_3.$$

Ob man die Anteile der Einzelgase an einem Gemisch durch Partialvolumina oder durch Partialdrücke, durch Teilchenanzahlen oder Stoffmengenanteile („Molenbrüche“) ausdrückt, ist gleichgültig; nur darf man nicht alles zugleich tun. Im Einzelfall muss man sich für eines der möglichen Verfahren entscheiden.

5.2 Thermische Bewegung

Einleitung

Moleküle befinden sich in ständiger, ungeordneter Bewegung, die mit steigender Temperatur immer heftiger wird. Diese thermische Bewegung verlangt auf jeden Fall kinetische Energie, bei Wechselwirkung zwischen den Molekülen aber auch potentielle, gespeichert in den Bindungen. Temperaturerhöhung verlangt deshalb Zufuhr von Energie, Zufuhr von Wärme. Wärme ist eine Form der Energie und wird darum in Joule gemessen. Die thermische Bewegung hat zwei für Menschen, Tiere und Pflanzen gleichermaßen lebensnotwendige Prozesse zur Folge: die Diffusion und die Osmose.

5.2.1 Wärme

Ein Tauchsieder soll Wasser erwärmen, also dessen Temperatur erhöhen. Dazu holt er elektrische Energie „aus der Steckdose“, setzt sie in **Wärme** um und gibt sie an das Wasser weiter, in dem sie mikroskopisch betrachtet als kinetische Energie in der Wimbelbewegung der Atome gespeichert wird.

wichtig

Wärme ist eine Form der Energie.

In leidlicher Näherung ist die erzielte Temperaturerhöhung ΔT (zu messen in Kelvin) der zugeführten Wärme Q (zu messen in Joule) proportional. Die Beziehung

$$Q = C \cdot \Delta T$$

definiert die **Wärmekapazität** C eines bestimmten festen, flüssigen oder auch gasförmigen „Körpers“. Zu ihr gehört die Einheit J/K. Ein Kaninchen ist kleiner als ein Elefant; für die Wärmekapazitäten der beiden gilt das auch. Bezieht man C auf die Masse m des Körpers, so erhält man die

$$\text{spezifische Wärmekapazität } c = C/m$$

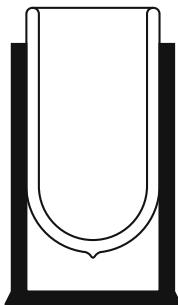


Abb. 5.5. Dewar-Gefäß (Thermosflasche), doppelwandiges Gefäß mit guter Wärmeisolation. Der Zwischenraum zwischen den beiden Wänden ist evakuiert, um Wärmeverluste durch Wärmeleitung zu reduzieren (s. Kap. 5.2.3); die Wände sind verspiegelt, um Wärmeverluste durch Strahlung zu reduzieren (s. Kap. 5.4.2). Dewar-Gefäße können „implodieren“ und gehören deshalb in einen stabilen Behälter

mit der SI-Einheit $J \text{ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$; bezieht man C auf die Stoffmenge n , erhält man die

$$\text{molare Wärmekapazität } c_n = C/n$$

mit der Einheit $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Die beiden werden zuweilen nicht ganz korrekt, aber kürzer „spezifische Wärme“ und „Molenwärme“ genannt.

wichtig

- ▶ Wärmekapazität $C = Q/\Delta T$
- ▶ spezifische Wärmekapazität $c = C/m$
- ▶ molare Wärmekapazität $c_n = C/n$

Wärmemengen bestimmt man im Kalorimeter; man misst die Temperaturänderung einer bekannten Wärmekapazität. Favorisierte Kalorimetersubstanz ist das Wasser, in abgemessener Menge eingefüllt in ein Gefäß mit guter Wärmeisolierung. Bewährt haben sich die *Dewar-Gefäße*^{*}, doppelwandige Glasflaschen mit evakuierter Wandung (☞ Abb. 5.5): Als thermische Bewegung von Molekülen ist Wärme an Materie gebunden, Vakuum unterbindet jede Wärmeleitung. Im Haushalt bezeichnet man Dewar-Gefäße als *Thermosflaschen*.

Messungen mit dem Kalorimeter setzen voraus, dass man die spezifische Wärmekapazität der Kalorimeterflüssigkeit kennt. Eine mögliche Messung soll anhand der ☞ Abb. 5.6 beschrieben werden: Im Dewar-Gefäß befindet sich Wasser mit der Masse m auf der Ausgangstemperatur T_0 ; vom Deckel des Kalorimeters taucht eine Heizwendel in das Wasser („Tauchsieder“). Legt man jetzt für die Zeitspanne Δt eine elektrische Spannung U_0 an die Wendel, so fließt der Strom I_0 und setzt (wie in Kap. 6.1.2 erläutert werden wird) die elektrische Energie

$$W = U_0 \cdot I_0 \cdot \Delta t$$

* Sprich „Djuar“ – auf die Aussprache englischer Namen kann aus der Schrift nicht zuverlässig geschlossen werden.

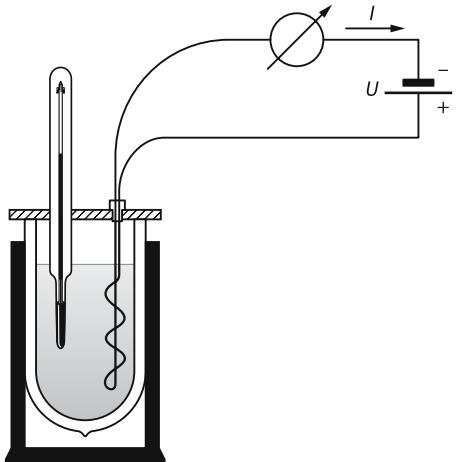


Abb. 5.6. Zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität des Wassers (Einzelheiten im Text)

in die Wärmemenge Q um. Diese heizt das Wasser entsprechend seiner spezifischen Wärmekapazität $c(\text{H}_2\text{O})$ bis zur Endtemperatur T_1 auf:

$$Q = m \cdot c(\text{H}_2\text{O}) \cdot (T_1 - T_0).$$

Ist die spezifische Wärmekapazität des Wassers

$$c(\text{H}_2\text{O}) = 4,18 \text{ J/(g} \cdot \text{K)}$$

erst einmal bekannt, so können die Wärmekapazitäten anderer Substanzen grundsätzlich nach folgendem Schema ausgemessen werden: Man hängt einen Kupferring (Masse m_K) zunächst in siedendes Wasser (Temperatur T_3) und bringt ihn dann in das Kalorimeterwasser; dessen Temperatur steigt dadurch von T_1 auf T_2 . Die dafür notwendige Wärme muss der Ring durch Abkühlung geliefert haben. Damit lässt sich $c(\text{Cu})$ grundsätzlich ausrechnen.

Bei Messungen mit dem Wasserkalorimeter spart man eine Umrechnung, wenn man Q nicht in Joule angibt, sondern in der dem $c(\text{H}_2\text{O})$ angepassten Einheit *Kalorie* (cal), definiert zu

$$1 \text{ cal} = 4,18400 \text{ J.}$$

Sie gehört nicht zu den SI-Einheiten und verschwindet deshalb allmählich von der Bildfläche.

Auslaufende Energieeinheit:
Kalorie = cal $\sim 4,2 \text{ J.}$

wichtig

Leben braucht Energie; es setzt Energie um und das nicht nur, wenn man sich bewegt, also mechanische Arbeit produziert. Auch im Schlaf hat der Mensch noch einen **Grundumsatz** von etwa 80 W, also ungefähr 7 MJ/Tag oder auch 1650 kcal/d. Er ist erforderlich, um lebenswichtige Funktionen wie Atmung und Herzschlag, aber auch um die Körpertemperatur aufrechtzuerhalten. Der Mensch besitzt ferner eine Wärmekapazität; da er im Wesentlichen aus Wasser besteht, darf man bei 70 kg Körpermasse getrost schreiben:

$$C(\text{Mensch}) \sim 70 \text{ kcal/K} \sim 0,3 \text{ MJ/K.}$$

Das heißt nun wieder: Könnte man einen Menschen völlig Wärmeisolieren, so würde ihn sein Grundumsatz mit einer Geschwindigkeit von etwa 1 K/h aufheizen. Viel schneller kann Fieber aus rein wärmetechnischen Gründen nicht steigen.

Mensch und Tier beziehen die zum Leben notwendige Energie aus der Nahrung, also aus komplizierten organischen Molekülen. Diese bestehen aber nicht anders als das Benzin für Motoren im Wesentlichen aus Atomen des Kohlenstoffs (C) und des Wasserstoffs (H). Letzten Endes werden sie in Kohlendioxid (CO_2) und in Wasser (H_2O) übergeführt, d.h. mit Sauerstoff (O) aus der Atmung oxydiert. Der Weg der chemischen Umsetzung ist kompliziert und läuft in vielen Einzelschritten ab; zu jedem gehört eine Energieumwandlung. Schließlich und endlich wird aber immer Wärme daraus, und zwar insgesamt genau so viel wie bei schlichter Verbrennung in der Retorte; auf den Energiesatz ist Verlass. Deshalb kann man ganz unabhängig von einem lebenden

Organismus den **Brennwert** von Nahrungsmitteln im Laboratorium messen, den Betrag der chemischen Energie also, die bei der Oxydation z.B. eines Pfeffersteaks frei wird.

Rechenbeispiel 5.4: Schlankwerden auf die harte Tour

Ein Student isst ein Mittagessen, dessen Brennwert mit 2000 Kilokalorien angegeben worden ist. Er will das wieder abarbeiten, indem er eine 50 Kg - Hantel stemmt. Sagen wir, er kann sie 2 m hoch heben. Wie oft muss er sie heben, um die 2000 kcal wieder los zu werden?

Lösung: $2000 \text{ kcal} = 8,37 \cdot 10^6 \text{ J}$. Der Student leistet bei N - mal Stemmen die Arbeit $W = N \cdot m \cdot g \cdot h$. Also ist:

$$N = \frac{8,37 \cdot 10^6 \text{ J}}{50 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 2 \text{ m}} = 8532 \text{ .}$$

Rechenbeispiel 5.5: Im Saloon

Ein Cowboy schießt mit seiner Pistole eine 2 g -Bleikugel mit 200 m/s in die Holzwand, wo sie stecken bleibt. Angenommen, die freiwerdende Energie bleibt vollständig in der Kugel. Wie heiß wird sie dann? (Wärmekapazität von Blei: $c(\text{Pb}) = 0,13 \text{ J/g} \cdot \text{K}$)

Lösung: Die freiwerdende Energie ist

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = 40 \text{ J}.$$

Wir bekommen also die Temperaturänderung:

$$\Delta T = \frac{Q}{m \cdot c} = \frac{40 \text{ J}}{2 \text{ g} \cdot 0,13 \text{ J/g} \cdot \text{K}} = 154 \text{ K}.$$

War die Zimmertemperatur 20 °C, so bedeutet dies 174 °C.

5.2.2 Molekularbewegung

Wo bleibt die Energie, die einem Körper bei Erwärmung zugeführt wird? Verloren

kann sie ja nicht gehen. Sie wird in der thermischen Wimmelbewegung der Moleküle gespeichert, denn zu jeder Bewegung, ob geordnet oder nicht, gehört zumindest kinetische Energie.

Von der thermischen Wimmelbewegung kann man sich durch Augenschein überzeugen. Zwar vermag kein Lichtmikroskop einzelne Moleküle darzustellen, wohl aber die in verdünnter Tinte aufgeschwemmten Pigmentteilchen. Sie sind klein genug, um die Stöße der Wassermoleküle, die von allen Seiten auf sie einrennen, als unregelmäßig zu empfinden, und zittern und torkeln unentwegt hin und her (*Brown'sche Molekularbewegung*). Erst gegenüber größeren Flächen mitteln die Stöße zu einer (scheinbar) konstanten Kraft, einem (scheinbar) konstanten Druck.

wichtig

Wärme ist die mit der thermischen Molekularbewegung verbundene Energie.

Die thermische Molekularbewegung hält unentwegt an, sie wird mit steigender Temperatur heftiger und mit sinkender langsamer. Weniger als gar keine Bewegung kann es nicht geben; es leuchtet ein, dass ein absoluter Nullpunkt der Temperatur existiert. Über die mit der Molekularbewegung verbundene Energie geben spezifische und molare Wärmekapazität empirische Auskunft, verraten aber nichts über Einzelheiten.

Ein Gasmolekül glaubt die meiste Zeit seines Lebens, es sei allein auf der Welt. Zwar stößt es in Zimmerluft ungefähr jede Nanosekunde mit einem Artgenossen zusammen, aber diese *mittlere freie Flugzeit* ist groß gegen die eigentliche Stoßzeit und die *mittlere freie Wegstrecke* groß gegen den Moleküldurchmesser. Abbildung 5.7 versucht, den Zickzackweg eines Moleküls darzustellen, grobschematisch, weil er gewiss nicht in einer Ebene bleibt. Edelgase gehen keine chemischen Verbindungen ein, auch nicht mit sich selbst; ihre Atome sind

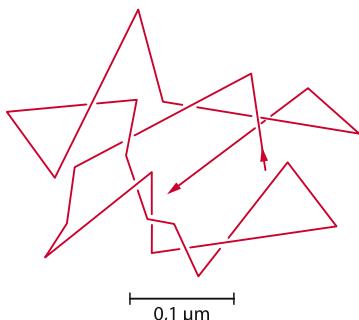


Abb. 5.7. Bahn eines Stickstoffmoleküls in Zimmerluft, grobschematisch. Bei Zimmertemperatur wäre das Molekül die gezeichnete Strecke in ungefähr 50 ns ($5 \cdot 10^{-8}$ s) abgelaufen (aber natürlich nicht in der Zeichenebene geblieben)

zugleich ihre Moleküle. Als kleine Kugeln können sie thermisch nur geradeaus laufen bis zum nächsten Stoß. Die Moleküle einer Flüssigkeit hingegen stehen ständig in „Tuchfühlung“; sie spüren ständig die von ihren Nachbarn ausgehenden, anziehenden Kräfte der Kohäsion. Sie können sich kaum besser bewegen als Autos im Stau. Die Moleküle eines Festkörpers schließlich sind an ihre Gitterplätze gebunden; ihre thermische Bewegung beschränkt sich auf Schwingungen um ihre Ruhelagen.

Entsprechend den drei Richtungen im Raum ordnet man der reinen Translation drei *Freiheitsgrade* zu. Die zweiatomigen Moleküle des Stickstoffs (N_2) bilden dahingegen Hanteln, die um zwei zueinander senkrechte Achsen rotieren können (Abb. 5.8); Drehung um die Hantelachse bringt mangels Trägheitsmoment keine Rotationsenergie unter: zwei zusätzliche Freiheitsgrade, zusammen fünf. Dreiatomige Moleküle besitzen für Achsen in allen drei Raumrichtungen Trägheitsmomente: ein zusätzlicher Freiheitsgrad, zusammen sechs. Komplizierter wird es, wenn ein Molekül auch noch in sich schwingen kann; jede Möglichkeit bringt gleich zwei Freiheitsgrade, einen für die kinetische, einen für die potentielle Energie der Schwingung. Das gilt dann auch für die Schwingungen der Gitterbausteine eines Kristalls. Hinzu kommen dann noch die Regeln der Quan-

tenphysik, welche Rotationen und Schwingungen im Einzelfall überhaupt ausgeführt werden dürfen. Wenn aber ein Freiheitsgrad angeregt ist, dann hat er nach dem **Gleichverteilungssatz** Anspruch auf eine mittlere thermische Energie $\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} k_B \cdot T$ für jedes Molekül. Für ein einatomiges Gas bedeutet das eine molare Wärmekapazität $c_n = \frac{3}{2} R \cdot T$.

wichtig

Die Temperatur ist proportional zur Energie der thermischen Wimbelbewegung.
Die thermische Energie eines einzelnen Moleküls beträgt $f \cdot \frac{1}{2} k_B \cdot T$, wobei f die Zahl der Bewegungsfreiheitsgrade des Moleküls ist.

Kein Gasmolekül läuft exakt mit der Geschwindigkeit, die ihm nach dem Gleichverteilungssatz zusteht. v_{th} ist nur der Mittelwert, um den sich die wirklichen (momentanen) Geschwindigkeiten mehr oder weniger eng gruppieren. Könnte man diese zu einem bestimmten Zeitpunkt tatsächlich messen, so könnte man die Moleküle auch einzelnen Geschwindigkeitskästchen einheitlicher Breite Δv zuteilen und nachzählen, wie viele sich in den einzelnen Kästchen gerade befinden. Danach könnte man eine Treppenkurve der Geschwindigkeitsverteilung zeichnen; sie wird **Häufigkeitsverteilung** oder auch **Histogramm** genannt. Eine Mikrosekunde später befänden sich alle Moleküle, die inzwischen gestoßen haben, in einem anderen

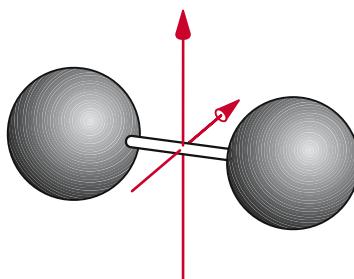


Abb. 5.8. Ein zweiatomiges, hantelförmiges Molekül besitzt zwei Achsen, zwei Freiheitsgrade, in denen es Rotationsenergie unterbringen kann

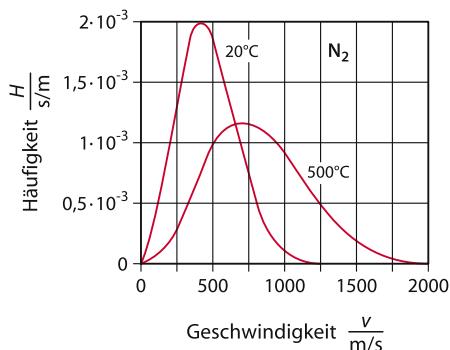


Abb. 5.9. Histogramm der thermischen Geschwindigkeiten von Stickstoffmolekülen für zwei Temperaturen (Maxwell-Geschwindigkeitsverteilung). Als Ordinate ist die Häufigkeit H aufgetragen, mit der Moleküle in einem Geschwindigkeitsintervall der Breite Δv zu erwarten sind. Stecken in dem Intervall ΔN Moleküle, so haben die an der Gesamtanzahl N den Anteil $\Delta N/N$ und die Häufigkeit $H = \Delta N/(N \cdot \Delta v)$. Wegen des Geschwindigkeitsintervalls unter dem Bruchstrich kommt der Häufigkeit hier die Einheit s/m zu

Kästchen, aber sie hätten im Wesentlichen nur Plätze miteinander getauscht und die Treppenkurve selbst nicht weiter verändert. Durchführen lässt sich diese Messung nicht, man kann aber das Histogramm für ein ideales Gas ausrechnen und als glatte Kurve zeichnen; jede reale Gasmenge enthält so viele Moleküle, dass man die Kästchenbreite kleiner als die Strichdicke machen kann. Dann ist die Treppenform der Kurve nicht mehr zu erkennen. Abbildung 5.9 zeigt die Maxwell-Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle des Stickstoffs für zwei Temperaturen. Wasserstoffmoleküle sind leichter und müssen darum schneller sein; sie bekommen ja im Mittel die gleiche kinetische Energie zugeteilt.

5.2.3 Wärmeleitung

Lange bevor sich ein Gasmolekül in der thermischen Bewegung ernsthaft von seinem Ausgangspunkt entfernt hat, ist es schon mit unzähligen Artgenossen unter Austausch von Energie und Impuls zusammengestoßen. Die

Gitterbausteine des Kristalls können thermische Energie sogar weitergeben, ohne ihren Platz zu verlassen. Hängt man einen Metallstab mit seinem unteren Ende in flüssigen Stickstoff, bringt man ihn also dort auf rund 80 K, so kann man verfolgen, wie Raureif am Stab emporklettert, d.h. wie sich der Eispunkt langsam nach oben schiebt, in Kupfer deutlich schneller als in Eisen, denn Cu hat eine höhere **Wärmeleitfähigkeit** (Abb. 5.10).

wichtig

Wärmeleitung: Wärmetransport ohne Materietransport.

Durch die thermische Bewegung wird eine

Wärmemenge Q ,

gemessen in J, fortgeleitet in einem

Wärmestrom = $I_Q = dQ/dt$

gemessen in Watt; er repräsentiert eine Leistung. Ein Wärmestrom braucht, um fließen zu können, eine Querschnittsfläche A , zu ihm gehört deshalb eine

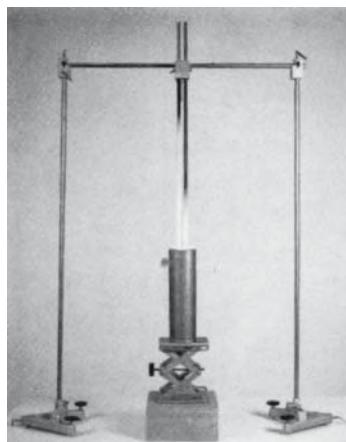


Abb. 5.10. Demonstrationsversuch zur Wärmeleitung: Ein Kupfer- und ein Eisenstab mit gleichen Abmessungen tauchen gleich tief in flüssigen Stickstoff. Reifbildung markiert den langsam nach oben kriechenden Eispunkt, er kriecht im Kupfer schneller als im Eisen

Wärmestromdichte $j_Q = I/A$,

gemessen in W/m^2 . Ihre Ursache ist eine Temperaturdifferenz ΔT , genauer, ein

Temperaturgradient dT/dx ,*

gemessen in K/m . In guter Näherung sind Gradient und Wärmestromdichte einander proportional. Daraus ergibt sich die

Wärmeleitungsgleichung $j_Q = -\lambda \cdot dT/dx$

mit der Wärmeleitfähigkeit λ . Das negative Vorzeichen berücksichtigt, dass Wärme von heiß nach kalt fließt, also den Temperaturberg hinunter. λ wird in $\text{W/(m}\cdot\text{K)}$ gemessen. Im Allgemeinen hängt die Wärmeleitfähigkeit etwas von der Temperatur ab. Man muss deshalb vorsichtig sein, wenn man den Differentialquotienten der Wärmeleitungsgleichung kurzerhand wie einen Differenzenquotienten behandelt. Oftmals kommt es einem aber gar nicht so genau darauf an.

wichtig

Wärmeleitungsgleichung:

Wärmestromdichte $j_Q = -\lambda \cdot dT/dx$
mit der Wärmeleitfähigkeit λ .

Auch die Elektronen, die im Metall den elektrischen Strom transportieren, nehmen an der Wärmebewegung teil. Gute elektrische Leiter wie Silber und Kupfer sind deshalb auch gute Wärmeleiter; Kochlöffel fertigt man seit alters her aus dem elektrischen Nichtleiter Holz. Gase haben schon wegen ihrer geringen Dichte auch nur geringe Wärmeleitfähigkeit.

* Genaugenommen hat das Temperaturgefälle, hat der Temperaturgradient eine Richtung im Raum, ist also ein Differentialquotient und ein Vektor. Eben dies versteht die Mathematik unter der Vokabel „Gradient“ und schreibt „grad T “. Von Gradienten wird später bei der Diffusion und vor allem bei elektrischen und magnetischen Feldern wieder die Rede sein.

Das gilt aber nur, wenn sie in Ruhe sind. Wirbelt ein Gas oder eine Flüssigkeit herum, so kann es Wärme zusammen mit Materie transportieren. Man spricht dann von **Konvektion**. Konvektion transportiert Wärme in der Regel viel effizienter als Wärmeleitung und wird deshalb oft zum Kühlern oder heizen eingesetzt. Der Kühler eines Autos nutzt diese Form der Wärmeleitung gleich zweimal: Der Ventilator bläst kühlere Umgebungsluft durch einen Wärmetauscher („Kühler“), durch den wiederum das Kühlwasser zum Motor gepumpt wird. Im Wärmetauscher und im Motor muss die Wärme aber wieder durch Wärmeleitung von dem Kühlwasser zur Luft gelangen.

Auch der Heizkörper in der Wohnung gibt seine Wärme zu einem guten Teil durch Konvektion ab: Die aufgewärmte Luft steigt ihrer geringeren Dichte wegen zur Decke (und kann dabei im Laufe der Jahre hässliche Staubsäuren an der Wand hinterlassen), sinkt abgekühlt wieder herunter und kriecht über dem Boden zum Heizkörper zurück. Was hier technisches Ziel ist, will der Eisbär unterbinden. Eben dazu dient sein Fell, und der Mensch zieht sich warm an.

Die Wirkung der freien thermischen Konvektion korrekt auszurechnen, ist nahezu unmöglich, dazu sind die Strömungsverhältnisse viel zu kompliziert. Unabhängig von den Details wird aber die Dichte j_Q des Wärmestromes im Großen und Ganzen proportional zur Differenz ΔT der Temperaturen des Heizkörpers und der von der Konvektion noch nicht erfassten Luft sein. Das erlaubt, mit der Gleichung $j_Q = h_{cv} \cdot \Delta T$ einen **Wärmeübergangskoeffizienten** h_{cv} zu definieren. Für Zimmerluft gibt es brauchbare Erfahrungswerte. Eine horizontale warme Fläche bringt es auf $h_{cv} \sim 9 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$, eine vertikale auf $h_{cv} \sim 5,5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$.

wichtig

Wärmeübergang mit Konvektion:

Wärmestromdichte $j_Q = h_{cv} \cdot \Delta T$
mit Wärmeübergangskoeffizient h_{cv} .

Im Vakuum gibt es weder Konvektion noch Wärmeleitung. Das Dewar-Gefäß nutzt das aus.

Rechenbeispiel 5.6: Wärmeverlust durchs Fenster

Welcher Wärmeverlust entsteht an einem 2 m^2 großen Fenster (einglasig, Glasdicke 3 mm), wenn an der Innenseite eine Temperatur von 15°C und auf der Außenseite eine Temperatur von 14°C herrscht. Die Wärmeleitfähigkeit von Glas ist etwa $1 \text{ W/m}\cdot\text{K}$.

Lösung: Durch die Scheibe wird eine Leistung von

$$P = \frac{1 \text{ W/mK} \cdot 2 \text{ m}^2}{0,003 \text{ m}} \cdot 1 \text{ K} = 667 \text{ W}$$

transportiert. Da muss ein kräftiger Heizstrahler gegen heizen. Also lieber doppelt verglasen, denn die Luft zwischen den Scheiben hat eine Wärmeleitfähigkeit von nur $0,023 \text{ W/mK}$.

Rechenbeispiel 5.7: Frierender Mensch

Der Mensch hat eine Oberfläche von etwa $1,5 \text{ m}^2$. Wie groß wäre sein Wärmeverlust durch Konvektion, wenn er nackt in einem 15°C kalten Raum stünde?

Lösung: Die Temperatur der Hautoberfläche wird nicht ganze 37°C sein, vielleicht nur 33°C . Dann ist ca.

$$P = 5,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \cdot 1,5 \text{ m}^2 \cdot 8^\circ\text{C} = 66 \text{ W}.$$

Das ist die Leistung einer Glühbirne.

5.2.4

Temperaturstrahlung

Siehe auch Kap. 7.3.3.

Vakuum unterbindet jeden Temperaturoausgleich durch Wärmeleitung oder Konvektion; das gilt für die Doppelwand des Dewar-Gefäßes und für den Weltraum. Trotzdem bleibt eine Form des Wärmeaustausches möglich: der durch **Temperaturstrahlung** nämlich. Ohne Strahlung gäbe es auf der Erde kein Leben; seine Energiequelle ist die Sonne, durch den leeren Weltraum von ihm getrennt.

Wärme besteht im Wesentlichen aus der kinetischen Energie ungeordneter Molekülbewegungen und ist somit an Materie gebunden. Wärmeaustausch über Temperaturstrahlung durch das Vakuum setzt deshalb zweimalige Energieumwandlung voraus: Die Strahlungsquelle verliert Wärmeenergie, der Strahlungsempfänger gewinnt Wärmeenergie, unterwegs ist aber eine elektromagnetische Welle und deren Energie. Auch sichtbares Licht gehört zu diesen Wellen. Ausführlich behandelt werden sie im Kapitel „Optik“, entsprechend findet sich auch dort ein Kapitel über Temperaturstrahlung (s. Kap. 7.3.3). Hier sei nur soviel vorweggenommen: Jeder Körper auf einer Temperatur über 0 K – und das heißt wirklich *jeder* Körper – strahlt Licht ab, wenn auch nicht notwendigerweise sichtbares. Erst von etwa 700°C aufwärts beginnt eine heiße Fläche für das menschliche Auge erkennbar zu glühen. Mit steigender Temperatur verschiebt sich das Spektrum der Strahlung zu kürzeren Wellen (*Wien-Verschiebungsgesetz*). Die gesamte Strahlungsleistung, integriert über alle Wellenlängen, wächst rapide mit der Temperatur an, proportional zu T^4 nämlich:

$$\text{Stefan-Boltzmann-Gesetz: } P = A \cdot \sigma \cdot T^4$$

Hierbei ist A die strahlende (schwarze) Fläche und $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ eine *Strahlungskonstante*.

Unsichtbare Temperaturstrahlung wird zuweilen auch Wärmestrahlung genannt. Wer sich dicht vor einen eisernen Kanonenofen setzt, dem leuchtet diese Bezeichnung höchst sinnfällig ein. Es handelt sich aber um elektromagnetische Wellen im infraroten Spektralbereich, also um Licht im weiteren Sinne.

Temperaturstrahlung („Wärmestrahlung“): Jeder Körper verliert Energie durch Abstrahlung von Licht (im weitesten Sinn des Wortes). Der Energiestrom wächst mit der vierten Potenz der Temperatur und verschiebt dabei seinen Schwerpunkt zu kürzeren Wellenlängen.

wichtig

An wolkenlosen Sommertagen darf die Lufttemperatur nur „im Schatten“ gemessen werden, andernfalls wird das Thermometer zum Strahlungsempfänger und wandelt Sonnenlicht in Wärme um, die es nur dadurch wieder loswerden kann, dass es sie an die Luft weitergibt. Dazu ist aber ein Temperaturgefälle unerlässlich: Das Thermometer zeigt „zu viel“ an. Nur so sind manche Urlaubsberichte zu verstehen, die von 50 °C erzählen. Man muss schon sehr viel trinken, um gegen echte Lufttemperaturen dieser Größe „anschwitzen“ zu können. Besonders empfindlich gegen Strahlung sind übrigens Thermometer mit dunkel gefärbtem und dadurch gut sichtbarem Alkohol. Metallisch reflektierendes Quecksilber weist demgegenüber den größten Teil der einfallenden Strahlungsleistung durch Spiegelung ab.

Jede Fläche hat gegenüber sichtbarem und unsichtbarem Licht ein

Absorptionsvermögen α

$$= \frac{\text{absorbierte Strahlungsleistung}}{\text{einfallende Strahlungsleistung}}$$

und ein

Reflexionsvermögen ρ

$$= \frac{\text{reflektierte Strahlungsleistung}}{\text{einfallende Strahlungsleistung}}$$

Beide liegen zwischen 0 und 1 und hängen durchweg markant von der Wellenlänge ab. Im sichtbaren Spektralbereich macht dies die Welt so bunt. Eine Ausnahme bildet der graue Körper mit dem Grenzfall des schwarzen Körpers ($\alpha = 1, \rho = 0$). Generell verlangt der Energiesatz:

$$\alpha + \rho = 1.$$

Eine völlig weiße Fläche ($\alpha = 0, \rho = 1$) reflektiert vollständig, wenn auch nicht regulär wie ein Spiegel, sondern mehr oder weniger diffus („Streureflexion“).

Auch die Temperaturstrahlung reagiert auf α und ρ ; sie muss es einem allgemeinen Prinzip zuliebe. Dieses besagt: Der Wert, auf den

sich ein thermodynamisches Gleichgewicht (wenn überhaupt) einstellt, ist unabhängig von dem Weg, auf dem dies geschieht. Nun einigen sich zwei Körper, die Wärme durch Leitung untereinander austauschen können, mit Sicherheit am Ende auf eine gemeinsame Temperatur. Sind sie hingegen thermisch voneinander isoliert, tauschen sie also nur durch Temperaturstrahlung Energie aus, so muss das Strahlungsgleichgewicht trotzdem zum gleichen Ergebnis führen, auch wenn der eine Körper schwarz und der andere weiß ist. Der weiße absorbiert freilich so gut wie nichts von dem, was ihm der schwarze zustrahlt; folglich darf er auch so gut wie nichts abstrahlen, denn im Gleichgewicht muss er exakt die gleiche Strahlungsleistung abgeben wie aufnehmen. Maximales Emissionsvermögen für Temperaturstrahlung besitzt deshalb nur der schwarze Körper: Er sendet *schwarze Strahlung* aus, die ihm seine Bedeutung gibt. Umgekehrt sind Dewar-Gefäße üblicherweise verspiegelt, um nämlich einen Wärmeaustausch durch Strahlung so gut wie möglich zu unterbinden: Wer gut reflektiert, strahlt schlecht.

Auch die unsichtbare Temperaturstrahlung, ausgesandt von Körpern, die zum Glühen noch nicht heiß genug sind, ist Licht. Man kann mit ihr fotografieren, sofern man entsprechend sensibilisierte Filme verwendet (die man dann möglicherweise im Kühlschrank aufbewahren muss, um sie nicht schon mit der Strahlung der Zimmertemperatur zu belichten).  Abbildung 5.11 zeigt die Hand eines Menschen, fotografiert im Eigenlicht, und zwar vor und bald nach dem Genuss einer Zigarette: Nikotin verengt die Blutgefäße und senkt damit die Oberflächentemperatur der Haut. Umgekehrt macht sich eine Mandelentzündung durch erhöhte Temperaturstrahlung der entsprechenden Halspartie bemerkbar. Ein Wettersturz kann den passionierten Bergsteiger dazu zwingen, auf dem Gletscher zu übernachten. Dazu muss er sich warm einwickeln. Wolldecken sind schwer und belasten den Rucksack. Eine leichte, reflektierend metallisierte Kunststoffplane tut es auch. Für den Wärmehaushalt des Menschen spielt seine Eigenstrahlung eine wichtige Rolle. Für den



Abb. 5.11. Hand eines Menschen im infraroten Licht ihrer eigenen Temperaturstrahlung. Die Thermogramme wurden im Abstand von zwei Minuten während des Rauchens einer Filterzigarette aufgenommen: Nikotin verengt die Blutgefäße und senkt mit der Durchblutung auch die Temperatur der Haut. (Aufnahmen von Prof. W. Stürmer, Erlangen)

Wärmeaushalt der Erde gilt dies erst recht; er lässt sich überhaupt nur durch Strahlung in sein Fließgleichgewicht bringen (s. Kap. 5.5.2).

Rechenbeispiel 5.8: Der Mensch friert noch mehr

Außer durch Konvektion verliert der nackte Mensch Wärme auch durch Strahlung. Wie viel?

Lösung: Die meisten Menschen sind zwar nicht schwarz, aber doch in guter Näherung ein schwarzer Strahler. Die Stefan-Bolzmann-Gleichung kann also direkt angewendet werden:

$P = 1,5 \text{ m}^2 \cdot \sigma \cdot (306 \text{ K})^4 = 746 \text{ W}$. Diese gewaltige Strahlungsleistung lässt den Menschen aber nur erkalten, wenn er einsam durch die Weiten des Weltalls schwebt. Das 15°C kalten Zimmer strahlt ja auch auf ihn zurück, und zwar mit: $P = 1,5 \text{ m}^2 \cdot \sigma \cdot (288 \text{ K})^4 = 585 \text{ W}$. Nur die Differenz von 161 W lässt den Menschen frieren.

5.2.5 Diffusion

Die thermische Bewegung wirbelt die Moleküle eines Gases ständig durcheinander und verteilt sie gleichmäßig im Gelände, auch und vor allem dann, wenn mehrere Molekülsorten gleichzeitig herumschwirren: Sie werden auf die Dauer homogen durchmischt. Im Gedankenversuch kann man ein Gefäß durch eine herausnehmbare Trennwand unterteilen und z.B. auf der linken

Seite Sauerstoff, auf der rechten Stickstoff einfüllen, beide Gase unter gleichem Druck (☞ Abb. 5.12a). Entfernt man die Trennwand, so werden im ersten Augenblick nur Sauerstoffmoleküle die alte Grenzfläche von links überqueren, einfach weil rechts keine vorhanden sind. Auch eine Weile später werden sie dort noch in der Minderzahl sein und deshalb überwiegend von links nach rechts diffundieren (☞ Abb. 5.12b). Erst wenn sich die Anzahldichten der beiden Molekülsorten nach längerer Zeit völlig ausgeglichen haben, werden sich auch die Anzahlen der Grenzgänger in beiden Richtungen ausgleichen.

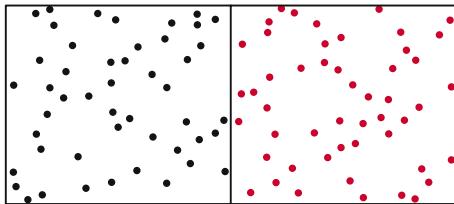
wichtig

Diffusion: Transport von Molekülen durch thermische Bewegung.

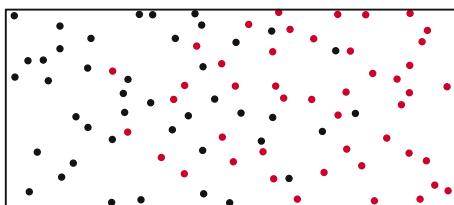
Schon nicht mehr im Gedankenversuch, sondern allenfalls im Märchen, kann man sich vorstellen, an der Grenze säße ein submikroskopisch kleiner und ungeheuer flinker Gnom, hätte eine Stoppuhr in der Hand und zählte Moleküle, also z.B.: In der letzten Mikrosekunde 375 Milliarden Sauerstoffmoleküle mehr von links nach rechts als von rechts nach links. Das entspräche einem *Teilchenstrom* s von $3,75 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1}$. Überblickt der Gnom eine Fläche von einem halben Quadratmillimeter, so hat er eine

$$\text{Teilchenstromdichte } j = 7,5 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$$

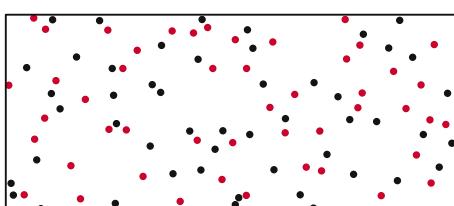
gesehen. Deren Ursache ist der Konzentrationsunterschied Δc (zu messen in m^{-3} oder auch cm^{-3}), genau genommen ein



a



b



c

Abb. 5.12. Diffusion im molekularen Bild, schematisch. Im ersten Moment nach Entfernen der Trennwand können die beiden Molekülsorten nur jeweils von einer Seite aus die alte Grenzfläche überschreiten. Erst wenn sich die Konzentrationen ausgeglichen haben, verschwinden auch die Nettoströme der Teilchen

Konzentrationsgefälle $c' = dc/dx$

(entsprechend zu messen in $\text{m}^{-3}/\text{m} = \text{m}^{-4}$ oder cm^{-4}). Es wird auch **Konzentrationsgradient** genannt, denn es handelt sich wie bei dem Temperaturgefälle im vorigen Kapitel um einen Gradienten im Sinn der Mathematik (vgl. die dortige Fußnote). Selbstverständlich darf man sich, statt Moleküle zu zählen, auch auf Stoffmengen oder Massen beziehen.

Zumindest in guter Näherung wird die Diffusionsstromdichte j ebenso dem Konzentrationsgradienten mit negativem Vorzeichen proportional sein, wie im vorigen Kapitel die Wärmestromdichte j_Q dem Temperaturgefälle dT/dx proportional war. j wie j_Q beruhen auf der gleichen thermischen Bewegung. Daraus folgt das **Diffusionsgesetz**

$$j = -D \cdot c' = -D \cdot dc/dx$$

mit dem **Diffusionskoeffizienten** D . Seine SI-Einheit ist m^2/s , oft wird er aber in cm^2/s angegeben.

wichtig

Diffusionsgesetz:

$$j = -D \cdot c' = -D \cdot dc/dx$$

Mit steigender Temperatur wird die thermische Bewegung immer heftiger; kein Wunder, dass mit ihr auch der Diffusionskoeffizient zunimmt. Kleinere Moleküle müssen schneller laufen als große, um ihren Anteil an der thermischen Energie zu übernehmen: Kein Wunder, dass der Diffusionskoeffizient von Wasserstoff größer ist als der von Sauerstoff oder Stickstoff. Dieses Faktum lässt sich sinnfällig demonstrieren; man braucht dazu einen hohlen und porösen Tonzyylinder, an den unten ein gläserner Stutzen mit einem Wassermanometer angeschmolzen ist (☞ Abb. 5.13). Stülpt man jetzt ein mit gasförmigem Wasserstoff gefülltes Becherglas von oben über den Zyylinder, so signalisiert das Manometer Überdruck: H_2 diffundiert schneller in den Zylinder hinein als Luft heraus.

Was den Gasen recht ist, ist den Flüssigkeiten billig und vor allem auch den in ihnen gelösten Stoffen. Deren Moleküle haben aber in ihrer thermischen Bewegung sehr viel kleinere freie Weglängen und darum auch sehr viel kleinere Diffusionskoeffizienten als die Moleküle der Gase. Füllt man einen meterhohen Zylinder zur Hälfte mit Wasser, schichtet man vorsichtig unter sorgsamer Vermeidung von Wirbeln Tinte darüber, lässt man das Ganze ruhig stehen und schaut nach einem Jahr wieder nach, so ist die scharfe Grenzfläche zwar durchaus um einige Zentimeter auseinander gelaufen, aber von einer homogenen Durchmischung kann auch nach 100 Jahren noch nicht die Rede sein. Wer Milch in den Kaffee gießt, trinkt gern ein leidlich homogenes Gemisch. Im Grunde braucht er nur zu war-

ten, die Diffusion wird es schon besorgen. Besser ist es umzuröhren, d.h. die Diffusion durch Konvektion zu ersetzen.

Besondere Bedeutung in der Technik und für lebende Organismen hat die Diffusion durch eine *Membran* (bei Organismen ist das die Zellwand). Es kann nicht verwundern, dass hier die Diffusionskoeffizienten noch wesentlich kleiner sind als in der reinen Flüssigkeit. Im Grenzfall liegt der Konzentrationsgradient c' voll über der Membran und ist zur Konzentrationsdifferenz Δc zwischen den in sich nahezu homogenen Lösungen auf beiden Seiten der Membran proportional. Das erlaubt, dem Diffusionsgesetz die Form

$$j = -\frac{D}{d} \Delta c = -P \cdot \Delta c$$

zu geben (d =Membrandicke) und so einen für Membran und diffundierende Substanz zusammen charakteristischen *Permeabilitätskoeffizienten* $P=D/d$ zu definieren. Man kann ihn messen, ohne d zu kennen. Eine anständige Membran ist 5 nm dick (*Einheitsmembran*) und hat bei Körpertemperatur für Glukose ein P von ungefähr 6 mm/s, der Diffusionskoeffizient beträgt $3 \cdot 10^{-5}$ mm²/s.

Rechenbeispiel 5.9: Ein Insekt atmet nicht, der Sauerstoff diffundiert hinein.

Sauerstoff diffundiert von der Oberfläche eines Insekts durch kleine Röhren, die man Tracheen nennt. Diese sei 2 mm lang und habe eine Querschnittsfläche von $2 \cdot 10^{-9}$ m². Angenommen, die Sauerstoffkonzentration im Insekt ist halb so groß wie in der Luft, welcher Sauerstofffluss geht durch die Trachea? Die Sauerstoffkonzentration in der Luft ist etwa 8,7 mol/m³ und die Diffusionskonstante $D = 10^{-5}$ m²/s.

Lösung: Die Sauerstoffflussdichte ist

$$j = D \cdot \frac{\Delta c}{\Delta x} = D \cdot \frac{4,35 \text{ mol/m}^3}{0,002 \text{ m}} \\ = 0,0218 \text{ mol/m}^2 \cdot \text{s}$$

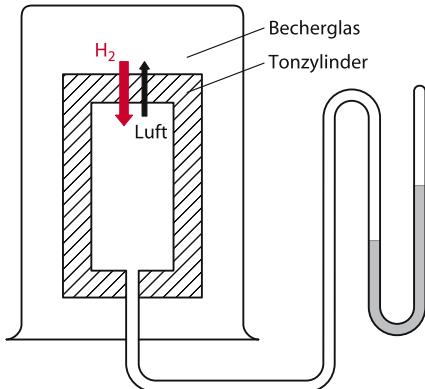


Abb. 5.13. Zum Diffusionskoeffizienten von Gasen. Das Becherglas wird von unten mit Wasserstoff gefüllt. Da er schneller in den porösen Tonzyylinder diffundiert als Luft hinauskommt, entsteht im Zylinder vorübergehend ein Überdruck

Der gesamte Sauerstofffluss ergibt sich durch multiplizieren mit der Querschnittsfläche zu $4,36 \cdot 10^{-11}$ mol.

5.2.6 Osmose

Lässt man, wie im vorigen Kapitel beschrieben, durch die poröse Wand eines Tonzyinders Wasserstoff diffundieren, so entsteht innen zunächst einmal ein Überdruck. Dieser löst notwendigerweise einen Gasstrom aus, der, von innen nach außen gerichtet, der Diffusion des H₂ entgegensteht, die der Luft aber unterstützt. Der Überdruck verschwindet wieder, sobald sich die Zusammensetzungen der Gasgemische zu beiden Seiten der porösen Wand ausgeglichen haben. Das ist möglich, weil der Tonzyylinder letzten Endes alle Arten von Gasmolekülen hindurchlässt, wenn auch unterschiedlich leicht. Wäre er für Luftpunkte dicht, so könnten sich die Zusammensetzungen nicht ausgleichen: Der Wasserstoff würde weiter von außen nach innen diffundieren, und der Überdruck müsste sich solange erhöhen, bis der von ihm ausgelöste Gasstrom den Diffusionsstrom kompensiert. Der Druck bliebe ebenso lange bestehen

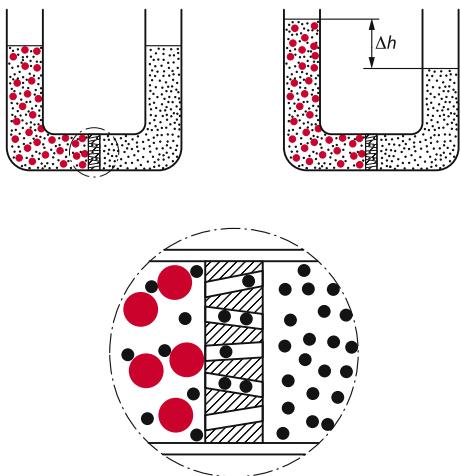


Abb. 5.14. Einfache Modellvorstellung zur Entstehung des osmotischen Druckes. Die feinen Poren der Membran lassen nur die kleinen Moleküle des Lösungsmittels hindurch, nicht aber die dicken der gelösten Substanz. Demnach kann nur das Lösungsmittel seinem Konzentrationsgefälle folgen und in die Lösung diffundieren und zwar grundsätzlich so lange, bis der dort entstehende Überdruck ($\approx \Delta h$) einen Rückstrom durch die Membran auslöst, der den Diffusionsstrom kompensiert

wie der Konzentrationsunterschied des H_2 zwischen außen und innen. Das kommt vor: Ein glühendes Palladiumblech lässt tatsächlich nur Wasserstoff hindurch und nichts sonst. Diese selektive Durchlässigkeit eines Metalls gegenüber einem Gas ist allerdings eine große Ausnahme.

Anderes gilt in Flüssigkeiten. Gerade lebende Organismen, aber auch manche technischen Prozesse setzen **selektivpermeable** Membranen ein, Membranen also, die z.B. Wassermoleküle hindurchlassen, gelöste Zuckermoleküle aber nicht (man spricht auch von „semipermeablen“ Membranen; dieser Name ist nicht unbedingt glücklich gewählt worden, denn „semipermeabel“ bedeutet in wörtlicher Übersetzung „halbdurchlässig“). Im einfachsten Fall darf man sich eine solche Membran als ein Sieb mit molekülfeinen Poren vorstellen (Abb. 5.14): Die gelösten Moleküle sind einfach zu dick, um hindurchzukommen. Spezialisierte Membranen entwickeln allerdings eine Fülle von Fähigkeiten der Selektion, die sich so einfach nicht

erklären lassen; manche lebenden Membranen können sogar nicht nur sortieren, sondern auch aktiv pumpen, also von sich aus einen Konzentrationsunterschied auf ihren beiden Seiten aufbauen.

wichtig

Osmose: Diffusion durch eine selektiv-permeable, für verschiedene Moleküle unterschiedlich durchlässige Membran.

Notwendigerweise ist die Anzahldichte der H_2O -Moleküle in einer Zuckerlösung geringer als in destilliertem Wasser. Sind beide Flüssigkeiten durch eine nur für Wasser durchlässige selektiv-permeable Membran getrennt, so diffundiert Wasser durch die Membran hindurch in die Lösung, versucht also, diese zu verdünnen. Dadurch erhöht sich dort normalerweise der hydrostatische Druck, und zwar grundsätzlich bis zu einem Grenzwert, der **osmotischer Druck** genannt wird.

wichtig

Osmotischer Druck: durch Osmose über einer selektiv-permeablen Membran mögliche (potentielle) Druckdifferenz.

Es kann lange dauern, bis sich dieser Grenzwert p_{osm} wirklich einstellt; zudem platzt die Membran nicht selten vorher. Insofern kann man p_{osm} als „potentiellen“ Druck bezeichnen, der oft gar nicht erreicht wird. Trotzdem lohnt es sich, nach einer Formel zu suchen, die ihn auszurechnen erlaubt. Dabei zeigt sich überraschenderweise, dass es letztendlich nur auf die Stoffmengendichte n/V (oder die Anzahldichte N/V) der gelösten Moleküle ankommt, nicht auf deren Natur und auf die der Moleküle des Lösungsmittels auch nicht (nur muss die Membran beide Sorten voneinander unterscheiden können). Aus quantitativer Rechnung, die hier nicht vorgeführt werden soll, folgt als gute Näherung die **van't-Hoff-Gleichung**

$$p_{\text{osm}} = \frac{n}{V} R \cdot T$$

Sie liefert den potentiellen osmotischen Druck einer Lösung gegenüber reinem Lösungsmittel. Stehen sich an der Membran zwei Lösungen gegenüber, so kann sich höchstens die Differenz der beiden osmotischen Drücke ausbilden.

wichtig

van't-Hoff-Gleichung für den osmotischen Druck:

$$p_{\text{osm}} = \frac{n}{V} R \cdot T$$

Formal stimmt die van't-Hoff-Gleichung mit dem Gasgesetz überein (s. Kap. 5.1.3). Dies kann zu der falschen Deutung verleiten, nur die gelösten Moleküle trommelten auf die für sie undurchdringliche Membran wie Gasmoleküle auf die Gefäßwand, während die Moleküle des Lösungsmittels quasi frei durch die Membran hindurchschlüpften. Warum sollte dann aber das Lösungsmittel in die Lösung einzudringen und sie zu verdünnen suchen? Das Bild ist falsch.

Lösungsmittel können Fremdmoleküle beträchtlich dichter packen als Gase unter Normalbedingungen; osmotische Drücke sind entsprechend hoch. Lebende Organismen müssen ihrer selektiv-permeablen Membranen wegen auf die Dichten der osmotisch wirksamen Teilchen in ihren verschiedenen Gefäßen achten und der Arzt zuweilen auch. Wollte man einem Unfallpatienten, weil gerade nichts Besseres zur Hand ist, seinen Blutverlust durch Leitungswasser ersetzen, so brächte man ihn auf der Stelle um: Die roten Blutkörperchen sind die Zusammensetzung des Blutplasmas gewohnt, ihr eigener Inhalt hat die entsprechende Konzentration. Kommen sie in reines Wasser, so dringt dies durch ihre Oberflächenmembran ein und bringt sie zum Platzen.

5.3

Phasenumwandlungen

Einleitung

Als „Phasen“ bezeichnet man in der Wärmelehre zunächst einmal die drei Aggregatzustände, aber auch unterschiedliche Kristallisationsformen einer und derselben Substanz in festem Zustand. Die zwischenmolekularen Kräfte sind in den verschiedenen Phasen nicht gleich, die in ihnen potentiell gespeicherte thermische Energie ist es auch nicht. Bei einem Phasenübergang in einer Richtung wird die Energiedifferenz frei, beim Übergang in der Gegenrichtung muss sie aufgebracht werden. Phasenwechsel sind mit einer „Wärmetönung“ verbunden.

5.3.1

Umwandlungswärmen

H2O kommt in der Natur in allen drei Aggregatzuständen vor, als Eis oder Schnee, als Wasser und als Wasserdampf. Dies weiß jeder. Allenfalls muss man erwähnen, dass Wasserdampf ein unsichtbares Gas ist. Wolken und Nebel enthalten bereits flüssiges Wasser, zu kleinen Tröpfchen kondensiert. Schnee kann schmelzen (Übergang von fest nach flüssig), Wasser zu Eis erstarren (Übergang von flüssig nach fest); Wasser kann verdampfen (Übergang von flüssig nach gasförmig) und Wasserdampf kann kondensieren (Übergang von gasförmig nach flüssig). Wer gut beobachtet, sieht aber auch, dass Schnee an sonnigen Wintertagen verschwindet, ohne zu schmelzen: Er sublimiert (Übergang von fest nach gasförmig). Auch der Übergang in Gegenrichtung wird Sublimation genannt.

Die Alchimisten des Mittelalters waren bitter enttäuscht, als sie bei dem Versuch, viele kleine Diamanten zu einem großen zusammenzuschmelzen, wertlose Krümel von Graphit erhielten. Kohlenstoff kommt ja in diesen beiden Kristallisationsformen vor (s. Kap. 3.2.1) und kann grundsätzlich von der einen in die andere übergehen (in die des Diamanten allerdings nur unter ex-

trem hohem Druck). Analoges gilt für viele andere Substanzen auch. Alle diese einer Substanz möglichen Erscheinungsformen bezeichnet man in der Thermodynamik als *Phasen*. Zwischen ihnen gibt es *Phasenübergänge*; die wichtigsten sind die Wechsel der Aggregatzustände.

Die anziehenden Kräfte zwischen den Molekülen reichen nicht weit. In Gasen spielen sie der großen Molekülabstände wegen nur eine untergeordnete Rolle. Wenn sie als gar nicht vorhanden angesehen werden dürfen, spricht man vom idealen Gas. Moleküle einer Flüssigkeit spüren dagegen die Kräfte der Kohäsion sehr deutlich und bilden ihrerwegen Tropfen. In Festkörpern geben sie den Gitterbausteinen sogar feste Plätze vor, um die sie nur ein wenig schwingen dürfen. Bei der Sublimation werden Moleküle gegen diese Kräfte voneinander getrennt. Das kostet Energie; sie muss als *Sublimationswärme* von außen zugeführt werden. Bei späterer Kondensation zu Wasser und anschließender Kristallisation zu Eis wird sie in zwei Schritten wieder frei. *Umwandlungswärmen* treten bei allen Phasenübergängen in der einen oder anderen Richtung auf. (Abb. 5.15) nennt ihre Namen.

wichtig

Zu Phasenumwandlungen gehören Umwandlungsenergien (Abb. 5.15).

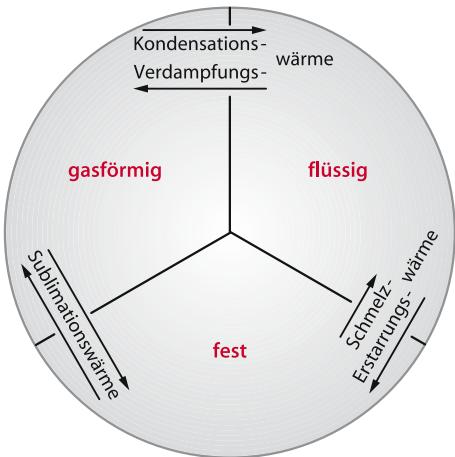


Abb. 5.15. Die Aggregatzustände und ihre Umwandlungs- wärmen

der Umgebung auf; es steckt sie aber nicht in die Wärmekapazität seines Inhalts, sondern nutzt sie, Eis zu schmelzen. Die einströmende Wärme wird als *Schmelzwärme* gebraucht und kann darum die Temperatur nicht erhöhen. Das Analoge hätte man auch vorher beim Abkühlen beobachten können. Hier gab das Becherglas ständig Wärme an den Kühlschrank ab; zu Beginn und am Ende wurde sie der Wärmekapazität des Wassers entnommen, für die Dauer des Haltepunktes aber von dessen *Erstarrungswärme* geliefert (Abb. 5.16, rechts). Haltepunkte lassen sich gut beobachten; man benutzt sie als Fixpunkte bei der Eichung von Thermometern. Nur am *Schmelzpunkt* können Kristall und Schmelze nebeneinander existieren: Ein Zehntelgrad mehr und alles ist geschmolzen; ein Zehntelgrad weniger und alles ist erstarrt (im thermodynamischen Gleichgewicht wenigstens). Beim Schmelzen oder Erstarren muss die Umwandlungswärme allerdings von der Umgebung beschafft oder an sie abgegeben werden, und das kostet Zeit. Solange Eisstückchen im Wasser schwimmen, steht die Temperatur zuverlässig auf $0\text{ }^\circ\text{C}$ (nahe der Oberfläche wenigstens; am Boden des Teiches können, der Dichteanomalie des Wassers wegen, $4\text{ }^\circ\text{C}$ herrschen).

5.3.2 Schmelzwärme

Wenn man ein kleines Becherglas mit Wasser füllt, ein Thermometer hineinstellt, das Ganze in einer Tiefkühltruhe einfriert und danach herausholt, dann kann man zusehen, wie die Temperatur langsam wieder ansteigt. Zunächst kommt das Thermometer aber nur bis auf $0\text{ }^\circ\text{C}$, bleibt dort längere Zeit stehen und klettert erst weiter, wenn das Eis geschmolzen ist (Abb. 5.16, links). Auch während dieses *Haltepunktes* nimmt das kalte Becherglas ständig Wärme aus

wichtig

Haltepunkt: Bei gleichmäßiger Zu- oder Abfuhr von Wärme bleibt die Temperatur einer Probe während einer Phasenumwandlung konstant.

Die spezifische Schmelzwärme c_s des Eises lässt sich leicht im Wasserkalorimeter messen. Man wirft einen mit Filterpapier getrockneten Eiswürfel (Masse m_E) in Wasser (Masse m_W spez. Wärmekapazität c_w , Temperatur T_0) und bestimmt die neue Temperatur T_1 , wenn der Würfel gerade geschmolzen ist. Dann ist dem Kalorimeterwasser die Wärmemenge

$$\Delta Q = m_W \cdot c_w (T_0 - T_1)$$

entzogen und dazu verwendet worden, zunächst das Eis zu schmelzen und dann das Schmelzwasser auf T_1 aufzuwärmen:

$$\Delta Q = m_E [c_s + c_w (T_1 - 0^\circ\text{C})].$$

Heraus kommt $c_s = 333 \text{ kJ/kg}$. Wasser hat nicht nur eine ungewöhnlich hohe spezifische Wärmekapazität, sondern auch eine ungewöhnlich hohe spezifische Schmelzwärme.

Schmelz- und Erstarrungspunkt liegen bei der gleichen Temperatur T_s . Aber nicht immer erstarrt eine Schmelze, sobald diese Temperatur von oben her erreicht wird: Viele Substanzen kann man mit etwas Vorsicht *unterkühlen*, d.h. eine Weile deutlich unter dem Erstarrungspunkt flüssig halten. Irgendwann setzt die Kristallisation aber doch einmal ein; dann wird plötzlich viel Erstarrungswärme frei, die Temperatur springt auf T_s und wartet dort die reguläre Dauer des Haltepunkts ab (Abb. 5.17), sofern die Unterkühlung nicht schon zu weit heruntergeführt hat. Umwandlungen der Aggregatzustände sind so genannte *Keimbildungsprozesse*; sie müssen nicht nur thermodynamisch möglich sein, sie müssen eigens ausgelöst werden, und zwar durch einen Keim, der sich im statistischen Zufall bildet. Meist tut er dies rasch, zuweilen aber auch erst nach Jahrhunderten:



Abb. 5.16. Erwärmungs- und Abkühlungskurve für H_2O , schematisch. Während des Haltepunktes bleibt die Temperatur konstant, weil Schmelz- bzw. Erstarrungswärme den Wärmeaustausch mit der Umgebung decken

Glas, so wie man es normalerweise kennt, ist eine unterkühlte Flüssigkeit. Wenn es doch einmal kristallisiert, „entglast“ es und zerfällt zu Pulver.

wichtig

Die Erstarrung ist ein Keimbildungsprozess; das macht die Unterkühlung einer Schmelze möglich.

Die allermeisten Substanzen dehnen sich beim Schmelzen aus; ihr Kristall hat eine größere Dichte als ihre Flüssigkeit. Ein hoher äußerer Druck bringt darum den festen Aggregatzustand in Vorteil und hebt den Schmelzpunkt ein wenig an. Das ist aber kein Naturgesetz, sondern nur eine Regel. Regeln haben Ausnahmen, und wieder ist die pathologische Substanz H_2O dabei: Eisberge schwimmen, folglich sinkt der Eispunkt unter Druck, zur Freude der Schlittschuhläufer. Sie stehen mit voller Gewichtskraft auf schmaler Kufe. Das bedeutet hohen lokalen Druck und

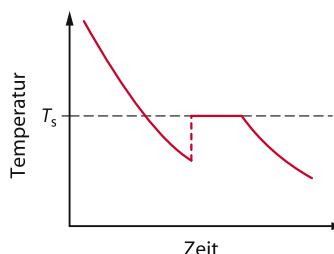


Abb. 5.17. Bei der Unterkühlung wird der Erstarrungspunkt T_s zunächst unterschritten, bis die nach Einsetzen der Erstarrung plötzlich frei werdende Erstarrungswärme T wieder auf T_s anhebt

örtlich schmelzendes Eis: Der Schlittschuh gleitet auf einer dünnen Schicht flüssigen Wassers, die gleich hinter ihm wieder erstarrt.

Rechenbeispiel 5.10: Eistee

Für eine Feier soll Eistee produziert werden. Dazu werden 3 Liter auf 20 °C abgekühlter Tee genommen und ein halbes Kilo –10 °C kaltes Eis dazugetan. Führt das zu einer erwünschten Temperatur, oder gibt es gar Tee-Eis? Neben der Schmelzwärme brauchen wir noch die spezifischen Wärmekapazitäten von Wasser ($c_w = 4,18 \text{ J/(g}\cdot\text{K)}$) und Eis ($c_E = 2,1 \text{ J/(g}\cdot\text{K)}$).

Lösung: Zunächst wollen wir feststellen, ob der Tee flüssig bleibt. Um den Tee auf 0 °C abzukühlen, müssen wir eine Energie von $W = m_w \cdot c_w \cdot (20 \text{ }^\circ\text{C} - 0 \text{ }^\circ\text{C}) = 250 \text{ kJ}$ entziehen.

Um das Eis auf 0 °C zu erwärmen und dann zu schmelzen, brauchen wir

$$W = m_E \cdot c_E \cdot 10 \text{ }^\circ\text{C} + m_E \cdot c_S = 10,5 \text{ kJ} + 167 \text{ kJ} = 177,5 \text{ kJ}.$$

Der Tee bleibt also flüssig, denn das Schmelzen des Eises entzieht dem Tee nicht genug Energie. Die resultierende Temperatur T stellt sich so ein, dass das Aufwärmen des Eises genau so viel Energie benötigt, wie das Abkühlen des Tees bringt: $177,5 \text{ kJ} + 0,5 \text{ kg} \cdot c_w \cdot T = 3 \text{ kg} \cdot c_w \cdot (20 \text{ }^\circ\text{C} - T)$. Daraus ergibt sich $T = 5,1 \text{ }^\circ\text{C}$. Das ist gut getroffen.

5.3.3 Lösungs- und Solvatationswärme

Schmelzen ist nicht die einzige Möglichkeit, ein Kristallgitter klein zu bekommen: In einer passenden Flüssigkeit kann man einen Kristall auch *auflösen*. Weil dabei Arbeit gegen die Kräfte der Gitterbindung geleistet, weil *Gitterenergie* aufgebracht werden muss, liegt die Erwartung nahe, dass sich eine Lösung, nachdem man sie angesetzt hat, zunächst einmal abkühlt. KNO_3 (Salpeter) in Wasser tut dies tatsächlich. Es kann aber auch anders kommen, denn möglicherweise lagern sich die Moleküle des Lösungsmittels an gelöste Teilchen an

und bilden so eine *Solvathülle* (beim Wasser *Hydrathülle* genannt). In gewissem Sinn entspricht dieser Vorgang einer lokalen Erstarrung des Lösungsmittels, bei der dann *Solvationsenergie* frei wird. Dies kann schon bei der Mischung zweier Flüssigkeiten geschehen; *Lösen* ist im Grunde ja nur eine Sonderform des *Mischens*. Gießt man Alkohol oder Schwefelsäure in Wasser, so erwärmt sich die Mischung. Die *Lösungswärme*, die sich unmittelbar beobachten lässt, ist die Differenz von freigesetzter Solvationsenergie und aufzubringender Gitterenergie.

wichtig

Beim Ansetzen einer Lösung:
Abkühlung, wenn Lösungswärme überwiegt;
Erwärmung, wenn Solvationswärme überwiegt.

Auf jeden Fall liegt der Erstarrungspunkt einer Lösung unter dem des reinen Lösungsmittels. Dies nutzt aus, wer Salz streut, statt Schnee zu schippen. Er will eine wässrige Salzlösung erzeugen, deren Gefrierpunkt unter der aktuellen Lufttemperatur liegt, und darum flüssig bleibt. Es mag überraschen, soll hier aber ohne weitere Begründung lediglich festgestellt werden: Die *Gefrierpunktserniedrigung* ΔT_s hängt nur vom Lösungsmittel und der Anzahl dichte n der gelösten Teilchen ab, nicht aber von deren Art, von der gelösten Substanz also:

$$\Delta T_s \sim n.$$

Statt der Teilchenanzahl dichte kann man jede der in Kap. 1.2.2 aufgeführten Dichten und Gehalte benutzen. Zum Beispiel kann man in einem Liter Wasser etwa 350 g Kochsalz lösen. Der Gefrierpunkt fällt dann auf etwa –22 °C.

wichtig

Die Gefrierpunktserniedrigung ist nahezu proportional zur Stoffmengendichte der gelösten Substanz.

5.3.4 Verdampfung

Auch die Moleküle einer Flüssigkeit verteilen ihre thermischen Geschwindigkeiten um einen temperaturbedingten Mittelwert; es gibt schnelle und langsame Teilchen. Zudem werden immer einige oberflächennahe Moleküle versuchen, in den Gasraum auszubrechen; aber nur den schnellsten wird es gelingen, denn an der Oberfläche wirken die zwischenmolekularen Kräfte ja einseitig und halten die langsameren Moleküle fest. Umgekehrt kann aber jedes Molekül aus dem Dampf in die Flüssigkeit zurückkehren, wenn es nur die Oberfläche erreicht.

Aus dieser einfachen Modellvorstellung lassen sich einige Folgerungen herleiten, die experimentell überprüft werden müssen:

- ▶ Eine Flüssigkeit kann bei allen Temperaturen *verdampfen*, nicht nur beim *Siedepunkt*. In der Tat trocknet eine regennasse Straße auch bei normaler Lufttemperatur, allerdings umso schneller, je wärmer es ist, in Übereinstimmung mit dem Modell.
- ▶ Weil nur die schnellsten Moleküle verdampfen, verbleibt den übrigen im Schnitt immer weniger thermische Energie, sie kühlen sich ab. Diesen Effekt nutzt der Mensch, wenn er schwitzt; sein Hund kann nicht schwitzen und muss darum hechelnd Wasser verdampfen. Das Problem der Verdampfungswärme wird in Kap. 5.3.7 behandelt.
- ▶ Eine Flüssigkeit steht mit ihrem Dampf dann im thermodynamischen Gleichgewicht, wenn die Grenzgänger unter den Molekülen in beiden Richtungen gleich häufig vorkommen. Potentiell rückkehrfähig sind aber *alle* Moleküle des Dampfes; ihre Anzahldichte muss einerseits geringer sein als in der Flüssigkeit, andererseits aber mit steigender Temperatur zunehmen, weil sie nur so die wachsende Anzahl der verdampfungsfähigen Moleküle ausgleichen können. Die Probleme von Dampfdruck und Dampfdichte werden im nächsten Kapitel behandelt.
- ▶ Stehen Flüssigkeit und Dampf nicht miteinander im Gleichgewicht, so *verdampft*

entweder die Flüssigkeit oder der Dampf *kondensiert*. Beides kostet Zeit. Schließlich muss die Umwandlungswärme heran- oder abgeführt werden.

- ▶ Bei nichtmischbaren Flüssigkeiten in getrennten Schalen können nur arteigene Flüssigkeiten aus dem Dampfraum zurückkehren; artfremde müssen draußen bleiben. Wenn solche Flüssigkeiten in den gleichen Gasraum hineindampfen, addieren sich ihre Dampfdrücke als Partialdrücke unabhängig voneinander zum Gesamtdruck.
- ▶ Übersteigt der Dampfdruck einer Flüssigkeit den äußereren Gesamtdruck (und den jeweiligen Schweredruck dazu), so können sich Dampfblasen auch innerhalb der Flüssigkeit bilden: sie siedet. Der Siedepunkt hängt deutlich vom Außendruck ab.

5.3.5 Dampfdruck und Dampfdichte

Ihren *Dampfdruck* sucht eine Flüssigkeit unabhängig vom verfügbaren Volumen einzustellen; sie verdampft eben so lange, bis sie ihr Ziel erreicht hat. Das kann viel Zeit kosten, schließlich muss ja die nötige Verdampfungswärme besorgt werden. In der freien Natur wechselt die Temperatur im Laufe eines Tages schneller, als Flüsse, Seen und Wälder mit dem Wasserdampfdruck nachkommen können. Zudem kann bei großem Dampfraum eine Flüssigkeit vollständig verdampfen, ohne den Gleichgewichtsdampfdruck erreicht zu haben.

Beim Sättigungsdampfdruck p_0 stehen Flüssigkeit und Dampf im thermodynamischen Gleichgewicht.

wichtig

Dampfdrücke steigen keineswegs linear mit der Temperatur an, sondern sehr viel steiler, nahezu exponentiell nämlich. Eine jede Flüssigkeit besitzt ihre eigene, für sie charakte-

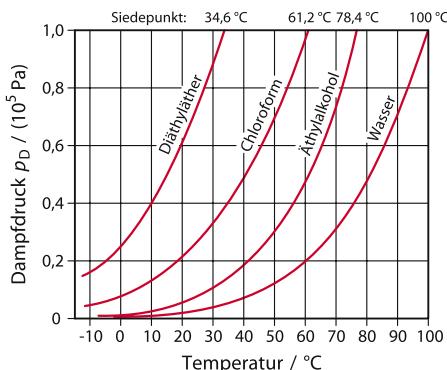


Abb. 5.18. Dampfdruckkurven einiger Flüssigkeiten

ristische *Dampfdruckkurve*; Abb. 5.18 zeigt einige Beispiele.

wichtig

Ein Dampfdruck steigt nahezu exponentiell mit der Temperatur.

Zum Dampfdruck p_D gehört eine *Dampfdichte* ρ_D , zu messen beispielsweise in g/cm^3 . Sie muss gesondert bestimmt werden, denn auf das Gasgesetz kann man sich hier nicht verlassen: Dämpfe im Gleichgewicht mit ihrer Flüssigkeit sind keine idealen Gase. Für die wichtige Substanz Wasser steht eine Tabelle im Anhang.

Eine Flüssigkeit beginnt zu *sieden*, sobald ihr Dampfdruck den äußeren Luftdruck erreicht. Darum repräsentiert Wasser mit seinem *Siedepunkt* nur beim offiziellen Normaldruck von 1013 hPa den oberen Fixpunkt der Celsius-Skala. Auf der Zugspitze, also in 2960 m Höhe, siedet Wasser schon bei 90 °C, zu früh, um in 5 Minuten ein Hähnerei frühstückswiech zu kochen. Die zum Garen benötigten Zeiten hängen stark von der Temperatur ab. Kochbücher beziehen sie nur deshalb auf 100 °C, weil dieser Wert in einer normalen Flachlandküche so leicht eingestellt werden kann. Die energiebewusste Köchin benutzt aber auch hier einen *Dampftopf*. Er ist dicht verschlossen, kontrolliert mit einem einfachen Manometer den erhöhten Binnendruck, zu dem dann auch eine erhöhte Siedetemperatur mit verkürzten Garzeiten gehört. Ohne Dampftopf kommt die Küche in dem Schneeferienhaus nicht aus.

Grundsätzlich ist der Dampfdruck als solcher eine Kenngröße der Flüssigkeit; ein wenig hängt er aber auch von Beimengungen ab. Löst man z.B. Zucker in Wasser, so sinkt der Dampfdruck, und der Siedepunkt steigt. Wie beim Gefrierpunkt geht es auch hier nur um die Anzahldichte n der gelösten Moleküle, nicht um deren Art. Demnach gilt (in guter Näherung)

$$\text{Dampfdruckerniedrigung } \Delta p_D \sim n.$$

Die Proportionalitätskonstante ist im Einzelfall abhängig vom Lösungsmittel und dem aktuellen Dampfdruck.

wichtig

Die Dampfdruckerniedrigung ist nahezu proportional zur Stoffmengendichte der gelösten Substanz.

Bringt man eine Lösung zum Sieden, so dampft im Wesentlichen nur das Lösungsmittel ab; die Lösung wird immer konzentrierter, bis sie sich schließlich *übersättigt* und der gelöste Stoff auszukristallisieren beginnt. So gewinnt man seit Jahrhunderten Salz. Auch die Komponenten eines Flüssigkeitsgemisches verdampfen unterschiedlich leicht. Man kann sie durch *Destillation* voneinander trennen. Weinbrand lässt sich nur so, durch *Brennen* nämlich, herstellen; er besitzt Alkohol in höherer Konzentration, als die Hefe verträgt, die ihn produziert hat. Die Trennung gelingt allerdings nicht vollkommen. Der Alkohol, der im Kühler kondensiert, enthält auch nach wiederholter Destillation noch rund 4 % Wasser (*azeotropisches Gemisch*).

Der Vollständigkeit halber muss hier erwähnt werden, dass auch Festkörper einen Dampfdruck haben, denn sonst könnten sie nicht sublimieren. Hiervon wird in Kap. 5.3.8 noch kurz die Rede sein.

5.3.6 Luftfeuchtigkeit

Wälder und Wiesen, Flüsse und Seen geben ständig große Mengen Wasserdampf an die Luft ab. Dessen Partialdruck bleibt meist unter dem zur lokalen Temperatur gehörenden Wasserdampfdruck p_D ; erreicht er ihn, so ist die Luft mit Wasserdampf *gesättigt*. Man nennt p_D deshalb auch *Sättigungsdampfdruck*. In den frühen Morgenstunden wird es draußen kühl, sodass der zugehörige Grenzwert p_D schon mal unter den tatsächlichen Partialdruck geraten kann. Dann ist die Luft *übersättigt*, der Wasserdampf möchte kondensieren. Dazu braucht er aber Kondensationskeime. Zuweilen findet er sie im Staub der Luft, dann gibt es Morgennebel; immer findet er sie an den Blättern der Pflanzen, dann fällt Tau. Nebeltröpfchen gewinnen Energie aus der Oberflächenspannung, wenn sie sich zu Regentropfen zusammenschließen.

Die Feuchtigkeit der Luft hat für das Wohlbefinden des Menschen große Bedeutung, aus zwei Gründen vor allem: Einmal verlangen die empfindlichen Lungenbläschen mit Wasserdampf gesättigte Luft; die Schleimhäute der Atemwege müssen das nötige Wasser liefern. Ist die Luft zu trocken, dann macht ihnen das Mühe und sie fühlen sich gereizt. Zum andern verlangt der Energiehaushalt des Menschen eine ständige Abgabe von Wärme an die Umgebung; dazu nutzt die Natur auch die Verdampfungswärme des Wassers, das von den Schweißdrüsen der Haut je nach Bedarf abgegeben wird. Die Verdampfung funktioniert aber nicht mehr, wenn die Luft schon mit Wasserdampf gesättigt ist. Feuchte Wärme empfindet der Mensch als unangenehme Schwüle. Beide Effekte hängen weniger an der tatsächlichen Dichte ρ des Wasserdampfes in der Luft als an ihrem Verhältnis zur Sättigungsdichte ρ_D , also an der sog. *relativen Luftfeuchtigkeit* ρ/ρ_D . 70–80 % sind dem Menschen am zuträglichsten. Bei 100 % beginnt das Nebelnassen. Manche Frisuren reagieren auf Luftfeuchtigkeit; *Haarhygrometer* nutzen diesen Effekt zur Messung. Sehr genau sind sie nicht.

Absolute Luftfeuchtigkeit
= aktuelle Wasserdampfdichte.

Relative Feuchte =

$$\frac{\text{aktuelle Wasserdampfdichte}}{\text{Sättigungsdampfdichte}}.$$

Wer sein Zimmer an kalten Wintertagen gut lüftet, treibt die Feuchtigkeit ins Freie: Wie in einer Destille strebt der Wasserdampf in das Gebiet niedrigsten Dampfdrucks, niedrigster absoluter Luftfeuchtigkeit. Den Verlust zu ersetzen, gelingt Verdunstungsschalen auf Heizkörpern nur unvollkommen. Ein Wohnraum braucht nicht wenig Wasser.

Rechenbeispiel 5.11: Wasser in der Luft

Wie viel Wasser enthält die Luft eines Wohnraumes (30 m^2 Grundfläche, $2,7 \text{ m}$ hoch) bei 20°C und 75 % relativer Luftfeuchtigkeit? (Tabelle im Anhang benutzen.)

Lösung: Die Sättigungsdichte von Wasserdampf bei 20°C beträgt $\rho_D = 17,3 \text{ g/m}^3$. Das Volumen des Raumes ist $V = 81 \text{ m}^3$. Also ist die Masse des Wassers: $m = 0,75 \cdot \rho_D \cdot V = 1,05 \text{ kg}$, entspricht also einem Liter.

5.3.7 Verdampfungsenthalpie

Mit einem Kalorimetergefäß lässt sich auch diejenige Wärmemenge bestimmen, die zum Verdampfen einer Flüssigkeit notwendig ist. Man braucht dafür nicht einmal ein Thermometer, wohl aber eine Stoppuhr und eine Waage. Auf deren einer Schale steht das Dewar-Gefäß, gefüllt z.B. mit Wasser, in das eine elektrische Heizwendel taucht, wie sie schon in Kap. 5.2.1 bei der Messung der spezifischen Wärmekapazität benutzt wurde. Die Waage ist nicht sauber austariert, dem Dewar-Gefäß wird ein Übergewicht belassen. Entwickelt man jetzt in der Wendel Stromwärme, so beginnt nach einiger Zeit

Wasser zu verdampfen. Das Dewar-Gefäß wird leichter. In dem Augenblick, in dem die Waage durch ihre Gleichgewichtslage läuft, setzt man eine Stoppuhr in Bewegung, nimmt gleich anschließend ein Gewichtsstück bekannter Masse von der anderen Waagschale herunter und hält die Stoppuhr wieder an, sobald die Waage zum zweiten Mal ihre Gleichgewichtslage erreicht. Aus Strom, Spannung und Messzeit lässt sich die zum Verdampfen des Wassers aufgewendete Energie berechnen. Man nennt sie **Verdampfungsenthalpie** und bezieht sie als spezifische Enthalpie auf die verdampfte Masse und als molare Enthalpie auf die verdampfte Stoffmenge. Mit 2,4 MJ/kg (bei Körpertemperatur) liegt Wasser wieder einmal ungewöhnlich hoch. Das hilft dem Menschen, wenn er seinen Wärmehaushalt durch Transpiration in Ordnung halten muss. Es sorgt auch für die, verglichen mit dem Kontinentalklima, gemäßigten Temperaturwechsel des Seeklimas: Jede Änderung der Wassertemperatur verlangt viel Verdampfungsenthalpie oder liefert viel Kondensationsenthalpie.

Warum verwendet man diese exotische Vokabel „Enthalpie“ statt der geläufigen „Wärme“? Ein Wechsel des Aggregatzustandes ist immer mit einer Änderung der Dichte verbunden, also einer Änderung des Volumens. Beim Schmelzen ist sie vernachlässigbar klein, beim Verdampfen aber keineswegs. Nun muss das neue Volumen gegen den Dampfdruck gebildet werden, was eine Volumenarbeit erfordert. Sie gehört nicht zur Verdampfungswärme im engeren Sinn, der sog. *inneren Verdampfungswärme*, ist aber in der gemessenen **Verdampfungsenthalpie** enthalten. Analoges gilt grundsätzlich für alle Phasenumwandlungen.

wichtig

Verdampfungsenthalpie: innere Verdampfungswärme plus Volumenarbeit.

Wie die Diffusion und später die Dissoziation (s. Kap. 5.2.5 und 6.7.1), gehört die Verdampfung

zu den **thermisch aktivierten Prozessen**: Ein Molekül braucht, um die Flüssigkeit verlassen zu können, im Mittel eine Aktivierungsenergie w , die ihm die Temperaturbewegung liefern muss. Dem entspricht eine molare Verdampfungsenthalpie $W=w \cdot N_A$. Allen thermisch aktivierten Prozessen ist nun eine charakteristische Temperaturabhängigkeit gemeinsam. Sie wird durch den sog. Boltzmann-Faktor $\exp(-w/kT) = \exp(-W/RT)$ beschrieben. Demnach gilt für den Dampfdruck

$$p_D(T) = p_0 \exp(-W/RT).$$

Hier ist p_0 ein hypothetischer Dampfdruck bei unendlich hoher Temperatur (sie würde den Exponenten zu null, die e-Funktion zu eins machen). Die Verdampfungsenthalpie muss deshalb nicht selbst gemessen werden; sie lässt sich der Dampfdruckkurve entnehmen. Dazu empfiehlt sich eine Auftragung im **Arrhenius-Diagramm** (Swante Arrhenius, 1859–1927): logarithmisch geteilte Ordinate über dem Kehrwert der Temperatur längs der Abszisse. Wie Abb. 5.19 zeigt, bekommt man eine fallende Gerade. Deren Steigung ist zur Verdampfungsenthalpie proportional.

5.3.8 Zustandsdiagramme

Thermodynamisch ist der „Zustand“ eines Gases durch seine **Zustandsgrößen** Druck p , Temperatur T und Molvolumen V_n vollständig beschrieben. Die Gasmenge gehört nicht zu den Zustandsgrößen und das reguläre, also nicht stoffmengenbezogene Volumen ebenfalls nicht. Zustandsgrößen sind nicht unabhängig voneinander; gibt man zwei vor, stellt sich die dritte ein. Den Zusammenhang beschreibt im Einzelfall eine **Zustandsgleichung**. Das Gasgesetz

$$p \cdot V_n = R \cdot T$$

ist die Zustandsgleichung der idealen Gase.

wichtig
Zustandsgrößen: Druck p , Temperatur T , Molvolumen V_n , Zustandsgleichung: Gleichung zwischen den Zustandsgrößen.

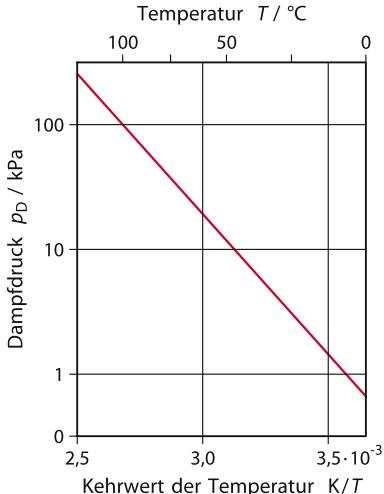


Abb. 5.19. Der Dampfdruck des Wassers im Arrhenius-Diagramm; die Steigung der Geraden entspricht einer molaren Verdampfungsenthalpie von 43 kJ/mol. Genaue Messungen über einen größeren Bereich liefern eine leicht gekrümmte Kurve: Mit steigender Temperatur nimmt die Verdampfungsenthalpie ein wenig ab (s. auch Tabelle im Anhang).

Nicht ganz so ideale Gase folgen der **Zustandsgleichung von van der Waals** (Johannes Diderik van der Waals, 1837–1923)

$$(p+a/V_n^2) \cdot (V_n-b) = R \cdot T.$$

Sie berücksichtigt mit der Materialkenngröße a die anziehenden Kräfte, die auch zwischen Gasmolekülen auftreten und auf diese ähnlich wirken wie eine Erhöhung des äußeren Druckes. Der Einfluss wächst, wenn die Moleküle dichter zusammenrücken, wenn also das Molvolumen abnimmt. Andererseits steht dieses Molvolumen der thermischen Bewegung der Moleküle nicht voll zur Verfügung; sie sind ja keine ausdehnungslosen Punkte im Sinn der Mathematik, sondern kleine Kugelchen mit einem *Eigenvolumen*. Mit der zweiten Materialkenngröße b wird es von V_n abgezogen. Mit wachsendem Molvolumen verlieren beide Korrekturglieder an Bedeutung: Das *van-der-Waals-Gas* nähert sein Verhalten immer mehr dem des idealen Gases an.

Gleichungen idealisieren. Wenn man mit ihnen die Realität nicht mehr gut genug beschreiben kann, zeichnet man einen Graphen, ein Diagramm. Ein **Zustandsdiagramm**

muss den Zusammenhang zwischen drei Zustandsgrößen darstellen; es braucht ein dreidimensionales Koordinatenkreuz und liefert darin ein räumliches Modell (☞ Abb. 1.1). Das ist mühsam herzustellen und lässt sich auf dem Papier nur in perspektivischer Zeichnung wiedergeben. Daraum weicht man gern in die sog. **Parameterdarstellung** aus: Man trägt im ebenen, zweiachsigen Koordinatenkreuz Kurven ein, zu denen jeweils feste Werte der dritten Größe als *Parameter* gehören. Als Beispiel diene das *p-V-Diagramm* eines idealen Gases (☞ Abb. 5.20, linkes Teilbild): Nach Aussage des Gesetzes von Boyle-Mariotte sind die **Isothermen**, die Kurven gleicher Temperatur also, Hyperbeln der Form $p \sim 1/V_n$. Ebenso gut könnte man im *V-T-Diagramm* **Isobaren** eintragen, also Kurven konstanter Drücke, (sie sind Geraden) oder im *p-T-Diagramm* Kurven konstanter Volumens, **Isochoren** genannt (sie sind ebenfalls Geraden): Alle drei Diagramme der ☞ Abb. 5.20 besagen daselbe, und zwar dasselbe wie das Gasgesetz.

Gelingt es, den Druck eines Gases auf seinen Dampfdruck zu bringen – das kann isotherm durch Druckerhöhung geschehen oder isobar durch Temperaturniedrigung – so beginnt die Kondensation: Viel Gasvolumen verschwindet, wenig Flüssigkeitsvolumen entsteht. Druck und Temperatur bleiben konstant; lediglich die Kondensationswärme muss abgeführt werden. Im **Koexistenzbereich** von Gas und Flüssigkeit

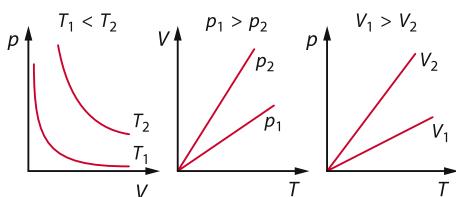


Abb. 5.20. Die drei Parameterdarstellungen des Zustandsdiagrammes idealer Gase: Isothermen im *p-V-Diagramm* (links), Isobaren im *V-T-Diagramm* (Mitte), Isochoren im *p-T-Diagramm*. Solange die Achsen keine Zahlenwerte bekommen, ist es gleichgültig, ob man unter „Volumen“ das Volumen V einer abgeteilten Gasmenge versteht oder das spezifische Volumen $V_s = V/m$ oder das stoffmengenbezogene (molare) Volumen $V_n = V/n$

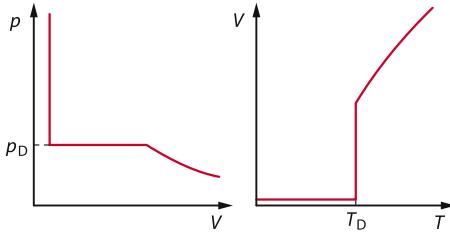


Abb. 5.21. Verdampfung und Kondensation bedeuten isobaren und isothermen Wechsel des Volumens. Im Koexistenzbereich von flüssiger und gasförmiger Phase verläuft die Isotherme im p - V -Diagramm demnach horizontal beim Dampfdruck p_D und die Isobare im V - T -Diagramm vertikal beim Siedepunkt T_D

kann eine vorgegebene Substanzmenge jedes angebotene Volumen dadurch ausfüllen, dass sie sich passend auf die beiden Aggregatzustände verteilt. Deren spezifische oder auch Molenvolumina bestimmen die Grenzen des Koexistenzbereiches. Kondensation und Verdampfung erfolgen genau bei dem (temperaturabhängigen) Dampfdruck p_D : Hier ist die Isotherme zugleich Isobare, horizontal im p - V -Diagramm, vertikal im V - T -Diagramm (☞ Abb. 5.21). Nach Abschluss der Kondensation existiert nur noch die flüssige Phase. Sie ist nahezu inkompresibel und dehnt sich bei Erwärmung nur geringfügig aus; entsprechend verläuft die Isotherme im linken Teilbild sehr steil und die Isobare im rechten sehr flach.

wichtig

- Isobare: Kurve konstanten Drucks
- Isotherme: Kurve konstanter Temperatur
- Isochore: Kurve konstanten Molenvolumens

Nur beim Dampfdruck p_D können Gas und Flüssigkeit nebeneinander im thermodynamischen Gleichgewicht existieren. Überwiegt der Stempeldruck p auch nur minimal, so kondensiert der ganze Dampf, ist p auch nur ein wenig zu klein, so verdampft die ganze Flüssigkeit (☞ Abb. 5.22). Befindet sich im Gasraum ein Gasgemisch, so zählt nur der zuständige Partialdruck.

Um freilich das thermodynamische Gleichgewicht wirklich zu erreichen, muss die entsprechende Umwandlungsenthalpie zu- oder abgeführt werden; das kann viel Zeit erfordern.

Bei Verdampfung und Kondensation ändert sich das Molenvolumen der Substanz sprunghaft zwischen den Werten der beiden Phasen. Entsprechend endet eine Isochore im p - T -Diagramm auf der **Dampfdruckkurve** (☞ Abb. 5.23); diese ist Grenzkurve zwischen den beiden Aggregatzuständen. Hier zeigt sich nun ein sehr merkwürdiger Effekt. Erhöht man die Temperatur, so steigt der Dampfdruck, und zwar kräftig. Mit ihm steigt aber auch die Dampfdichte, spezifisches und Molenvolumen nehmen also ab. Bei der Flüssigkeit nehmen sie aber zu, denn die dehnt sich bei Erwärmung aus (wegen der geringen Kompressibilität kommt die Druckerhöhung nicht dagegen an). Folglich wandern die Volumina von beiden Seiten her, aufeinander zu und engen den Koexistenzbereich immer mehr ein, bis er am *kritischen Punkt* ganz verschwindet: *Die Dampfdruckkurve hat ein oberes Ende*. Darüber unterscheiden sich Dampf und Flüssigkeit nicht mehr, ihre Dichten sind gleich geworden: Die *kritische Isotherme* ($T = T_k$) hat beim *kritischen Druck* p_k nur noch einen horizontalen Wendepunkt,

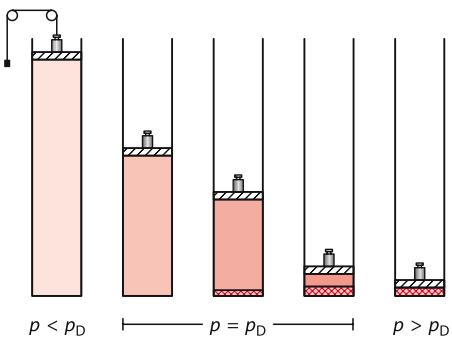


Abb. 5.22. Entspricht der Stempeldruck p genau dem Dampfdruck p_D , so bleibt der Stempel bei jedem gewünschten Volumen innerhalb des Koexistenzbereiches stehen. Ein kleines Zusatzgewicht lässt den Dampf vollständig kondensieren, ein kleines Entlastungsgewicht die Flüssigkeit vollständig verdampfen

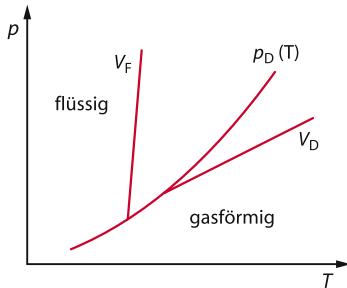


Abb. 5.23. Die Isochoren V_D und V_F von Dampf und Flüssigkeit enden auf der Dampfdruckkurve $p_D(T)$; sie ist die Grenzkurve zwischen den Existenzbereichen der beiden Aggregatzustände

den **kritischen Punkt**. Darüber besitzt sie kein horizontales Stück mehr. Dort lässt sich ein Gas nicht verflüssigen, es ist zum **permanenten Gas** geworden und wird mit steigender Temperatur einem idealen Gas immer ähnlicher (Abb. 5.24).

wichtig

Im Koexistenzbereich existieren Flüssigkeit und Dampf nebeneinander. Er wird oben durch den kritischen Punkt begrenzt: Flüssigkeit und Dampf unterscheiden sich nicht mehr.

Analog zur Dampfdruckkurve lassen sich im p - T -Diagramm Grenzkurven zwischen den anderen Aggregatzuständen zeichnen;

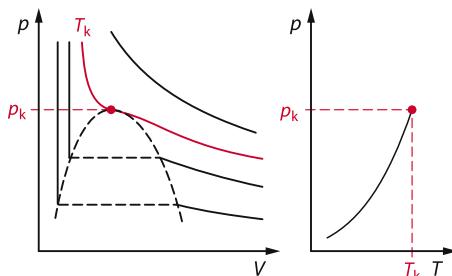


Abb. 5.24. Mit steigender Temperatur und steigendem Dampfdruck engt sich der Koexistenzbereich (Grenze im linken Teilbild gestrichelt) immer mehr ein, bis er am kritischen Punkt verschwindet. Bei der kritischen Temperatur T_k und dem kritischen Druck p_k endet die Dampfdruckkurve (rechtes Teilbild)

sie markieren die Druckabhängigkeit des Schmelzpunktes und den Sublimationsdruck des Festkörpers (Abb. 5.25). Alle drei Kurven treffen sich im **Tripelpunkt**, dem einzigen Punkt, in dem die drei Aggregatzustände gleichzeitig existieren, im thermodynamischen Gleichgewicht jedenfalls. Wenn an einem kalten Wintertag ein Bach, auf dem Eisschollen schwimmen, sichtbar dampft, befindet er sich nicht am Tripelpunkt, aber auch nicht im Gleichgewicht. Der Tripelpunkt des Wassers lässt sich so genau feststellen, dass er zum Fixpunkt der Kelvin-Skala erhoben wurde: 273,16 K; er liegt 0,01 K über dem Eispunkt.

wichtig

Nur beim Tripelpunkt können alle drei Aggregatzustände nebeneinander existieren.

5.3.9

Absorption und Adsorption

Nicht nur Festkörper, auch Gase können sich in Flüssigkeiten lösen. Man spricht hier von **Absorption**. Das vielleicht bekannteste Beispiel liefert das Kohlendioxid in Bier, Sprudelwasser und Sekt. Die Löslichkeit ist begrenzt, sie nimmt mit steigender Temperatur ab. Schon vor dem Sieden perlt die vom Wasser absorbierte Luft auf und mit steigendem Partialdruck des Gases zu. Sektflaschen

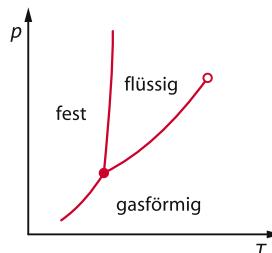


Abb. 5.25. Die Grenzkurven der drei Phasenbereiche treffen sich im Tripelpunkt, nur dort können die drei Aggregatzustände nebeneinander (im thermodynamischen Gleichgewicht) existieren

haben feierlich vertäute Korken, denn ihr Inhalt steht unter Druck. Der von Limonadenflaschen mit prosaischem Kronenkorken tut das freilich auch. Lässt man den Druck entweichen, so ist die Lösung übersättigt und schäumt auf, nicht gerade explosionsartig, denn auch hier handelt es sich um einen Keimbildungsprozess, der seine Zeit braucht. Immerhin ist der Effekt interessant genug, um auch noch aus einem mittleren Wein ein festliches Getränk zu machen.

Den Zusammenhang zwischen Partialdruck p des Gases, der Stoffmengendichte c seiner in der Flüssigkeit gelösten Moleküle und der Temperatur T beschreibt das **Henry-Dalton-Gesetz**

$$p = c \cdot K(T)$$

mit einer empirisch zu bestimmenden Funktion $K(T)$. Jedenfalls sind p und c bei konstanter Temperatur zueinander weitgehend proportional.

wichtig

Henry-Dalton-Gesetz:

$$p = c \cdot K(T)$$

c = Stoffmengendichte des gelösten Gases in der Lösung,

p = Partialdruck des Gases im Außenraum,

K = Materialkenngroße (nimmt normalerweise mit steigender Temperatur ab).

Dieses Gesetz kann Sporttauchern durchaus gefährlich werden, wenn sie nämlich mit einem Atemgerät in größere Tiefen vorstoßen. Dort lastet der Schweredruck des Wassers auf ihnen. Sie müssen deshalb ihrer Lunge Atemluft von gleichem Druck zuführen; anders könnten sie ihren Brustkorb nicht heben. Das ist an sich unbedenklich, denn der Sauerstofftransport zu den Organen wird sowieso vom Hämoglobin besorgt und nicht etwa durch das im Blut absorbierte Gas. Gefahr droht aber beim Auftauchen, wenn nämlich der Luftdruck in der Lunge dem Wasserdruck entsprechend zurückgenommen werden muss. Geschieht dies zu schnell, so wird das Blut übersättigt und scheidet

Luftbläschen aus, die zu einer Embolie führen können. Ähnliches droht Astronauten, wenn ein plötzliches Leck in ihrer Kapsel den gewohnten Luftdruck zu schnell herabsetzt.

Gas- und Flüssigkeitsmoleküle können auch an der Oberfläche von Festkörpern festgehalten, wie man sagt, *adsorbiert* werden, besonders wirksam natürlich, wenn die Oberfläche groß, der Körper also feinkörnig porös ist. Als eine Art Allerweltssubstanz erfreut sich hier die *Aktivkohle* besonderer Beliebtheit, eine nachbehandelte Holz- oder Knochenkohle, die es bis auf $400 \text{ m}^2/\text{g}$ spezifische Oberfläche bringt. Der Arzt verordnet sie bei manchen Darmbeschwerden, um wenigstens die Symptome zu lindern.

wichtig

Absorption: Lösung von Gasmolekülen in einer Flüssigkeit,

Adsorption: Bindung von Gasmolekülen an Festkörperoberflächen.

5.4

Wärmenutzung

Einleitung

Bei Energieumwandlungen geht nichts verloren. Was aus der einen Energieform verschwindet, muss in anderer Form wieder erscheinen. Das ist die Aussage des Energiesatzes, der in der Wärmelehre auch „1. Hauptsatz“ genannt wird. Zu diesem Naturgesetz gibt es eine wichtige Ergänzung, den „2. Hauptsatz der Wärmelehre“. Er erklärt, warum Wärme freiwillig nur von heiß nach kalt fließt und warum Wärmeenergie nicht ohne weiteres in andere, nützlichere Energieformen überführt werden kann.

5.4.1

Die Sonderstellung der Energieform „Wärme“

Bei den idealen Gasen ist Wärme nichts anderes als kinetische, also mechanische Energie; hier steckt sie in der ungeordneten ther-

mischen Wimmelbewegung der Moleküle. Warum dann aber die Unterscheidung?

Wenn man das Ventil einer Pressluftflasche öffnet, wird ein Luftstrom abgeblasen, der ein Windrad treiben kann. Zweifellos besitzt der Strom kinetische Energie. Sie kann nur von der Wärme der Pressluft geliefert worden sein. Der Mechanismus der Energieumwandlung leuchtet ein: Nur diejenigen Moleküle, deren thermische Geschwindigkeit zufällig in die richtige Richtung zeigt, treten durch das Ventil nach draußen (☞ Abb. 5.26). Sie werden aus dem großen Haufen ihrer Artgenossen aussortiert und fliegen nebeneinander her. Energie aus der ungeordneten Wimmelbewegung ist durch Selektion von Molekülen zu kinetischer Energie einer (wenn auch nur teilweise) ausgerichteten Bewegung geworden.

Der beschriebene Versuch zeigt eine begriffliche Schwierigkeit bei Umgang mit der physikalischen Größe „Wärme“ auf: Wesentlich ist die Unordnung. Die Moleküle eines idealen Gases unterliegen während der freien Flugzeit zwischen den Stößen keinen Wechselwirkungen mit ihren Artgenossen. Ein jedes meint, es sei allein auf der Welt. Darum „weiß“ es auch nicht, ob es zu einem Gasstrom gehört oder zu einer ruhenden Wolke; es weiß nicht, ob seine kinetische Energie ausschließlich Wärme darstellt oder mit einem Teil kinetische Windenergie. „Wärme“ ist ein kollektives Phänomen; erst wenn man genügend viele Teichen beisammen hat, darf man überhaupt von Wärme reden. Ihr Kennzeichen ist die Unordnung.

Von Haushalt und Schreibtisch weiß ein jeder: Ordnung zu halten, macht Mühe; Unordnung entsteht von allein. Eben dieser Effekt gibt der Wärme eine Sonderstellung unter den Energieformen: Alle lassen sich willig und leicht in Wärme überführen, aber die Rückumwandlung schafft Probleme. Unmöglich ist sie nicht, wie das Beispiel der Pressluftflasche zeigte. Das Beispiel hat aber einen Haken. Ehe man die Luft aus der Flasche abblasen kann, muss man sie auf Überdruck gepumpt haben. Darum bekommt man nur mechanische Energie zurück, die

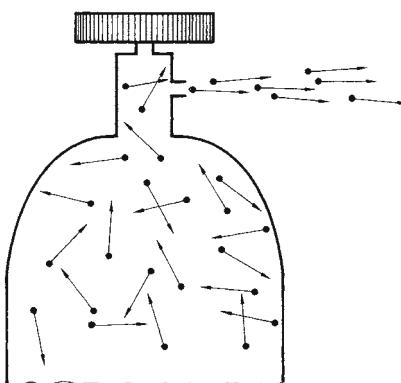


Abb. 5.26. Aus der geöffneten Pressluftflasche strömen Luftmoleküle unter Richtungsbündelung heraus: Umsetzung thermischer Energie in kinetische. Die Zeichnung übertriebt gewaltig: Auch im Strahl überwiegt die ungeordnete Bewegung bei weitem

zuvor hineingesteckt wurde: Man bekommt sie nur zum Teil zurück. Ein Schiff, das den Ozean ein wenig abkühlt, ihm also Wärme entzieht, und mit dieser Wärme seine Maschine betreibt – ein solches Schiff würde die Weltwirtschaft revolutionieren und alle Diskussionen um die Energieversorgung mit einem Schlag beenden. Freilich, es lässt sich nicht bauen, die Thermodynamik verbietet es mit ihrem sog. „**zweiten Hauptsatz**“. Der Energiesatz hätte nichts einzuwenden.

Die Thermodynamik erlaubt auszurechnen, welcher Anteil einer vorhandenen Wärme günstigstenfalls in z. B. potentielle mechanische Energie umgesetzt werden kann, und welcher (meist größere) Anteil Wärme verbleiben muss. Leider ist sie eine recht abstrakte Wissenschaft, die zu mathematischen Formulierungen und zu reinen Gedankenversuchen neigt. Ihr zweiter Hauptsatz hat aber so grundsätzliche Bedeutung, dass er hier behandelt werden muss, obwohl dies an manchen Stellen eine geduldige und etwas ermüdende Kleinarbeit erfordert.

5.4.2 Zustandsänderungen

Überlässt man ein irgendwo eingesperrtes Gas lange genug sich selbst, so werden sich anfänglich möglicherweise vorhandene Unterschiede in der lokalen Druck- und Temperaturverteilung ausgeglichen haben. Dann befindet sich die gesamte Gasmenge im **thermodynamischen Gleichgewicht** und damit in einem bestimmten „Zustand“, der sich durch einen Punkt im Zustandsdiagramm darstellen lässt. In diesem Kapitel „Wärmelehre“ wurde immer stillschweigend angenommen, dass sich der betrachtete Stoff im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, denn nur dann ist zum Beispiel die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung gegeben und es kann von einer Temperatur des Stoffes gesprochen werden.

Durch Eingriff von außen, beispielsweise durch Heizen, kann man das Gas in einen anderen Zustand bringen; der Übergang dorthin wird im Allgemeinen mehr oder weniger turbulent ablaufen. Wenn man aber sehr behutsam vorgeht, ist es denkbar, dass alle Teile der Gasmenge den neuen Zustand auf gemeinsamem Weg durch das Zustandsdiagramm, also immer im Gleichgewicht, erreichen. Man nennt die Zustandsänderung dann **reversibel**, das heißt *umkehrbar*. Die Zustandsänderung soll also in jedem Moment rückgängig gemacht werden können. Das klingt alles ein wenig hypothetisch; es ist auch hypothetisch, aber es erlaubt, einige grundsätzliche Erkenntnisse über Zustandsänderungen zu gewinnen.

Stellt man die Pressluftflasche in einen abgeschlossenen Raum und lässt das Gas aus dem Ventil herauspfeifen bis die Flasche leer ist, so beginnt und endet man mit dem Gas im thermodynamischen Gleichgewicht, also in einem bestimmten Zustand. Am Anfang ist das Gas in der Flasche in einem bestimmten Volumen bei bestimmter Temperatur und bestimmtem Druck. Am Ende füllt das Gas den ganzen Raum wieder bei bestimmter Temperatur und bestimmtem Druck. Dazwischen geht es aber sehr tur-

bulent zu. Im Strahl sind die Moleküle nicht im thermodynamischen Gleichgewicht. Der ganze Vorgang ist nicht reversibel sondern **irreversibel**, denn die Gasmoleküle können in keinem Moment wieder in die Flasche zurückgestopft werden. Soll diese *Expansion* des Gases reversibel von statthaften gehen, so müsste folgendermaßen vorgegangen werden:

Das Gas wird in einen Zylinder eingesperrt, den ein reibungsfrei beweglicher Kolben gasdicht abschließt (für die Praxis bedeutet das einen Widerspruch in sich, aber im Gedankenversuch ist eine solche Annahme erlaubt). Nun kann durch langsames Herausziehen des Kolbens das Gas expandiert werden. In jedem Moment bleibt das Gas nun näherungsweise im Gleichgewicht und kann die Expansion durch rückwärtschieben des Kolbens rückgängig gemacht werden: der Vorgang ist reversibel.

Hundertprozentig reversible Zustandsänderungen gibt es nur im Gedankenversuch und nicht in Wirklichkeit. Aber nur mit ihnen kann man rechnen, wie es nun geschehen soll.

Die Zustandsgrößen Druck p , Temperatur T , Stoffmenge n und Volumen V , seien durch das Gasgesetz miteinander verknüpft; es soll sich also um ein ideales Gas handeln.

Aus der Unzahl möglicher Zustandsänderungen lassen sich vier Grundtypen herausschälen:

(1) Isochore Zustandsänderung: $\Delta V = 0$.

Hierfür wird der an sich bewegliche Kolben im Zylinder festgeklemmt. Weil er sich nicht verschieben kann, kann er auch keine mechanische Hubarbeit leisten. Wird dem Gas Wärme zugeführt, so wandert es im p - V -Diagramm senkrecht nach oben auf eine höhere Isotherme (☞ Abb. 5.27). Die eingebrachte Wärme Q dient nur einer Temperaturerhöhung ΔT : Sie erhöht die sog. **innere Energie U** des Gases um

$$Q = \Delta U = n \cdot c_V \cdot \Delta T$$

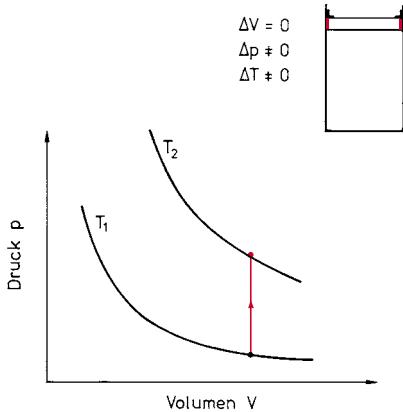


Abb. 5.27. Isochore Erwärmung: Kolben festgeklemmt

Hier ist c_v die molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen und n die Zahl der Mole im Zylinder.

Für ein ideales Gas kann man sie mit Hilfe des Gleichverteilungssatzes ausrechnen (Kap. 5.2.2).

(2) Isobare Zustandsänderung: $p = 0$.

Die gleiche Temperaturerhöhung ΔT lässt sich auch bei konstantem Druck erreichen, in Abb. 5.28 symbolisiert durch ein Gewichtsstück auf dem Kolben. Im p -V-Diagramm wandert das Gas jetzt horizontal nach rechts. Dabei leistet es mechanische

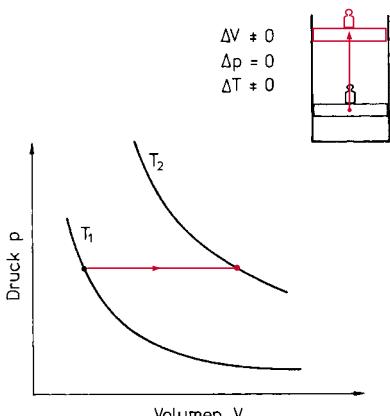


Abb. 5.28. Isobare Expansion: Kolben leistet Hubarbeit

Arbeit W , weil es Kolben und Gewichtsstück anhebt:

$$W = p \cdot \Delta V$$

(wer es sehr genau nimmt, gibt dem W ein negatives Vorzeichen, um anzudeuten, dass es vom Gas abgegeben wird). Für die Temperaturerhöhung muss freilich auch diesmal innere Energie genauso produziert werden wie zuvor. Nach dem Energiesatz hat jetzt also das von außen angeschlossene Temperaturbad eine größere Wärmemenge Q_p abzuliefern:

$$Q_p = \Delta U + W = n \cdot c_p \cdot \Delta T$$

c_p ist die molare Wärmekapazität bei konstantem Druck. Der Quotient c_p/c_v **Adiabatenexponent** genannt und bekommt den Buchstaben κ . Grundsätzlich ist κ größer als 1.

wichtig

Die Beziehung

$$Q = \Delta U + W$$

gilt ganz allgemein. Sie heißt 1. Hauptsatz der Wärmelehre und stellt im Grunde nur eine spezielle Form des Energiesatzes dar. Mit Worten lässt sich der Zusammenhang nur etwas umständlich ausdrücken: Eine zu- oder abgeführte Wärmemenge Q teilt sich auf in eine Erhöhung oder Erniedrigung ΔU der inneren Energie und eine Abgabe oder Aufnahme W von mechanischer Energie.

(3) Isotherme Zustandsänderung: $\Delta T = 0$.

In diesem Fall wandert das Gas im p -V-Diagramm längs einer Isotherme, z. B. nach rechts unten (Expansion). Seine innere Energie ändert sich nicht, denn diese hängt nur von der Temperatur ab: Aus $\Delta T = 0$ folgt $\Delta U = 0$. Das Gas leistet aber Hubarbeit W , und zwar bei kontinuierlich abnehmendem Druck (in der Abb. 5.29 durch ein weggenommenes Zusatzgewicht symbolisiert). Formal kann die mechanische Arbeit des-

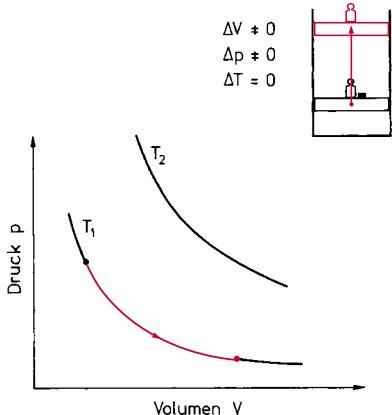


Abb. 5.29. Isotherme Expansion: Kolben leistet Hubarbeit bei abnehmendem Druck

halb nur durch ein Integral ausgedrückt werden:

$$W = \int p \cdot dV.$$

Daraus folgt für die isotherme Expansion eines idealen Gases

$$W = R \cdot T \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Herleitung: Ersetzt man im Integral den Druck p mit Hilfe des Gasgesetzes, so bekommt man

$$W = \int \frac{RT}{V} dV = RT \cdot \int \frac{dV}{V}$$

R ist von Natur, T nach Voraussetzung konstant; beide können also vor das Integral gezogen werden. Nun sagt die Differentialrechnung ganz allgemein, dass

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

sei. Dann muss aber auch

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x} = \ln x_2 - \ln x_1 = \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

sein. Jetzt müssen nur noch die Buchstaben x gegen V ausgetauscht werden.

(4) Adiabatische Zustandsänderung: $Q = 0$.

Auch ein völlig gegen Wärmeaustausch isoliertes Gas kann seinen Zustand ändern; der

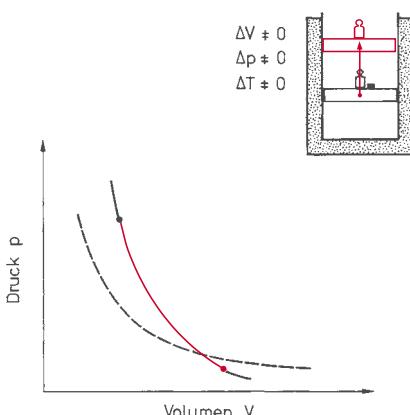


Abb. 5.30. Adiabatische Expansion: Hubarbeit wird der inneren Energie entnommen

Vorgang wird dann **adiabatisch** genannt. Eine Expansion leistet auch jetzt mechanische Arbeit. Nach dem 1. Hauptsatz kann sie nur der inneren Energie entnommen werden; das bedeutet eine Abnahme der Temperatur: Im p -V-Diagramm muss eine Adiabate steiler verlaufen als eine Isotherme (☞ Abb. 5.30). Ihren exakten Verlauf bestimmt die Adiabaten-Gleichung:

$$p \cdot V^\kappa = \text{konstant}$$

oder

$$T \cdot V^{\kappa-1} = \text{konstant}$$

Herleitung: Von einem zum anderen Punkt auf einer Adiabaten kann man auch in zwei Schritten kommen, einem isobaren (im Diagramm der ☞ Abb. 5.31 „horizontalen“) und einem anschließenden isochoren („vertikalen“). Der erste Schritt verlangt die Wärmemenge

$$Q_1 = n \cdot c_p \cdot \Delta T_1,$$

die der zweite exakt wieder übernehmen muss, denn sonst würde er ja nicht wieder auf die Adiabate zurück:

$$Q_2 = n \cdot c_V \cdot T_2 = -Q_1$$

(hier darf das Vorzeichen nicht unterschlagen werden). Dann gilt aber für das Verhältnis der beiden Temperaturänderungen

$$\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} = -\frac{c_p}{c_V} = -\kappa.$$

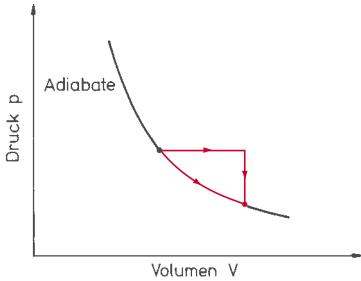


Abb. 5.31. Zur Herleitung der Adiabatengleichung

Andererseits folgt aus dem Gasgesetz für den ersten, isobaren Schritt

$$\Delta T_1 = \frac{p}{n \cdot R} \Delta V$$

und für den zweiten, isochoren

$$\Delta T_1 = \frac{V}{n \cdot R} \Delta p$$

also auch

$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} = \frac{V \cdot \Delta p}{p \cdot \Delta V} = -\kappa$$

Im Gedankenversuch dürfen die Schritte als differentiell klein angesetzt werden:

$$\frac{dp \cdot V}{p \cdot dV} = -\kappa$$

oder

$$\frac{dp}{p} = -\kappa \cdot \frac{dV}{V}$$

und integriert

$$\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = -\kappa \cdot \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa}$$

Das bedeutet aber

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa}$$

oder, wie herzuleiten war,

$$p_2 \cdot V_2^{\kappa} = p_2 \cdot V_1^{\kappa} = p \cdot V^{\kappa} = \text{const.}$$

Adiabatische Zustandsänderungen kommen in der Natur häufiger vor, als man zunächst vermuten möchte: Wärmeaustausch braucht Zeit. Schallschwingungen z. B. haben diese

Zeit nicht; darum richtet sich die Schallgeschwindigkeit (Kap. 4.3.2) auch nach dem adiabatischen Kompressionsmodul $Q_a = \kappa \cdot p$ und nicht nach dem isothermen Modul $Q_i = p$ – beide Moduln ergeben sich entsprechend der Definition $Q = -V \cdot dp/dV$ (Kap. 3.3.6; hat leider den gleichen Buchstaben wie hier die Wärmemenge) durch Differentiation aus der Adiabatengleichung bzw. dem Gasgesetz. Auch wenn man einen schlaffen Autoreifen aufpumpt, komprimiert man die angesaugte Luft zunächst adiabatisch, erwärmt sie also. Nach einiger Zeit gleicht sich die Temperatur wieder aus: Der Reifen verliert zwar nicht Luft, aber Druck.

Rechenbeispiel 5.12: Dieselmotor

20 °C warme Luft wird im Zylinder eines Dieselmotors von Atmosphärendruck und 800 cm³ auf 60 cm³ komprimiert. Nehmen wir an, die Kompression ist näherungsweise adiabatisch und die Luft benimmt sich wie ein ideales Gas mit $\kappa = 1,4$. Wie groß ist Druck p_k und Temperatur T_k nach der Kompression?

Lösung: Für den Druck gilt

$$p_k = 1000 \text{ hPa} \cdot \left(\frac{800 \text{ cm}^3}{60 \text{ cm}^3} \right)^{\kappa} = 37.600 \text{ hPa}.$$

Aufgrund der idealen Gasgleichung gilt für eine bestimmte Gasmenge:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2}.$$

Daher berechnet sich die Temperatur zu:

$$T_k = \frac{37.600 \text{ hPa} \cdot 60 \text{ cm}^3}{1000 \text{ hPa} \cdot 800 \text{ cm}^3} \cdot 293 \text{ K} = 826 \text{ K}$$

$$= 553 \text{ °C.}$$

Die hohe Kompression in einem Dieselmotor heizt das Luft-Benzin-Gemisch so hoch auf, dass es ohne den Funken einer Zündkerze zündet.

5.4.3 Der Ottomotor

Mit der Vorarbeit des letzten Kapitels kann nun überlegt werden, welchen Wirkungsgrad der Benzinmotor eines Autos haben kann, das heißt, welcher Anteil der bei der Verbrennung des Benzins entstehender Wärme Q_h in mechanische Arbeit W umgewandelt werden kann.

wichtig

Wirkungsgrad eines Motors:

$$\eta = \frac{W}{Q_h} = \frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{freigesetzte Wärme}}$$

Dazu betrachtet man den Ablauf der Zustandsänderungen in einem Zylinder des Motors in einem Druck – Volumen – Diagramm (☞ Abb. 5.32).

Punkt 1 im Diagramm markiert den Anfangspunkt: es befindet sich ein Benzin – Luft – Gemisch bei Umgebungsdruck und Umgebungstemperatur im Zylinder mit ausgefahrenem Kolben. Nun muss der Kolben eingefahren werden, damit er nach dem Verbrennen des Benzins wieder herausfahren kann. Idealerweise soll diese Kompression adiabatisch, also ohne Wärmeaustausch, geschehen. Dabei muss natürlich mechanische Arbeit geleistet werden und Druck und

Temperatur des Benzin – Luft – Gemisches steigt an, wie im letzten Rechenbeispiel nachgerechnet wurde. Im Schritt von 2 nach 3 wird das Benzin dann bei eingefahrenem Kolben verbrannt. Da dies ein isochorer Prozess ist, wird keine Arbeit umgesetzt, aber dem Motor wird eine Wärmemenge Q_h zugeführt, Druck und Temperatur steigen stark an. Nun folgt die adiabatische Expansion, derer wegen der ganzen Prozess abläuft und die mehr Arbeit liefert, als die vorherige Kompression gebraucht hat. Dabei kühlst sich das nun im Zylinder befindliche Abgas wieder ab, aber leider nicht bis auf Umgebungstemperatur. Deshalb wird im letzten Schritt von 4 nach 1 heißes Abgas durch das Auspuffrohr geblasen und die Wärmemenge Q_t an die Umgebung abgegeben. Diese Energie ist verloren. Der Schritt von 4 nach 1 besteht eigentlich aus zwei Schritten, denn nachdem das heiße Abgas ausgestoßen wurde, wird noch frische Luft angesaugt und ein neues Benzin – Luft – Gemisch gebildet. Da bei der adiabatischen Expansion und Kompression idealerweise keine Wärme mit der Umgebung ausgetauscht wird, berechnet sich die vom Motor in der Summe in einem Zyklus geleistete Arbeit schlicht nach Energiesatz:

$$W = Q_h - Q_t$$

und der Wirkungsgrad ist dann:

$$\eta = \frac{W}{Q_h} = \frac{Q_h - Q_t}{Q_h} = 1 - \frac{Q_t}{Q_h}$$

Wie groß ist nun die verlorene Wärmemenge Q_t ? In guter Näherung ist die Wärmekapazität C der Materie im Zylinder konstant, so dass gilt:

$$Q_t = C \cdot (T_3 - T_2) \quad \text{und} \quad Q_h = C \cdot (T_4 - T_1)$$

Nach der Adiabatenbeziehung gilt aber auch:

$$V_a^{\kappa-1} \cdot T_3 = V_b^{\kappa-1} \cdot T_4 \quad \text{und} \\ V_a^{\kappa-1} \cdot T_2 = V_b^{\kappa-1} \cdot T_1$$

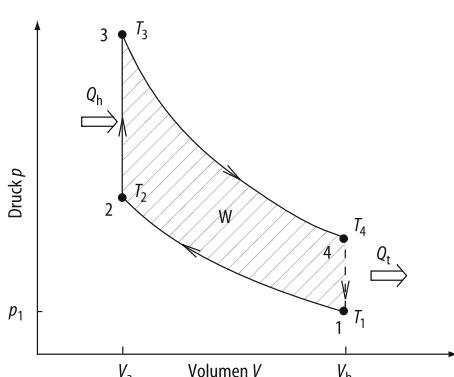


Abb. 5.32. Der Kreisprozess des Ottomotors.

Etwas Umformen liefert:

$$\frac{T_3 - T_2}{T_4 - T_1} = \left(\frac{V_b}{V_a} \right)^{\kappa-1}.$$

Das entspricht dem Verhältnis der Wärmemengen:

$$\frac{Q_h}{Q_t} = \frac{C \cdot (T_3 - T_2)}{C \cdot (T_4 - T_1)} = \left(\frac{V_b}{V_a} \right)^{\kappa-1}.$$

Nun kann der ideale Wirkungsgrad in Abhängigkeit vom Kompressionsverhältnis V_b/V_a angegeben werden, so wie es technisch üblich ist:

$$\eta = 1 - \frac{Q_t}{Q_h} = 1 - \frac{1}{\left(V_b / V_a \right)^{\kappa-1}}$$

wichtig

Wirkungsgrad des idealen Otto-Motors:

$$\eta = 1 - \frac{1}{\left(V_b / V_a \right)^{\kappa-1}}$$

Für ein typisches Kompressionsverhältnis von 7 und $\kappa = 1,4$ (Luft) ergibt das 0,54 oder 54 %. Real ist der Wirkungsgrad eines Automotors leider eher bei 25 % wegen erheblicher Reibungsverluste und einer unvollständigen Verbrennung des Benzins.

Könnte man den auch einen Motor bauen, der wenigstens idealerweise die gesamte Wärme in Arbeit umwandelt?

Ja, das ginge schon, sogar mit unserem Otto-Motor. Man müsste ihn nur statt mit dem Benzin – Luft – Gemisch mit Nitroglycerin betreiben. Der Witz: Nitroglycerin ist eine hochexplosive Flüssigkeit, die den Sauerstoff für das Verbrennen schon in sich trägt. Beim Verbrennen verwandelt sich das Nitroglycerin vollständig in Gas, die Gasmenge im Zylinder steigt also stark an. Das ermöglicht einen ganz neuen Kreisprozess, den Abb. 5.33 zeigt.

Im Punkt 1 befindet sich noch ein Teil des Abgases aus dem letzten Durchlauf im Zylinder. Außerdem wird eine bestimmte Menge Nitroglycerin in den Zylinder gegeben. Diese wird nun gezündet, worauf der

Druck, die Temperatur und eben auch die Gasmenge n stark ansteigt (Punkt 2). Nun wird adiabatisch expandiert, und zwar so lange, bis im Zylinder wieder der Umgebungsdruck p_1 herrscht. Man kann nun die Nitroglycerinmenge und die Volumina V_a und V_b so einstellen, dass nach der Expansion auch die Temperatur wieder genau die Umgebungstemperatur ist. Das geht, weil im Punkt 3 die Gasmenge viel höher ist als im Punkt 1. Im Schritt von 3 nach 1 wird nun das Abgas zum Teil aus dem Zylinder ausgestoßen. Dabei ist keine Arbeit zu leisten, da das Abgas schon auf Umgebungsdruck ist. Es wird auch keine Wärme abgegeben, da das Abgas Umgebungstemperatur hat. Die gesamte Wärme Q_h wird in Arbeit umgewandelt!

Sehr schön, nur leider möchte man aus Sicherheitsgründen doch lieber kein Nitroglycerin im Tank haben. Auch wären die Kosten trotz des tollen Wirkungsgrades zu hoch. Die Natur stellt als Oxydationsmittel für Verbrennung allgegenwärtig und kostenlos den Luftsauerstoff zur Verfügung. Deshalb arbeiten alle Verbrennungsmotoren mit ihm. Tatsächlich gibt es keinen Verbrennungsmotor in praktischer Anwendung, der den idealen Wirkungsgrad 100 % hätte.

Es soll noch schnell die Behauptung begründet werden, dass im Punkt 3 tatsächlich wieder Zimmertemperatur T_1 erreicht werden kann. Die Nitroglycerinmenge und das Volumen V_a bestim-

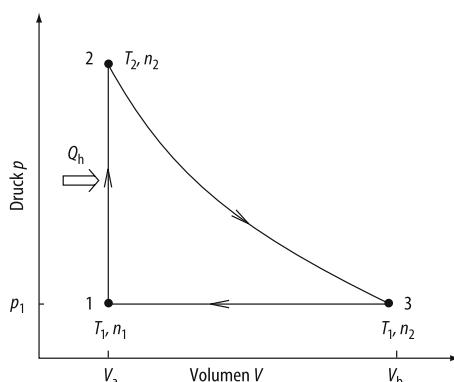


Abb. 5.33. Der Kreisprozess eines Nitroglycerin-Motors

men die Temperatur T_2 und die Gasmenge n_2 , V_b kann so gewählt werden, dass in Punkt 3 die Gasgleichung in der Form:

$$P_1 \cdot V_b = n_2 \cdot R \cdot T_1$$

erfüllt wird. Das Volumen V_a kann wiederum so eingestellt werden, das die Adiabatengleichung für den Schritt von 2 nach 3 erfüllt ist:

$$V_a^{\kappa-1} \cdot T_2 = V_b^{\kappa-1} \cdot T_1.$$

Präziser gesagt: da n_2 die Gasmenge n_1 enthält und damit etwas von V_a abhängt, bilden die beiden Gleichungen ein (lösbares) Gleichungssystem für V_a und V_b bei einer vorgegebene Nitroglycerinmenge.

Der ein oder andere wird hier vielleicht stutzen, weil er in der Schule gelernt hat, das es für Wärmekraftmaschinen den so genannten Carnot-Wirkungsgrad gibt, der wegen des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik keinesfalls überboten werden kann. Der Nitroglycerin-Motor hat ihn aber locker überboten. Damit hat es folgendes auf sich: Die Theorie, die auf den Carnot-Wirkungsgrad führt, wurde im Zeitalter der Dampfmaschinen von Carnot (1824) und Clausius (1865) entwickelt. Anders als bei Verbrennungsmotoren kann bei einer Dampfmaschine oder Dampfturbine (das ist die moderne Form in Kraftwerken) der Wasserdampf als Arbeitsgas immer im Kreis herum gepumpt werden und braucht die Maschine nicht zu verlassen. Ein Verbrennungsmotor tauscht mit der Umgebung hingegen Benzin, Luft und Abgas aus.

Das macht aus thermodynamischer Sicht einen großen Unterschied. Um das verstehen zu können, muss aber erst die Größe Entropie eingeführt werden, was im übernächsten Kapitel geschehen soll.

5.4.4 Wahrscheinlichkeit und Ordnung

An einer heißen Kaffeetasse kann man gut die Hände wärmen, denn Wärme fließt bereitwillig von heiß nach warm. Dass man

aber mit seinen Händen den Kaffee wieder zum Kochen bringt, wird niemals passieren. Der Energiesatz hätte nichts dagegen, aber trotzdem ist das nicht möglich. Warum?

Es liegt an der Wahrscheinlichkeit. Alles strebt in den Zustand mit der höchsten Wahrscheinlichkeit. So ist die Wahrscheinlichkeit definiert. Jeder kennt es von seinem Schreibtisch: Unordnung ist wahrscheinlicher als Ordnung. Das gilt auch in der Natur: ein System aus vielen Teilen wird sich so lange wandeln, bis es den wahrscheinlichsten Zustand, und das ist der Zustand höchster Unordnung, erreicht hat. Dann befindet es sich im *thermodynamischen Gleichgewicht* und verändert sich nicht mehr. Auf dem Weg ins thermodynamische Gleichgewicht gibt es keinen Umweg zurück in einen unwahrscheinlicheren Zustand. Das ist das Gesetz der großen Zahl. Ein System mit wenigen Teilen, sagen wir zwei Würfel, mit denen gewürfelt wird, kann auch mal in einen unwahrscheinlichen Zustand kommen; dass zum Beispiel beide Würfel die gleiche Zahl zeigen. Würfelt man mit zehn Würfeln, so müsste man schon an die zehn Millionen mal würfeln, um eine reelle Chance zu haben, dass alle Würfel einmal die gleiche Zahl zeigen. Würfelt man mit einer Million Würfeln, kann man sicher sein, dass das wahrscheinlichste Ergebnis, dass nämlich alle Zahlen in etwa gleich oft vorkommen, immer eintritt. Die Gegenstände unserer Umgebung bestehen aus mindestens 10^{20} Atomen. Da kann man völlig sicher sein, dass sie zielstrebig ihrem wahrscheinlichsten Zustand entgegengesetzt. Ein Charakteristikum ist, dass im thermodynamischen Gleichgewicht die Temperatur überall gleich ist. Deshalb wird der Kaffee auf die Dauer die Temperatur der Hände haben und nicht wieder anfangen zu kochen. Wie lange es aber dauert, bis Kaffee und Hände im thermodynamischen Gleichgewicht sind, das hängt von den Details ab; wie gut zum Beispiel die Kaffeetasse isoliert. Es kann sehr lange dauern. Seit dem Urknall sind schon 14 Milliarden Jahre vergangen und trotzdem ist das Weltall noch lange nicht im wahrscheinlichsten Zustand.

Aber wie ist es mit dem Menschen? Der ist doch ein hoch komplex organisiertes System von Molekülen, also sehr unwahrscheinlich? Der Mensch hat einen Trick: er nimmt ständig Energie in sehr geordneter Form (zum Beispiel Schwarzwälder Kirschtorte) zu sich und gibt sie in sehr ungeordneter Form wieder ab. Damit ist weniger das Resultat auf der Toilette gemeint, sondern mehr die Wärmeenergie, die der Mensch ständig abgibt (100 bis 200 Joule pro Sekunde). Dadurch erhöht der Mensch die Unordnung der Umgebung, um bei sich selbst die hohe Ordnung aufrecht zu erhalten oder noch zu erhöhen. Mensch und Umgebung zusammengenommen bleiben aber tatsächlich auf dem Weg zu höherer Unordnung.

Wärme ist kinetische Energie in ungeordneter Form. Sie lässt sich nicht ohne weiteres in geordnete Bewegung, so wie sie ein Motor zur Verfügung stellt, umwandeln. Auch der Motor muss dazu Energieträger in einer geordneteren Form, wie zum Beispiel Benzin, verwenden. Einfach nur der Umgebung Wärme entziehen und daraus mechanische Arbeit gewinnen, geht nicht. Ein solcher Motor könnte dann ja zum Beispiel eine Klimaanlage betreiben, die Wärmeenergie endlos von kalt nach warm transportiert und damit alles vom wahrscheinlichen Zustand wegtriebt.

5.4.5 Entropie

Die **Wahrscheinlichkeit des Zustandes** eines Systems ist also eine sehr wichtige Größe, wenn man den Ablauf thermischer Prozesse verstehen will. Deshalb wird ihr eine eigene physikalische Größe gewidmet: die **Entropie**. Sie ist ein Maß für diese Wahrscheinlichkeit. Es würde über den Rahmen dieses Buches hinausgehen, wenn hier genau erklärt wurde, wie man Wahrscheinlichkeiten eigentlich misst oder berechnet, um dann eine neue physikalische Größe definieren zu können. Hier seien nur die wichtigsten Eigenschaften der Entropie aufgeführt:

- ▶ die Entropie eines Körpers steigt mit der Wahrscheinlichkeit seines Zustandes. Ein von der Umwelt völlig isolierter Körper strebt in den Zustand mit höchster Wahrscheinlichkeit, seine Entropie steigt also an. Sie sinkt niemals. Hat sein Zustand die höchste Wahrscheinlichkeit erreicht, so ist er im thermodynamischen Gleichgewicht und seine Entropie bleibt konstant.
- ▶ Die Entropie ist als mengenmäßige Größe definiert. Macht man den Körper doppelt so groß, ohne ihn sonst wie zu verändern, verdoppelt sich seine Entropie. Deshalb kann man sagen: der Körper enthält eine gewisse absolute Menge Entropie.
- ▶ Unordnung ist wahrscheinlicher als Ordnung. Die Entropie flüssigen Wassers ist höher als die Entropie von zu Eiskristallen gefrorenem Wasser, denn in der Flüssigkeit sind die Atome ungeordnet.
- ▶ Überträgt man Wärme von einem Körper auf einen anderen, so wird auch Entropie übertragen. Zugeführte Wärme verstärkt die atomare Wimmelbewegung und erhöht damit die Unordnung und die Entropie. Genau gilt: eine Wärmemenge Q , die einem Körper, der die Temperatur T hat, zugeführt wird, erhöht dessen Entropie um

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

Den Umstand, dass im isolierten System die Entropie (also die Wahrscheinlichkeit des Zustandes) nicht sinken kann, bezeichnet man als **zweiten Hauptsatz der Thermodynamik**, also:

$$\Delta S \geq 0 \text{ im isolierten System.}$$

Mit der Größe Entropie kann man sehr handfest arbeiten und rechnen. Das sei hier am Beispiel der Berechnung des Wirkungsgrades von Dampfmaschinen gezeigt.

Eine Dampfmaschine nimmt im Brenner in einem Umlauf bei einer hohen Temperatur T_h eine Wärmemenge Q_h auf (Abb. 5.34).

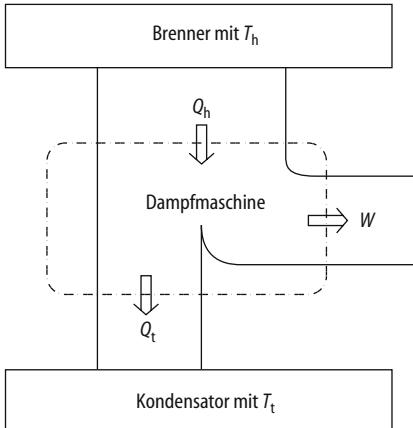


Abb. 5.34. Energiefluss-Schema der Dampfmaschine

Damit reduziert sie die Entropie ihrer Umgebung um

$$\Delta S = -\frac{Q_h}{T_h}.$$

Diese Entropie muss die Maschine aber an die Umgebung zurückgeben. Sonst wäre sie eine Entropievernichtungsmaschine, und die kann es nicht geben. Die Abgabe von mechanischer Arbeit ist nicht mit einem Entropieübertrag verbunden. Da die Maschine mit der Umgebung sonst nur Wärme austauschen kann, kann sie die Entropie nur in Form von Wärme zurückgeben. Das dann überhaupt noch Wärme zur Umwandlung in Arbeit übrig bleibt ist dem Umstand zu danken, dass die Dampfmaschine die Abwärme bei niedriger Temperatur T_t in den Kondensator abgibt. Da reicht eine kleinere Wärmemenge Q_t , um die gleiche Entropiemenge $|\Delta S|$ zu übertragen:

$$\frac{Q_t}{T_t} = |\Delta S| = \frac{Q_h}{T_h} \Rightarrow Q_h - Q_t = Q_h \cdot \left(\frac{T_h - T_t}{T_h} \right)$$

Diese Differenz der Wärmemengen kann also bestenfalls in Arbeit umgewandelt werden. Das gibt den so genannten **Carnot – Wirkungsgrad**:

$$\eta = \frac{W}{Q_h} = \frac{Q_h - Q_t}{Q_h} = \frac{T_h - T_t}{T_h}.$$

Natürlich kann die Dampfmaschine auch leicht einen schlechteren Wirkungsgrad haben. Eine Dampflokomotive kommt auf etwa 5%.

Ein Verbrennungsmotor wie zum Beispiel der Otto-Motor ist nicht an diesen Wirkungsgrad gebunden, denn er tauscht mit der Umgebung neben Wärme auch noch Materie (Brennstoff, Luft, Abgas) aus. Das bedeutet zusätzliche Entropieströme, die der Dampfmaschine nicht zu Gebote stehen.

Dreht man in der Abb. 5.34 alle Pfeile um, bekommt man das Schema einer Wärmepumpe (Kühlschrank, Klimaanlage). Die gleiche Argumentation lehrt einem dann, wie viel Arbeit der Kompressor mindestens leisten muss, damit die Anlage eine gewisse Kühlleistung erreicht.

5.4.6

Wärme- und Entropiehaushalt der Erde

Dass sich das Leben auf der Erde so entwickeln konnte, wie es sich entwickelt hat, verdankt es der Sonne. Sie liefert Energie in Form von elektromagnetischer Strahlung und was sehr wichtig ist: sie liefert eine Strahlung, die eine relativ niedrige Entropie mitbringt. Auch eine elektromagnetische Welle transportiert neben Energie auch Entropie. Den Energiefluss gibt die **extraterrestrischen Solarkonstante** $\varphi_S = 1,36 \text{ kW/m}^2$ an, genauer: sie gibt die Flussdichte als Leistung pro Fläche an. Die Wolken reflektieren einen Teil unmittelbar in den Weltraum zurück, ungefähr 1 kW/m^2 kommt aber am Erdboden an. Abgestrahlt wurde diese Energie von der ca. 6000 K heißen Sonnenoberfläche. Ein so heißer Strahler strahlt relativ wenig Entropie pro abgestrahlter Energiemenge ab und das ermöglicht es, mit der Sonnenstrahlung nützliche Energieträger zu schaffen. Der mit Abstand wichtigste Prozess ist dabei die **Photosynthese**, die im Chlorophyll der Pflanzen abläuft und letztlich die gesamte Nahrung für alle Tiere (auch Menschen) und auch den Luftsauerstoff

zum Atmen und Autofahren liefert. Die Photosynthese hat auch über Jahrmillionen das ganze Öl, Gas und die Kohle erzeugt, die wir heute verfeuern. Wir verfeuern diese viel schneller, als sie gebildet wurde. Das Gleichgewicht zwischen Erzeugung und Verbrauch von O₂, zwischen Verbrauch und Erzeugung von CO₂ ist deshalb seit einigen Jahrzehnten erkennbar gestört: Der CO₂-Gehalt der Erdatmosphäre nimmt rasanter zu als je zuvor. Mit kaum absehbaren Folgen, denn CO₂ ist ein wichtiger Vertreter der sog. „Klima-Gase“. Die von der Sonne eingestrahlte Energie muss auch wieder weg, sonst heizt sich die Erde immer weiter auf. Loswerden kann der Erdball diese Energie nur dadurch, dass er sie in den Weltraum zurückstrahlt, aus dem sie kommt. Diese Abstrahlung wird durch die Klima-Gase behindert, glücklicherweise, denn ohne den dadurch bedingten *Treibhauseffekt* wäre es auf der Erde arg kalt. Nur darf man nicht übertreiben. Das für das Leben auf der Erde so wichtige *Fließgleichgewicht* zwischen Zu- und Abstrahlung reagiert empfindlich: Zunahme des CO₂-Gehaltes erhöht die Oberflächentemperatur, denn anders kann eine Behinderung der Abstrahlung nicht ausgeglichen werden. Dass dieser Prozess bereits läuft,

wird nicht mehr bezweifelt; nur über das Ausmaß darf man noch streiten.

Will die Menschheit auch in Zukunft ihren Energiebedarf decken, kann sie also nicht alleine auf Produkte der Photosynthese zurückgreifen, schon allein, weil Öl und Kohle irgendwann mal aufgebraucht sein werden. Sie wird immer stärker auf andere Möglichkeiten zurückgreifen müssen, die „heiße“ Strahlung der Sonne zu nutzen. Das können alte Methoden wie Wind- und Wasserräder sein oder neuere, wie Solarkraftwerke und Solarzellen.

Alle Energie, die durch die heiße Sonnenstrahlung auf die Erde gelangt, wird von der Erde als wesentlich kältere Strahlung wieder abgestrahlt. Diese kältere Strahlung trägt wesentlich mehr Entropie von der Erde weg, als die Sonnenstrahlung mitgebracht hat. Diese negative Entropiebilanz ermöglicht die ganze komplexe Strukturbildung des Lebens auf der Erdoberfläche. Wir wissen heute, dass es auf dem Mars auch einmal fließendes Wasser und damit vielleicht auch Leben gab. Aber das ist wohl schon eine Milliarde Jahre her. Warum die Marsoberfläche dann wieder so kalt und tot wurde, dass es heute nur noch wenige Eisreste gibt, wissen wir nicht.

Soll die Temperatur direkt proportional zur mittleren kinetischen Energie der Atome sein, so nimmt man die **absolute Temperatur** in **Kelvin** (Symbol: K). Zu dieser gehört der absolute Temperaturnullpunkt, der dann erreicht ist, wenn sich nichts mehr bewegt. Gebräuchlicher ist die Celsius-Skala, bei der der Schmelzpunkt von Eis als Nullpunkt festgelegt ist. Der absolute Temperaturnullpunkt liegt dann bei $-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$.

$$\text{absolute Temperatur} \quad T = \text{Temperatur in } ^{\circ}\text{C} + 273,15 \text{ K} \quad T: \text{absolute Temperatur} \\ [\text{K}, \text{Kelvin}]$$

Wärme (Q)

Die mit der thermischen Wimmelbewegung von Atomen und Molekülen verbundene kinetische und potentielle Energie bezeichnet man als Wärme. Will man die Temperatur eines Stoffes erhöhen oder erniedrigen, so muss man Energie zu- bzw. abführen. Wie viel, das sagt die Wärmekapazität C oder die spezifische Wärmekapazität $c = C/\text{Masse}$, die eine Materialkonstante ist.

$$\text{Wärmekapazität} \quad C = \frac{Q}{\Delta T} \quad C: \text{Wärmekapazität [J/K]} \\ Q: \text{Wärmemenge [J, Joule]} \\ \Delta T: \text{Temperaturänderung durch Zuführen von } Q$$

$$\text{Spezifische Wärmekapazität} \quad c = \frac{C}{m} \quad C: \text{spez. Wärmekapazität } \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] \\ m: \text{Masse [kg]}$$

$$\text{Wärmekapazität bezogen auf die Masse} \\ \text{Wasser: } c = 4,2 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Gasgesetz

Das Gasgesetz gilt für ein **ideales Gas**, bei dem anziehende Kräfte zwischen den Atomen vernachlässigt werden können. Luft bei Raumtemperatur ist ein ideales Gas. Wenn man ein Gas soweit abkühlt, dass es schon fast verflüssigt, spielen die anziehenden Kräfte natürlich eine große Rolle und das Gas kann nicht mehr als ideal betrachtet werden.

$$\text{Gasgesetz} \quad p \cdot V = n \cdot R \cdot T \quad p: \text{Druck [Pa]} \\ V: \text{Volumen } [\text{m}^3] \\ n: \text{Anzahl der Mole [mol]} \\ \text{Gaskonstante:} \\ R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Phasenumwandlung

Bei einer Temperaturänderung kann es zu einer Änderung des Aggregatzustandes kommen, der Stoff kann zum Beispiel schmelzen. Dies nennt man eine Phasenumwandlung. Beim Schmelzen muss eine Umwandlungswärme aufgebracht werden, die bei der umgekehrten Phasenumwandlung (zum Beispiel Erstarren) wieder frei wird (☞ Abb. 5.15). Bei welchem Druck und welcher Temperatur sich ein Stoff in welchem Aggregatzustand befindet, zeigt das Zustandsdiagramm (☞ Abb. 5.25). Längs der Grenzlinien können zwei Aggregatzustände koexistieren. Praktisch wichtig ist oft die Dampfdruckkurve, die die Grenze zwischen gasförmig und flüssig markiert. Die Dampfdruckkurve des Wassers bestimmt die Sättigungsdampfdichte (thermodynamisches Gleichgewicht) in der Luft und damit die Luftfeuchtigkeit.

$$\text{relative Feuchte} \quad f_r = \frac{\rho}{\rho_s} \quad \rho: \text{Dichte des Wassers in der Luft } \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \\ \rho_s: \text{Sättigungsdichte}$$

Wärmetransport

Erwärmen oder Abkühlen geschieht über **Wärmeleitung**, **Konvektion** oder **Wärmestrahlung**. Bei Wärmeleitung und Konvektion ist der Wärmetransport zwischen zwei Orten proportional zur Temperaturdifferenz.

Wärmeleitung

$$I_Q = \frac{dQ}{dt} = A \cdot \lambda \cdot \frac{\Delta T}{l}$$

I : Wärmestrom [J/s]

A : Fläche, durch die der Wärmestrom geht

λ : Wärmeleitfähigkeit $\left[\frac{W}{m \cdot K} \right]$

ΔT : Temperaturdifferenz über die Länge l

Konvektion

$$I_Q = A \cdot h_{cv} \cdot \Delta T$$

h_{cv} : Wärmeübergangskoeffizient

A : Fläche, an der die Temperaturdifferenz ΔT auftritt

Strahlung

(schwarzer Strahler)

$$P = A \cdot \sigma \cdot T^4$$

P : Strahlungsleistung [W]

A : strahlende Fläche

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$

T : Temperatur der strahlenden Fläche [K]

Diffusion und Osmose

Sind die Komponenten eines Gases oder einer Flüssigkeit zunächst in verschiedenen Behältern und werden diese dann verbunden, so kommt es aufgrund der Wimmelbewegung zu einer Durchmischung aufgrund von **Diffusion**. Die Diffusionsgeschwindigkeit (genauer: Teilchenstromdichte) ist proportional zum Konzentrationsgefälle. Die Proportionalitätskonstante heißt **Diffusionskoeffizient**. Er steigt mit der Temperatur und ist für kleine Moleküle größer. Beim durchmischen kann noch eine **Lösungswärme** auftreten.

Befindet sich zwischen Flüssigkeiten oder Gasen unterschiedlicher Zusammensetzung eine semipermeable Membran, so baut sich ein **osmotischer Druck** auf.

Van't-Hoff-Gleichung: $\Delta p = \frac{n}{V} R \cdot T$

Druckdifferenz einer Lösung mit n Mol aktiver Teilchen gegenüber dem reinen Lösungsmittel

Wärmekraftmaschinen

In Automotoren oder Dampfturbinen wird Wärmeenergie in mechanische Arbeit umgewandelt.

Dabei leistet ein Arbeitsgas **Volumenarbeit**. Es gilt dabei natürlich der Energieerhaltungssatz, der hier **1. Hauptsatz der Wärmelehre** heißt.

Volumenarbeit $W = \int p(V) \cdot dV$

p : Druck [N/m^2]

V : Volumen [m^3]

Energieerhaltungssatz $Q = \Delta U + W$

Q : Wärmemenge [J]

U : innere Energie [J]

W : mechanische Arbeit [J]

Der Wirkungsgrad eines Otto-Motors wird durch sein Kompressionsverhältnis bestimmt.



Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{\text{geleistete Arbeit}}{\text{freigesetzte Wärme}} = 1 - \frac{1}{(V_b/V_a)^{\kappa-1}}$$

 κ : Adiabatenkoeffizient **V_a, V_b : Volumen des Zylinders bei ein bzw. ausgefahrenem Kolben****Entropie**

Es gibt eine Zustandsgröße **Entropie**, die bei **reversiblen** Prozessen konstant ist und bei **irreversiblen** Prozessen steigt. Sie ist ein Maß für die Ordnung im System. Da Unordnung wahrscheinlicher ist als Ordnung, steigt die Entropie der Welt kontinuierlich an. Dies ist der **2. Hauptsatzes der Thermodynamik**.

Verständnisfragen

1. Ein Gas in einem senkrecht stehenden Zylinder wird durch das Gewicht eines Kolbens zusammengedrückt. Wenn ein Gewicht auf den Kolben gelegt wird, wird das Volumen von 500 ml auf 400 ml reduziert. Wird ein weiteres gleiches Gewicht noch dazugelegt, reduziert sich das Volumen des Gases dann um weitere 100 ml?
2. Wenn sich die Moleküle in einem Gas anziehen ist der Druck höher, gleich oder niedriger als es die ideale Gasgleichung vorhersagt?
3. Was passiert mit einem heliumgefüllten Kinderballon, wenn das Kind ihn loslässt und er aufsteigt. Dehnt er sich aus oder schrumpft er. Steigt er immer weiter oder steigt er nur bis zu einer bestimmten Höhe?
4. Was hat eine höhere Dichte: trockene Luft oder Luft hoher Feuchtigkeit?
5. Sie sind ein zweiatomiges Molekül im zweidimensionalen Raum. Sie bestehen also aus zwei starren Scheiben, die durch eine Feder miteinander verbunden sind. Wie groß ist dann Ihre mittlere kinetische Energie bei einer Temperatur T?
6. Warum sind die Temperaturschwankungen übers Jahr am Meer geringer als im Landesinneren?
7. Zunächst befinden sich Wasser und trockene Luft in einem geschlossenen Behälter. Was passiert nun?
8. Kann man Wasser zum Kochen bringen, ohne es zu erwärmen?
9. Werden die Kartoffeln schneller gar, wenn man das Wasser stärker kochen lässt?
10. Alkohol verdampft schneller als Wasser. Was kann man daraus über die Eigenschaften der Moleküle schließen?
11. Warum ist ein heißer, schwüler Tag viel unangenehmer als ein heißer, trockener Tag?
12. Sie wollen eine bestimmte Menge Gas mit einer möglichst geringen Wärmemenge um zehn Grad erwärmen. Erreichen Sie das am besten bei konstantem Druck oder bei konstantem Volumen?
13. Zwei gleiche Behälter mit Wasser bei Raumtemperatur stehen auf einem Tisch. In einem ist doppelt so viel Wasser wie im anderen. Wir führen beiden die gleiche Wärmemenge zu und lassen sie dann wieder auf Raumtemperatur abkühlen. Wenn die Wärmeleitung zur Tischplatte der wesentliche Verlustmechanismus für die Wärme ist, welcher Behälter ist schneller wieder auf Raumtemperatur?
14. Wenn der Kaffee lange warm bleiben soll: tut man Milch und Zucker lieber gleich rein oder erst direkt, wenn man ihn trinken will?
15. Warum hält sein Fell den Bären warm?
16. Wasser ist ein schlechter Wärmeleiter. Warum lässt es sich trotzdem in einem Kochtopf schnell erwärmen?

17. Warum müssen Thermometer, mit denen man die Lufttemperatur messen will, im Schatten sein?
 18. Kann man einen Raum kühlen, indem man den Kühlschrank offen lässt?
-

Übungsaufgaben

- 5.1: (I) Die Höhe des Funkturms in Berlin wird offiziell mit 135 m angegeben. Um welches Stückchen ist er an einem heißen Sommertag (30°C) größer als bei strengem Frost (-25°C)? (Ausdehnungskoeffizient im Anhang.)
- 5.2: (I) Wenn ein Stahlband um die Erde gelegt würde, sodass es bei 20°C gerade passt, wie viel würde es über der Erde schweben (überall gleicher Abstand) wenn man es auf 30°C erwärmt?
- 5.3: (I) Unter Normalbedingungen wiegt ein Liter Luft 1,293 g. Wie groß ist die mittlere Molekülmasse?
- 5.4: (I) Nahrungsmittel stellen eine hochveredelte Form der Energie dar und sind entsprechend teuer. Um welchen Faktor ist die chemische Energie einer 100-g-Tafel Schokolade (Brennwert 23 kJ/g), die 70 Cent kostet, teurer als die Energie aus der Steckdose?
- 5.5: (II) Ein Gas befindet sich auf einer Temperatur von 0°C . Auf welchen Wert muss man die Temperatur erhöhen, um die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle zu verdoppeln?

Dampfdruck

- 5.6: (I) Wie groß ist der Luftdruck, wenn Wasser schon bei 90°C kocht?
- 5.7: (II) Es ist Winter und Sie sind in einem Raum bei 20°C und 52 % Luftfeuchtigkeit. Sie beobachten, dass das Fenster beschlägt. Welche Temperatur hat dann die Glasoberfläche höchstens? (Benutzen Sie die Wasser-Tabelle im Anhang)
- 5.8: (II) Wenn in einem geschlossenen Raum mit einem Volumen von 680 m^2 bei 20°C 80 % Luftfeuchte herrscht, wie viel Wasser kann dann noch aus einem Kochtopf bei Raumtemperatur verdampfen? (Benutzen Sie die Wasser-Tabelle im Anhang.)

Gasgesetz:

- 5.9: (II) Ein ideales Gas durchläuft eine Zustandsänderung, bei der $P \cdot \sqrt{V}$ konstant bleibt und das Volumen abnimmt. Was passiert mit der Temperatur?
- 5.10: (II) Aus einer 50 l Druckflasche mit Helium werden Kinderluftballons aufgeblasen. Ursprünglich waren 28 bar in der Flasche, nach vielen Ballons sind nur noch 5 bar Druck auf der Flasche. Wie viel Prozent der ursprünglichen Gasmenge sind noch in der Flasche? Etwa wie viel Ballons (Durchmesser 30 cm) wurden aufgeblasen?
- 5.11: (II) Ein Kühlschrank mit einem Volumen von 155 l hat eine Tür mit $0,32\text{ m}^2$ Innenfläche, die offen steht. Der Kühlschrank ist abgeschaltet und deshalb ist es in ihm 20°C warm bei 1 bar. Nun wird der Kühlschrank geschlossen und angeschaltet. Die Innentemperatur sinkt auf 7°C . Angenommen, der Schrank ist luftdicht, welche Kraft braucht man, um die Tür wieder aufzureißen? Tatsächlich haben die Hersteller an das Problem gedacht und irgendwo ein kleines Loch zum Druckausgleich eingebaut. Wie viel Luft strömt durch dieses in den Kühlschrank?
- 5.12: (I) Das beste im Labor erreichbare Vakuum ist etwa 10^{-10} Pa . Wie viel Moleküle befinden sich dann etwa in einem Kubikzentimeter bei 20°C ?
- 5.13: (I) Ein ideales Gas wird isotherm expandiert und leistet dabei eine Arbeit von 4000 J. Wie ändert sich die innere Energie des Gases und wie viel Wärme nimmt es auf?

Wärmekapazität

- 5.14: (II) In Kap. 5.2.1 wird ein Verfahren zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität des Wassers beschrieben. In einem Experiment wurden die folgenden Werte ermittelt: $m=200\text{ g}$, $U_0=10\text{ Volt}$, $I_0=4,7\text{ Ampere}$, $\Delta t=50\text{ s}$, $T_1=18,3\text{ }^\circ\text{C}$, $T_2=21,1\text{ }^\circ\text{C}$. Welcher Wert für $c(\text{H}_2\text{O})$ folgt daraus? Anmerkung: Ein Voltampere entspricht einem Watt.
- 5.15: (I) Ein Tauchsieder habe eine elektrische Leistungsaufnahme von 350 W. Wie lange braucht er um eine Tasse Suppe (250 ml) von 20 °C auf 50 °C zu heizen?
- 5.16: (II) Zwei Flüssigkeiten mit den Massen m_1 , m_2 , den spezifischen Wärmekapazitäten c_1 , c_2 werden zusammengemischt. Vorher hatten sie die Temperaturen T_1 und T_2 . Welche Mischtemperatur T stellt sich ein, vorausgesetzt, es entsteht keine Lösungswärme?
- 5.17: (II) In Kap. 5.2.1 wird ein Verfahren zur Bestimmung der spez. Wärmekapazität des Kupfers angegeben. Nach welcher Formel lässt sich $c(\text{Cu})$ ausrechnen?
- 5.18: (II) Ein gepflegtes Bier soll mit 8 °C serviert werden. Ehe der Organismus die in ihm gespeicherte chemische Energie von 1,88 kJ/g verwerten kann, muss er es auf Körpertemperatur aufwärmen. Welcher Bruchteil des Brennwertes wird dafür gebraucht? Bier besteht im Wesentlichen aus Wasser.
- 5.19: (II) Ein ruhender Mensch verheizt etwa 80 J pro Sekunde.
a Wie schnell würde die Körpertemperatur eines Menschen infolge dieses Grundumsatzes so ungefähr steigen, wenn man jeden Wärmeaustausch mit der Umgebung völlig unterbinden könnte?
b Wie viel Wasser pro Sekunde müsste ein Mensch so ungefähr ausschwitzen, wenn er diesen Grundumsatz nur durch Transpiration abgeben müsste? Die Masse des Menschen sei 70 kg .
- 5.20: (III) Für die Reibungswärme des Blutstromes bringt das Herz des Menschen eine Pumpleistung P_0 von ungefähr 1,6 W auf (s. Frage 3.13). Angenommen, es arbeite mit einem Nutzeffekt von 25 %, welche Leistung P muss es dann von seiner Energiequelle anfordern? Weiter angenommen, es beziehe diese Leistung vollständig aus der Verbrennung von Glukose (Heizwert 17 kJ/g), welcher Massenstrom \dot{m} von Glukose muss dann ständig angeliefert werden? Weiterhin angenommen, Glukose sei im Blut mit einer Massendichte $c=100\text{ mg/dl}$ gelöst, mit welcher Blutstromstärke $/$ muss sich das Herz mindestens selbst versorgen? Im letzten Schritt wird der Glukosestrom \dot{m} per Diffusion durch eine Aderwand transportiert. Setzt man den Diffusionsweg Δx kurzerhand mit 0,1 mm an und die Glukosekonzentration im Gewebe des Herzmuskels der Einfachheit gleich null, welcher Konzentrationsgradient c' steht der Diffusion dann zur Verfügung? Messungen legen nahe, den Diffusionskoeffizienten D der Glukose im Muskelgewebe auf den runden Wert $1 \cdot 10^{-6}\text{ cm}^2/\text{s}$ zu schätzen. Welche Diffusionsfläche A ist dann für die Versorgung des Herzens mindestens notwendig? Zweifellos kann man mit derart groben Annahmen nur Größenordnungen herausfinden; es lohnt nicht, zu den Zehnerpotenzen auch noch Faktoren mit dem Taschenrechner zu bestimmen. Trotz aller Ungenauigkeit sollte man aber den Nutzen solcher Überschlagsrechnungen nicht unterschätzen.

Wärmeaustausch

- 5.21: (II) Die Intensität der Sonnenstrahlung, die die Erde erreicht, beträgt $1,36\text{ kW/m}^2$ (extra-terrestrische Solarkonstante). Ein Teil wird von der Erde, insbesondere den Wolken, direkt zurückreflektiert. Etwa 1 kW/m^2 wird absorbiert und erreicht den Boden. Da sich die Erde aber praktisch nicht aufheizt, muss diese ganze gewaltige Energiemenge von ihr auch wieder abgestrahlt werden. Angenommen, die Erde ist ein schwarzer Strahler, was ergibt sich aus dieser Überlegung für eine mittlere Temperatur der strahlenden Erdoberfläche? Achtung: die Sonne strahlt immer nur eine Seite der Erde an, abgestrahlt wird von der gesamten Erdoberfläche.

Wärmekraftmaschine

- 5.22: Ein halbes Mol Heliumgas wird adiabatisch von einem Anfangsdruck $p_0 = 5 \cdot 10^5$ Pa und einer Anfangstemperatur von $T_0 = 500$ K auf $p_1 = 10^5$ Pa expandiert.
- Welchen Wert hat die Endtemperatur T_1 ?
 - Welchen Wert hat das Volumen V_1 ?
 - Welche Arbeit wird vom Gas verrichtet?
- 5.23: Zwei Mol eines einatomigen Gases sind am Anfang im Zustand $p_0 = 200$ kPa und $V_0 = 2$ l. Das Gas durchläuft folgenden Kreisprozess: Es wird zunächst isotherm auf ein Volumen von $V_1 = 4$ l expandiert. Es wird dann bei konstantem Volumen erhitzt, bis es wieder einen Druck von $p_2 = 200$ kPa hat. Das Gas wird dann bei konstantem Druck so weit abgekühlt, bis es wieder im Anfangszustand ist.
- Berechne die zugeführte Wärme und geleistete Arbeit für jeden Schritt des Kreisprozesses.
 - Berechne die Temperaturen T_0, T_1, T_2 .

Entropie

- 5.24: (II) Zwei 1100 Kg schwere Autos kollidieren frontal mit jeweils 100 km/h Geschwindigkeit. Um etwa wie viel steigt dadurch die Entropie des Universums? Die Umgebungstemperatur sei 20 °C.

6.1	Die wichtigsten Messgrößen	205
6.1.1	Strom, Spannung, Ladung	205
6.1.2	Leistung und Energie	208
6.2	Die wichtigsten Zusammenhänge	209
6.2.1	Elektrischer Widerstand	209
6.2.2	Das Ohm'sche Gesetz	210
6.2.3	Joule'sche Wärme	211
6.2.4	Kapazität	212
6.2.5	Energie des geladenen Kondensators	213
6.3	Wechselspannung	214
6.3.1	Effektivwerte	214
6.3.2	Kapazitiver Widerstand	216
6.4	Elektrische Netzwerke	217
6.4.1	Die Kirchhoff-Gesetze	218
6.4.2	Spezifischer Widerstand	220
6.4.3	Spannungsteiler	221
6.4.4	Innenwiderstände	222
6.4.5	Hoch- und Tiefpass	224
6.4.6	Kondensatorentladung und e-Funktion	224
6.5	Elektrisches Feld	227
6.5.1	Der Feldbegriff	227
6.5.2	Elektrisches Potential	229
6.5.3	Das Potentialfeld	230
6.5.4	Kräfte zwischen Ladungen	233
6.5.5	Das Feld im Kondensator	236
6.5.6	Energie des elektrischen Feldes	237
6.6	Materie im elektrischen Feld	238
6.6.1	Influenz	238
6.6.2	Elektrische Abschirmung	239
6.6.3	Die Elementarladung	240
6.6.4	Der elektrische Strom	241
6.6.5	Die Dielektrizitätskonstante (Permittivität)	242
6.6.6	Das freie Elektron	244
6.6.7	Das Elektronvolt	247
6.6.8	Ruhmasse und relativistische Masse	248
6.6.9	Gasentladung	248

6.7	Elektrochemie	250
6.7.1	Dissoziation	250
6.7.2	Elektrolyte	252
6.8	Grenzflächen	254
6.8.1	Galvani-Spannung	254
6.8.2	Thermospannung	256
6.8.3	Halbleiter	257
6.9	Elektrische Unfälle	259
6.10	Magnetostatik	261
6.10.1	Magnetische Felder	261
6.10.2	Kräfte im Magnetfeld	264
6.10.3	Erzeugung von Magnetfeldern	267
6.10.4	Materie im Magnetfeld	268
6.10.5	Die Feldgrößen \vec{H} und \vec{D}	270
6.11	Magnetodynamik	270
6.11.1	Induktion	271
6.11.2	Transformatoren	273
6.11.3	Selbstinduktion	274
6.11.4	Induktiver Widerstand	277
6.12	Elektrische Schwingungen	278
6.12.1	Der Schwingkreis	278
6.12.2	Die Schwingungsdifferentialgleichung	281
6.12.3	Überlagerung von Schwingungen	282
6.12.4	Geschlossene elektrische Feldlinien	283
6.12.5	Der schwingende elektrische Dipol	284

Elektrische Energie ist heutzutage die handlichste aller Energieformen. Sie lässt sich vielseitig nutzen und nahezu überall bereithalten, sofern ein dichtes Netz von Kraftwerken, Überlandleitungen, Umspannstationen, Kabeln und Steckdosen erst einmal installiert worden ist. Allerdings kann der Mensch auch diesen technischen Komfort nur unter Gefahr für Leib und Leben nutzen: Die Verhütung elektrischer Unfälle verlangt permanente Aufmerksamkeit. Die Natur hat organisches Leben untrennbar mit elektrischen Erscheinungen verknüpft. Das ermöglicht Unfälle, aber auch segensreiche Geräte für Diagnose (Elektrokardiograph) und Therapie (Herzschrittmacher). Zwischen elektrischen und magnetischen Feldern besteht eine so enge Verbindung, dass der Magnetismus mit unter der Überschrift „Elektrizitätslehre“ besprochen werden kann.

6.1 Die wichtigsten Messgrößen

Einleitung

Wo immer elektrische Erscheinungen quantitativ behandelt werden, spielen die drei Messgrößen elektrische Spannung, elektrischer Strom und elektrische Ladung wichtige Rollen.

6.1.1 Strom, Spannung, Ladung

Mit elektrischen Geräten kann man Daten verarbeiten, Musik hören, Lasten heben und die Nacht zum Tage machen. Einige von ihnen, insbesondere Computer, benötigen eine enorm komplizierte Struktur, um ihre Aufgabe zu erfüllen. So reizvoll es sein kann, sich mit dieser auseinander zu setzen, um Grund-



Abb. 6.1. Batterie und Glühbirne als geschlossener Stromkreis

kenntnis in einem neuen Gebiet zu erlangen, beginnt man zweckmäßigerweise nicht mit dem Komplizierten. Für erste Experimente eignet sich eine Taschenlampenbatterie darum besser. Man braucht die Elektrochemiker ja nicht zu fragen, wie sie funktioniert.

Schraubt man ein Taschenlampenbirnchen in eine passende Fassung und verbindet man deren Klemmen durch Kupferdrähte mit den Polen einer Taschenlampenbatterie, so leuchtet das Lämpchen auf (☞ Abb. 6.1). Elektrotechniker beschreiben diesen einfachen Stromkreis mit einer *Schaltskizze* nach Art der ☞ Abb. 6.2. Das liegende Kreuz im Kreis steht für eine Glühlampe, die beiden ungleichen Querstriche entsprechen der Batterie, die Drähte werden durch gerade Linien repräsentiert. Weil es übersichtlicher ist, setzt man sie aus senkrechten und waagerechten Geraden zusammen, auch wenn die Drähte krumm und schief im Gelände liegen sollten. In der Skizze ist noch zusätzlich ein Schalter eingezeichnet. Öffnet man ihn, so erlischt die Glühlampe. In der fotografierten Schaltung würde man zu diesem Zweck einen der beiden Drähte an einem seiner beiden Enden abklemmen. Ein *elektrischer Strom* fließt nur in einem *geschlossenen Stromkreis*, und er fließt nur, wenn eine *elektrische Spannung* im Kreis ihn dazu anhält.

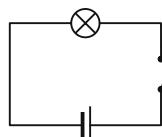


Abb. 6.2. Schaltskizze zur Schaltung von Abb. 6.1

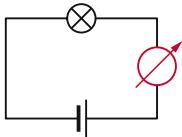


Abb. 6.3. Ein Strommesser wird *in Reihe* mit dem „Verbraucher“ geschaltet

Diese Formulierungen erwecken den Eindruck, als wisse man, dass in einem Stromkreis etwas „Elektrisches“ in ähnlicher Weise ströme wie beispielsweise Wasser in einer Wasserleitung oder Blut in den Adern eines Menschen. Ganz falsch ist dieser Eindruck ja auch nicht. Aber es hat vielen Forschern und vielen Technikern ungezählte Arbeitsstunden gekostet, um im Einzelnen herauszufinden, was da im Einzelfall strömt und es wird etlicher Seiten dieses Buches bedürfen, um wenigstens die wichtigsten Erkenntnisse vollständig darzustellen. An dieser Stelle kann soviel gesagt werden:

Ein elektrischer Leitungsstrom transportiert **elektrische Ladung**, und zwar dadurch, dass elektrisch geladene, submikroskopische Teilchen im Leiter entlang strömen, sog. **Ladungsträger**. Speziell im Metall sind das **Elektronen**, also die kleinsten und leichtesten unter den sog. **Elementarteilchen**, aus denen sich alle Materie der Welt zusammensetzt. Im Metall sind Elektronen als bewegliche Ladungsträger allemal vorhanden, ob nun ein Strom fließt oder nicht. Die Spannung der Batterie erzeugt sie nicht, sie setzt sie lediglich in Bewegung. Dabei treten aus dem einen Pol der Batterie ebenso viele Elektronen heraus und in das eine Ende des einen Drahtes hinein wie aus dem anderen Ende des anderen Drahtes heraus in den anderen Pol der Batterie hinein.

Wie misst man einen elektrischen Strom? Im Einzelnen kann dies hier noch nicht dargelegt werden. Als Experimentator darf man sich aber darauf verlassen, dass die Hersteller im Handel erhältlicher Strommesser schon wissen, wie man brauchbare Instrumente herstellt und eicht. Im Internationalen Einheitenystem ist der **elektrische Strom** Basisgröße, bekommt die Basiseinheit **Ampere = A** (zu

Ehren von André Marie Ampère, 1775–1836) und üblicherweise das Buchstabensymbol **I**. Zuweilen wird der Strom **I** auch **Stromstärke** genannt. Bei Spannungsmessern verlässt man sich ebenfalls auf den Fachhandel. Die **elektrische Spannung** bekommt die SI-Einheit **Volt = V** (zu Ehren von Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta, 1745–1827) und üblicherweise den Kennbuchstaben **U**.

Wer sich noch nicht auskennt, den mag überraschen, dass er in Laboratorien häufig sog. **Vielfachinstrumente** vorfindet, die nicht nur über mehrere Messbereiche verfügen, sondern sowohl Ströme als auch Spannungen zu messen vermögen. Wieso sie beides können, wird erst später klar. Folgendes überlegt man sich aber leicht: Ein **Strommesser** misst nur denjenigen Strom, der durch das Messwerk zwischen seinen beiden Anschlussklemmen hindurchläuft, das Instrument muss *im Stromkreis liegen*, mit Batterie und Glühbirne *in Reihe* (oder auch *in Serie*, ☺ Abb. 6.3). Dabei ist es gleichgültig, auf welcher Seite es sich im Stromkreis befindet, rechts oder links. Ein **Spannungsmesser** hingegen soll die Spannung der Batterie unbeeindrückt vom restlichen Stromkreis messen. Er muss **parallel** zu der Batterie und dem Lämpchen geschaltet werden (☺ Abb. 6.4). Die Batterie hat eine Spannung zu liefern, damit der Strom fließen kann. Sie muss eine **Spannungsquelle** sein, aber ebenso auch eine **Stromquelle**.

Wenn ein Strom fließt, wird elektrische Ladung zwar transportiert, alles in allem aber nur im Stromkreis herumgeschoben. In Gedanken kann man sich an eine bestimmte Stelle des Kreises setzen und die dort in

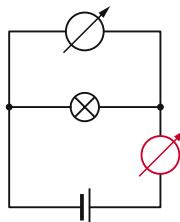


Abb. 6.4. Ein Spannungsmesser wird *parallel* zu Batterie und Glühbirne („Verbraucher“) geschaltet

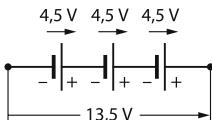


Abb. 6.5. Drei Taschenlampenbatterien *in Reihe* geschaltet: Ihre Einzelspannungen U_0 addieren sich zu $U=3U_0$

der Zeitspanne Δt vorbeigelaufene Ladung ΔQ bestimmen. Sie wächst mit der Stromstärke I . Bei zeitlich konstantem Strom I_0 genügt einfache Multiplikation:

$$\Delta Q = I_0 \cdot \Delta t.$$

Ändert sich I mit der Zeit, muss integriert werden:

$$\text{elektrische Ladung } \Delta Q = \int_{t_0}^{t_1} I(t) \cdot dt.$$

Daraus folgt als SI-Einheit der Ladung die Amperesekunde A · s. Sie wird auch *Coulomb* genannt (zu Ehren von Charles Augustin de Coulomb, 1736–1806) und C geschrieben.

wichtig

Elektrischer Strom I , Basisgröße des Internationalen Einheitensystems,

Einheit Ampère = A.

Elektrische Spannung U , abgeleitete Größe,

Einheit Volt = V.

$$\text{Elektrische Ladung } \Delta Q = \int_{t_0}^{t_1} I(t) \cdot dt,$$

Einheit Coulomb = C.

In welcher Richtung fließt denn nun der Strom im Stromkreis herum, in welcher Richtung die Elektronen, mit dem Uhrzeiger oder gegen ihn? Schaut man eine Taschenlampenbatterie genau an, so findet man in der Nähe des einen Pols ein stehendes Kreuz, ein Plus-Zeichen; es markiert den sog. *Pluspol*. Dann versteht sich auch ohne Markierung, dass der andere Pol der Minuspol ist. Das ist Konvention, man hätte auch rote und grüne Punkte malen können. Man sagt nun

ferner, im äußeren Teil des Stromkreises fließe der Strom vom Pluspol zum Minuspol, von Plus nach Minus. Auch das ist Konvention, und darum spricht man von der *konventionellen Stromrichtung*. Später hat sich nämlich herausgestellt, dass die Elektronen negative elektrische Ladung tragen und im Draht der konventionellen Stromrichtung entgegenströmen. Generell sieht man einen Stromkreis als „geschlossen“ an und muss darum sagen, nur außen fließe der Strom von Plus nach Minus, *innerhalb* der Spannungsquelle aber von Minus nach Plus.

Dass es nützlich ist, die Klemmen der Batterie mit den mathematischen Vorzeichen + und - zu bezeichnen, zeigt sich, wenn man mehrere Batterien elektrisch hintereinander schaltet, wenn man sie also in Reihe schaltet: Bei richtiger Polung, immer Plus an Minus, addieren sie ihre Spannungen (Abb. 6.5); liegt aber eine Batterie falsch herum (Abb. 6.6), so subtrahiert sie ihre Spannung von der Summe der anderen. Mathematisch ist eine Subtraktion aber nur eine Addition mit negativen Vorzeichen. Darum darf man die Gesamtspannung U einer Reihe hintereinander geschalteter Spannungsquellen als Summe der Einzelspannungen U_1, U_2 usw. schreiben:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = \sum_{i=1}^n U_i$$

Sogar das Herz, das im Brustkorb des Menschen schlägt, produziert eine Spannung. Mit einem Kardiographen wird diese als EKG registriert. Stöpselt man die Eingänge des Kardiographen an eine Steckdose, ist er sofort kaputt.

Im Bereich *Mikrovolt* (μ V) liegen die Signale, die Fernsehantennen aus dem Äther

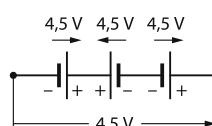


Abb. 6.6. Eine der drei Batterien liegt „verkehrt herum“; sie subtrahiert ihre Spannung von der Summenspannung der beiden anderen: $U=2U_0-U_0=U_0$

fischen; das Herz erzeugen *Millivolt* (mV) bis Zehntelvolt. Einige Volt sind für den Menschen ungefährlich. Die 220 V der Steckdose sind aber keineswegs mehr harmlos. Hochspannungsleitungen im Bereich *Kilovolt* (kV) bekommen bereits Warnschilder. Überlandleitungen bevorzugen 340 kV = 0,34 MV (*Megavolt*); Berührung ist tödlich. Blitz können es auf viele *Gigavolt* bringen.

Wenn man die Spannungsquelle umpolst, wechselt auch der Strom sein Vorzeichen. Für die Leistung hat das an dieser Stelle keine Bedeutung: Als Produkt von U und I bleibt sie positiv. Minus mal Minus gibt Plus, sagt die Mathematik.

wichtig

$$\text{Elektrische Leistung } P = U \cdot I, \\ \text{Einheit Watt} = W = V \cdot A.$$

6.1.2 Leistung und Energie

„Elektrizität“ ist vielseitig verwendbar. Man kann mit ihr eine Armbanduhr betreiben, seinen Schreibtisch beleuchten, Brot rösten, ein Zimmer heizen oder auch eine Schnellzuglokomotive laufen lassen. Diese fünf Beispiele sind hier nach „steigendem Verbrauch“ aufgelistet, zuweilen „Stromverbrauch“ genannt. Was ist damit gemeint? Ausdrücklich sei betont: Der elektrische Strom fließt in einem geschlossenen Stromkreis. Er wird dabei nicht „verbraucht“. Häufig dient das Wort „Strom“ als Ersatz für die sprachlich unbequemere „elektrische Energie“. Auch Energie lässt sich nicht „verbrauchen“ in dem Sinn, dass sie verschwände; sie lässt sich aber umwandeln von einer Form in eine andere. Dabei ist elektrische Energie höherwertig, weil besser verwendbar als z.B. die Wärme der Zimmerluft, die man zwar aus elektrischer Energie gewinnen, des 2. Hauptsatzes wegen aber nicht vollständig in sie zurückverwandeln kann. Letzten Endes ist eine derartige „Entwertung“ elektrischer Energie gemeint, wenn man von Energie- oder gar Strom-„verbrauch“ redet.

Eine anfahrende Lokomotive verlangt mehr Energie in kürzerer Zeit als eine leuchtende Glühbirne: Die oben aufgelisteten fünf Möglichkeiten sind nach steigender Leistung geordnet. Elektrische Leistung P wird immer dann umgesetzt, wenn bei einer Spannung U ein Strom I fließt; P ist zu beiden proportional:

elektrische Leistung

$$P = I \cdot U \text{ (Einheit Watt} = W = V \cdot A\text{)}.$$

Die Typenschilder elektrischer Geräte können ein gewisses Gefühl für physikalische Leistung vermitteln. In einer Schreibtischlampe sind 100 W genug bis reichlich. Der Mensch vermag sie mit seiner Beinmuskulatur für eine Weile zu liefern. Er versagt aber beim Kilowatt (kW) eines kleinen Heizlüfters. Kraftwerke werden heutzutage für Leistungen über 1000 Megawatt = Gigawatt = 10^9 W ausgelegt. Sinnesorgane wie Auge und Ohr sprechen, wenn sie gesund und ausgeruht sind, bereits auf Signalleistungen von Picowatt = $pW = 10^{-12}$ W an.

Über Leitungsnetz und Steckdose bieten Kraftwerke elektrische Energie an; sie halten dazu elektrische Spannung bereit. Allein dieses Angebot lassen sie sich bezahlen, über die sog. Grundgebühr. Es kostet sie ja laufend Geld, das Leitungsnetz zu unterhalten. Wie weit dann der Einzelne von diesem Angebot wirklich Gebrauch macht, hängt davon ab, was er an elektrischen Geräten einschaltet, und wie lange er dies tut. Über den Arbeitspreis muss er dem Elektrizitätswerk die von ihm (in der Zeitspanne zwischen t_0 und t_1) bezogene *elektrische Energie* ΔW_{el} bezahlen, nach den Überlegungen des Kap. 2.2.3 also das Zeitintegral der elektrischen Leistung $P(t)$.

wichtig

Elektrische Energie

$$\Delta W_{el} = \int_{t_0}^{t_1} P(t) \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} U(t) \cdot I(t) \cdot dt.$$

Die Einheiten Volt und Ampere wurden so definiert, dass die elektrische Energieeinheit **Wattsekunde** mit dem **Joule** übereinstimmt.

wichtig

Wattsekunde = Joule = Newtonmeter,
 $Ws = J = Nm$.

Dinge anstellen darf. Spannung wäre demnach der Quotient aus potentieller elektrischer Energie und elektrischer Ladung. Joule = Voltamperesekunde geteilt durch Coulomb ergibt ja auch tatsächlich gerade Volt. Dieser Zusammenhang wird später die Grundlage für die genaue Definition der Größe Spannung sein.

Diese Beziehung muss man sich merken. Auf jeden Fall braucht man sie, wenn man in irgendeiner Formel zwischen elektrischen und mechanischen Größen und ihren Einheiten hin- und herrechnen muss. Das kommt gar nicht so selten vor.

Für praktische Zwecke ist die Wattsekunde, ist das Joule unangenehm klein. Elektrizitätswerke rechnen in **Kilowattstunden** ($1 \text{ kWh} = 3,60 \text{ MJ}$) und verlangen derzeit dafür einen Arbeitspreis von ungefähr 8 Cent.

Wird elektrische Energie mit praktisch konstanter Spannung U_0 angeboten wie von der Steckdose, so darf man U_0 vor das Integral ziehen:

$$\Delta W_{el} = U_0 \cdot \int_{t_0}^{t_1} I(t) \cdot dt$$

Wie im vorigen Kapitel dargelegt, entspricht das Integral der Ladungsmenge ΔQ , die in der Zeitspanne $\Delta t = t_1 - t_0$ im Stromkreis und damit auch im „Verbraucher“ transportiert wurde. Dort hat sie die elektrische Energie ΔW_{el} in irgendeine andere Energieform umgesetzt. Hier deutet sich eine wichtige Analogie zu der in Kap. 2.4.3. besprochenen potentiellen Energie an. Wird eine Masse im Schwerefeld der Erde abgesenkt, so vermindert sich ihre potentielle Energie ΔW_{pot} , die dann für andere Zwecke verwendet werden kann: bei einem Wasserkraftwerk beispielsweise zur Erzeugung elektrischer Energie. Dieses Konzept der potentiellen Energie lässt sich auf die Elektrizitätslehre übertragen, indem man sagt: Die transportierte Ladung ΔQ durchläuft auf ihrem Weg durch den Verbraucher die Spannung U_0 und verliert dabei die potentielle Energie ΔW_{el} , mit der der Verbraucher irgendwelche nützliche

Rechenbeispiel 6.1: Wie viel ist ein Blitz wert?

Ein anständiger Blitz hat eine Spannung von vielleicht 1 GV, führt einen Strom der Größenordnung 10^5 A und dauert ungefähr 100 μs an. Welche Energie setzt er ungefähr um und was wäre sie im Kleinhandel wert?

Lösung: Wir nehmen mal an, der Strom wäre über die ganze Zeit konstant. Das ist dann eine Energie: $W = U \cdot I \cdot \Delta t = 10^9 \text{ V} \cdot 10^5 \text{ A} \cdot 10^{-4} \text{ s} = 10^{10} \text{ Ws} = 2800 \text{ kWh}$. Das entspricht etwa 220 Euro, wenn man die Energie denn nutzen könnte.

6.2

Die wichtigsten Zusammenhänge

Einleitung

Im konkreten Einzelfall sind Spannung und Strom nicht unabhängig voneinander; ihr Quotient bekommt den Namen Widerstand. Bei technischen Kondensatoren sind Ladung und Spannung einander proportional; deren Quotient bekommt den Namen Kapazität.

6.2.1

Elektrischer Widerstand

Welche Leistung ein Kunde seinem Elektrizitätswerk abnimmt, hängt allemal von der Spannung an der Steckdose ab: ohne Spannung weder Strom noch Leistung. Ist die Spannung aber vorhanden, dann entscheidet der Kunde selbst, insofern nämlich, als das Gerät, das er anschließt, einen bestimm-

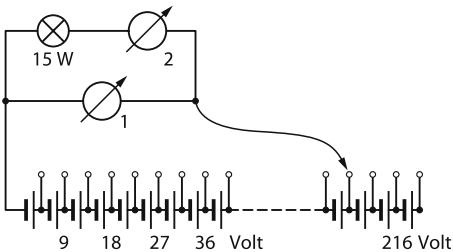


Abb. 6.7. Schaltung zur Messung der Strom-Spannungs-Kennlinie einer Glühbirne (welches der beiden hier mit 1 und 2 bezeichneten Instrumente ist der Spannungsmesser?)

ten **Leitwert** besitzt, der einen Stromfluss erlaubt, oder, umgekehrt formuliert, dem Stromfluss einen bestimmten **Widerstand** entgegengesetzt. Die beiden Worte dienen als Namen physikalischer Größen:

elektrischer Widerstand $R = U/I$ mit der Einheit Ohm = $\Omega = V/A$,

elektrischer Leitwert $G = I/U$ mit der Einheit Siemens = $1/\Omega$.

wichtig

Elektrischer Widerstand $R = U/I$, mit der Einheit Ohm = $\Omega = V/A$, elektrischer Leitwert $G = I/U = 1/R$, mit der Einheit Siemens = $1/\Omega$.

Es ist nicht üblich, aber durchaus möglich, eine Nachttischlampe (230 V, 15 W) mit Taschenlampenbatterien zu betreiben: 51 von ihnen, in Reihe geschaltet, liefern 229,5 V. Das halbe Volt Unterspannung stört nicht. Für 15 W Leistung benötigt die Glühbirne, wie man leicht nachrechnet, 65 mA Strom. Das entspricht einem Widerstand von 3,5 k Ω . Nimmt man jetzt eine Taschenlampenbatterie nach der anderen heraus (Abb. 6.7), so gehen mit der Spannung auch Strom und Leistung zurück. Abbildung 6.8 zeigt die **Strom-Spannungs-Kennlinie** der Glühbirne. Mit steigender Spannung wird die Kurve immer flacher, I steigt weniger als proportional zu U : Der Leitwert nimmt ab, der Widerstand zu, weil der Draht heißer wird.

6.2.2 Das Ohm'sche Gesetz

Auch wenn man es in einigen Büchern anders liest: Die Gleichung $R = U/I$ ist die Definitionsgleichung des elektrischen Widerstandes und nicht das **Ohm'sche Gesetz**. Das verlangt nämlich die schnurgerade Strom-Spannungs-Kennlinie der Abb. 6.9, also eine Proportionalität zwischen I und U , einen von U unabhängigen Widerstand R . Viele, vor allem technische Widerstände, wie sie in der Elektronik verwendet werden, erfüllen diese Bedingung; man bezeichnet sie deshalb als *ohmsche Widerstände*. Hier muss auf eine Besonderheit der deutschen Sprache aufmerksam gemacht werden: Sie verwendet die Vokabel „Widerstand“ sowohl für das Objekt, das man anfassen und in eine Schaltung einlöten kann, als auch für dessen physikalische Kenngröße R . Das erlaubt die Behauptung, ein Widerstand habe einen Widerstand. Die Angelsachsen können zwischen dem Gegenstand „resistor“ und der Größe „resistance“ sprachlich unterscheiden.

wichtig

Das Ohm'sche Gesetz verlangt eine Proportionalität zwischen Strom und Spannung, einen spannungsunabhängigen Widerstand.

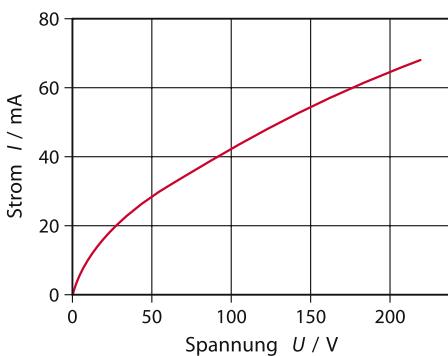


Abb. 6.8. Strom-Spannungs-Kennlinie einer Glühbirne (220–230 V, 15 W)

Ohmsche Widerstände kommen in Technik und Laboratorium so häufig vor, dass manche Schulbücher so tun, als gäbe es nichts anderes. Metalldrähte etwa, ob nun gerade gespannt oder auf einen Keramikzylinder aufgewickelt, sind ohmsch, allerdings dabei abhängig von der Temperatur. Auch die Glühbirne hätte eine ohmsche Kennlinie, wenn sich der Glühfaden nicht erhitzte. In Schaltskizzen bekommt der Widerstand ein flaches Rechteck als Symbol (es erscheint zum ersten Mal in Abb. 6.17); wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, ist damit ein ohmscher Widerstand gemeint.

Auch zwischen den Klemmen eines Vielfachinstruments liegt ein – meist ohmscher – (Innen-)Widerstand. Eben deshalb kann es Ströme wie Spannungen messen, denn zu jedem Strom gehört eine bestimmte Spannung und umgekehrt. Durch eine geeignete Anpassung der internen Schaltung im Instrument muss man nur für den richtigen Innenwiderstand sorgen (s. Kap. 6.4.4).

6.2.3 Joule'sche Wärme

Elektrische Erscheinungen sind schnell. Wenn man das Licht im Wohnzimmer mit dem Schalter neben der Tür anknipst, leuchten die Glühbirnen sofort auf. Das heißt aber nicht, dass da beim Schalter Elektronen in den Startlöchern gestanden hätten und wie der Blitz zu der Birne gerannt wären. Wozu auch? Marschbereite Elektronen finden sich überall im Metall, auch in den Glühdrähten. Schnell war nur die Übermittlung des Marschbefehls; er läuft praktisch mit Lichtgeschwindigkeit den Draht entlang, vom Schalter zur Birne.

Elektronen im Draht müssen sich mühsam zwischen dessen atomaren Bausteinen, den Ionen des jeweiligen Metalls, hindurchquälen. Da kommt es ständig zu Stößen, die einerseits den Bewegungsdrang der Elektronen dämpfen: sie kommen nur einige Zehntel Millimeter pro Sekunde voran. Andererseits fachen die Stöße die un-

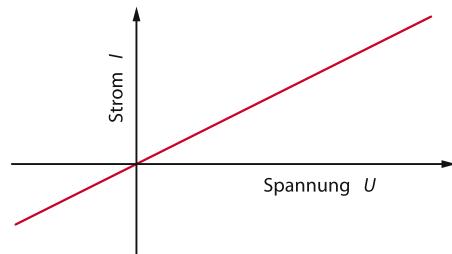


Abb. 6.9. Strom-Spannungs-Kennlinie eines Ohm-Widerstandes; sie ist immer eine Gerade durch den Nullpunkt

geordnete thermische Bewegung der um ihre Gitterplätze schwingenden Ionen an: Elektrische Energie wird laufend in thermische Energie, in Wärme, umgesetzt. Man bezeichnet sie als **Joule'sche Wärme** oder auch kürzer als **Stromwärme**. Von manchen „Verbrauchern“ wie Glühbirne, Heizkissen, Toaströster wird nichts anderes erwartet. Sie sollen die ganze, der Steckdose entnommene elektrische Leistung $P = U \cdot I$, in Wärme umwandeln. Man darf sie auch auf den Widerstand R beziehen; nach dessen Definition $R = U/I$ gilt

$$P = I^2 \cdot R = U^2/R.$$

Beides ist grundsätzlich nicht auf ohmsche Widerstände beschränkt.

wichtig
Joule'sche Wärme: durch elektrischen Strom entwickelte Wärme, Leistung $P = I^2 \cdot R$.

Unvermeidlich entwickeln Kabel und Zuleitungen Stromwärme. Für die Energiewirtschaft bedeutet das Verlustwärme, die aus ökonomischen Gründen so gut wie möglich vermieden werden muss. Eben deswegen stehen Überlandleitungen unter lebensgefährlich hohen Spannungen. Transportiert werden muss eine bestimmte Leistung P , weil sie von den „Stromabnehmern“ einer Stadt einfach verlangt wird. Je höher die Spannung U ist, mit der transportiert wird, umso kleiner kann der benötigte Strom

$I = P/U$ gehalten werden, umso kleiner auch die Verlustleistung $P_v = I^2 \cdot R_L$. Andersherum: einen umso größeren Leitungswiderstand R_L kann sich die Elektrizitätsgesellschaft noch leisten, umso weniger Kupfer muss sie in ihre Überlandleitungen investieren.

Warum muss die Verlustleistung P_v eigentlich über den Strom berechnet werden und nicht über die Hochspannung von 220 kV? Bei P_v geht es nicht um die Spannungen zwischen den Anschlüssen der Transformatoren am Anfang und am Ende der Überlandleitung, sondern um deren Differenz, um den Spannungsabfall längs der Hochspannung führenden Überlandleitung, also um $\Delta U = I \cdot R_L$. Aus $P_v = I \cdot \Delta U$ folgt aber gerade $P_v = I^2 \cdot R_L$.

Rechenbeispiel 6.2: Überlandleitung

Eine kleine Großstadt verlangt zu ihrer Energieversorgung eine elektrische Leistung von 100 MW. Welchem Gesamtstrom entspricht das in einer Überlandleitung von 220 kV? Wie groß darf der (ohm'sche) Widerstand dieser Überlandleitung sein, wenn die Verlustleistung 1 % der übertragenen Leistung nicht überschreiten soll?

Lösung: Strom:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{10^8 \text{ W}}{2,2 \cdot 10^5 \text{ V}} = 455 \text{ A.}$$

Bei 1 % Verlustleistung (also 10^6 W) ist der Widerstand:

$$R_L = \frac{10^6 \text{ W}}{I^2} = 5 \Omega.$$

6.2.4 Kapazität

Zwei Metallplatten, auf kurzem Abstand elektrisch isoliert einander gegenübergestellt (☞ Abb. 6.10), bilden einen **Kondensator**. Was geschieht, wenn man ihn an eine Batterie legt? Ein Strom kann durch das isolierende **Dielektrikum** Luft zwischen den beiden

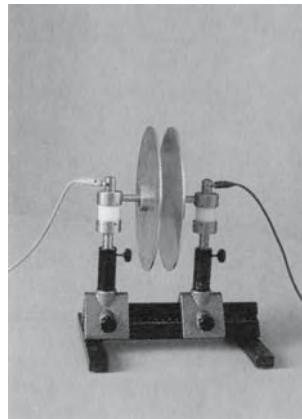


Abb. 6.10. Plattenkondensator für den Hörsaal

Platten ja wohl nicht fließen. Ein Dauerstrom fließt auch wirklich nicht; man kann aber bei einem hinreichend empfindlichen Strommesser beobachten, wie dessen Zeiger kurz zur Seite zuckt, wenn man zum ersten Mal Spannung an den Kondensator legt. Schließt man die Platten anschließend wieder kurz, so zuckt das Instrument in der entgegengesetzten Richtung. Eine empfehlenswerte Schaltung zeigt ☞ Abb. 6.11; sie benutzt einen **Wechselschalter**, der erlaubt, die linke Platte des Kondensators wahlweise an den positiven Pol der Batterie zu legen oder mit der rechten Platte kurzzuschließen.

Wenn der Zeiger eines Amperemeters ausschlägt, fließt ein Strom. Wenn er nur kurz gezuckt hat, ist der Strom auch nur für kurze Zeit geflossen, es hat sich um einen

$$\text{Stromstoß } \int I(t) \cdot dt$$

gehandelt, also um eine elektrische Ladung Q , wie in Kap. 6.1.1 besprochen. Sie wurde beim *Aufladen* an den Kondensator abgegeben und floss beim *Entladen* wieder zurück. Diese Ausdrucksweise ist verkürzt. Korrekt muss man sagen: Beim Aufladen (Wechselschalter oben) entzieht die Batterie der rechten Kondensatorplatte elektrische Ladung Q und drückt sie auf die linke Platte; beim Entladen (Wechselschalter unten) fließt Q wieder auf die rechte Platte zurück.

Insgesamt enthält ein geladener Kondensator also genau soviel Ladung wie ein ungeladener, nur verteilt sie sich anders: Die Platte am Pluspol der Batterie hat positive Ladung bekommen, der anderen Platte wurde positive Ladung entzogen, sie trägt jetzt negative Ladung vom gleichen Betrag.

Kondensatoren sind wichtige Bauelemente der Elektronik. Ihr Äußeres verrät nicht viel von ihrem inneren Aufbau, sie haben aber prinzipiell die gleichen Eigenschaften wie der Luftkondensator von Abb. 6.10. Nur sind sie stärker ausgeprägt und darum leichter zu untersuchen. Weiterhin hält die moderne Messelektronik Geräte bereit, die einen Stromstoß gleich über die Zeit integrieren, also die Ladung Q unmittelbar anzeigen. Damit lässt sich dann ohne große Mühe herausfinden: Die von einem technischen Kondensator gespeicherte elektrische Ladung Q ist proportional zur Spannung U , auf die der Kondensator aufgeladen wurde. Als dessen Kenngröße definiert man dementsprechend die

$$\text{Kapazität } C = Q/U$$

mit der Einheit

$$\text{Farad} = F = C/V = A \cdot s/V.$$

Hier muss man aufpassen: Das kursive C steht für die physikalische Größe Kapazität, das gerade C für die Einheit Coulomb. Das Farad ist eine recht große Einheit. Schon ein μF bedeutet einen ziemlich „dicken“ Kondensator, auch nF sind im Handel, während unvermeidliche und darum ungeliebte „Schaltkapazitäten“ zwischen den Drähten einer Schaltung zuweilen an pF herankommen.

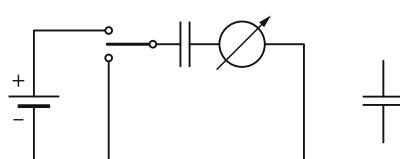


Abb. 6.11. Schaltung zur Beobachtung des elektrischen Verhaltens eines Kondensators – rechts sein Schaltzeichen

$$\text{Kapazität } C = Q/U, \\ \text{Einheit: Farad} = F = C/V = A \cdot s/V.$$

6.2.5

Energie des geladenen Kondensators

Mit der Ladungsverschiebung zwischen seinen beiden Platten bekommt der Kondensator vom Ladestrom Energie übertragen. Er speichert sie und liefert sie bei der Entladung wieder ab. Insofern verhält er sich ähnlich wie ein Akkumulator, arbeitet aber ohne dessen komplizierte Elektrochemie. Warum dann der Aufwand bei den Autobatterien? Könnte man sie durch die technisch einfacheren Kondensatoren ersetzen? Man kann es nicht, weil deren Kapazitäten nicht ausreichen. $45 \text{ A} \cdot \text{h} = 162 \text{ kC}$ bei 12 V sind für einen Akku nichts Besonderes; ein Kondensator müsste dafür $162 \text{ kC}/12 \text{ V} = 13,5 \text{ kF}$ aufbringen. Schon Kondensatoren mit einer Kapazität von „nur“ einem Farad sind technisch nicht leicht zu realisieren.

Zudem geht es weniger um die gespeicherte Ladung Q_0 als um die gespeicherte Energie W_0 . Beim Akku ließ sie sich leicht ausrechnen, weil er seine Klemmenspannung U_K konstant hält:

$$W_0 = U_K \cdot Q_0.$$

Beim Kondensator geht aber die Spannung mit der entnommenen Ladung zurück. Umgekehrt wächst $U(Q)$, der Kapazität C entsprechend, beim Aufladen proportional zu Q an, bis mit dem Endwert Q_0 auch der Endwert $U_0 = Q_0/C$ erreicht wird. Die gespeicherte Energie W kann man jetzt nur noch durch Integration bekommen (s. Kap. 6.1.1):

$$W = \int_0^{Q_0} U(Q) \cdot dQ = \int_0^{Q_0} \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{C} \int_0^{Q_0} Q \cdot dQ \\ = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{1}{2} C \cdot U_0^2 = \frac{1}{2} U_0 \cdot Q_0$$

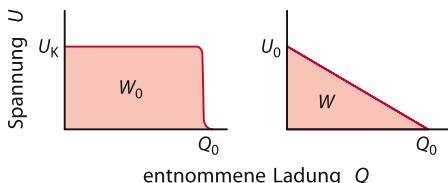


Abb. 6.12. Die Abhängigkeit der Spannung von der entnommenen Ladung beim Akkumulator und beim Kondensator (schematisch); die schraffierte Fläche entspricht der gespeicherten Energie

Die Integration bringt hier den Faktor $\frac{1}{2}$ genau so herein, wie sie es in Kap. 2.1.4 beim freien Fall ($s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$) und bei der Energie der gespannten Schraubenfeder tat ($W = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$). Die graphische Darstellung der Abb. 6.12 macht den Faktor unmittelbar anschaulich.

Rechenbeispiel 6.3: Kurz aber heftig

Ein elektronisches Blitzgerät speichert die Energie für den Blitz in einem $150 \mu\text{F}$ – Kondensator mit einer Ladespannung von 200 V. Ein Blitz dauert etwa eine tausendstel Sekunde. Welche Leistung wird in dieser Zeit erreicht?

Lösung: Die gespeicherte Energie beträgt moderate $W = \frac{1}{2}C \cdot U^2 = 3,0 \text{ J}$. Wegen der kurzen Blitzzeit entspricht das aber einer Leistung von 3000 W. Das ist der Vorteil des Kondensators als Energiespeicher: er kann die Energie sehr schnell abgeben.

6.3 Wechselspannung

Einleitung

Die Spannung eines geladenen Akkumulators hat zu jedem Zeitpunkt den gleichen Wert; sie ist eine Gleichspannung. Die Steckdose hält demgegenüber eine Wechselspannung bereit, die sinusförmig mit 50 Hz um die Nulllinie herumpendelt. Die offiziell mit 230 V angegebene Netzspannung ist ihr Effektivwert. Legt man die Wechselspannung an einen ohmschen Widerstand, so fließt ein phasengleicher Wechselstrom, der mit doppelter Frequenz pulsierende Stromwärme erzeugt.

Legt man Wechselspannung an einen Kondensator, so fließt ebenfalls ein Wechselstrom; im Idealfall eilt er aber der Spannung mit einem Phasenwinkel von $90^\circ = \pi/2$ voraus und ist dann ein (leistungsloser) Blindstrom.

6.3.1

Effektivwerte

51 Taschenlampenbatterien in Reihe können einer Nachttischlampe gegenüber die Steckdose ersetzen; beide Spannungsquellen halten 230 V bereit. Ein Vielfachinstrument, auf den richtigen Spannungsmessbereich geschaltet, zeigt die Spannung der Batteriekette bereitwillig an. Legt man es aber im gleichen Messbereich an die Steckdose, so vibriert der Zeiger ungehalten um die null herum. Der Grund: Die Steckdose liefert nicht wie eine Batterie zeitlich konstante *Gleichspannung*, sondern eine *Wechselspannung*. Deren Frequenz ist zu hoch, als dass der Spannungsmesser mit seinem trügen Messwerk zu folgen vermöchte. Ein Kathodenstrahl-Oszilloskop (s. Kap. 6.6.6) kann den zeitlichen Verlauf der Spannung aber leicht auf seinen Bildschirm zeichnen; Abb. 6.13 zeigt das Resultat: Die Steckdose präsentiert eine sinusförmige Wechselspannung, Schwingungsdauer 20 ms (Frequenz demnach 50 Hz), Spannungsamplitude 325 V(!). Wieso darf das Elektrizitätswerk behaupten, es halte die Netzspannung auf 230 V?

Diese Angabe meint den sog. *Effektivwert* U_{eff} der Wechselspannung, definiert durch

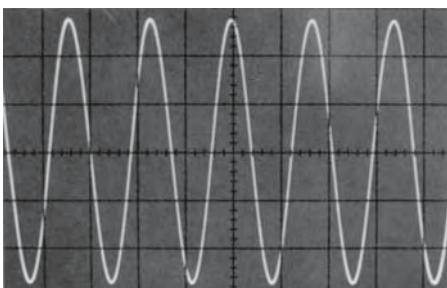


Abb. 6.13. Wechselspannung der Steckdose auf dem Bildschirm eines Oszilloskopen; Ordinatenmaßstab: 130 V/cm; Abszissenmaßstab: 11,9 ms/cm

folgende Festlegung: In einem ohm'schen Widerstand soll eine sinusförmige Wechselspannung U_{eff} im Mittel die gleiche Joule'sche Wärme erzeugen wie eine Gleichspannung U_0 mit gleicher Maßzahl:

$$\langle P(U_{\text{eff}}) \rangle = P(U_0).$$

Beim ohmschen Widerstand R sind Strom und Spannung zueinander proportional:

$$I(t) = U(t)/R.$$

Zu einer sinusförmigen Wechselspannung

$$U(t) = U_s \sin(\omega \cdot t)$$

mit der Amplitude U_s gehört also der sinusförmige Wechselstrom

$$I(t) = I_s \sin(\omega \cdot t)$$

mit der Amplitude $I_s = U_s/R$. Strom und Spannung haben ihre Nulldurchgänge zu gleichen Zeitpunkten, zu denen dann auch keine Leistung umgesetzt wird. Dazwischen wechseln U und I ihre Vorzeichen gemeinsam; die Leistung bleibt positiv; Joule'sche Wärme wird immer nur entwickelt und niemandem entzogen. $P(t)$ pendelt mit doppelter Frequenz zwischen 0 und ihrem Maximalwert

$$P_s = U_s \cdot I_s = U_s^2/R$$

(☞ Abb. 6.14). Ihr Mittelwert liegt in der Mitte:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} P_s = \frac{1}{2} U_s^2/R.$$

Definitionsgemäß soll aber die Gleichspannung U_0 in R die gleiche Leistung umsetzen:

$$\langle P \rangle = P(U_0) = U_0^2/R.$$

Daraus folgen $U_0^2 = \frac{1}{2} U_s^2$ und

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_s}{\sqrt{2}}.$$

Das Elektrizitätswerk hat Recht: Zum Effektivwert $U_{\text{eff}} = 230 \text{ V}$ der Wechselspannung gehört die Spannungsamplitude $U_s = U_{\text{eff}} \sqrt{2} = 325 \text{ V}$. Die gleichen Überlegungen gelten übrigens auch für den Strom und seinen Effektivwert.

Der Definition entsprechend kann man vernünftigerweise nur bei sinusförmigen Wechselspannungen und -strömen von

Effektivwerten reden. Kompliziertere zeitliche Abläufe lassen sich zwar im Prinzip als Überlagerung mehrerer Sinusschwingungen auffassen (s. Kap. 4.1.5), aber in solchen Fällen muss man schon den ganzen Verlauf registrieren. Beim EKG interessiert ohnehin nur der zeitliche Verlauf der Spannung und nicht ihr Betrag; Elektrokardiographen werden gar nicht erst geeicht.

wichtig

Sinusförmige Wechselspannung:

$$\text{Effektivwert } U_{\text{eff}} = \frac{U_s}{\sqrt{2}},$$

sinusförmiger Wechselstrom:

$$\text{Effektivwert } I_{\text{eff}} = \frac{I_s}{\sqrt{2}}.$$

Die Stromwärme einer an die Steckdose angeschlossenen Glühbirne wird pulsierend erzeugt, pulsierend mit einer Frequenz von 100 Hz (☞ Abb. 6.14). Entsprechend pulsiert ihre Helligkeit. Das menschliche Auge ist zu träge, um diesem Flimmern zu folgen. Wenn man aber eine reflektierende Stricknadel im Schein der Lampe hin und her wedelt, sieht man hellere und dunklere Streifen. Deutli-

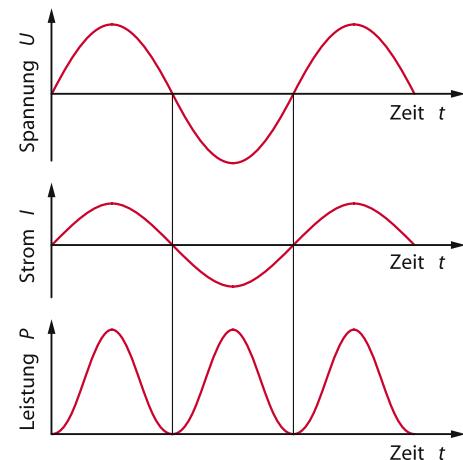


Abb. 6.14. Zeitlicher Verlauf von Spannung U , Strom I und Leistung P bei einem Ohm-Widerstand

cher als Glühbirnen zeigen Leuchtstoffröhren diesen Effekt einer *stroboskopischen Beleuchtung*, denn bei ihnen wird die Lichtentwicklung nicht durch die thermische Trägheit des Glühfadens nivelliert.

6.3.2 Kapazitiver Widerstand

Legt man eine Gleichspannung an einen ungeladenen Kondensator, so fließt ein kurzer Stromstoß; schließt man danach den Kondensator kurz, so fließt der Stromstoß wieder zurück, in Gegenrichtung also. Polt man jetzt die Spannungsquelle um, so fließt erneut ein Stromstoß zum Aufladen, jetzt aber in der gleichen Richtung wie der letzte Entladestromstoß. Schließt man noch einmal kurz, so fließt der Stromstoß wieder in der gleichen Richtung wie der erste. Dieses Spiel mit einem *Polwender* von Hand zu betreiben, ist langweilig. Eine Wechselspannung am Kondensator bewirkt Vergleichbares: Sie lädt und entlädt den Kondensator entsprechend ihrer Frequenz und löst damit einen frequenzgleichen Wechselstrom aus, einen **kapazitiven Strom**. Zumindest bei technischen Kondensatoren ist er sinusförmig wie die Spannung. Es besteht aber ein markanter Unterschied zum Wechselstrom durch einen ohmschen Widerstand: Der kapazitive Strom wird null, wenn der Kondensator mit dem einen oder anderen Vorzeichen voll geladen ist, also bei jedem Extremwert der Spannung. Umgekehrt hat der Strom seine Extremwerte immer dann, wenn der Kondensator leer und die Spannung Null ist. Im ohmschen Fall waren U und I in Phase, beim Kondensator sind sie um $90^\circ = \pi/2$ gegeneinander phasenverschoben, der **kapazitive Strom eilt der Spannung voraus** (☞ Abb. 6.15).

Es kann nicht verwundern, dass der Effektivwert I_{eff} des kapazitiven Stromes dem Effektivwert U_{eff} der Spannung proportional ist. Es liegt darum nahe, auch einen **kapazitiven Widerstand** mit dem Betrag $R_C = U_{\text{eff}}/I_{\text{eff}}$ zu definieren. Wie groß wird er sein? Hohe Kapazität C hat hohe Ladung zur Folge, hohe

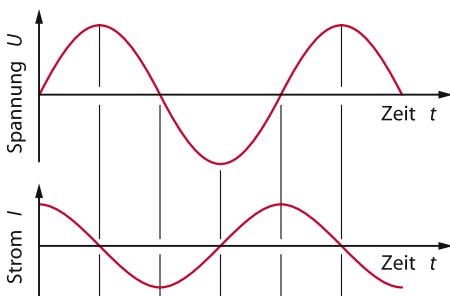


Abb. 6.15. Beim Kondensator eilt der Wechselstrom der Wechselspannung um 90° oder $\pi/2$ voraus

Kreisfrequenz ω ein häufiges Umladen. Beides vergrößert den Strom und verringert den Widerstand: der **kapazitive Widerstand** eines Kondensators hat den Betrag

$$R_C = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_s}{I_s} = \frac{1}{\omega \cdot C}.$$

Die Behauptung $R_C = 1/(\omega C)$ mag einleuchten, sie muss aber durch quantitative Rechnung bestätigt werden. Definitionsgemäß ist die elektrische Ladung das Zeitintegral des Stromes:

$$\Delta Q = \int I(t) \cdot dt.$$

Daraus folgt rein mathematisch, dass der Strom der Differentialquotient der Ladung nach der Zeit ist:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}(t).$$

Die Ladung wiederum folgt der Wechselspannung $U(t) = U_s \cdot \sin(\omega t)$ mit der Kapazität C als Faktor:

$$Q(t) = C \cdot U(t) = C \cdot U_s \cdot \sin(\omega t).$$

Ob man den Sinus oder den Kosinus schreibt, hat nur für die hier uninteressante Anfangsbedingung eine Bedeutung; ☞ Abb. 6.15 ist für den Sinus gezeichnet. Differenziert ergibt er den Kosinus; die **Kettenregel der Differentiation** (s. Kap. 4.1.2) liefert zusätzlich ein ω als Faktor:

$$\dot{Q}(t) = I(t) = \omega \cdot C \cdot U_s \cdot \cos(\omega t) = I_s \cdot \cos(\omega t).$$

Sinus und Kosinus sind um 90° gegeneinander phasenverschoben. Wer will, darf deshalb auch

$$I(t) = I_s \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)$$

schreiben. Der Quotient U_s/I_s der beiden Spitzenwerte ist dem Quotienten $U_{\text{eff}}/I_{\text{eff}}$ der beiden Effektivwerte und damit dem Betrag des Wechselstromwiderstandes R_C gleich:

$$R_C = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_s}{I_s} = \frac{1}{\omega \cdot C},$$

wie vermutet.

wichtig

Betrag des kapazitiven Widerstandes $R_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$,

Strom eilt Spannung um $\pi/2$ voraus.

Die Phasenverschiebung zwischen Wechselspannung und kapazitivem Wechselstrom hat eine wichtige Konsequenz für die Leistung. In jeder Viertelschwingungsdauer, in der der Kondensator aufgeladen wird, haben Strom und Spannung gleiches Vorzeichen, positiv oder negativ. Folglich ist die Leistung positiv; die Spannungsquelle gibt Energie an den Kondensator ab. In den Viertelschwingungsdauern dazwischen wird der Kondensator entladen, Strom und Spannung haben entgegengesetztes Vorzeichen, die Leistung ist negativ, der Kondensator gibt die gespeicherte Energie wieder an die Spannungsquelle zurück (☞ Abb. 6.16). Diese braucht also im zeitlichen Mittel gar keine Energie zu liefern, sie muss sie nur kurzfristig ausleihen. Insgesamt ist der ka-



Abb. 6.16. Beim Kondensator wechselt die Leistung bei Wechselstrom das Vorzeichen (Zeitmaßstab und Phasenlage entsprechen Abb. 6.19)

pazitive Strom (verlust-)leistungslos; man bezeichnet ihn als **Blindstrom**. Wie sich in Kap. 6.11.4 herausstellen wird, können Blindströme nicht nur mit Kondensatoren erzeugt werden.

Ohmsche und kapazitive Wechselströme stellen zwei Grenzfälle dar, mit den Phasenwinkeln $\varphi_R = 0^\circ$ und $\varphi_C = 90^\circ$ gegenüber der Spannung nämlich. In der Technik können Phasenwinkel dazwischen ebenfalls vorkommen. In solchen Fällen wird von Strom und Spannung nur die

$$\text{Wirkleistung } P_w = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi$$

tatsächlich umgesetzt.

Elektrizitätswerke haben Blindströme nicht gern. Sie müssen, wie jeder andere Strom auch, über die Fernleitungen herangebracht werden und produzieren dort, wie jeder andere Strom auch, Verlustwärmе. Energie, die dem Kunden berechnet werden könnte, liefern sie aber nicht. Großabnehmern wird darum der „Kosinus Phi“ nachgemessen und gegebenenfalls mit einem Zuschlag zum Arbeitspreis in Rechnung gestellt.

Rechenbeispiel 6.4: kapazitiver Widerstand

Welchen Wechselstromwiderstand hat ein Kondensator von $1 \mu\text{F}$ gegenüber technischem Wechselstrom (50 Hz)?

Lösung:

$$R_C = \frac{1 \text{ Vs}}{314 \cdot 10^{-6} \text{ As}} = 3,2 \text{ k}\Omega.$$

6.4

Elektrische Netzwerke

Einleitung

Die Schaltpläne elektronischer Geräte sind komplizierte Netzwerke aus Leitungen, Widerständen, Kondensatoren und allerlei anderen Bauelementen, daher nicht leicht zu durchschauen. Sie beruhen aber al-

gesamt auf zwei einfachen Zusammenhängen, den sog. Kirchhoff-Gesetzen. Sie bilden die Grundlage einfacher Schaltungen wie Spannungsteiler, RC-Glied sowie Hoch- und Tiefpass, leider aber auch die von Komplikationen als Folgen der Innenwiderstände von Spannungsquellen und Messinstrumenten.

6.4.1 Die Kirchhoff-Gesetze

Der Schaltplan eines Fernsehempfängers zeigt eine verwirrende Vielfalt von Leitungen, Widerständen, Kondensatoren und allerlei anderen Schaltelementen. Freilich, der „Stromverteilungsplan“ vom Brustkorb eines Menschen mit dem Herzen als Batterie und einem Gewirr relativ gut leitender Blutgefäße und schlecht leitender Rippen sähe nicht einfacher aus. Zum Glück lässt sich das EKG auch ohne diesen Stromverteilungsplan auswerten. Wie kompliziert eine Schaltung aber auch immer aufgebaut sein mag, stets müssen sich Ströme und Spannungen an zwei im Grunde triviale Gesetze halten.

(1) Strom wird nicht „verbraucht“, er fließt nur im Stromkreis herum. Treffen mehrere Leiter in einem Punkt, einem *Knoten*, zusammen, so müssen die einen gerade so viel Strom abführen wie die anderen heran. Wertert man die in konventioneller Stromrichtung zufließenden Ströme positiv und die abfließenden negativ, so schreibt sich die

$$\text{Knotenregel: } \sum_i I_i = 0,$$

sie wird auch **1. Kirchhoff-Gesetz** genannt.

(2) Spannungen liegen nur zwischen zwei Punkten einer Schaltung; kein Punkt kann eine Spannung gegen sich selbst haben. Läuft man in einer *Masche* einer Schaltung (Abb. 6.17) einmal herum zum Ausgangspunkt zurück, so müssen sich alle Spannungen, über die man hinweggelaufen ist, zu null addiert haben:

$$\text{Maschenregel: } \sum_i U_i = 0,$$

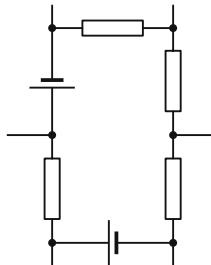


Abb. 6.17. Zur Maschenregel; flache Rechtecke sind die Schaltsymbole von Widerständen (meist als ohmsch angenommen)

sie wird auch **2. Kirchhoff-Gesetz** genannt.

Bei der Anwendung der Maschenregel muss man aufpassen, dass man vorzeichenrichtig addiert. Alle Spannungen zählen, ob sie von Batterien herrühren, über geladenen Kondensatoren liegen oder als Spannungsabfälle über stromdurchflossenen Widerständen, bei denen es auf die Stromrichtung ankommt. Bezogen werden die Vorzeichen auf die Marschrichtung, mit der man seine Masche in Gedanken durchläuft; ob mit oder gegen den Uhrzeigersinn, ist letztlich egal, nur muss man bei der einmal gewählten Richtung bleiben. Weil dies alles ein wenig abstrakt klingt, seien die beiden Regeln an zwei einfachen Beispielen erläutert.

In Abb. 6.18 liegen drei Widerstände parallel geschaltet an einer Batterie, nach deren Zeichenschema jeweils Plus oben und Minus unten sind. Durchläuft man die linke Masche im Uhrzeigersinn, so marschiert man beim Widerstand R_1 von Plus nach Minus, bei der Batterie aber von Minus nach Plus: entgegengesetzte Vorzeichen. Damit ihre Summe null ergibt, müssen ihre Beträge gleich sein. Das hätte man auch ohne Kenntnis der Maschenregel erwartet. In der zweiten Masche geht es bei R_2 vom + nach -, bei R_3 hingegen von - nach + usw. Über allen drei Widerständen liegt die volle Batteriespannung U_0 . Bezogen auf die konventionelle Stromrichtung führt nur der Strom I_0 der Batterie in den oberen Knoten hinein, die Ströme I_1 , I_2 und I_3 aber aus ihm heraus; beim unteren Knoten ist es umgekehrt. So oder so gibt $\sum I$ dann null, wenn

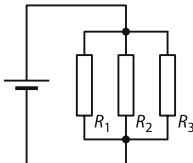


Abb. 6.18. Parallelschaltung von drei Widerständen

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3$$

ist: Der Batteriestrom teilt sich auf die drei Widerstände auf. Auch dies hätte man ohne Kenntnis der Knotenregel nicht anders erwartet.

In Abb. 6.19 liegen die drei Widerstände in Reihe mit der Batterie. Der Strom läuft gegen den Uhrzeigersinn und in Ermangelung echter Knoten durch alle Widerstände mit dem gleichen Betrag. Durchläuft man die Masche wieder im Uhrzeigersinn, so marschiert man nur bei der Batterie von Plus nach Minus, bei allen drei Widerständen aber von Minus nach Plus. Die Maschenregel verlangt also

$$U_0 = U_1 + U_2 + U_3.$$

Die Batteriespannung U_0 (nun positiv genommen) verteilt sich auf die drei Spannungsabfälle U_1 , U_2 und U_3 .

wichtig

1. Kirchhoff-Gesetz – Knotenregel: $\sum_i I_i = 0$,

2. Kirchhoff-Gesetz – Maschenregel: $\sum_i U_i = 0$.

Wie verteilen sich die Ströme im ersten und die Spannungen im zweiten Fall? Bei der Parallelschaltung (Abb. 6.18) liegt über allen Widerständen die gleiche Batteriespannung U_0 . Die Ströme I_n sind zu den Widerständen R_n umgekehrt und zu den Leitwerten G_n direkt proportional, sie summieren sich zum Gesamtstrom

$$I_0 = \sum_i I_i = U_0 \cdot \sum_i G_i = U_0 \cdot \sum_i \frac{1}{R_i}.$$

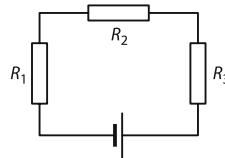


Abb. 6.19. Serienschaltung (Reihenschaltung) von drei Widerständen

Parallelschaltung: Die Leitwerte addieren sich, der Gesamtleitwert ist größer als jeder Einzelleitwert, der Gesamtwiderstand kleiner als jeder Einzelwiderstand.

Bei der Serienschaltung (Abb. 6.19) fließt durch alle Widerstände der gleiche Strom I_0 , die Spannungsabfälle U_n sind zu den Widerständen R_n proportional und summieren sich zur Gesamtspannung

$$U_0 = \sum_i U_i = I_0 \cdot \sum_i R_i.$$

Serienschaltung: Die Widerstände addieren sich, der Gesamtwiderstand ist größer als jeder Einzelwiderstand.

wichtig

Parallelschaltung: Leitwerte addieren sich;

Serienschaltung: Widerstände addieren sich.

Rechenbeispiel 6.5: Ein Stromkreis

Die Widerstände im Stromkreis in Abb. 6.33 mögen alle den gleichen Widerstand von 2Ω haben. Wie groß ist der Gesamtwiderstand? Welcher Strom fließt im Kreis? Welcher Strom fließt durch einen der parallelgeschalteten Widerstände? Welche Spannungen misst der eingezeichnete Spannungsmesser an den Punkten 1 bis 4?

Lösung: Die beiden parallelgeschalteten Widerstände haben einen Gesamtwiderstand von einem Ohm. Zusammen mit den beiden in Reihe geschalteten Widerständen ergibt sich der gesamte Widerstand zu 5Ω .

Der Strom durch den Kreis ist also

$$I = \frac{U}{R} = \frac{6 \text{ V}}{5 \Omega} = 1,2 \text{ A}.$$

Zwischen den beiden parallel geschalteten Widerständen teilt sich dieser Strom in gleiche Teile, also jeweils 0,6 A auf. Die Spannungen können nun gemäss $U = R \cdot I$ berechnet werden. Zwischen 1 und 2 beziehungsweise 3 und 4 liegen 2,4 V, zwischen 2 und 3 1,2 V. Das Spannungsmessgerät misst also an den Punkten 1 bis 4 0 V, 2,4 V, 3,6 V und 6 V.

6.4.2 Spezifischer Widerstand

Legt man vier gleiche Drahtstücke hintereinander, so addieren sich ihre Längen und ihre elektrischen Widerstände. Demnach leuchtet ein: Der Widerstand R eines homogenen Drahtes ist zu seiner Länge l proportional. Schaltet man die Drähte aber zueinander parallel, so addieren sich ihre Querschnittsflächen und ihre Leitwerte. Tatsächlich ist der Leitwert $G = 1/R$ eines homogenen Drahtes proportional zu seiner Querschnittsfläche. Beides zusammen führt zu:

$$R = \rho \cdot l/A$$

mit dem **spezifischen elektrischen Widerstand** ρ . Ihm gebührt die SI-Einheit $\Omega \cdot \text{m}$. Sein Kehrwert heißt **elektrische Leitfähigkeit** σ .

σ und ρ sind Materialkenngroßen der Substanz, aus der ein Leiter besteht. Sind sie konstant, d.h. unabhängig von der angelegten elektrischen Spannung, so erfüllt der Leiter das ohmsche Gesetz, denn wenn sein spezifischer Widerstand nicht von der Spannung abhängt, so kann es sein Widerstand auch nicht.

Kaum eine andere physikalische Größe überdeckt einen so weiten messbaren Bereich: glatt 30 Zehnerpotenzen von den gut leitenden Metallen bis zu den guten Isolatoren (☞ Abb. 6.20). Dabei sind die Supraleiter noch nicht einmal mitgezählt: Deren spezifischer Widerstand fällt bei tie-

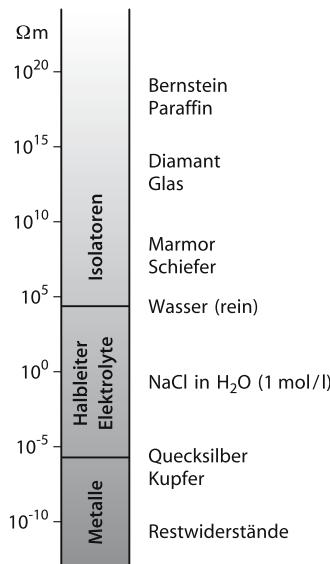


Abb. 6.20. Der Bereich vorkommender spezifischer Widerstände; der *Restwiderstand* ist der Tieftemperaturwiderstand vor Einsetzen der Supraleitung

fen Temperaturen auf einen Wert, der sich experimentell von null nicht unterscheiden lässt. Außerhalb dieses Bereiches nimmt ρ bei praktisch allen Metallen mit der Temperatur T zu, sein

$$\text{Temperaturkoeffizient } \alpha_\rho = \frac{d\rho}{dT}$$

ist positiv. Dies war der Grund für das nichtohmsche Verhalten der Glühbirne in Kap. 6.2.1: Mit steigender Spannung steigt der Strom, steigt die Entwicklung von Joule'scher Wärme, steigt die Temperatur und mit ihr der Widerstand.

wichtig

Spezifischer Widerstand ρ und elektrische Leitfähigkeit $\sigma = 1/\rho$ sind temperaturabhängige Kenngroßen elektrischer Leiter.

Wegen ihres Temperaturkoeffizienten kann man den spezifischen Widerstand zur Temperaturmessung benutzen – im Widerstandsthermometer, das meist aus einem dünnen, in

Glas eingeschmolzenen Platindraht besteht. Ebenfalls für Messzwecke hätte man gern Präzisionswiderstände, die von der Temperatur unabhängig sind. Eigens zu diesem Zweck wurde eine recht bekannte Legierung entwickelt, das Konstantan. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass viele Substanzen, vor allem Halbleiter und Elektrolyte, einen negativen Temperaturkoeffizienten des spezifischen Widerstands besitzen.

Rechenbeispiel 6.6: Anschlussleitung

Die Anschlussleitung einer Stehlampe sei 4 m lang und habe einen „Kupferquerschnitt“ von $0,75 \text{ mm}^2$ je Ader. Wie groß ist ihr Widerstand? (An den Anhang denken!)

Lösung: Spezifischer Widerstand des Kupfers: $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ m}$. Also ist der Widerstand (zwei Adern):

$$R = 2 \cdot \rho \cdot \frac{4 \text{ m}}{0,75 \text{ mm}^2} = 0,18 \Omega$$

6.4.3 Spannungsteiler

Der elektrische Widerstand R eines homogenen Drahtes ist zu seiner Länge l proportional. Dabei zählt selbstverständlich nur die vom Stromkreis genutzte Länge; der Draht muss ja nicht an seinen Enden angeschlossen werden. Man kann ihn sogar auf einen isolierenden Träger aufwickeln und mit einem Schleifkontakt mit l auch R von Hand einstellen – nicht ganz kontinuierlich, sondern nur von Windung zu Windung. Aber bei ein paar hundert Windungen spielt das keine Rolle mehr. Man erhält so einen variablen *Schiebewiderstand* (Abb. 6.21). Ist der Träger ein Ring, wird das Wickeln etwas mühsamer,

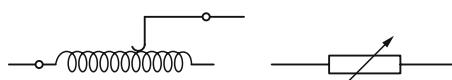


Abb. 6.21. Variabler Widerstand, Konstruktionsschema und Schaltzeichen



Abb. 6.22. Drehpotentiometer

dafür kann der Schleifkontakt mit einem Drehknopf bewegt werden (Abb. 6.22).

Wer eine vorgegebene Spannung U_0 halbieren will, legt sie in Reihe mit zwei gleichen Widerständen. Sind diese ohmsch, so teilen sie jede Gleich- oder Wechselspannung im Verhältnis 1:1. Sind die Widerstände nicht gleich, so teilen sie die Spannung in ihrem Widerstandsverhältnis. Eine derartige Schaltung heißt *Spannungsteiler* oder auch *Potentiometer*. Der Schleifkontakt der Abb. 6.21 unterteilt den aufgewickelten Draht in zwei Bereiche, deren elektrische Widerstände R_1 und R_2 sich zum Gesamtwiderstand R_0 addieren (Abb. 6.23). Alle Widerstände werden vom gleichen Strom $I = U_0/R_0$ durchflossen; jeder verlangt für sich den Spannungsabfall

$$U_n = I \cdot R_n = U_0 \cdot R_n / R_0.$$

Demnach lässt sich durch Verschieben des Schleifkontaktees die Spannung U_1 auf jeden beliebigen Wert zwischen 0 und U_0 einstellen. Streng gilt das allerdings nur für den *unbelasteten Spannungsteiler*, denn wenn

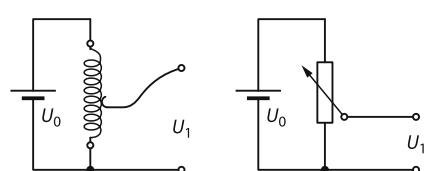


Abb. 6.23. Spannungsteiler(Potentiometer), Konstruktions-schema und Schaltskizze

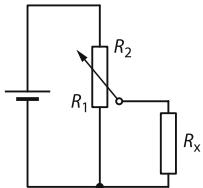


Abb. 6.24. Belasteter Spannungsteiler. In sein Teilungsverhältnis geht die Parallelschaltung von R_1 und R_x ein

beispielsweise neben R_1 noch ein Lastwiderstand R_x liegt (☞ Abb. 6.24), dann zählt für die Spannungsteilung der Gesamtwiderstand der Parallelschaltung und der ist kleiner als R_1 .

wichtig

Ein Spannungsteiler (Potentiometer) teilt die angelegte Spannung im Verhältnis der Widerstände.

Potentiometer erlauben, eine unbekannte Spannung U_x in Kompensation zu messen, d.h. ohne deren Spannungsquelle einen Strom abzuverlangen – eine entsprechende Schaltung bringt ☞ Abb. 6.25: U_1 und U_x stehen gegeneinander. Sind sie gleich, zeigt das Instrument null an. Es braucht nicht geeicht zu sein, als Nullinstrument muss es ja nur die Null erkennen. Es darf aber auf hohe Empfindlichkeit geschaltet werden, wenn die Kompensation erst einmal ungefähr erreicht worden ist. Ein Vorteil des Messverfahrens liegt in seiner hohen Präzision, der andere darin, dass U_x stromlos gemessen wird: Es gibt empfindliche Spannungsquellen, die keine ernsthafte Belas-

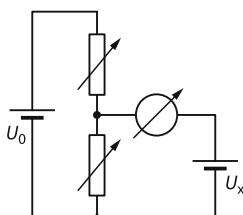


Abb. 6.25. Spannungsmessung in Kompensation. Ein geeichter Spannungsteiler erzeugt mit Hilfe der bekannten Spannung U_0 eine ebenfalls bekannte Teilspannung U' , und zwar so, dass sie die unbekannte Spannung U_x kompensiert: Das Instrument zeigt dann nichts an (Nullinstrument)

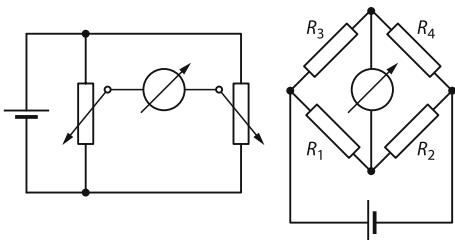


Abb. 6.26. Die Wheatstone-Brücke zur Präzisionsmessung von Widerständen; sie ist abgeglichen, wenn die Brückenbedingung $R_1/R_2 = R_3/R_4$ erfüllt ist

tung vertragen. Davon wird im nächsten Kapitel noch die Rede sein.

Das Prinzip der **Kompensationsmessung** ist nicht auf die Elektrizitätslehre beschränkt. Ein mechanisches Beispiel liefert die Küchenwaage: Sie kann vielleicht mit 10 kg belastet werden, reagiert aber bereits auf ein Übergewicht von wenigen Gramm auf einer Waagschale mit „Vollaus-schlag“. Zu einer Kompensationsmessung gehört allerdings neben dem Nullinstrument immer auch ein Satz präzise geeichter Vergleichsnormale, hier der Gewichtssatz zur Waage, dort der Spannungsteiler mit seiner Batterie.

Es ist nicht verboten, die Spannung U_x der Kompensationsschaltung aus einem zweiten Spannungsteiler zu beziehen und diesen an die gleiche Spannungsquelle zu legen wie den ersten auch. Man erhält dann die **Wheatstone-Brücke**, deren Schaltskizze traditionell als auf die Spitze gestelltes Quadrat gezeichnet wird: s. ☞ Abb. 6.26 (man muss das nicht tun). Das Brückeninstrument zeigt null, die Brücke ist *abgeglichen*, wenn beide Spannungsteiler die Batteriespannung U_0 im gleichen Verhältnis unterteilen, wenn also die **Brückenbedingung**

$$R_1/R_2 = R_3/R_4$$

erfüllt ist. Kennt man drei Widerstände, so kann man den vierten ausrechnen. U_0 wird dazu nicht einmal gebraucht.

6.4.4 Innenwiderstände

Für die Autobatterie bedeutet das Anlassen des Motors Schwerarbeit. Sie meldet dies durch einen Rückgang ihrer Klemmenspannung: Alle eingeschalteten Lämpchen werden dunkler, solange der Anlasser läuft. Ursache

ist der **Innenwiderstand** R_i der Batterie, bedingt durch deren Elektrochemie. Räumlich lässt er sich von der Spannungsquelle nicht trennen, auch wenn man ihn im **Ersatzschaltbild** abgesetzt von der (als widerstandslos angesehenen) Spannungsquelle zeichnet. An den „Draht“, der die beiden in Abb. 6.27 elektrisch verbindet, kann man nicht herankommen. Der gestrichelte Kasten soll dies andeuten. Verlangt man jetzt von der Batterie einen Strom I , so erzeugt dieser über dem Innenwiderstand einen Spannungsabfall, sodass von der **Ursprungsspannung** U_0 nur noch die

$$\text{Klemmenspannung } U_k = U_0 - I \cdot R_i$$

übrig bleibt. Messen lässt sich nur U_k ; diese Spannung stimmt aber im *Leerlauf*, d.h. bei hinreichend kleinem Strom, praktisch mit U_0 überein. Die Ursprungsspannung wird deshalb auch **Leerlaufspannung** genannt.

wichtig

Der Innenwiderstand R_i einer Spannungsquelle senkt bei Belastung mit dem Strom I die Klemmenspannung auf
 $U_k = U_0 - I \cdot R_i$,
 U_0 = Leerlaufspannung.

Schließt man die Klemmen einer Spannungsquelle kurz, so zwingt man die Klemmenspannung auf null; das gesamte U_0 fällt über dem Innenwiderstand ab; die Batterie liefert den höchsten Strom, den sie überhaupt liefern kann, den

$$\text{Kurzschlussstrom } I_K = U_0 / R_i.$$

Im Leerlauf wie im Kurzschluss gibt die Batterie keine Leistung nach außen ab: im Leerlauf nicht, weil kein Strom fließt, im Kurzschluss nicht, weil sie ihre volle Leistung im Innenwiderstand verheizt. Keine Spannungsquelle hat Kurzschluss gern. Elektrizitätswerke schützen sich durch *Sicherungen* gegen ihn: Sie schalten den kurzgeschlossenen Stromkreis kurzerhand ab. Taschenlampenbatterien können das nicht, sie senken

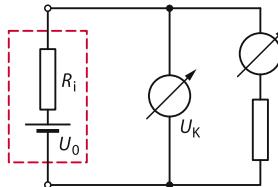


Abb. 6.27. Der Innenwiderstand R_i einer Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung U_0 setzt die Klemmenspannung U_k um den Spannungsabfall $I \cdot R_i$ gegenüber U_0 herab. U_0 und R_i sind räumlich nicht voneinander getrennt; Zuleitungen erreichen nur die Klemmen (*Ersatzschaltbild*)

ihre Klemmenspannung (Abb. 6.28). Ist der Innenwiderstand ohmsch, so fällt U_k linear mit I ab.

Technische Spannungsquellen werden auf kleine Innenwiderstände gezüchtet: Sie sollen ihre Spannung konstant halten, von der Last so unabhängig wie möglich. Der Fernsehempfänger darf nicht wegen Unterspannung ausfallen, weil die Nachbarin in ihrer Küche drei Kochplatten eingeschaltet hat. Vielfachmessinstrumente (s. Kap. 6.1.1) können Strom wie Spannung messen, weil der Widerstand zwischen ihren Anschlussbuchsen den einen nicht ohne die andere zulässt. Mit seinem Innenwiderstand darf ein Messgerät die **Belastbarkeit** einer Spannungsquelle nicht überfordern; er muss groß gegenüber deren Innenwiderstand sein. Will man mit dem Vielfachmessinstrument hingegen einen Strom messen, so soll sein Innenwiderstand verglichen mit allen Widerständen im Stromkreis sehr klein sein, denn es wird ja selbst in

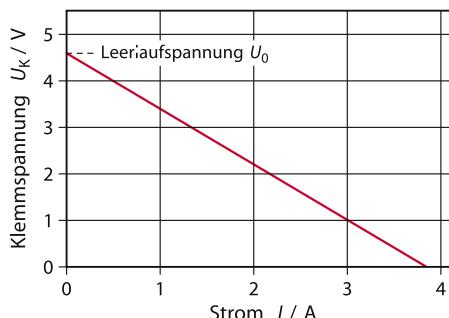


Abb. 6.28. Gemessenes Absinken der Klemmenspannung einer Taschenlampenbatterie bei Belastung

den Stromkreis hineingeschaltet und soll den Strom nicht reduzieren.

wichtig

Der Innenwiderstand eines Spannungsmessers muss groß gegenüber dem Innenwiderstand der Spannungsquelle sein. Der Innenwiderstand eines Strommessers muss klein gegenüber allen Widerständen im Stromkreis sein.

Bei den üblichen digitalen Multimetern braucht man sich meist keine Gedanken über deren Innenwiderstände zu machen. Im Spannungsmessbereich liegt er bei einigen Megohm und im Strommessbereich bei einigen Mikroohm. Nur wenn noch die alten analogen Instrumente mit Zeiger verwendet werden, muss man aufpassen, denn dort hat man es mit Kiloohm beziehungsweise Milliohm zu tun.

Rechenbeispiel 6.7: schwächelnde Batterie

Wie groß ist der Innenwiderstand der Batterie von Abb. 6.28?

Lösung: Der Innenwiderstand ist der Betrag der Steigung der Geraden im Diagramm. Dieser berechnet sich zu:

$$R_i = \frac{U_0}{I_{\max}} = \frac{4,5 \text{ V}}{3,8 \text{ A}} = 1,2 \Omega.$$

Das ist für eine Taschenlampenbatterie ein recht großer Innenwiderstand. Die Batterie ist schon recht leer. Eine frische Batterie bringt es auf ca $0,3 \Omega$.

6.4.5 Hoch- und Tiefpass

Auch die Serienschaltung von Widerstand und Kondensator, **RC-Glied** genannt (Abb. 6.29), bildet einen Spannungsteiler. Er ist aber frequenzabhängig, denn der Wechselstromwiderstand der Kapazität C nimmt umgekehrt proportional zu f und ω ab:

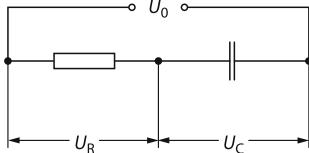


Abb. 6.29. **RC-Glied** als frequenzabhängiger Spannungsteiler: Wirkung als Tiefpass bei Abgriff von U_C über dem Kondensator; Wirkung als Hochpass bei Abgriff von U_R über dem Widerstand

$$R_C = 1/(\omega C) = (2\pi \cdot f \cdot C)^{-1}$$

(s. Kap. 6.3.2). Hohe Frequenzen erscheinen deshalb vorwiegend über dem ohmschen Widerstand R_R :

$$U_R > U_C \text{ wegen } R_R > R_C$$

und tief vorwiegend über dem Kondensator. Für den, der nur U_R elektronisch weiterverarbeitet, ist das **RC-Glied** ein **Hochpass**, und ein **Tiefpass** für den, der nur U_C interessiert. Die Grenze zwischen „hoch“ und „tief“ liegt bei der Frequenz f^* , für die U_R und U_C gleich werden, freilich nicht gleich der halben angelegten Wechselspannung U_0 . Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung beim Kondensator hat

$$U_R(f^*) = U_C(f^*) = 0,707 U_0$$

zur Folge. Legt man ein Frequenzgemisch $U(t)$ an das **RC-Glied**, so erscheint $U_C(t)$ als „geglättet“, weil es von den Zappeleien der hohen Frequenzen befreit ist. Eben dies ist die Wirkung eines Tiefpasses.

6.4.6 Kondensatorentladung und e-Funktion

In der Schaltung der Abb. 6.30 wird der Kondensator momentan aufgeladen, wenn man den Wechselschalter nach links legt. Legt man ihn anschließend nach rechts, so entlädt sich die Kapazität C des Kondensators über den ohmschen Widerstand R . Die zugehö-

rigie Mathematik lässt sich zunächst leicht hinschreiben. Kondensator und Widerstand bilden eine Masche (s. Kap. 6.4.1); folglich verlangt die Maschenregel zu jedem Zeitpunkt t:

$$U_C(t) + U_R(t) = 0$$

oder

$$U_C(t) = -U_R(t).$$

Andererseits gilt, wie in den Kap. 6.1.4 und 6.2.4 begründet, für den von der Ladung $Q(t)$ des Kondensators gelieferten Entladungsstrom

$$I(t) = \dot{Q}(t) = C \cdot \dot{U}_C(t)$$

und ferner

$$U_R = R \cdot C \cdot \dot{U}_C(t),$$

also auch

$$\dot{U}_C(t) = -\frac{1}{R \cdot C} U_C(t).$$

Jetzt wird die Mathematik schwieriger, denn dies ist eine Differentialgleichung. Von der Schwingungsdifferentialgleichung des Kap. 4.1.2 unterscheidet sie sich nur um einen winzig kleinen Punkt (denn Buchstaben dürfen in der Mathematik ausgetauscht werden): Bei den Schwingungen ging es um den *zweiten* Differentialquotienten $\ddot{x}(t)$ der Auslenkung $x(t)$ nach der Zeit, hier geht es um den *ersten* zeitlichen Differentialquotienten $\dot{U}_C(t)$. Der Unterschied ist folgenschwer. Die Gleichung verlangt, die Spannung $U_C(t)$ sollte mit einer Geschwindigkeit $\dot{U}_C(t)$ abfallen, die zu ihr selbst proportional ist. Dass diese Forderung nicht von Schwingungen erfüllt werden kann, sieht man auf den ersten Blick. Die Funktion, die das schon nach der ersten Differentiation tut, muss eigens erfunden werden: Es ist die **Exponentialfunktion**, von der schon in Kap. 1.3.4 die Rede war. Per definitionem gilt

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x) = \int_{-\infty}^x \exp(\chi) d\chi.$$

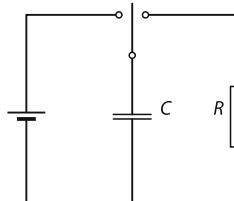


Abb. 6.30. Entladung eines Kondensators über einen Ohm-Widerstand; sie führt zur e-Funktion

denn eine Funktion, die bei der Differentiation sich selbst ergibt, tut dies bei der Integration auch. Wenn $\exp(x)$ von der Zeit t abhängen soll, hat t im Exponenten zu erscheinen. Weil dieser aber dimensionslos sein muss, geht das nur zusammen mit einem Faktor, der auch $1/\tau$ heißen kann und negativ sein darf. Daraus folgt aber wegen der Kettenregel der Differentiation (s. Kap. 4.1.2)

$$\frac{d}{dx} \exp(-\frac{t}{\tau}) = -\frac{1}{\tau} \exp(-\frac{t}{\tau})$$

Die Differentialgleichung der Kondensatorenentladung lässt sich also mit dem Ansatz

$$U_C(t) = U_0 \cdot \exp(-\frac{t}{\tau})$$

lösen:

$$\begin{aligned} \dot{U}_C(t) &= U_0 \cdot \frac{d}{dx} \exp(-\frac{t}{\tau}) = -\frac{U_0}{\tau} \exp(-\frac{t}{\tau}) \\ &= -\frac{1}{\tau} U_C(t). \end{aligned}$$

Demnach sind $1/\tau$ und $1/(R \cdot C)$ gleich. So- mit gilt für die **Zeitkonstante τ der Kondensatorenentladung**

$$\tau = R \cdot C.$$

Kondensatorenentladung:

$$U(t) = U_0 \cdot \exp(-t/\tau) = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\text{Zeitkonstante } \tau = R \cdot C$$

wichtig

Die Exponentialfunktion ist in gewissem Sinn die wichtigste mathematische Funk-

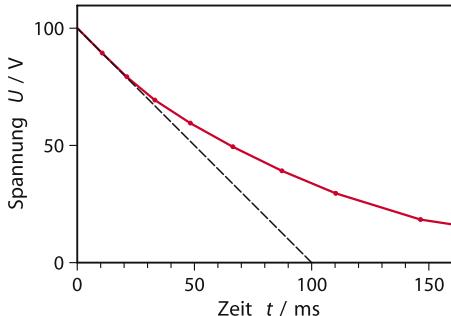


Abb. 6.31. Polygonzug als Annäherung an die e-Funktion (Einzelheiten im Text)

tion in der Physik, vielleicht sogar in der ganzen Natur. Wem sie nach der soeben vorgeführten etwas formalen Herleitung immer noch ein bisschen unheimlich vorkommt, dem soll sie am Beispiel der Kondensatorentladung etwas anschaulicher, dafür aber nur halbquantitativ erläutert werden. Angenommen, ein Kondensator von $1 \mu\text{F}$ (C) wird auf 100 V (U_0) aufgeladen; er enthält dann $0,1 \text{ mC}$ Ladung (Q_0). Überbrückt man seine Kondensatorplatten mit $100 \text{ k}\Omega$ (R), so beginnt die Entladung mit einem Strom von 1 mA (I_0). Flösse dieser Strom konstant weiter, so wäre der Kondensator nach 100 ms leer. Diese Zeitspanne entspricht genau der Zeitkonstanten τ des RC -Gliedes. Tatsächlich nimmt I_0 aber schon in der ersten Millisekunde $1 \mu\text{C}$ an Ladung mit, immerhin 1% von Q_0 . Damit sinkt die Spannung am Kondensator um 1% gegenüber U_0 ab auf 99 V . Dadurch verringert sich aber auch der Entladestrom um 1% auf $0,99 \text{ mA}$. Er braucht jetzt $1,01 \text{ ms}$, um das zweite Mikrocoulomb aus dem Kondensator herauszuholen. Nach dieser Zeit sind Ladung, Spannung und Strom auf 98% ihrer Ausgangswerte abgefallen, sodass für das dritte μC schon $1,02 \text{ ms}$ gebraucht werden, für das zehnte $1,105 \text{ ms}$ und für das zwanzigste $1,22 \text{ ms}$; die Entladung wird immer langsamer. Nach dieser Vorstellung könnte man ihren Verlauf als Polygonzug aus lauter kleinen Geraden zusammensetzen, wie Abb. 6.31 es andeutet. Tatsächlich bleibt der Entladestrom freilich in keiner

Millisekunde konstant; deshalb hält sich die echte Entladung an die e-Funktion. Sie ist eine glatte, gebogene Kurve, deren Funktionswerte numerisch ausgerechnet werden müssen, ein ermüdendes Geschäft für den Menschen, eine Zehntelsekundenarbeit für den Taschenrechner. Den Graphen der fallenden e-Funktion zeigt Abb. 6.32 (wie auch schon früher Abb. 1.19). Ihr folgen beim RC -Glied Ladung $Q(t)$, Spannung $U(t)$, Strom $I(t)$ und alle ihre Änderungs geschwindigkeiten, d.h.

$$U(t) = U_0 \exp(-t/\tau),$$

$$Q(t) = Q_0 \exp(-t/\tau),$$

$$I(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$$

usw.

Für jede dieser Größen zielt die (negative) Anfangssteigung ihres Graphen an der Abszisse auf die Zeitkonstante τ , in der die Größe selbst allerdings erst auf den e-ten Teil ihres Ausgangswertes abfällt (Abb. 6.32). Die Zeitspanne τ darf auch mitten in die laufende Entladung hineingelegt werden: In der Spanne zwischen den Zeitpunkten t_0 und $(t_0 + \tau)$ fällt jede der genannten Größen auf den e-ten Teil desjenigen Wertes ab, den sie zum Zeitpunkt t_0 besaß. Formal kann dieser Tatbestand durch die Gleichung

$$U(t_0) = e \cdot U(t_0 + \tau)$$

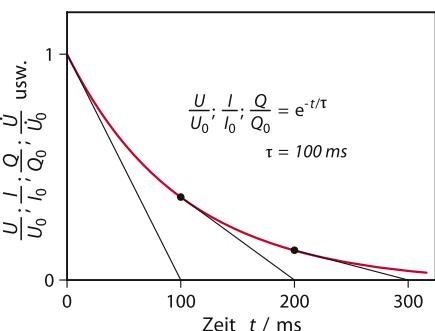


Abb. 6.32. e-Funktion der Kondensatorentladung: Jede zu einem beliebigen Zeitpunkt t_0 angelegte Tangente trifft die Abszisse um die Zeitkonstante τ nach t_0

beschrieben werden. Bei solchen Formeln muss man aufpassen, sonst verwechselt man möglicherweise den Funktionswert $U(t_0 + \tau)$ mit dem (sinnlosen) Produkt $U \cdot (t_0 + \tau)$, das $U \cdot t_0 + U \cdot \tau$ betrüge.

Rechenbeispiel 6.8: Zeitkonstante

Welcher Widerstand muss in einem RC -Glied zu einem Kondensator mit $C = 2 \mu\text{F}$ hinzugeschaltet werden, um die Zeitkonstante $\tau = 0,4 \text{ s}$ herauszubekommen?

Lösung:

$$R = \frac{\tau}{C} = \frac{0,4 \text{ s}}{2 \cdot 10^{-6} \text{ As/V}} = 200 \text{ k}\Omega$$

6.5 Elektrisches Feld

Einleitung

Elektrische Spannungen treten auf, weil elektrische Ladungen sich mit elektrischen Feldern umgeben. Elektrische Ströme fließen, weil elektrische Ladungen mechanischen Kräften unterliegen, sobald sie in ein elektrisches Feld geraten, das sie nicht selbst erzeugt haben. Der Begriff „Feld“ hat eine umfassende Bedeutung über die Elektrizitätslehre hinaus; es gibt auch magnetische und Gravitationsfelder. Kenngröße des elektrischen Feldes ist die elektrische Feldstärke, ein im Allgemeinen orts- und zeitabhängiger Vektor. Die Kraft, die ein geladener Körper im Feld erfährt, ist das Produkt aus Ladung und Feldstärke. Dieser Zusammenhang erlaubt, elektrische Felder durch Feldlinien zu beschreiben, die den Kraftwirkungslinien auf einer Probeladung entsprechen.

6.5.1 Der Feldbegriff

Damit durch einen Metalldraht ein Strom fließt, muss man ihn an eine Spannungsquelle anschließen. Zwischen den Drahtenden muss eine Spannung herrschen, die den Strom vorantreibt. Von alleine fließt er nicht,

weil die Ladungsträger (Elektronen) auf ihrem Weg durch den Draht immer wieder mit den Atomen zusammenstoßen, dadurch auch Energie übertragen und den Draht aufwärmen (Joule'sche Wärme, s. Kap. 6.2.3). Fast jede mechanische Bewegung wird von einem Reibungswiderstand behindert, so auch diese. Irgendwie muss also die Spannungsquelle Kräfte auf jedes Leitungselektron ausüben, die dieses vorantreiben.

Es hat zwei Jahrhunderte gedauert, um diese Kräfte zu verstehen und zu beschreiben. Die Kräfte, die den Strom vorantreiben, sind **elektrische Kräfte** zwischen Ladungen und manchmal auch **magnetische Kräfte** zwischen bewegten Ladungen. Wer vorsichtig ist, spricht von „elektrostatischen“ und von „magnetischen“ Kräften und fasst beide unter dem Stichwort **elektromagnetische Kräfte** zusammen. Unter den Bedingungen des Alltags sind diese Kräfte sehr viel kleiner als die Gravitation; darum hat man sie erst so spät entdeckt. Alle genannten Kräfte wirken auf Distanz, die betroffenen Körper brauchen sich nicht zu berühren. Die Kräfte der Gravitation, die Schwerkraft, hält die Planeten auf ihren Bahnen um die Sonne; magnetische Kräfte drehen auf der ganzen Erde Kompassnadeln in Nord-Süd-Richtung; elektrostatische Kräfte ziehen kilometerlange Blitze aus Wolken. Man bezeichnet sie alle als **Fernkräfte**.

Fernkräften haftet etwas Unheimliches an. Wie macht es die Sonne, durch den leeren Raum und über große Distanzen, die Erde anzuziehen? Da leuchtet es doch eher ein, dass die Kraft auf die Erde von etwas abhinge, was sie an ihrem Aufenthaltsort vorfindet. Um eben dies zu erreichen, hat die Physik ihren Begriff **Feld** eingeführt, das Gravitationsfeld für die Anziehung zwischen Massen, das elektrische Feld für die elektrostatischen Kräfte zwischen Ladungen und das magnetische Feld für die magnetischen Kräfte zwischen bewegten Ladungen. Allerdings muss man nun den leeren Raum verpflichten, physikalische Felder zu tragen, und beispielsweise Folgendes behaupten: Jede elektrische Ladung

umgibt sich mit einem elektrischen Feld; ein elektrisches Feld ist ein Raumzustand, von dem auf eine elektrische Ladung Q eine Kraft ausgeübt wird. Die Stärke dieser Kraft \vec{F}_c hängt von der Stärke des Feldes, der **elektrischen Feldstärke** \vec{E} ab:

$$\vec{F}_c = Q \cdot \vec{E}.$$

Die elektrische Kraft \vec{F}_c wird auch **Coulomb-Kraft** genannt. Die Feldstärke \vec{E} ist im Allgemeinen ortsabhängig.

wichtig

Eine elektrische Ladung ist von einem elektrischen Feld umgeben.
Ein elektrisches Feld (\vec{E}) ist ein Raumzustand, in dem auf eine zweite elektrische Ladung (Q) eine Coulomb-Kraft (\vec{F}_c) ausgeübt wird:

$$\vec{F}_c = Q \cdot \vec{E},$$

elektrische Feldstärke E , Einheit: V/m.

Die Gleichung $\vec{F}_c = Q \cdot \vec{E}$ bietet eine Möglichkeit, \vec{E} zu messen: Man besorgt sich eine bekannte *Probeladung* Q , bringt sie dorthin, wo man \vec{E} kennen möchte, und misst \vec{F}_c . Ein wenig muss man dabei aufpassen. Q ist ja selbst von einem elektrischen Feld umgeben, das sich dem ursprünglichen Feld überlagert. Darum braucht man sich aber nicht zu kümmern: Die Kraftgleichung meint dasjenige Feld \vec{E} , das am Ort der Handlung herrschte, bevor die Probeladung kam.

Um ein Gefühl für die Größenordnungen zu bekommen sind hier einige Feldstärken tabelliert:

In Radiowellen	10^{-1} V/m
An der Erdoberfläche (schönes Wetter)	10^2 V/m
In Sonnenlicht	10^3 V/m
Unter einer Gewitterwolke	10^4 V/m
Durchschlagfeldstärke, bei der Luft leitend wird	10^6 V/m
Am Ort des Elektrons im Wasserstoffatom	10^{12} V/m

In dem Metalldraht, durch den ein Strom fließt, herrscht also ein elektrisches Feld, das auf die Leitungselektronen eine Coulomb-Kraft ausübt und sie damit vorantreibt. Je höher die elektrische Feldstärke, umso höher der elektrische Strom. Was hat aber nun die elektrische Feldstärke mit der elektrischen Spannung U zwischen den Drahtenden zu tun?

Im einfachen Fall eines Metalldrähtes kann davon ausgegangen werden, dass im Draht ein homogenes Feld herrscht, mit konstantem Betrag E der Feldstärke und der Richtung von \vec{E} immer in Richtung des Drahtes. Dann gilt für einen Draht der Länge l :

$$U = l \cdot E.$$

Durch die Einheit der Feldstärke V/m wird eine solche Beziehung zwar nahe gelegt, aber natürlich nicht bewiesen. Im übernächsten Kapitel wird dieser Zusammenhang deutlicher.

Die in speziellen Situationen auch noch wirkenden magnetischen Felder und Kräfte bekommen ihren eigenen Abschnitt im Buch (s. Kap. 6.10).

In der Mechanik ist der Feldbegriff nicht so nützlich wie in der Elektrizitätslehre. Deshalb wurde dort nicht von einem Gravitationsfeld gesprochen. Die Fallbeschleunigung g ist aber nichts anderes als der Betrag der Gravitationsfeldstärke an der Erdoberfläche: $F_G = m \cdot g$.

Rechenbeispiel 6.9: Fotokopierer

In einem Fotokopierer oder Laserdrucker wird das Schriftbild zunächst als Muster positiver Ladungen auf einer Trommel aus Halbleitermaterial eingeprägt. Leicht negativ geladene Toner (Farb) Partikel werden dann von diesen Ladungen auf die Trommel gezogen und anschließend durch Abrollen mechanisch auf das Papier übertragen. Nehmen wir an, dass die Partikel eine Masse von $9 \cdot 10^{-16}$ kg haben und im Mittel 20 Überschusselektronen als negative Ladung

tragen (das bedeutet $q = 20 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$ As). Welches Feld muss die Trommel am Ort des Toners erzeugen, um eine zuverlässige Kraft von mindestens zwei mal das Eigengewicht der Tonerpartikel aufzubringen?

Lösung: Für das minimale Feld gilt $q \cdot E = 2 \cdot m \cdot g$, wobei die Ladung der Tonerpartikel $q = 32 \cdot 10^{-19}$ As ist. Das ergibt:

$$E = \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-16} \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{32 \cdot 10^{-19} \text{ As}} = 5,5 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{As}}$$

$$= 5500 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

6.5.2 Elektrisches Potential

Einem Radiobastler wird es nur selten gelingen, die Schaltung eines komplizierten Verstärkers, die er sich gekauft hat, so sorgfältig nachzubauen, dass sein Gerät auf Anhieb funktioniert. Im Allgemeinen muss er sich zunächst einmal auf Fehlersuche begeben. Hierfür gibt es bewährte Verfahren. Eines besteht darin, das eine „Bein“ eines Spannungsmessers z.B. an dem Minuspol der Batterie zu legen und mit dem anderen verschiedene Knotenpunkte der Schaltung nacheinander abzutasten. In guten Schaltskizzen ist eingetragen, welche Spannung man jeweils zu erwarten hat. Abweichungen geben dann Hinweise auf Schaltungsfehler. Hierfür ein vereinfachtes Beispiel: Vier gleiche Widerstände hängen an einer Batterie von 6,0 V, wie es Abb. 6.33 zeigt. Berührt man mit dem freien Ende des Spannungsmessers nacheinander die Punkte 1 bis 4, so hat man die Anzeigen 0 V, 2,4 V, 3,6 V und 6,0 V zu erwarten.

Nach diesem Verfahren lässt sich jedem Punkt einer an ihre Spannungsquelle angegeschlossenen Schaltung ein **elektrisches Potential** zuordnen, gemessen in der Einheit Volt. Die Differenz der Potentiale zu beiden Seiten eines Widerstandes entspricht genau der Spannung, die über ihm liegt. Auf den ersten Blick könnte man meinen, der Unterschied zwischen Spannung und Potential bestehe darin, dass eine Spannung

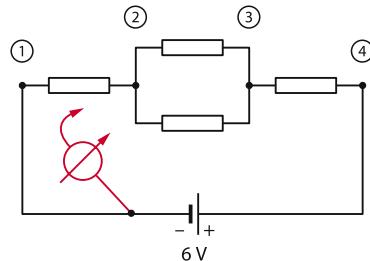


Abb. 6.33. Zur Herleitung des Begriffes *Potential* (Einzelheiten im Text)

immer nur zwischen zwei Punkten auftritt, während das Potential jedem Punkt für sich allein zukommt. Hierin liegt insofern ein Trugschluss, als sich das Potential erst angeben lässt, wenn zuvor das Bezugspotential – willkürlich – festgelegt worden ist. Im Beispiel der Abb. 6.33 wird es auf den Minuspol der Batterie bezogen. Nimmt man stattdessen den Pluspol, so verschieben sich alle Potentiale um -6 V, werden also negativ; nur Punkt 4 geht auf ±0 V. Alle Potentiadifferenzen bleiben dagegen unverändert erhalten. Ein Potential ist die Spannung zwischen Messpunkt und Bezugspunkt.

Dem irdischen Experimentator bietet sich ein schier selbstverständliches Bezugspotential an: das des Erdbodens. Zumal dort, wo sie feucht ist, leitet die Erde so gut, dass dank der großen Stromquerschnitte nennenswerte Spannungen nicht auftreten können; folglich liegen alle Erdpunkte in der Welt praktisch auf gleichem Potential. In sorgfältig eingerichteten Messlaboratorien holt man dieses Erdpotential dadurch herein, dass man eine große Metallplatte im Grundwasser vergräbt und von ihr ein stabiles Kupferkabel zur Schalttafel führt. Im Wohnhaus sind zumal die Rohre der Heizung und der Wasserleitung gut geerdet. Der Mensch ist es normalerweise auch, denn Ledersohlen besitzen eine hinreichende Leitfähigkeit. Mancher Fußbodenbelag aus Kunststoff hat sie aber nicht. Der Mensch, der auf ihm geht, kann sich auf ganz erhebliche Spannungen aufladen und zuckt dann zusammen, wenn er eine Türklinke berührt: Seine Kapazität entlädt sich in einem Funken.

wichtig

Elektrisches Potential: Spannung gegen Bezugspotential, d.h. normalerweise gegen Erdpotential.

Elektronische Schaltungen sind (so gut wie) immer an irgendeiner Stelle geerdet, es muss nicht der Minuspol der Spannungsquelle sein. In der Schaltkizze wird ein Erdungspunkt durch ein besonderes Schaltzeichen markiert (☞ Abb. 6.34). Mehrere Punkte mit dem Erdzeichen liegen auf dem gleichen Potential und stehen darum untereinander in gut leitender Verbindung. Von ihnen aus werden üblicherweise alle anderen Potentiale gemessen.

6.5.3 Das Potentialfeld

Elektrische Felder können im leeren Raum, in Nichtleitern und in Leitern existieren. Nimmt man als Leiter einen flüssigen Elektrolyten, so verschafft man sich die elegante Möglichkeit, elektrische Felder als **Potentialfelder** auszumessen, etwa das Feld einer Batterie, die versehentlich in ein Aquarium gefallen ist. Diese Situation wäre nicht einmal gekünstelt. Sie ähnelt der des Herzens als Spannungsquelle im (elektrisch leitenden) Brustkorb eines Menschen.

Für den Anfang empfiehlt es sich, statt eines Aquariums eine flache Wanne zu benutzen und Elektroden mit senkrechten Grenzflächen in sie einzusetzen (☞ Abb. 6.34), denn damit reduziert sich das grundsätzlich räumliche Problem zu einem ebenen. In die Wanne wird Wasser gefüllt, dem man durch Zusatz von Kochsalz oder Kupfersulfat eine hinreichend hohe elektrolytische Leitfähigkeit gibt. Ähnlich wie bei einem Netzwerk kann man jetzt mit einem hochohmigen Spannungsmesser und einer in den Elektrolyten eingetauchten **Potentialsonde** die Spannungen zwischen der geerdeten Elektrode und jedem Punkt im **elektrolytischen Trog** messen und so die Potentialverteilung

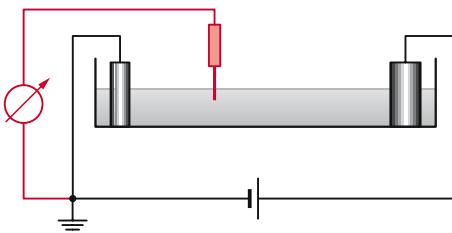


Abb. 6.34. Elektrolytischer Trog. Zwischen den Metall-elektroden baut die Spannungsquelle im Elektrolyten (Wasser mit gelöstem *Leitsalz*) ein elektrisches Feld auf, dessen Potentialverteilung mit Spannungsmesser und *Potentialsonde* Punktweise ausgemessen werden kann. Links unten: Schaltsymbol der Erdung

kartographieren. Landmesser verbinden in ihren Karten Punkte gleicher Höhe über dem Meeresspiegel durch *Höhenschichtlinien* (☞ Abb. 6.35). Ganz analog verbindet man Punkte gleichen elektrischen Potentials mit *Äquipotentiallinien*. ☞ Abbildung 6.36 zeigt ein ausgemessenes Beispiel.

Es ist nicht schwer, Äquipotentiallinien rein qualitativ zu zeichnen. Metallelektronen haben im Vergleich zum Elektrolyten hohe Leitfähigkeit und erlauben darum

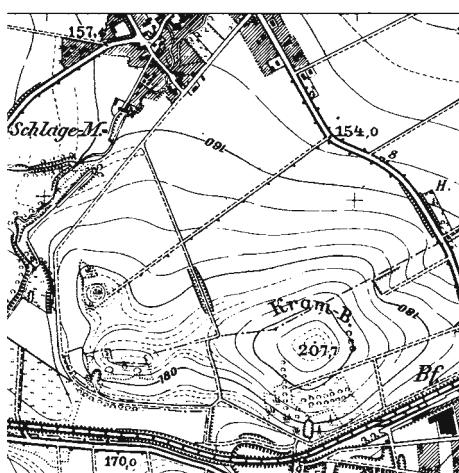


Abb. 6.35. Landkarte mit Höhenschichtlinien. Geschlossene bezeichnen Hügel wie den Kram-Berg. Das Gelände ist umso steiler, je dichter die Linien beieinander liegen. (Grundlage: Topographische Karte 1:25.000, Blatt 4425 Göttingen; Druck mit Genehmigung des Niedersächsischen Landesverwaltungsamtes – Landesvermessung – vom 26.2.1974)

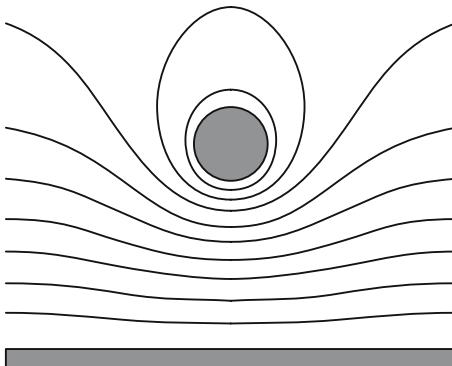


Abb. 6.36. Äquipotentiallinien, in einem flachen elektrolytischen Trog mit einer Potentialsonde ausgemessen

keine ernsthaften Spannungsabfälle: Die Grenzen der Elektroden sind Äquipotentiallinien. Weiterhin bemühen sich benachbarte Potentiallinien, so gut es geht, zueinander parallel zu laufen. Man braucht also nur einen glaubhaften Übergang von der Begrenzung der einen Elektrode zu der Begrenzung der anderen zu skizzieren.

Im räumlichen Aquarium treten an die Stelle der Linien **Äquipotentialflächen**, auszumessen mit einer punktförmigen, also gleich hinter der freien Spitze isolierten Potentialsonde. Auch in der flachen Wanne gibt es genau genommen nur Äquipotentialflächen; weil sie aber senkrecht stehen, erscheinen sie dem Blick von oben perspektivisch verkürzt als Linien.

Hügel im Gelände werden auf der Landkarte durch ringförmig geschlossene, konzentrische Höhenschichtlinien dargestellt. Auf der Seite der steileren Flanke liegen die Linien dichter. Vor kritischen Gefällstrecken auf der Straße warnen Verkehrsschilder (Abb. 6.37), und das unter Angabe des Gefälles in Prozent, d.h. in m/m (nämlich Meter Höhenunterschied durch Meter horizontaler Entfernung). Man kann dieses Gefälle den Höhenlinien der Karte entnehmen. Ganz analog darf man auch die elektrischen Potentiallinien als „Höhenschichtlinien“ eines „Potentialgebirges“ ansehen und dieses Gebirge in Gips modellieren; Abb. 6.38 zeigt das Gebirge des elektrolytischen Troges zu

Abb. 6.36 als perspektivisch gezeichnetes Beispiel. Wie beim geographischen Berg gilt auch beim Potentialberg: je dichter die Linien, desto steiler das Potentialgefälle (jetzt in V/m zu messen). Längs der Linien ist das Potential konstant, sein Gefälle gleich null. Konsequenterweise herrscht quer zu den Linien steilste Gefälle. Für jeden Punkt im Trog lassen sich Richtung und Steilheit dieses größten Gefälles angeben: Es ist die elektrische Feldstärke \vec{E} .

In Richtung des elektrischen Feldes fließt der (konventionelle) Strom im Elektrolyten. Man kann seine Stromfäden nachzeichnen: Sie müssen immer senkrecht auf den Äquipotentialflächen stehen, also auch senkrecht auf den Elektroden. Sie können sich nicht überschneiden, denn sonst müsste ein Punkt am Hang nach zwei Richtungen zugleich „stärkstes Potentialgefälle“ besitzen. Die Stromfäden entsprechen den sog. **Feldlinien**, mit denen sich auch komplizierte Felder anschaulich darstellen lassen. In Abb. 6.39 sind sie in blauer Farbe zu den Potentiallinien der Abb. 6.36 hinzugezeichnet. Sie markieren aber nur die Richtung des Feldes; sie ist zugleich die Richtung der elektrischen Kraft auf eine positive Probeladung. Insofern darf man auch von einem **Kraftfeld** sprechen. Über den Betrag der Feldstärke sagt ein Feldlinienbild nur qualitativ etwas aus: Dort, wo sich die Feldlinien drängen, drängen sich auch die Potentialflächen, dort herrscht ein vergleichsweise starkes Feld. Zuweilen spricht man in



Abb. 6.37. Verkehrsschild vor einer Gefällstrecke; Angabe des Gefälles in Prozent, d.h. in m/m

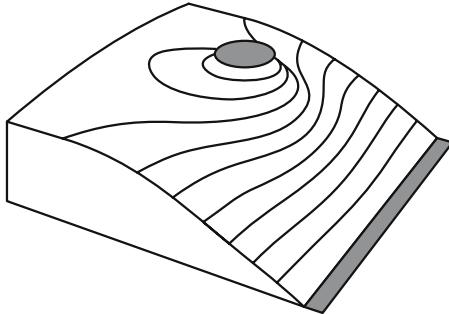


Abb. 6.38. Perspektivische Zeichnung des Potentialgebirges von Abb. 6.38

diesem Zusammenhang von der „Feldliniendichte“, als könne man sie in „Feldlinien pro Quadratzentimeter“ messen und damit ein Maß für den Betrag der Feldstärke bekommen. Das stimmt aber nicht, denn es bleibt einem jeden überlassen, wie dicht er seine Feldlinien zeichnen will. Auf jeden Fall existiert das Feld auch zwischen ihnen.

wichtig

Feldlinien stehen senkrecht auf Äquipotentialflächen.

Der Verlauf von Feld- und Potentiallinien hängt nur von der Form der Elektroden ab, nicht von den Spannungen zwischen ihnen und nicht von der Leitfähigkeit δ des Dielektrikums. Felder gibt es auch im Vakuum. Einfluss haben allerdings Einschlüsse im Dielektrikum: Feldlinien weichen isolierenden Einschlüssen aus, Potentialflächen gut leitenden Einschlüssen (☞ Abb. 6.40).

Der Vektor \vec{E} zeigt in die Richtung des größten Potentialgefälles. Mathematisch nennt man so etwas einen **Gradienten** und schreibt

$$\vec{E} = -\text{grad } U.$$

Hier handelt es sich um eine besondere Form der Differentiation, die zu einem Vektor führt. Die Umkehrung ist das sog. *Linienintegral*. Es wird längs eines Weges \vec{s} ausgeführt, der im Grundsatz beliebig krumm sein darf. Im elektrischen Feld liefert er die Potentialdifferenz ΔU zwischen zwei Punkten \vec{s}_1 und \vec{s}_2 :

$$\Delta U = \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}.$$

Dabei spielt es keine Rolle, auf welchem Wege man von \vec{s}_1 nach \vec{s}_2 kommt. Das ist aber eine Spezialität des Potentialfeldes; es gilt nicht generell für alle Linienintegrale.

Oft darf man sich die Mathematik dadurch erleichtern, dass man kurzerhand und skalar

$$E = -dU/dx$$

und als Umkehrung

$$\Delta U = \int_{x_1}^{x_2} E(x) dx$$

schreibt. Man behält dann gewissermaßen im Hinterkopf: x hat die Richtung einer Feldlinie.

wichtig

Elektrische Feldstärke
 $\vec{E} = -\text{grad } U$; **Betrag** $E = -dU/dx$.

Eine positive Probeladung Q möchte der Feldstärke \vec{E} folgen. Zwingt man sie, \vec{E} entgegenzugehen, so kostet das die mechanische Arbeit

$$\Delta W = - \int_{x_1}^{x_2} F(x) \cdot dx = -Q \int_{x_1}^{x_2} E(x) \cdot dx = Q \cdot \Delta U$$

Die Probeladung gewinnt sie als potentielle Energie, die bei Rückkehr wieder abgeliefert werden kann. Daher der Name „Potential“. Der Nullpunkt darf bei jeder potentiellen Energie willkürlich definiert werden. Beim Potential gilt dasselbe. Für Potential- und Energiedifferenzen spielt der Nullpunkt keine Rolle.

wichtig

Befindet sich eine Ladung Q auf dem elektrischen Potential U , so besitzt sie die potentielle Energie $W_{\text{pot}} = Q \cdot U$.

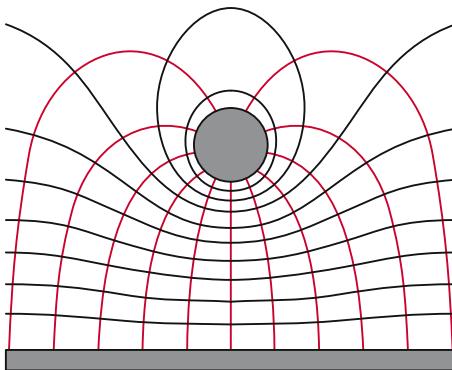


Abb. 6.39. Elektrodenanordnung der Abb. 6.38 mit Potentiallinien (schwarz) und Feldlinien (rot)

Rechenbeispiel 6.10: Elektrolytischer Trog

Nehmen wir an, zwei benachbarte Äquipotentiallinien in Abb. 6.39 repräsentieren einen Potentialunterschied von 2 V. Wie groß ist dann die Spannung zwischen den Elektroden? Angenommen, die Abbildung zweigt den Trog in Originalgröße, welchen Wert hat in etwa die Feldstärke an der unteren Elektrode?

Lösung: Zwischen den Elektroden sind 9 Äquipotentiallinien und 10 Zwischenräume, also eine Spannung von 20 V. Der Abstand zwischen der unteren Elektrode und der ersten Äquipotentiallinie beträgt etwa 3,5 mm. Das entspricht einer Feldstärke von

$$E = \frac{2 \text{ V}}{0,0035 \text{ m}} = 571 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

6.5.4 Kräfte zwischen Ladungen

Setzt man zwei punktförmige Ladungen nebeneinander, so stoßen sie sich entweder ab oder sie ziehen sich an. Es gibt nämlich zwei verschiedene Sorten von Ladungen, positive und negative, entsprechend kann auch die Ladungsmenge Q positiv oder negativ sein. „Gleich und Gleich gesellt sich gern“ gilt hier gerade nicht; gleichnamige Ladungen

stoßen sich ab, Ladungen mit verschiedenen Vorzeichen ziehen sich an. Die Kräfte zwischen ihnen sind umso stärker, je kürzer der Abstand r zwischen ihnen ist. Ganz ähnlich wie beim Gravitationsgesetz gilt für die **Coulomb-Kraft** zwischen zwei Ladungen Q_1 und Q_2 :

$$F_C = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}.$$

Hier erscheint die elektrische Feldkonstante
 $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}$.

Sie ist eine Naturkonstante. Dass in der obigen Gleichung noch ein Faktor $1/4\pi$ eingefügt ist, erweist sich in späteren Formeln als praktisch.

Die Kräfte liegen parallel zur Verbindungsline zwischen den Ladungen und weisen bei ungleichnamigen Ladungen aufeinander zu, bei gleichnamigen voneinander weg.

wichtig

Coulomb-Gesetz:
Zwischen zwei Punktladungen Q_1 und Q_2 im Abstand r herrscht die Coulomb-Kraft

$$F_C = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}.$$

Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab,
ungleichnamige ziehen sich an.

Im Bild der elektrischen Felder sagt man, die eine Ladung (zum Beispiel Q_1) erzeugt ein elektrisches Feld und auf die andere Ladung wirkt in diesem Feld eine Kraft. Die felderzeugende Ladung ist immer die, die

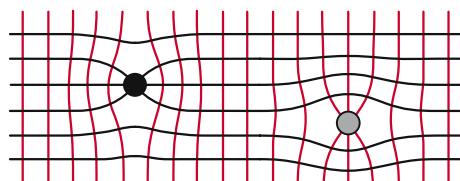


Abb. 6.40. Feldlinien (rot) und Potentiallinien (schwarz) um einen gut leitenden (rechts) und einen isolierenden Einschluss (links)

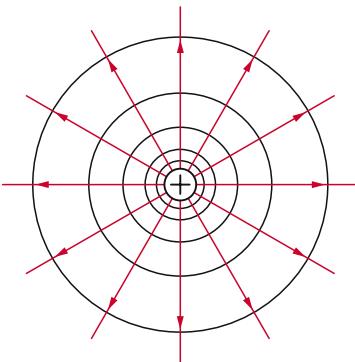


Abb. 6.41. Die Feldlinien (rot) des Monopols, notwendig zur Berechnung der Coulomb-Kraft zwischen zwei Ladungen; Potentiallinien schwarz

die Kraft ausübt, die man betrachten will. Ist die felderzeugende Ladung Q_1 allein auf der Welt, so laufen die Feldlinien **radial** auseinander (☞ Abb. 6.41), und die Potentialflächen bilden konzentrische Kugeln um Q_1 . Die Feldstärke im Abstand r hat den Betrag:

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2},$$

denn so ergibt sich genau die Coulomb-Kraft, wenn E mit der zweiten Ladung Q_2 multipliziert wird. Das elektrische Potential in der Umgebung der punktförmigen Ladung ergibt sich aus einer Integration der Gleichung für die Feldstärke:

$$U(r) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q_1}{r}.$$

Um das Potential absolut anzugeben, muss ein Nullpunkt willkürlich festgelegt werden. Man hat sich darauf geeinigt, das Potential in unendlicher Entfernung von Ladungen ($r = \infty$) Null zu setzen, wie es die obige Gleichung ja ergibt.

Zwei ungleichnamige Ladungen mit gleichem Betrag q , die auf irgendeine Weise im Abstand \vec{l} voneinander gehalten werden, nennt man einen **Dipol** und ordnet ihnen das

$$\text{Dipolmoment } \vec{p} = q \cdot \vec{l}$$

zu (☞ Abb. 6.42). Der Verbindungsstab wird auf Druck beansprucht, denn die beiden

Ladungen ziehen sich an. Ihr Feldlinienbild suggeriert dies geradezu (☞ Abb. 6.43). In diesem Feldlinienbild sind zugleich auch die Äquipotentiallinien eingezeichnet, die überall senkrecht zu den Feldlinien stehen. Dieses Feldlinienbild beschreibt die Kraft, die auf eine dritte Probeladung ausgeübt wird. Die Kraft auf eine solche Probeladung ergibt sich überall als Vektorsumme der von den beiden Ladungen des Dipols einzeln ausgeübten Kräfte (☞ Abb. 6.44). Deshalb ergibt sich dieses Feldlinienbild, indem man an jedem Ort die Feldvektoren der Einzelladungen addiert.

Viele elektrisch neutral, also ungeladen wirkende Moleküle, wie z.B. das des Wassers, erweisen sich als Dipole (☞ Abb. 6.45). In einem äußeren elektrischen Feld versucht ein Dipol, sich parallel zu dessen Feldlinien zu stellen, denn auf seine beiden Ladungen wirkt ein

$$\text{Drehmoment } \vec{T} = \vec{l} \times \vec{F} = q \cdot \vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Hier wird stillschweigend vorausgesetzt, dass \vec{l} klein genug ist, um beide Ladungen das gleiche \vec{E} spüren zu lassen. Aber auch im inhomogenen Feld richtet sich ein Dipol aus, und zwar so, dass zusätzlich noch eine zum Feldgradienten dE/dx proportionale Kraft

$$F_d = q \cdot \Delta E = q \cdot l \cdot dE/dx = p \cdot dE/dx$$

auf ihn wirkt, die ihn immer in Richtung höherer Feldstärke zieht (☞ Abb. 6.46). Folge: Schwimmen in einer wässrigen Lösung Ionen herum, z.B. die des NaCl, so bilden die Wassermoleküle *Hydrathüllen* (s. Kap. 5.3.3); um die Na^+ -Ionen drängeln sie sich mit dem O-Atom voran, um die Cl^- -Ionen umgekehrt.

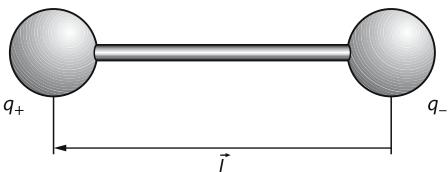


Abb. 6.42. Schematische Darstellung eines Dipols mit Dipolmoment $p = q \cdot l$

wichtig

Zwei entgegengesetzte gleiche Ladungen $+q$ und $-q$ im Abstand / bilden einen elektrischen Dipol, Dipolmoment $p = q \cdot l$. Dipol im elektrischen Feld: Drehmoment $\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}$, Kraft $F = p \cdot dE/dx$ in Richtung steigender Feldstärke.

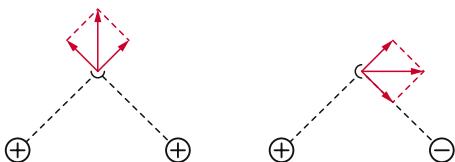


Abb. 6.44. Die Kraft auf eine Probeladung im Feld eines Dipols ergibt sich als Summe der von den Einzelladungen ausgeübten Kräfte. So entsteht das Feldlinienbild der Abb. 6.43

Rechenbeispiel 6.11: Die Pyramiden hochheben

Ein Stück Tafelkreide enthält etwa 10^{21} Moleküle. Angenommen, wir könnten jedem hundertstem Molekül ein Elektron entziehen und diese Elektronen einem zweiten Stück Tafelkreide zuführen. Mit welcher Kraft würden sich die beiden Stücke anziehen, wenn sie ein Meter voneinander entfernt wären? (Ein Elektron trägt die Elementarladung $e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}$ As; Kapitel 6.6.3).

Lösung: Die Ladung auf einem Stück Kreide wäre 1,6 As. Dann ist die Kraft:

$$F_C = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(1,6 \text{ As})^2}{(1 \text{ m})^2} = 2,3 \cdot 10^{10} \text{ N.}$$

Das reicht locker, um die Pyramiden in Ägypten hochzuheben. Die Größe dieser

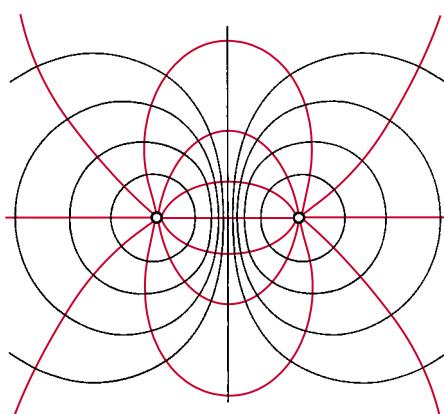


Abb. 6.43. Die Feldlinien (rot) des Dipols suggerieren die Anziehung ungleichnamiger Ladungen; Potentiallinien schwarz

Kraft verhindert zugleich, dass sie praktisch auftritt: Es gelingt nicht, ein Kreidestück tatsächlich derart aufzuladen.

Rechenbeispiel 6.12: Gewaltige Energie

Unsere beiden Stück Tafelkreide ziehen sich an. Wie viel Arbeit können sie leisten, wenn wir sie vom Abstand 1 m auf 0,5 m zusammenrücken lassen?

Lösung: Für die Arbeit gilt gemäß letztem Kapitel: $\Delta W = Q \cdot \Delta U$. Wir denken uns also die eine Kreide bewegt im durch die andere Kreide erzeugten Potential. Die Potentialdifferenz zwischen ein Meter Abstand und einem halben Meter Abstand beträgt:

$$\Delta U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{0,5 \text{ m}} - \frac{1}{1 \text{ m}} \right) = 1,44 \cdot 10^{10} \text{ V.}$$

Damit ergibt sich die Arbeit zu $\Delta W = 4,6 \cdot 10^{10} \text{ J} = 1,28 \cdot 10^4 \text{ kWh}$. Das ist etwa der halbe Jahresbedarf einer Familie an elektrischer Energie.

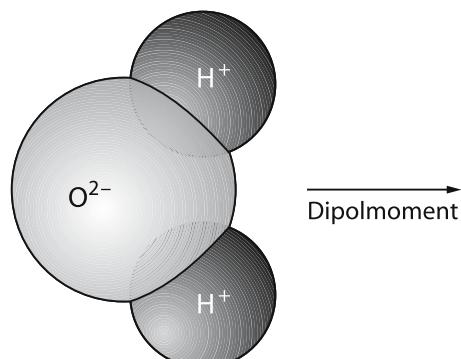


Abb. 6.45. Wassermolekül, schematisch

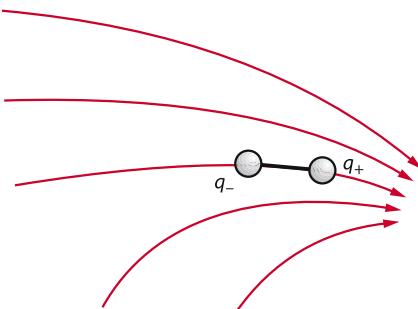


Abb. 6.46. Dipol im inhomogenen Feld

6.5.5

Das Feld im Kondensator

So leicht sich Feld- und Potentiallinien qualitativ zeichnen lassen, die quantitative Rechnung erfordert einen mathematischen Aufwand, der nur in besonders einfachen Fällen einfach bleibt. Ein solcher einfacher Fall ist der flache Plattenkondensator (s. Abb. 6.10). Im fast **homogenen Feld** laufen die Feldlinien parallel zueinander geradewegs von einer Elektrode zur anderen; die Potentiallinien stehen senkrecht auf ihnen, also parallel zu den Elektroden (Abb. 6.47). Marschiert man längs einer Feldlinie von links nach rechts, so wächst das Potential U linear an, mit konstanter Steigung also, und zwar von null bis zur Batteriespannung U_0 . Die Länge der Feldlinien entspricht dem Plattenabstand d . Demnach betragen Potentialgefälle und Feldstärke

$$E_{\text{hom}} = U_0/d,$$

wie schon im Metalldraht.

wichtig

Homogenes elektrisches Feld im flachen Plattenkondensator:

$$\bar{E}_0 = \text{const.}; \text{ Betrag } E_0 = U/d.$$

Erzeugt wird dieses Feld von den positiven und negativen Ladungen auf den Metallplatten. Je mehr Ladung auf den Platten, je dichter die Ladungen auf den Platten gedrängt,

umso größer die Feldstärke. Es leuchtet ein, dass die Feldstärke wohl proportional zu der Flächendichte Q/A der Ladungen auf den Platten mit der Fläche A ist. Tatsächlich gilt:

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{A}.$$

Mit dieser Beziehung kann nun auch die Kapazität des Kondensators aus seiner Geometrie berechnet werden:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 \cdot E \cdot A}{E \cdot d} = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}.$$

Die Kapazität ist also umso größer, je größer die Plattenfläche und je kleiner der Plattenabstand. Dies verwundert nicht.

Zum Glück der Hersteller von Kondensatoren gibt es Isolatoren, die für technische Zwecke weit besser geeignet sind als Luft. Sie haben die (an dieser Stelle noch nicht erklärbare) Eigenschaft, die Kapazität eines Plattenkondensators um einen Faktor ϵ_r gegenüber einem Luftkondensator gleicher Abmessung zu vergrößern: $C = \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot A/d$. Die Zahl ϵ_r ist eine Materialkenngroße des Dielektrikums, sie wird **Dielektrizitätskonstante** oder **Permittivität** genannt. Werte um 3 sind keine Seltenheit. Speziell gezüchtete Festkörper, die sog. *Ferroelektrika*, bringen es sogar auf ϵ_r -Werte um 1000.

Wie Abb. 6.47. zeigt, ist das Feld im Plattenkondensator am Rand nicht ganz homogen. Insofern gelten alle Beziehungen auch nur näherungsweise. Am Rand dringt das Feld etwas in den Außenraum außerhalb der Platten. Im Außenraum ist das Feld aber sehr klein, da sich die Felder der negativen Ladungen auf der einen Platte und die der positiven Ladungen auf der anderen Platte außen aufheben. Von außen betrachtet ist der Kondensator elektrisch neutral.

Rechenbeispiel 6.13: Große Platten

Welche Plattenfläche müsste ein Luftkondensator haben, wenn er bei 1 mm Plattenabstand 1 μF Kapazität haben soll?

Lösung: Fläche

$$A = \frac{C \cdot d}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0} = \frac{10^{-6} \text{ As/V} \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1,0 \cdot 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C/Vm}} = 110 \text{ m}^2.$$

Rechenbeispiel 6.14: Kraft zwischen den Platten

Ein Demonstrationskondensator wie in Abb. 6.10 hat eine Plattenfläche von $A = 0,28 \text{ m}^2$. Der Abstand der Platten betrage 1 mm und er sei auf eine Spannung von 100 V aufgeladen. Mit welcher Kraft ziehen sich die Platten an? Achtung! Die Coulomb-Kraft berechnet sich nach der Feldstärke, die am Ort der Probeladung herrschte, bevor diese eingebracht wurde (siehe Mitte des Kap. 6.5.1). „Probeladung“ ist hier die Ladung der zweiten Kondensatorplatte. Bevor sie eingebracht wurde, war die andere Kondensatorplatte allein auf der Welt und erzeugte ein Feld mit nur halber Feldstärke wie im Kondensator.

Lösung: Die Feldstärke im Kondensator ist $E = U/d = 100 \text{ V}/0,001 \text{ m} = 10^5 \text{ V/m}$. Die Ladung auf einer Platte ist $Q = \epsilon_0 \cdot A \cdot E = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ As}$. Die Kraft berechnet sich mit der halben Feldstärke: $F_C = Q \cdot \frac{1}{2}E = 0,012 \text{ N}$.

6.5.6

Energie des elektrischen Feldes

Im Kap. 6.2.5 wurde die im Kondensator gespeicherte Energie berechnet. Es hat sich als sehr nützliche und wichtige Vorstellung erwiesen, dass diese Energie im elektrischen Feld im Kondensator gespeichert ist. Man sagt also: Dort, wo ein elektrisches Feld ist, ist auch Energie. Auch der ansonsten „leere“ Raum, der keine Materie enthält, kann doch Energie enthalten, sofern dort ein elektrisches Feld herrscht. Diese zunächst etwas merkwürdige Vorstellung wird erst plausibel, wenn man schon einmal im Vorgriff auf die Optik an elektromagnetische Wellen (also Licht) denkt. Diese bestehen aus elektrischen und magnetischen Feldern und pflanzen sich

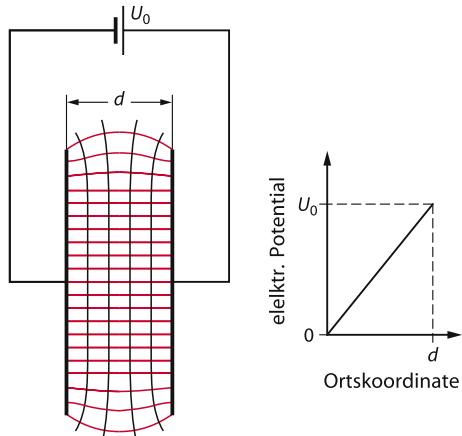


Abb. 6.47. Feldlinien (rot) und Schnitte von Potentialflächen (schwarz) im weitgehend homogenen Feld eines Plattenkondensators und der dazugehörige Verlauf des Potentials auf einer geraden Feldlinie

durch den leeren Raum fort. Jeder, der schon mal die Erwärmung seiner Hand gespürt hat, wenn er sie nah an eine Glühbirne hält, weiß, dass Licht Energie transportiert, eben durch den leeren Raum. Und dies kann ja nur sein, wenn in diesen elektrischen und magnetischen Feldern Energie steckt. Beschreiben kann man das mit einer **Energiedichte** (Energie pro Volumen) des Feldes. Für das elektrostatische Feld können wir die Energiedichte w mit Hilfe der Formeln für den Kondensator ausrechnen:

Die Energie im geladenen Kondensator ist:

$$W = \frac{1}{2}U \cdot Q.$$

Diese steckt im Feld mit der Feldstärke:

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}.$$

Dieses Feld herrscht nur im Inneren des Kondensators zwischen den Platten. Das ist bei einer Plattenfläche A und einem Plattenabstand d ein Volumen von:

$$V = A \cdot d.$$

Also ergibt sich für die Energiedichte des Feldes im Kondensator:

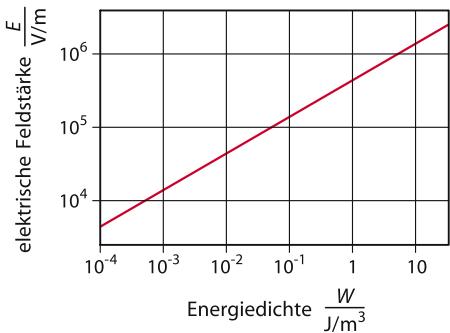


Abb. 6.48. Zusammenhang zwischen Energiedichte und Feldstärke bei einem elektrischen Feld in Luft ($\epsilon_r = 1,00$); zur Sicherheit sei daran erinnert, dass Wattsekunde und Joule gleich sind; das Diagramm endet bei der Durchbruchsfeldstärke trockener Luft

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\frac{1}{2} U \cdot Q}{A \cdot d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot A} \cdot \frac{U}{d} \\ = \frac{1}{2} \epsilon_0 \cdot E \cdot \frac{U}{d} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2,$$

denn es ist $E = U/d$. Ist noch ein Isolator mit einer Dielektrizitätskonstanten ϵ_r zwischen den Platten, so wird diese Energiedichte noch etwas modifiziert:

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_r \cdot \epsilon_0 \cdot E^2.$$

Die Energie im Feld steigt also quadratisch mit der Feldstärke (Abb. 6.48)

Felder durch die Wirkung der Influenz abzuschirmen. Ladungsträger sind hier die Elektronen; jedes von ihnen trägt eine (negative) Elementarladung, die kleinste Ladung, die überhaupt in der Natur vorkommt.

6.6.1 Influenz

Wenn ein Körper nach außen elektrisch neutral erscheint, so heißt dies nicht, dass er keine elektrischen Ladungen enthielt, sondern nur, dass sich bei ihm positive und negative Ladungen gerade kompensieren. Elektrische Ströme transportieren Ladungen. In elektrischen Leitern müssen deshalb interne Ladungsverschiebungen möglich sein; besonders leicht sind sie es in den gut leitenden Metallen. Das macht es möglich, zwei Metallplatten entgegengesetzt aufzuladen, ohne sie mit einer Spannungsquelle in Berührung zu bringen.

Ganz ohne Spannungsquelle geht es natürlich nicht. Sie wird aber nur gebraucht, um zwischen zwei großen Kondensatorplatten ein elektrisches Feld E_0 zu erzeugen (Abb. 6.49a). Bringt man jetzt zwei kleinere Platten in dieses Feld, so geschieht so lange nichts, wie sie nicht leitend miteinander verbunden werden. Dann aber folgen die verschiebbaren Ladungen den Coulomb-Kräften. Sie erzeugen im Drahtbügel einen Strom (Abb. 6.49b), der gerade so lange anhält, bis beide Platten auf gleichem Potential angekommen sind, bis also kein Feld mehr zwischen ihnen liegt (Abb. 6.49c). Anders ausgedrückt: Die Ladungen auf den kleinen Platten erzeugen ein Gegenfeld exakt in der Größe, dass es das Hauptfeld E_0 kompensiert. Das Gegenfeld besteht zwischen den Platten weiter, wenn man sie aus dem Hauptfeld herauszieht (Abb. 6.49d). Diese Ladungstrennung durch ein äußeres elektrisches Feld nennt man **Influenz**.

6.6 Materie im elektrischen Feld

Einleitung

Jeder Körper enthält elektrische Ladungen beiderlei Vorzeichens; enthält er sie in gleichen Mengen, so wirkt er nach außen elektrisch neutral. Sind interne Ladungsverschiebungen leicht möglich, so ist der Körper ein guter elektrischer Leiter: Ströme transportieren Ladungen, den Transport besorgen bewegliche Ladungsträger. Deren Anzahldichte, Ladung und Beweglichkeit bestimmen die Leitfähigkeit einer Substanz. Die hohe Leitfähigkeit der Metalle erlaubt, störende elektrische

wichtig
Influenz: Ladungstrennung durch ein äußeres elektrisches Feld.

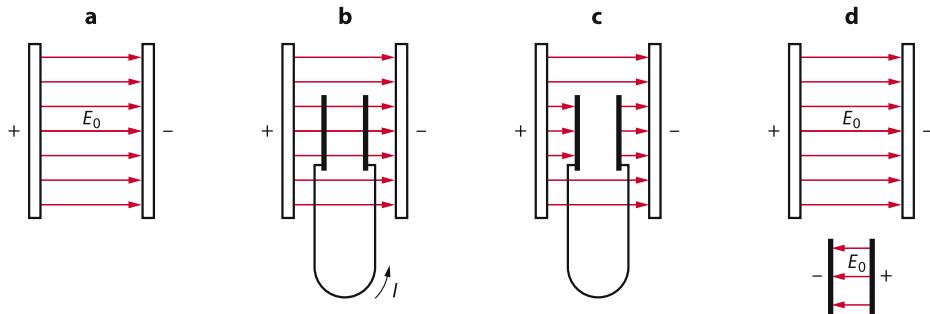


Abb. 6.49a–c. Der Influenzversuch, schematisch. In das (nicht notwendigerweise homogene) Feld E_0 (a) werden zwei elektrisch leitend verbundene kleine Platten gebracht (b). Folge: Ladungstrennung im Feld E_0 , bis beide Platten auf gleichem Potential liegen und zwischen ihnen kein Feld mehr besteht (c). Trennt man die Platten im Feld und zieht man sie heraus in den feldfreien Außenraum, so steht jetzt zwischen ihnen ein Feld mit dem Betrag E_0 , aber in entgegengesetzter Richtung

Die Platten des Luftkondensators müssen beim Influenzversuch nur das äußere Feld liefern. Im Übrigen sind sie unbeteiligt, sie verlieren insbesondere auch keine Ladung. Nun kann es nicht verboten sein, die beiden kleinen Platten, nachdem man sie aus dem Luftkondensator entfernt hat, wieder elektrisch zu verbinden. Dann fließt ein Stromstoß, der Joule'sche Wärme erzeugt. Erlaubt die Influenz etwa, ein Perpetuum mobile zu konstruieren? Keineswegs! Wenn man die Platten aus dem Feld herauftut, muss man mit seinen Muskeln gegen elektrostatische Kräfte anarbeiten.

Technische Geräte zum Ausmessen schwacher elektrischer Felder wiederholen den Influenzversuch in rascher Folge und bestimmen den dadurch entstehenden Wechselstrom. Ganz einfach ist das nicht, es funktioniert aber immer noch besser als die Messung der Feldstärke mit Hilfe einer direkten Bestimmung von Coulomb-Kräften.

findliche Messinstrumente von störenden elektrischen Feldern **abschirmen**. Die Dose darf Löcher haben, sie darf sogar zu einem Käfig aus Maschendraht degenerieren (**Faraday-Käfig**). Ein äußeres Feld reicht dann zwar ein wenig durch die Maschen hindurch, aber eben doch nicht sehr weit. Das Deutsche Museum in München besitzt einen derartigen Käfig, groß genug, einen sitzenden Menschen aufzunehmen. Er wird zwischen die Elektroden einer Hochspannungsanlage gehängt: Meterlange Entladungen schlagen oben und unten in den Käfig hinein (☞ Abb. 6.50). Der Mensch darin registriert dies nur optisch und akus-



Abb. 6.50. Faraday-Käfig zum Abschirmen eines Menschen vom Feld einer Hochspannungsanlage

6.6.2 Elektrische Abschirmung

Solange beim Influenzversuch die beiden kleinen Platten elektrisch miteinander verbunden sind, herrscht zwischen ihnen kein Feld, gleichgültig, was außen geschieht. Das gilt erst recht für den Innenraum einer Blehdose: Mit ihrer Hilfe kann man emp-

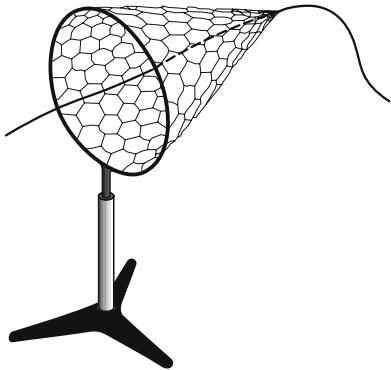


Abb. 6.51. Faradays Drahtnetz: Ladungen lassen sich immer nur auf der Außenseite nachweisen, auch wenn man das Netz mit Hilfe des Seidenfadens umstülpt

tisch; elektrisch spürt er nichts, denn er sitzt ja im feldfreien Raum. Wehe nur dem, der eine neugierige Nase durch die Maschen nach außen steckt!

Bekannt wurden die Käfige durch Michael Faraday (1791–1867). Er hatte sich seinerzeit gewundert, dass er Ladungen immer nur auf der Außenseite eines konischen Drahtnetzes nachweisen konnte, selbst dann, wenn er es mit Hilfe eines an der Spitze befestigten Seidenfadens umstülpte (☞ Abb. 6.51). Die Coulomb-Kräfte zwingen bewegliche Über- schussladungen, sich so weit voneinander zu entfernen, wie ihnen das geometrisch möglich ist. Bei Metallkörpern sitzen sie deshalb immer auf der Außenseite. Innen können sie sich auch dann nicht halten, wenn sie gewaltsam dorthin gebracht werden. Dies nutzt der *van-de-Graaff-Generator* zur Erzeugung extrem hoher Gleichspannungen (☞ Abb. 6.52). Man sprüht zunächst Ladungen aus den Zinken eines Kamms auf ein isolierendes Förderband und schleppt sie dann rein mechanisch in eine große Hohlkugel hinein. Dort werden sie mit Metallbürsten wieder abgenommen: Sobald sie einen Weg zur Oberfläche der Kugel finden, können sie sich im Innern ja nicht halten. Dieses ist so feldfrei, dass man dort auch ein kleines Laboratorium mit empfindlichen Instrumenten einrichten kann. Das hohe Potential gegen Erde stört den

Experimentator nicht, genauso wenig wie den Vogel auf der Hochspannungsleitung. Das Potential allein ist harmlos und die Definition seines Nullpunktes reine Willkür. Gefährlich werden, wenn überhaupt, immer nur Potentialdifferenzen.

6.6.3

Die Elementarladung

Materie füllt den Raum nicht kontinuierlich aus, sie besteht aus diskreten Teilchen, aus Molekülen und Atomen nämlich. Diese Vorstellung ist heute so allgemein verbreitet, dass kaum jemand noch fragt, woher man das eigentlich weiß. Eines der grundlegenden Experimente wurde wenige Jahre vor dem Ersten Weltkrieg von R.A. Millikan (1868–1953) ausgeführt, mit dem berühmten *Öltröpfchenversuch*.

Aus einem Zerstäuber wird Öl zu feinen Tröpfchen versprüht, die sich nur noch mit dem Mikroskop einzeln beobachten lassen. Für sie ist Luft ein zähes Medium: Sie fallen nicht, sie sinken mit konstanter Geschwindigkeit zu Boden. Nach dem Stokes-Gesetz (s. Kap. 3.5.1) kann man Radius und Masse eines einzelnen Tröpfchens aus seiner Sinkgeschwindigkeit bestimmen, wenn man die Dichte des Öls und die Viskosität

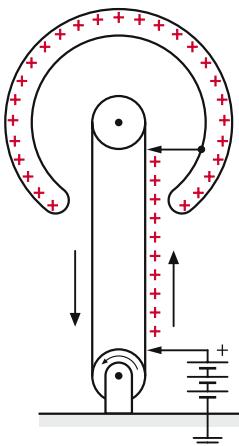


Abb. 6.52. Van-de-Graaff-Generator, Einzelheiten im Text

der Luft kennt. Millikan brachte nun seine Tröpfchen in ein vertikales elektrisches Feld. Folge: Einige sanken schneller, andere langsamer, wieder andere kletterten sogar nach oben. Deutung: Die Tröpfchen tragen unterschiedliche elektrische Ladungen; der nach unten zeigende Gewichtskraft überlagert sich eine Coulomb-Kraft, die je nach Ladung aufwärts oder abwärts zeigen kann (☞ Abb. 6.53). Millikan beobachtete nun immer wieder, dass einzelne Tröpfchen spontan ihre Geschwindigkeit änderten, plötzlich und sprunghaft. Ursache konnte nur eine Änderung der Ladung sein; sie musste ebenso spontan, plötzlich und sprunghaft erfolgen. Aus den Geschwindigkeiten vor und nach dem Sprung berechnete Millikan die jeweilige Ladungsänderung. Er fand immer den gleichen Betrag oder ein ganzzahliges Vielfaches von ihm, dies aber in beiden Richtungen. Demnach gibt es eine kleinste elektrische Ladung, die nicht unterschritten werden kann, die

$$\text{Elementarladung } e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C},$$

die zuweilen auch als e ohne Index geschrieben wird. Als fundamentale Naturkonstante ist sie inzwischen unzählige Male mit hoher Präzision ausgemessen worden. Kein Experimentator hat bisher eine kleinere Ladung zuverlässig beobachtet. Wenn sich aber jede elektrische Ladung aus Elementarladungen zusammensetzt, dann muss für die Materie, die ja Ladungen tragen kann, Ähnliches gelten: Sie setzt sich ebenfalls aus individuellen Teilchen zusammen, aus Atomen der chemischen Elemente.

wichtig

Millikans Öltröpfchenversuch:
Jede Ladung ist ein ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung $e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Der Aufbau der Atome wird später noch ausführlich behandelt werden. So viel lässt sich aber jetzt schon sagen: Die Masse eines Atoms steckt im Wesentlichen im *Atomkern*;



Abb. 6.53: Millikan-Versuch. Ein Öltröpfchen wird von seiner Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ nach unten gezogen und wegen seiner Ladung Q von der elektrischen Kraft $F_E = Q \cdot E$ des elektrischen Feldes nach oben

er ist positiv elektrisch geladen. Die Anzahl seiner Elementarladungen, die *Kernladungszahl*, bestimmt die Anzahl der Elektronen in der *Hülle* des Atoms. Jedes *Elektron* trägt eine negative Elementarladung. Sind alle Hüllenelektronen vorhanden, ist das Atom elektrisch *neutral*, fehlt eines oder setzt sich ein überzähliges in die Hülle, so entsteht ein positives oder negatives *Ion*.

Rechenbeispiel 6.15: Elektronen im Fernseher

Im Elektronenstrahl in einem Fernseher fließt typisch ein Strom von 100 mA. Wie viel Elektronen pro Sekunde sind das?

Lösung:

$$I = 0,1 \text{ A} = \frac{N \cdot e_0}{1 \text{ s}}.$$

Dann ist die Zahl der Elektronen pro Sekunde

$$N = \frac{0,1 \text{ As}}{e_0} = 6,2 \cdot 10^{17}.$$

6.6.4

Der elektrische Strom

In einem Kupferdraht spaltet jedes Atom ein Elektron aus seiner Hülle ab. Das Kristallgitter wird also von positiven Kupferionen gebildet. Die abgegebenen Elektronen können zwischen ihnen „quasifrei“ herumlaufen; richtig frei sind sie ja nicht, weil sie den Draht nicht verlassen dürfen (zumindest nicht so ohne weiteres). Diese quasifreien Elektronen sorgen für die hohe elektrische Leitfähigkeit der Metalle.

Zunächst einmal führen die Elektronen eine Art Wimmelbewegung aus; sie ist statistisch gleichmäßig auf alle Raumrichtungen verteilt und kompensiert sich deshalb im Mittel zu null. Sobald aber längs des Drahtes ein elektrisches Feld erscheint, laufen sie ihm nach, genauer: Sie laufen ihm entgegen, ihrer negativen Ladung wegen. Dabei transportieren sie aber ihre eigene negative Ladung und tragen so einen Strom in Richtung des elektrischen Feldes.

wichtig

Metalle transportieren einen Strom durch bewegliche Elektronen.

Im Draht bewegen sich die Elektronen wie der Löffel im Sirup: unter starker Reibung. Deshalb folgen sie der angelegten Spannung, d.h. der Coulomb-Kraft des angelegten Feldes E , nicht beschleunigt, sondern mit einer konstanten

$$\text{Driftgeschwindigkeit } v_d = \mu \cdot E$$

(die Größe μ wird *Beweglichkeit* genannt). Diese Driftgeschwindigkeit ist übrigens erstaunlich klein: einige zehntel Millimeter pro Sekunde, natürlich abhängig vom Strom.

Der Strom I ist zu v_d proportional, aber auch zur Anzahl N der beweglichen Elektronen, bzw. zu deren Anzahldichte $n=N/V$. Für die

$$\text{Stromdichte } j = \frac{\text{Strom } I}{\text{Drahtquerschnitt } A}$$

kommt am Ende heraus

$$j = e_0 \cdot n \cdot \mu \cdot E.$$

Herleitung: In der Zeitspanne Δt laufen alle Elektronen den Schubweg $\Delta s = v_d \cdot \Delta t = \mu \cdot E \cdot \Delta t$ weit. An einer bestimmten Stelle des Drahtes kommen dabei alle $\Delta N = n \cdot A \cdot \Delta s$ Elektronen vorbei, die dazu weniger als Δs marschieren mussten. Sie haben mit der Ladung $\Delta Q = \Delta N \cdot e_0$ den Strom $I = \Delta Q / \Delta t$ transportiert:

$$I \cdot \Delta t = e_0 \cdot \Delta N = e_0 \cdot n \cdot A \cdot \Delta s = e_0 \cdot n \cdot A \cdot v_d \cdot \Delta t = e_0 \cdot n \cdot A \cdot \mu \cdot E \cdot \Delta t.$$

Jetzt muss man nur noch durch A und Δt dividieren.

Nun gilt bei einem Draht mit der Länge l und der Querschnittsfläche A ganz allgemein $I = G \cdot U$ (s. Kap. 6.2.1), für den Leitwert $G = \sigma \cdot A / l$ (s. Kap. 6.4.2), somit für die Leitfähigkeit

$$\sigma = I / U \cdot l / A = I / A \cdot l / U = j / E:$$

Stromdichte $j = \text{Leitfähigkeit } \sigma \cdot \text{Feldstärke } E$,

wichtig

$$\text{Stromdichte } j = \frac{\text{Strom } I}{\text{Stromquerschnitt } A} = \sigma \cdot E.$$

Dabei halten sich die Metalle als Elektronenleiter an die einfache Beziehung

$$\sigma = e_0 \cdot n \cdot \mu.$$

Für Elektrolyte muss sie ein wenig modifiziert werden (s. Kap. 6.7.2).

6.6.5

Die Dielektrizitätskonstante (Permittivität)

Ein leitender Gegenstand schirmt ein äußeres Feld ab, weil die beweglichen Leitungselektronen sich so verteilen, dass im Inneren des Leiters kein Feld mehr herrscht, es sei denn, er ist an eine Spannungsquelle angeschlossen und es fließt ein dauernder Strom. Aber auch im Isolator befinden sich viele Ladungen: die positiv geladenen Atomkerne und die negativ geladenen Elektronen in der Hülle. Wie reagieren sie auf ein äußeres Feld? Sie wollen eigentlich das Gleiche tun wie die Leitungselektronen im Metall, aber sie können ihr Atom nicht verlassen. Aber sie können sich doch ein bisschen verschieben. Die Folge ist eine Unsymmetrie in den Atomen: Sie bekommen ein elektrisches Dipolmoment (s. Kap. 6.5.3). Im Isolator liegen dann lauter in gleicher Weise ausgerichtete Dipole nebeneinander (☞ Abb. 6.54). Weil das äußere Feld Ladungen innerhalb der Atome, Moleküle, Molekülkomplexe

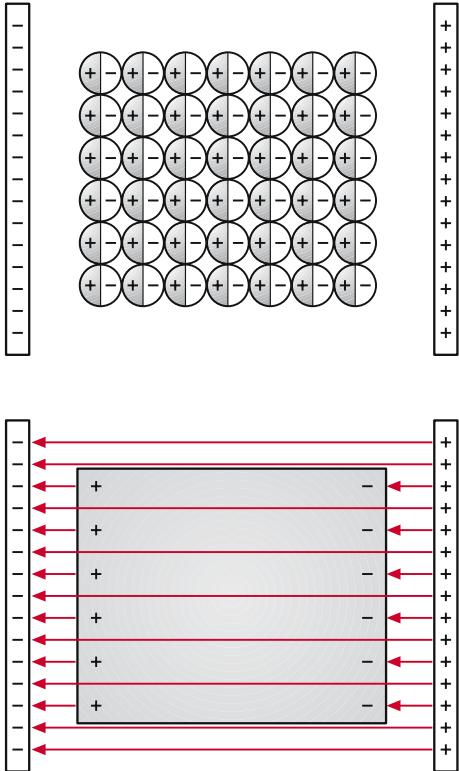


Abb. 6.54. Zur Polarisation: In dem durch die geladenen Platten erzeugten Feld werden aus den Atomen Dipole (oben). Dies führt zu Oberflächenladungen am Isolator, die das Feld im Inneren abschwächen (unten)

verschoben hat, nennt man das **Verschiebungspolarisation** und sagt, der Isolator sei **polarisiert**. Maß dafür ist die sogenannte Polarisation \tilde{P} , die als Dipolmomentdichte, also Dipolmoment pro Volumen, definiert ist (sie wird in Kapitel 6.10.5 gebraucht).

Hat die Polarisation Auswirkungen auf das Feld im Inneren des Isolators? Ja, das Feld wird zwar nicht völlig abgeschirmt wie im Metall, aber es wird abgeschwächt.

Hier muss nun einmal genau gesagt werden, was mit „Feld im Isolator“ oder „Feld im Metall“ eigentlich gemeint ist. Macht man sich ganz klein und setzt sich zum Beispiel zwischen Atomkern und Hülle, so beobachtet man dort natürlich immer ein sehr starkes Feld, da man zwischen der positiven Ladung des Kerns und der nega-

tiven Ladung der Hülle quasi wie in einem Kondensator sitzt. Als Ganzes ist das Atom aber neutral, außerhalb des unpolarisierten Atoms ist kein Feld. Mittelt man also das Feld über größere Längen (etwa einen Mikrometer), so ist es im unpolarisierten Material null. Wenn über das Feld in einem Material gesprochen wird, ist immer dieses über viele Atome gemittelte Feld gemeint.

Befindet sich der Isolator in einem äußeren Feld \vec{E}_0 , so herrscht im Inneren zunächst auch dieses Feld. Die zu Dipolen polarisierten Atome umgeben sich aber zusätzlich alle mit einem Dipolfeld. Denkt man sich den Isolator zwischen zwei Kondensatorplatten (☞ Abb. 6.54), so verursacht die Polarisierung in der Summe an den Oberflächen des Isolators effektive Oberflächenladungen, negative gegenüber der positiv geladenen Kondensatorplatte, positive gegenüber der negativen Kondensatorplatte. Diese Oberflächenladungen erzeugen ein dem äußeren Feld \vec{E}_0 entgegengesetztes Feld, sodass die Feldstärke \vec{E} im Inneren des Isolators kleiner ist als das äußere Feld. In den meisten Materialien ist die Polarisierung und damit auch das Feld im Inneren proportional zum äußeren Feld:

$$\vec{E}_0 = \epsilon_r \cdot \vec{E}.$$

Die Proportionalitätskonstante ist die schon erwähnte **relative Dielektrizitätskonstante** ϵ_r (DIN-gerecht heißt diese Konstante **Permittivität**, die alte Bezeichnung wird aber noch häufig verwendet). Die Dielektrizitätskonstante ist eine Materialkenngröße des Isolators. Bei gängigen Kunststoffen liegt sie meist zwischen 2 und 5. Dieser Faktor hilft den Herstellern von Kondensatoren, die metallisch beschichteten Folien zu Paketen aufzuwickeln. Denn befindet sich zwischen den Kondensatorplatten ein Isolator mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_r , so ist das Feld im Kondensator um diesen Faktor abgeschwächt und damit auch die Spannung zwischen den Platten entsprechend kleiner. Das bedeutet aber eine um den Faktor ϵ_r größere Kapazität $C = Q/U$ (s. Kap. 6.5.5).

Grundsätzlich muss das äußere Feld die atomaren oder molekularen Dipole nicht unbedingt selbst erzeugen. Sie können, wie im Wasser (s. Kap. 6.5.4), von vornherein vorhanden sein und sich nur deswegen nach außen nicht sofort bemerkbar machen, weil ihre Dipolmomente ständig in ungeordneter thermischer Bewegung sind. Ein äußeres Feld kann diesem Durcheinander aber eine gewisse Vorzugsrichtung geben, mit steigender Feldstärke immer ausgeprägter. Man nennt diesen Mechanismus *Orientierungspolarisation*. Diese führt zu deutlich höheren Werten der Dielektrizitätszahl. Wasser bringt es auf $\epsilon_r = 80$.

wichtig

Durch Polarisation wird das elektrische Feld in Isolatoren abgeschwächt. Verschiebungspolarisation: Feld erzeugt durch Influenz molekulare Dipole, Orientierungspolarisation: Feld richtet polare Moleküle aus.

Es gibt noch weitere mit der Polarisation zusammenhängende Effekte. Technisch wichtig sind Isolatoren, die polarisiert werden, wenn man sie mechanisch belastet, sie also z.B. zusammendrückt. Man nennt diesen Effekt *Piezoelektrizität* („Piezo...“ ausgesprochen). Geläufig ist er vielleicht aus Feuerzeugen, die das Brennholz dadurch entzünden, dass mit einem Schnappmechanismus auf einen piezoelektrischen Würfel geschlagen wird. Aufgrund der plötzlichen Polarisation entsteht eine so hohe

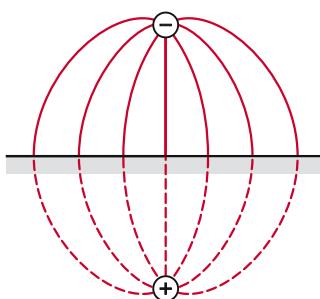


Abb. 6.55. Zur Entstehung der *Bildkraft*: Ein Elektron vor einer Metallplatte influenziert Gegenladungen auf deren Oberfläche, von denen es angezogen wird, als säße eine positive *Bildladung* spiegelbildlich im Metall

Spannung, dass ein Funke überschlägt. Ein Effekt wie die Piezoelektrizität funktioniert immer in beiden Richtungen: Wird an ein piezoelektrisches Material ein äußeres Feld angelegt, so zieht es sich zusammen, als wäre es gedrückt worden. Dies benutzt man gern, um extrem kleine Verrückungen extrem präzise auszuführen. Beim sog. *Tunnelmikroskop* tastet eine feine Spitze die zu untersuchende Oberfläche kontrolliert in Schritten ab, die kleiner sein können als Atomabstände.

Rechenbeispiel 6.16: Oberflächenladung

Ein Plattenkondensator sei mit einer Ladung von 10^{-5} C aufgeladen. Zwischen den Platten befindet sich ein Isolator mit $\epsilon_r = 2$. Wie groß ist die effektive Oberflächenladung auf dem Isolator?

Lösung: Der Isolator schwächt das Feld zwischen den Platten auf die Hälfte ab. Dazu muss die Hälfte der Ladungen auf den Platten durch entsprechende Gegenladung auf der Isolatoroberfläche kompensiert werden. Also beträgt diese Oberflächenladung $5 \cdot 10^{-6}$ C.

6.6.6 Das freie Elektron

Grundsätzlich kann ein Leitungselektron sein Metall verlassen. Man muss ihm dabei aber helfen, denn wenn es in seiner thermischen Bewegung ins Freie stößt, influenziert es unter der Oberfläche durch Verschieben von Artgenossen eine Gegenladung, deren Coulomb-Kraft den Ausreißer festhält (☞ Abb. 6.55). Dem Elektron geht es ähnlich wie dem verdampfungswilligen Molekül von Kap. 5.3.4, nur wird es von elektrischen Kräften zurückgezogen und nicht von zwischenmolekularen. Um wegzukommen, müssen beide Energie mitbringen, das Molekül mehr als die Verdampfungswärme, das Elektron mehr als seine *Austrittsarbeit*. Thermische Energie ist immer gut.

Die Austrittsarbeiten der Metalle liegen so hoch, dass man sie meist schon zum Glühen bringen muss, wenn man Elektronen in nennenswerter Anzahl herausholen möchte.

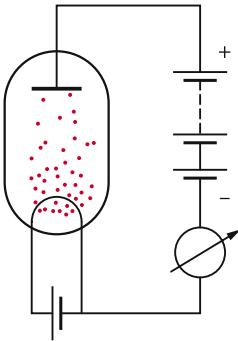


Abb. 6.56. Schema einer Vakuumdiode. Eine Heizspannung bringt den Draht der *Kathode* zum Glühen, sodass Elektronen aus ihm austreten können. Strom fließt nur, wenn die kalte Elektrode als *Anode* positiv gepolt ist

Man spricht darum von *Glühemission*. In Zimmerluft hat man freilich wenig davon, denn dort fängt das erstbeste Gasmolekül ein „verdampftes“ Elektron ab und bildet mit ihm ein negatives Ion. Man setzt darum seinen emittierenden Draht in einen evakuierten Glaskolben und bringt ihn elektrisch zum Glühen. Mit in die Glaswand eingeschmolzen ist eine zweite Elektrode, die kalt bleibt (☞ Abb. 6.56). Legt man an sie eine positive Spannung gegenüber dem Draht, so fließt ein Strom, getragen von *freien Elektronen* im an sich isolierenden Vakuum; polt man um, fließt allenfalls ein *Leckstrom* wegen unvollständiger Isolation – experimenteller Nachweis für die negative Ladung der Elektronen, die nur die heiße Elektrode in hinreichender Anzahl verlassen können und nicht die kalte (☞ Abb. 6.57). Die *Vakuumdiode* ist ein *Gleichrichter* (und wurde als solcher auch eifrig genutzt, bis die Halbleiterdioden aufkamen).

wichtig

Ein freies Elektron musste, um sein Metall verlassen zu können, zuvor die Austrittsarbeit aufgebracht haben, z.B. mit thermischer Energie („Glühemission“).

Generell bezeichnet man eine Elektrode, die am negativen Pol der Spannungsquelle liegt, als *Kathode*, die andere als *Anode*: In der Va-

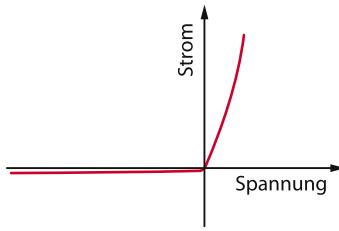


Abb. 6.57. Schema der Strom-Spannungs-Kennlinie eines Gleichrichters; es muss keine Vakuumdiode sein

kuumdiode fließt zwischen Anode und *Glühkathode* ein *Anodenstrom*, konventionell in entgegengesetzter Richtung wie die Elektronen. Seine Größe wird im Wesentlichen von der Kathodentemperatur bestimmt, denn die legt fest, wie viele Elektronen überhaupt die Chance haben, mindestens so viel thermische Energie zu bekommen, wie für die Austrittsarbeit benötigt wird: Der Anodenstrom ist *gesättigt* (☞ Abb. 6.58). Er lässt sich über die Kathodenheizung einstellen, ein Verfahren, das bei Röntgenröhren technisch genutzt wird (s. Kap. 75.4).

wichtig

Anode: positive Elektrode,
Kathode: negative Elektrode,
„Glühkathode“ emittiert „Anodenstrom“.

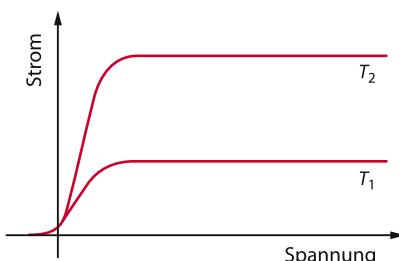


Abb. 6.58. Bei hinreichend hoher Anodenspannung ist der Emissionsstrom der Glühkathode gesättigt; der Sättigungswert steigt rasch mit der Kathodentemperatur (Parameter der Zeichnung). Die Kennlinie geht nicht durch den Nullpunkt, weil die thermisch emittierten Elektronen die Kathode mit einem Rest kinetischer Energie verlassen, mit dem sie gegen eine kleine Gegenspannung anlaufen können

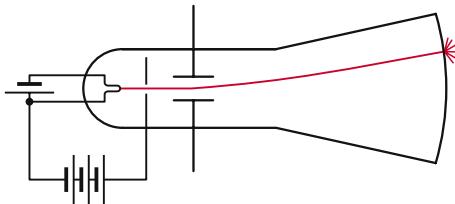


Abb. 6.59. Röhre eines Kathodenstrahloszillographen, schematisch (Einzelheiten im Text)

Normalerweise emittiert die Kathode ihre Elektronen gedankenlos nach allen Seiten. Durch geschickte Konstruktion mit Leitblechen auf passenden Potentialen kann man aber erreichen, dass ein scharf gebündelter Strahl durch ein feines Loch im Anodenblech die *Elektronenkanone* verlässt, z.B. in den feldfreien Raum einer konisch sich erweiternden Vakuumröhre hinein (☞ Abb. 6.59). Die Geschwindigkeit der Elektronen in diesem Strahl wird durch die Spannung U_A zwischen Kathode und Anode bestimmt. Ein Elektron verliert auf seinem Weg von der Kathode zur Anode die potentielle Energie $W_{\text{pot}} = e_0 \cdot U_A$ und setzt diese in kinetische Energie um.

Belegt man jetzt den Boden des Glaskolbens mit einem geeigneten Leuchtstoff, so wird die Auftreffstelle der Elektronen durch *Elektrolumineszenz* für das Auge sichtbar. Dabei darf sich der Leuchtstoff nicht negativ aufladen; seine Leitfähigkeit muss ausreichen, die ankommenden Elektronen ohne störenden Spannungsabfall abzuleiten.

wichtig

Kathodenstrahl: gebündelter Strahl freier Elektronen aus einer „Elektronenkanone“.

Auch frei im Strahl fliegende Elektronen reagieren auf ein elektrisches Feld: Schießt man sie quer durch einen geladenen Kondensator, so werden sie zur Seite abgelenkt, in Richtung auf die positive Elektrode (☞ Abb. 6.59). Legt man eine Wechselspannung an den Kondensator, folgt ihr der Strahl momentan und malt in periodischer Wiederholung einen Strich auf den Leucht-

schirm. Das kann so schnell erfolgen, dass der Ablauf vom menschlichen Gesichtssinn nicht mehr aufgelöst wird. Darum sieht man auch den gleichen statischen Strich, wenn der Elektronenstrahl nicht mit einer sinusförmigen Wechselspannung, sondern mit einem sog. *Sägezahn* abgelenkt wird (☞ Abb. 6.60): Der Lichtpunkt läuft jetzt mit konstanter Geschwindigkeit z.B. von links nach rechts über den Leuchtschirm und springt dann rasch in die Ausgangslage zurück.

Lässt man den Elektronenstrahl noch durch einen zweiten Kondensator mit vertikalem elektrischen Feld hindurchlaufen, kann man ihn zusätzlich nach oben und unten auslenken. Der Lichtpunkt zeichnet jetzt getreulich einen Graphen vom zeitlichen Ablauf der Spannung an den vertikalen Ablenkplatten. Er liefert dem Auge ein stehendes Bild, wenn sich dieser Spannungsverlauf periodisch wiederholt, wenn der Sägezahn getriggert ist, d.h. immer an der gleichen Stelle der Periode startet, und wenn alles zusammen schnell genug abläuft: Die Elektronenröhre hat sich zur Braun-Röhre eines *Kathodenstrahloszillographen* gemausert. Dieser dient der Registrierung rasch ablaufender Vorgänge, die über passende Messwandler in synchrone elektrische Spannungen umgesetzt worden sind. Weil die Ablenkplatten weit höhere Spannungen verlangen als Messwandler üblicherweise anbieten, wird einem Oszilloskop zumindest für die vertikale Y-Ablenkung ein einstellbarer Verstärker eingebaut, der meist gleich in der resultierenden Empfindlichkeit für die Auslenkung

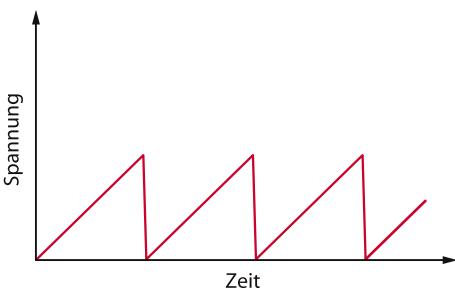


Abb. 6.60. „Sägezahn“ für die Zeitablenkung eines Oszilloscopes

des Lichtpunktes auf dem Schirm geeicht ist, also z.B. in der Angabe: „10 mV/cm“. Auch die horizontale X-Ablenkung kann einen solchen Verstärker bekommen, wenn nämlich der Zusammenhang zwischen zwei beliebigen, aber elektrisch messbaren Größen dargestellt werden soll. Oft liegt hier aber ein fest eingebauter Sägezahngenerator für geeicht einstellbare Zeitablenkungen (z.B. „3 ms/cm“).

Der gute alte Kathodenstrahl-Oszilloskop wird zunehmend durch digitale Instrumente ersetzt. Das sind im Prinzip Computer, die den Spannungsverlauf mit einem *Analog-Digital-Wandler* aufnehmen und auf einem Bildschirm darstellen. Solche Geräte sind viel handlicher und erlauben, die Bilder auch zu speichern und digital zu bearbeiten.

wichtig

Oszilloskop: Gerät zur Registrierung (auch rasch) veränderlicher elektrischer Spannungen.

Legt man an beide Plattenpaare Sägezähne, horizontal einen schnellen (20 kHz) und vertikal einen langsamen (25 Hz), so schreibt der Leuchtpunkt 25-mal in der Sekunde ein rechteckiges Feld mit 800 waagerechten Zeilen voll. Das Auge sieht eine gleichmäßig leuchtende Fläche, flimmerfrei, wenn sie nicht zu hell ist. Nun kann man in der Kathodenstrahlröhre die Stärke des Elektronenstrahls willkürlich und schnell verringern und so dunkle Punkte in das helle Feld setzen. Richtig gesteuert ergeben sie ein Bild, das dem Auge auch bewegt erscheinen kann: Prinzip der Bildröhre vom Fernsehgerät und Computermonitor. Dort geschieht die Ablenkung des Elektronenstrahls allerdings magnetisch (s. Kap. 6.10.2).

Hier ist ein rasanter technischer Wandel im Gange. Zunehmend werden Monitore als LCD-Displays gefertigt. Diese funktionieren völlig anders: Eine sehr dünne Schicht aus Flüssigkristallen befindet sich zwischen zwei Glasplatten, die mit einem sehr feinen, durchsichtigen Elektrodenraster be-

schichtet sind. Flüssigkristalle drehen die Polarisationsebene von Licht (s. Kap 7.4.1) in Abhängigkeit vom elektrischen Feld, in dem sie sich befinden, verschieden stark. Damit kann die Lichtdurchlässigkeit der Flüssigkristallschicht Bildpunkt für Bildpunkt elektrisch gesteuert werden. Beleuchtet man das ganze von hinten, so kann ein Bild entstehen. Soll es auch noch bunt sein, so muss man, ähnlich wie bei der Farbbildröhre, noch eine fein gerasterte Farbfolie überlegen. Solche Bildschirme sind flach, energiesparend und wahrscheinlich bald auch billiger als die Bildröhre. Dann wird es viel weniger freie Elektronen auf der Welt geben.

6.6.7

Das Elektronvolt

Auch einfache Oszillosgraphen können periodische Vorgänge im Frequenzbereich Megahertz noch anstandslos registrieren. Dazu muss ihr Lichtpunkt an die hunderttausendmal in der Sekunde über den vielleicht 10 cm breiten Leuchtschirm laufen, mit einer Geschwindigkeit von ca. 10 km/s und beim Rücksprung zwischen zwei Durchläufen noch erheblich schneller. Elektronen macht das nichts aus; sie sind klein und fix.

Die Geschwindigkeit, mit der ein freies Elektron bei der Anode ankommt, hängt von seiner Masse m_e und der Anodenspannung U_A ab. Im homogenen Feld E unterliegt es der konstanten Kraft $F = e_0 \cdot E$ und „fällt“ wie eine Apfel vom Baum, nämlich mit konstanter Beschleunigung a zur Anode hinüber:

$$a = \frac{e_0}{m_e} E.$$

Grundsätzlich könnte man m_e durch Laufzeitmessungen bestimmen. Es gibt elegantere Verfahren, die allerdings nur die **spezifische Ladung** e_0/m_e des Elektrons messen. Aber die Elementarladung e_0 ist ja genau bekannt. In entsprechenden Tabellen findet man:

$$\text{Elektronenmasse } m_e = 9,1066 \cdot 10^{-31} \text{ kg.}$$

Viel ist das nicht, in der handfesten Materie des menschlichen Alltags findet man aber auch kein leichteres Elementarteilchen als das Elektron.

Wenn ein Elektron aus der Glühkathode ausgetreten ist, besitzt es gegenüber der Anode die potentielle Energie $W_{\text{pot}} = e_0 \cdot U_A$. Was es noch an Restenergie aus seiner thermischen Bewegung mitbringt, spielt meist keine Rolle. Auf dem Weg zur Anode setzt es W_{pot} in kinetische Energie um, ob das Feld nun homogen ist oder nicht. Daraus kann man die Endgeschwindigkeit v_e berechnen, die ein Elektron im Kathodenstrahl erreicht.

Elektronen sind wirklich sehr schnell. Dabei bleiben ihre kinetischen Energien winzig klein, wenn man sie mit der Energieeinheit Joule vergleicht. Ein 2-kV-Elektron bringt es gerade noch auf $0,32 \text{ fJ}$ (Femtojoule = 10^{-15} J). Das Joule ist aber auch für die makroskopische Welt erfunden worden. Im Mikrokosmos der Elementarteilchen verwendet man darum die um fast 19 Dekaden kleinere Energieeinheit

$$\text{Elektronvolt} = \text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Es ist diejenige Energie, die ein Elektron gewinnt, wenn es ein Volt Potentialdifferenz „durchfallen“ hat.

wichtig

Energieeinheit Elektronvolt
 $= \text{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Wenn die Elektronen des Kathodenstrahls auf die Anode treffen, geben sie ihre kinetische Energie wieder ab und machen daraus – wie könnte es anders sein – im wesentlichen Wärme. Durch kräftigen Elektronenbeschuss kann man Metalle unter den sauberen Bedingungen des Hochvakuums zum Schmelzen bringen, mit gut gebündelten Kathodenstrahlen sogar feine Löcher in Diamanten bohren. So ganz am Rande fällt dabei noch ein medizinisch wichtiges Nebenprodukt ab: Röntgenstrahlung. Das gilt übrigens auch für die Bildröhre des Fernsehempfängers.

6.6.8

Ruhmasse und relativistische Masse

Auf den Energiesatz ist Verlass: Wenn eine Röntgenröhre mit 300 kV Anodenspannung betrieben wird, dann kommen die Elektronen mit 300 keV auf der Anode an. Rechnet man jetzt aber mit der Gleichung $W_{\text{kin}} = m_e \cdot v_e^2 / 2$ die Auftreffgeschwindigkeit v_e aus, so rechnet man falsch. Heraus kämen nämlich $3,25 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. Die Natur erlaubt aber keinem materiellen Teilchen, die

$$\text{Lichtgeschwindigkeit } c \sim 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

zu erreichen oder gar zu überschreiten. Die Konsequenzen aus diesem Naturgesetz hat Albert Einstein in seiner *Relativitätstheorie* gezogen. Elektronen akzeptieren sie als selbstverständlich, aber dem Menschen erscheinen sie grotesk, solange er sich noch nicht an sie gewöhnt hat. In seiner Welt kommen ja nur im Vergleich zu c ausgesprochen kümmerliche Geschwindigkeiten vor. Das gilt auch noch für die astronomischen Geschwindigkeiten im Sonnensystem.

Was kann ein Elektron machen, wenn es die Lichtgeschwindigkeit fast schon erreicht hat, die Relativitätstheorie also keine nennenswerte Beschleunigung mehr erlaubt, wenn andererseits aber die Kraft eines elektrischen Feldes weiterhin an ihm zieht? Es hat keine andere Möglichkeit, als nach der Gleichung

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$$

seine Masse zu erhöhen, um so die Beschleunigung klein zu halten. Das heißt nicht, dass es auch dicker wird und schließlich walnussgroß durch die Gegend fegt; es geht nur darum, dass Kraft und Beschleunigung nicht länger zueinander proportional bleiben können. Immerhin, die physikalische Größe „Masse“ ist nicht ganz so stabil, wie sie bisher erschien. Man unterscheidet deshalb zwischen der *Ruhmasse* m_0 bei kleinen Geschwindigkeiten ($v \ll c$) und der *relativistischen Masse* m bei hohen ($v \gg c$). Den Zusammenhang zeigt Abb. 6.61.

6.6.9

Gasentladung

Ist das Vakuum in der Kathodenstrahlröhre nicht sehr gut, dann kommt kein Elektron bis zur Anode durch, ohne unterwegs ein

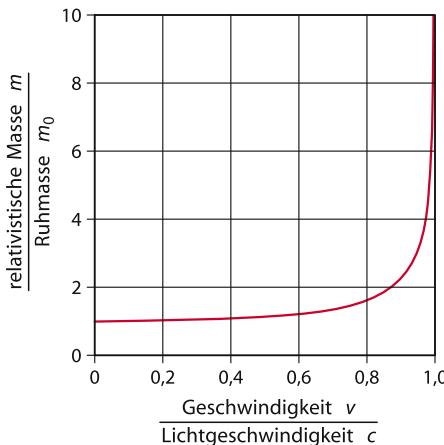


Abb. 6.61. Nach der Relativitätstheorie wächst die *relativistische* Masse m eines Körpers mit der *Ruhmasse* m_0 bei steigender Geschwindigkeit v zunächst nur geringfügig, dann aber so steil an, dass keine noch so hohe und noch so lang andauernde beschleunigende Kraft den Körper über die Lichtgeschwindigkeit c bringen kann

paar Mal mit einem Gasmolekül zusammenzustoßen. Dabei kann es eingefangen werden, worauf sich ein negatives Ion bildet, das, rund vier Zehnerpotenzen schwerer als das Elektron, langsam auf die Anode zusteuert. Ist das Elektron beim Stoß aber schnell genug, dann kann es ein neues Elektron aus dem Molekül herausschlagen. Dazu muss die kinetische Energie des stoßenden Elektrons größer sein als die *Ionisierungsarbeit* des Moleküls (sie liegt, abhängig von der Art des Gases, bei einigen eV). Die Folgen dieser *Stoßionisation* sind dramatisch: Das erste Elektron setzt sich nach dem Stoß erneut, weil vom Feld gezogen, in Bewegung, das herausgeschlagene aber auch. Beide können wieder ionisieren; dann sind sie schon zu viert, nach dem nächsten Stoß zu acht, sie vermehren sich explosionsartig: Eine *Elektronenlawine* bricht los. Der Strom wächst entsprechend einer e-Funktion mit positivem Exponenten, die Wärmeentwicklung tut dies auch. Wird die Lawine nicht rechtzeitig gebremst, so zerstört sie die Elektronenröhre.

Die Lawine der *Gasentladung* ist leicht zu bremsen, z.B. dadurch, dass man als Spannungsquelle keine Batterie benutzt, sondern

einen aufgeladenen Kondensator. Dann steht nur eine begrenzte elektrische Ladung, eine begrenzte elektrische Energie zur Verfügung. Läuft der Kondensator leer, so brechen Spannung, Feld und Stoßionisation zusammen. Fotografen nutzen diesen Effekt als *Elektronenblitz*: Eine Gasentladung sendet Licht aus; sie erzeugt *angeregte* Ionen und Moleküle, die in ihren *Grundzustand* zurückkehren und dabei Licht emittieren (s. Kap. 7.5.2).

Man kann die Elektronenlawine auch mit einem Vorwiderstand bändigen (☞ Abb. 6.62). Sobald die Entladung zündet und Strom fließt, verlangt der Widerstand eine Spannung, die er nur der Entladungsröhre entziehen kann. Damit reduziert er mit dem dort herrschenden elektrischen Feld auch die kinetische Energie, die Elektronen zwischen zwei Stößen aufsammeln können. Die Stoßionisation geht genau so weit zurück, dass jedes von einem Ion eingefangene Elektron ersetzt wird und nicht mehr: Die Gasentladung brennt und leuchtet stabil. Nach diesem Prinzip arbeiten die bescheidenen *Glimmlampen*. Ihr „Stromverbrauch“ ist so gering, dass die meisten Elektrizitätszähler ihn gar nicht bemerken. Anspruchsvoller sind die bunten Röhren der Leuchtreklamen. Ihre Farben charakterisieren das verwendete Gas: Neon leuchtet rot, Natrium dampf gelb, Quecksilberdampf in hellem Blau. Er emittiert zusätzlich unsichtbares ultraviolettes Licht, das die Haut des Menschen bräunt und in seinem Auge Entzündungen auslösen kann. *Leuchttstoffröhren* überführen das ultraviolette Licht durch Fluoreszenz in den sichtbaren Spektralbereich.

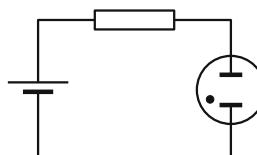


Abb. 6.62. Glimmlampe (Gasentladungslampe) im Dauerbetrieb; ein Schutzwiderstand verhindert Lawine und Kurzschluss (der Punkt im Schaltzeichen deutet das verdünnte Gas an)

Mit gängigen Feldstärken kann die bisher besprochene *selbständige Gasentladung* nur bei einem schwachen Vakuum von einigen Hektopascal brennen. Ist es zu gut, unterbleibt die Entladung, weil die Elektronen zu wenige Stoßpartner treffen; ist es zu schlecht, so stoßen die Elektronen bereits, ehe sie die zur Ionisation notwendige kinetische Energie ansammeln konnten. Mit Gewalt geht es natürlich immer: In Zimmerluft (ca. 1000 hPa und 20 °C) kommt es bei der *Durchbruchsfeldstärke* von etwa 3 MV/m zur Entladung. Steigert man die Temperatur, so wird ein immer größerer Teil der Ionisationsenergie thermisch geliefert; das erleichtert die Stoßionisation. Auf diesem Wege kann man in Luft einen *Lichtbogen* brennen lassen, etwa zwischen zwei Kohlestäben (sie schmelzen nicht): Die Bogenentladung verheizt genügend Leistung auf hinreichend kleinem Raum. Bogenlampen leuchten blendend hell. Sie brauchen aber einen Vorwiderstand oder etwas anderes, das den Strom begrenzt.

wichtig

Selbständige Gasentladung: Freie Elektronen lösen durch Stoßionisation eine Elektronenlawine aus. Strombegrenzung ist erforderlich.

Wenn Gasdichte und Feldstärke eine Stoßionisation nicht mehr erlauben, bleiben freie Elektronen nicht lange frei; sie werden eingefangen, zumeist von neutralen Molekülen. Wurden die Elektronen zuvor von neutralen Molekülen abgespalten, so bilden sich jetzt Ionenpaare. Auch sie verschwinden, indem sie die ausgetauschten Elektronen wieder zurücktauschen. Dazu müssen sie sich jedoch erst einmal treffen; ihre *Rekombination* braucht Zeit. Das macht aber eine *unselbständige Gasentladung* möglich, unselbständig, weil sie einen äußeren Prozess braucht, der ständig Ionenpaare bildet und gegen die Rekombination auf stationärer Anzahl hält. Dazu genügt schon die chemische Oxidation in einer Flamme: Stellt

man eine brennende Kerze zwischen die Platten eines hinreichend großen Luftkondensators, so bricht dessen Spannung sofort zusammen (sofern die Spannungsquelle abgeklemmt worden war).

wichtig

Unselbständige Gasentladung:
Ionen werden durch hohe Temperatur, chemische Reaktion, ionisierende Strahlung usw. erzeugt.

6.7

Elektrochemie

Einleitung

In wässriger Lösung dissoziieren Salze, wie z.B. das Natriumchlorid, in positive (Natrium-) und negative (Chlor-)Ionen. Die Dissoziation hält sich, wie alle chemischen Reaktionen, im Gleichgewicht an das Massenwirkungsgesetz. Die Konzentration von so gebildeten Wasserstoffionen entscheidet über den pH-Wert, den Säuregrad einer Lösung. Durch Dissoziation in Ionen wird eine Lösung zum elektrisch leitenden Elektrolyten. Deren Ionenleitung ist mit einem Materietransport verbunden, der im Allgemeinen zu elektrochemischen Reaktionen führt. Auch der Mensch ist in diesem Sinn ein Elektrolyt.

6.7.1

Dissoziation

Luft isoliert. Die ionisierende Strahlung aus der Umwelt bringt ihr keine wesentliche Leitfähigkeit. Reines Wasser isoliert ebenfalls, wenn auch bei weitem nicht so gut. Mit seiner Resistivität in der Größenordnung $M\Omega$ steht es an der Grenze zwischen Leitern und Isolatoren (s. Kap. 6.4.2). Es ist aber gar nicht einfach, Wasser rein darzustellen und rein zu erhalten. In Kontakt mit Luft nimmt es einige Gasmoleküle auf (Henry-Dalton-Gesetz). Luft besteht im Wesentlichen aus Stickstoff (zwei Drittel) und Sauerstoff (ein

Drittel). Beide wirken sich auf die Leitfähigkeit des Wassers nicht nennenswert aus, wohl aber eines der Spurengase, obwohl es nur mit 0,3% vertreten ist: Kohlendioxid. Einige der gelösten CO_2 -Moleküle lagern ein H_2O an und bilden damit Kohlensäure H_2CO_3 . Deren Moleküle zerfallen aber sofort in zwei positiv geladene Wasserstoffionen H^+ und ein doppelt negativ geladenes Carbonat-Ion CO_3^{2-} . Jedes H^+ -Ion lagert sofort ein H_2O -Molekül an und bildet ein H_3O^+ -Ion. Das hat aber nur in Sonderfällen Bedeutung, weshalb man ruhig weiter von positiv geladenen Wasserstoffionen spricht.

Einen derartigen Zerfall eines Moleküls in einige Bestandteile – sie müssen nicht elektrisch geladen sein – bezeichnet man als **Dissoziation**. Der Vorgang läuft auch umgekehrt; die Bestandteile können wieder zum Molekül **rekombinieren**. Zwischen Dissoziation und Rekombination stellt sich ein Gleichgewicht ein und bestimmt den Quotienten aus Anzahlen, Anzahldichten oder Stoffmengendichten, also kurz den **Konzentrationen** c_D der dissozierten und c_0 der ursprünglich vorhandenen Moleküle. Er heißt

$$\text{Dissoziationsgrad } x_D = c_D/c_0$$

und ist eine dimensionslose Zahl zwischen 0 und 1 (keine bzw. vollständige Dissoziation). Moleküle werden durch Bindungsenergie zusammengehalten; für die Dissoziation muss deshalb eine Dissoziationsenergie aufgebracht werden. Sie entstammt normalerweise der thermischen Energie: Der Dissoziationsgrad steigt mit wachsender Temperatur, oftmals kaum erkennbar, wenn nämlich x_D die Eins fast schon erreicht hat.

wichtig

Den Zerfall eines Moleküls in Bestandteile bezeichnet man als **Dissoziation**, den entgegengesetzten Vorgang als **Rekombination**. Die Bestandteile können Ionen sein, müssen es aber nicht.
Dissoziationsgrad $x_D = c_D/c_0$.

Dahinter steckt das **Massenwirkungsgesetz**. Jedes Lehrbuch der Chemie behandelt es ausführlich. Für ein Molekül AB, das sich aus den Bestandteilen A und B zusammensetzt und in sie zerfällt, besagt es

$$\frac{c(\text{A}) \cdot c(\text{B})}{c(\text{AB})} = K(T)$$

(hier bedeutet $c(\text{AB})$ die Konzentration der undissoziiert gebliebenen Moleküle, also nicht die Konzentration c_0 der ursprünglich vorhandenen, die im Nenner des Dissoziationsgrades steht). Die temperaturabhängige **Massenwirkungskonstante** $K(T)$ ist eine Kenngröße der (Zerfalls- und Rekombinations-)Reaktion.

Ein Molekül Kohlensäure spaltet zwei positive Wasserstoffionen ab; dafür trägt das Carbonat-Ion zwei negative Elementarladungen. Die Stoffmengendichten (Molaritäten) c_n unterscheiden sich also um einen Faktor 2:

$$c_n(\text{H}^+) = 2 c_n(\text{CO}_3^{2-}).$$

Für die Dichten der Elementarladungen gilt das nicht, denn die Elektroneutralität bleibt bei der Dissoziation selbstverständlich gewahrt. Deshalb spricht man zuweilen neben der Molarität einer Lösung auch von ihrer **Normalität**, bei der doppelt geladene, also **zweiwertige** Ionen doppelt zählen, dreiwertige dreifach usw.

Bei Wasser tritt diese Komplikation nicht auf; es dissoziiert in H^+ -Ionen und OH^- -Ionen, beide einwertig, beide einfach geladen. Die hohe Resistivität ist Folge eines geringen Dissoziationsgrades: $x_D(\text{H}_2\text{O}) \approx 1,9 \cdot 10^{-9}$ bei 25 °C. In einem solchen Fall lässt sich das Massenwirkungsgesetz vereinfachen, weil dessen Nenner, die Konzentration der undissozierten Moleküle, praktisch konstant bleibt und darum in die Massenwirkungskonstante hineinmultipliziert werden kann: $K^*(T) = c_0 \cdot K(T)$. Für Wasser bei Zimmertemperatur kommt

$$c_n(\text{H}^+) \cdot c_n(\text{OH}^-) \approx 10^{-14} \text{ (mol/l)}^2$$

heraus, also

$$c_n(H^+) = c_n(OH^-) \approx 10^{-7} \text{ mol/l.}$$

In „neutralem“ Wasser liegen die Stoffmengendichten beider Ionensorten bei ziemlich genau 10^{-7} mol/l: „pH 7“. Als **pH-Wert** bezeichnet man den negativen dekadischen Exponenten der Maßzahl der Wasserstoffionenkonzentration zur Einheit Mol/Liter.

In einer Flüssigkeit können mehrere Massenwirkungsgesetze gleichzeitig gelten. Löst man Ätznatron NaOH in Wasser, so dissoziert es nach seinem eigenen Massenwirkungsgesetz vollständig in Na^+ - und OH^- -Ionen. Damit greift es aber in das Massenwirkungsgesetz der Wasserdissociation ein. Wenn $c_n(OH^-)$ steigt (z.B. auf 10^{-5} mol/l), geht $c_n(H^+)$ zurück, im Beispiel auf 10^{-9} mol/l: pH 9, die Lösung ist eine Lauge. Umgekehrt dissoziert HCl in H^+ und Cl^- , erhöht also $c_n(H^+)$ auf beispielsweise 10^{-3} mol/l und drängt dementsprechend $c_n(OH^-)$ auf 10^{-11} mol/l zurück: pH 3, die Lösung reagiert sauer.

wichtig

pH-Wert:

negativer dekadischer Logarithmus der Wasserstoffionenkonzentration $c_n(H^+)$ in mol/l;
pH < 7: sauer, $c_n(H^+)$ groß,
pH = 7: neutral, $c_n(H^+) = 10^{-7}$ mol/l,
pH > 7: alkalisch, $c_n(H^+)$ klein.

6.7.2 Elektrolyte

Ionen im Wasser folgen einem von außen angelegten Feld ähnlich wie Elektronen im Draht. Beide müssen sich zwischen neutralen Molekülen hindurchdrängeln, bewegen sich also wie unter starker Reibung. Folglich *driften* auch die Ionen mit konstanter, zur Feldstärke proportionaler Geschwindigkeit, sodass sich für sie ebenfalls eine **Beweglichkeit** definieren lässt. Sie bekommt meist den Buchstaben u statt des bei Elektronen üblichen μ . Die Ionen machen ihre Wirtsflüssigkeit zum **Elektrolyten**, sie geben ihm eine elektrische, eine **elektrolytische Leitfähigkeit**.

wichtig

Elektrolytische Leitung:
Stromtransport durch Ionen.

Ionen gibt es in vielerlei Arten und mit beiderlei Vorzeichen. Die positiven Ionen laufen zur Kathode und heißen darum **Kationen**, die negativen laufen zur Anode und heißen darum **Anionen**. Dies ist ehrwürdiger chemischer Sprachgebrauch; der Physiker muss sich merken, dass er hier mit der Vorsilbe *kat* nicht so ohne weiteres das negative Vorzeichen der Kathode verbinden darf. Der Stromtransport kann von Kationen und Anionen in gleicher Weise übernommen werden: Die konventionelle Stromrichtung fragt nicht, ob negative Ladungsträger ihr entgegen oder positive zu ihr parallel laufen. Alle Ionensorten addieren grundsätzlich ihre Beiträge zur elektrolytischen Leitfähigkeit:

$$\sigma = e_0 \cdot \sum_i z_i \cdot n_i \cdot u_i$$

Diese Formel berücksichtigt, dass verschiedene Ionensorten (durch die Laufzahl i gekennzeichnet) unterschiedliche Beweglichkeiten u , unterschiedliche Anzahldichten n und unterschiedliche Ladungen q haben können – die *Wertigkeit* z entspricht der Anzahl der Elementarladungen eines Ions unabhängig vom Vorzeichen: $\pm q = z \cdot e_0$. Das u liegt weit unter dem μ der Elektronen im Metall und steigt mit der Temperatur. Vom Modell her ist das verständlich: Ionen sind weit dicker als Elektronen, sie schwimmen wie Fremdkörper in einem Medium, dessen Zähigkeit mit wachsender Temperatur abnimmt.

wichtig

Anionen laufen zur Anode, sind also negativ geladen;
Kationen laufen zur Kathode, sind also positiv geladen.

Nur selten besteht ein Stromkreis allein aus Elektrolyten; fast immer sind Messinstru-

mente, Widerstände und Kabel, sind metallische Leiter mit im Spiel. Das erfordert Elektroden, an deren Oberfläche der Leitungsmechanismus wechselt: Die quasifreien Elektronen des Metalls müssen auf Ionen umsteigen und umgekehrt. Damit sind alle mal elektrochemische Prozesse verbunden, in schier unüberschaubarer Vielfalt.

Ein besonders einfaches Beispiel liefern zwei Silberelektroden in einer wässrigen Lösung von AgNO_3 (Silbernitrat); es dissoziert praktisch vollständig in Ag^+ und NO^- . Im Endeffekt läuft der Stromtransport so ab, als werde er nur von den Ag^+ -Ionen getragen (☞ Abb. 6.63). Vorhanden sind sie auch im Metall der Elektroden; bei der Anode können sie den Kristallverband verlassen und in den Elektrolyten hineinschwimmen. Sie werden dazu von der Spannungsquelle ermutigt, die ja der Anode Elektronen entzieht, sodass diese versuchen muss, auch positive Ladungen loszuwerden. Umgekehrt schließen sich Ag^+ -Ionen der Lösung dem Kristallgitter der Kathode an, weil sie hier von Elektronen erwartet werden, die der Leistungsstrom im Draht inzwischen angeliefert hat.

Elektroneutralität im Elektrolyten muss gewahrt bleiben: Die Anzahlen gelöster Anionen NO_3^- und gelöster Kationen (Ag^+) ändern sich insofern nicht, als für jedes Silberion, das an der Anode in Lösung geht, ein anderes an der Kathode abgeschieden wird. Dazu läuft eine Elementarladung durch den Draht. Das Experiment bestätigt die Erwartung des Modells: Es besteht eine strenge Proportionalität zwischen der Masse Δm des elektrolytisch abgeschiedenen Silbers und der vom Elektronenstrom transportierten Ladung ΔQ . Am Transport waren N Ionen mit der Einzelmasse m_M und der Einzelladung $z \cdot e_0$ beteiligt:

$$\Delta m = N \cdot m_M \quad \text{und} \quad \Delta Q = N \cdot z \cdot e_0.$$

Es ist also nicht schwer, die Atommasse m_M elektrolytisch zu bestimmen und danach durch Division mit der Avogadro-Konstanten N_A die molare Masse M auszurechnen. Wer sich nur für M interessiert, kann von

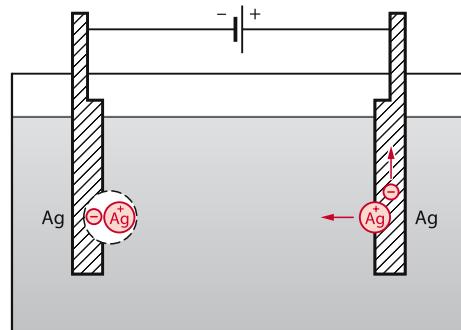


Abb. 6.63. Elektrolytische Abscheidung von Silber aus wässriger Lösung von Silbernitrat. Ag^+ -Ionen gehen bei der Anode in Lösung und werden an der Kathode abgeschieden, während die entsprechende Ladung als Elektronenstrom durch den Metalldraht fließt

vornherein stoffmengenbezogen rechnen und statt der Elementarladung die

$$\text{Faraday-Konstante } F = N_A \cdot e_0 = 96484 \text{ C/mol}$$

verwenden:

$$M = z \cdot F \cdot \Delta m / \Delta Q.$$

Hinter diesen Überlegungen stehen die beiden **Faraday-Gesetze**. Das erste besagt: Die abgeschiedene Masse ist zur transportierten Ladung proportional; das zweite: Die abgeschiedene Masse ist zur molaren Masse der Ladungsträger proportional.

Wenn man es genau nimmt, kommen für m_M und M Mittelwerte heraus, weil die beteiligten Ionen ein und denselben Art nicht unbedingt gleiche Massen haben müssen; an ihnen können verschiedene Isotope eines chemischen Elements beteiligt sein (s. hierzu Kap. 8.2.2).

wichtig

1. Faraday-Gesetz: $\Delta m \sim \Delta Q$,
 2. Faraday-Gesetz: $\Delta m \sim M$,
- Δm = elektrolytisch transportierte Masse,
 ΔQ = elektrisch transportierte Ladung,
 M = molare Masse der Ionen.

Der Materietransport im Ionenstrom wird vielfältig technisch genutzt. Beim elektri-

schen **Galvanisieren** werden leitende Werkstücke mit Metall beschichtet. Dazu wird das Werkstück als eine Elektrode eingesetzt, auf der sich dann Metallionen abscheiden. Man kann sogar nichtleitende Werkstücke (Leiterplatten, Wasserhähne) auf diese Weise metallisch beschichten, wenn man zuvor auf chemischem Wege etwas leitendes Material auf ihre Oberfläche gebracht hat. Beim **elektrophoretischen Beschichten** werden neutrale Partikel, zum Beispiel Farbstoffpigmente, auf einer Oberfläche abgeschieden, indem sich Ionen anlagern und die Pigmente zur leidenden Elektrodenoberfläche transportieren. Die Tauchlackierung von Autokarosserien funktioniert so. Zusammen mit der Dissoziation wird der Ionenstrom zur elektrolytischen Zersetzung von Substanzen genutzt. Im Großtechnischen Stil wird aus Steinsalz (NaCl) Natrium und Chlor gewonnen. Schickt man durch eine Salzlösung einen Strom, so scheidet sich an der Kathode Chlor und an der Anode Natrium ab. So werden viele Millionen Jahrestonnen dieser wichtigen chemischen Zwischenprodukte hergestellt.

6.8 Grenzflächen

Einleitung

Elektrische Leiter besitzen mindestens eine Sorte beweglicher Ladungsträger und der Elektroneutralität wegen mindestens noch eine weitere, die beweglich sein kann oder auch nicht. Dort, wo zwei Leiter aneinander stoßen, tauschen sie bewegliche Ladungsträger aus. Weil aber die Beweglichkeiten der verschiedenen Ladungsträger beim Grenzübergang nicht gleich sind, führt das zu einer elektrischen Spannung über der Grenzfläche. Zwischen Metallen wird die Temperaturabhängigkeit der Grenzflächenspannung gern zur Temperaturmessung genutzt (Thermoelement); die Spannung zwischen Metall und Elektrolyt macht Taschenlampenbatterien und Akkumulatoren möglich. Die Grenzflächenspannung zwischen verschiedenen dotierten Halbleitern wird genutzt, um Dioden und Transistoren zu bauen.

6.8.1

Galvani-Spannung

Grenzflächenspannungen treten immer dort auf, wo von den zwei Sorten von Ladungsträgern, die wegen der Elektroneutralität ja mindestens vorhanden sein müssen, die eine leichter durch die *Phasengrenze* hindurchkommt als die andere.

Ein Beispiel gibt das Silberblech in der Silbernitratlösung. Das Metall besitzt Ag^+ -Ionen und Elektronen, der Elektrolyt ebenfalls Ag^+ -Ionen und dazu NO_3^- -Ionen. Aus chemischen Gründen können nur die Silberionen aus der einen Phase in die andere überwechseln; die Elektronen dürfen das Metall nicht verlassen und die negativen Ionen nicht die Lösung. Folglich baut sich eine **Galvani-Spannung** zwischen Elektrode und Elektrolyt auf. Sie hat einen beträchtlichen Schönheitsfehler: Man kann sie nicht messen, und zwar prinzipiell nicht! Dazu wäre ja eine zweite Elektrode in der Nitratlösung nötig. Besteht sie ebenfalls aus Silber, so entwickelt sie die gleiche Galvani-Spannung, aber in entgegengesetzter Richtung, und lässt für das Messinstrument nichts übrig – besteht sie aus einem anderen Metall, so bildet dies seine eigene Galvani-Spannung aus und das Instrument bekommt nur die Differenz. Das ist interessant genug, misst aber keine der beiden Galvani-Spannungen für sich allein.

wichtig

KontaktsSpannung (Kontaktpotential, Galvani-Spannung):
elektrische Grenzflächenspannung zwischen zwei Leitern; nur Differenzen sind messbar.

Die Differenz zweier (oder auch mehrerer) Galvani-Spannungen erscheint als Klemmenspannung eines **galvanischen Elementes**, z.B. einer Taschenlampenbatterie. Ein im Modell übersichtliches, praktisch freilich bedeutungsloses Beispiel geben ein Silber- und ein Kupferblech, leitend durch einen Draht miteinander verbunden und

gemeinsam eingetaucht in eine wässrige Lösung von Silbernitrat (☞ Abb. 6.64). In diesem Fall liegen die Galvani-Spannungen so, dass Kupferionen stark in die Lösung hineindrücken und ihrer zweifach positiven Ladung wegen doppelt so viele Silberionen verdrängen, günstigenfalls in deren Elektrode hinein. Insgesamt muss die Elektroneutralität ja gewahrt bleiben. Dabei laufen Elektronen im Draht vom Kupfer zum Silber und können dort Arbeit leisten. Für den Außenkreis ist das Kupferblech negativer Pol, für den Elektrolyten positiver. In der Praxis läuft dieser Versuch freilich meist so ab, dass sich das verdrängte Silber unmittelbar auf dem Kupferblech abscheidet. Ist dieses schließlich voll versilbert, so haben sich die beiden Galvani-Spannungen aneinander angeglichen: Die Klemmenspannung geht also rasch gegen null. Die Technik muss Systeme finden, bei denen sich derartige unerwünschte Reaktionen unterdrücken lassen. Immer ist die technische Verwirklichung, die auf vielerlei Nebenbedingungen Rücksicht zu nehmen hat, weit komplizierter als ihr physikalisches Prinzip.

Wer verdrängt eigentlich wen aus der Lösung? Dies ist eine Frage an die Chemie. Primär geht es um die positiven Kationen, die relativ leicht durch die Phasengrenze zwischen Elektrode und Elektrolyt hindurchtreten können; wer verdrängt wird, lädt seine Elektrode notwendigerweise positiv auf, bringt sie also auf eine positive Spannung gegenüber der anderen Elektrode. Im Leerlauf und unter normalisierten Bedingungen gibt diese Spannung Antwort auf die eingangs gestellte Frage. Danach kann man alle Ionensorten in eine **Spannungsreihe** ordnen, für deren Zahlenwerte freilich eine gemeinsame Bezugselektrode vereinbart werden muss. Aus hier nicht zu erörternden Gründen hat man sich auf die *Wasserstoffelektrode* geeinigt, repräsentiert durch ein von gasförmigem Wasserstoff umspültes, oberflächenpräpariertes Platinblech – auch der Wasserstoff bildet ja Kationen. Die Position in der Spannungsreihe legt fest, wie *edel* ein Metall ist; Gold und

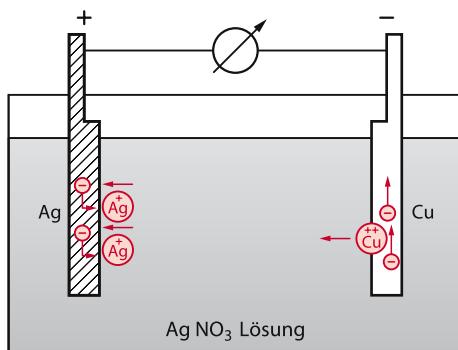


Abb. 6.64. Beispiel eines galvanischen Elements (Einzelheiten im Text)

Silber liegen oben an. In der Elektrochemie gilt, dass der Unedle den Edleren verdrängt. Man soll daran keine philosophischen Betrachtungen knüpfen, dem Grundsatz getreu, in kein Wort mehr „hinein zu geheimnissen“ als hineindefiniert wurde.

Galvani-Spannungen lassen sich nicht vermeiden, auch nicht bei den Sonden, mit denen z.B. Aktionspotentiale von Nervenfasern gemessen werden. In manchen Fällen genügt es, wenn die Grenzflächenspannungen der Sonden lediglich für die Dauer des Experiments konstant bleiben; dann kommt man mit einfachen Platindrähtchen aus. Wenn aber mehr verlangt wird, muss man zu eigens für bestimmte Zwecke entwickelten **Normalelektroden** greifen. Die „Kalomel-Elektrode“ beispielsweise ist darauf gezüchtet, die Wasserstoffionenkonzentration nicht zu bemerkern, im exakten Gegensatz zur „Glaselektrode“. Die Spannung zwischen beiden erlaubt, pH-Werte elektrisch zu messen. Wie man das erreicht, ist Sache der Experten; dem Anwender bleibt nicht mehr als sich strikt an die mitgelieferte Gebrauchsanweisung zu halten.

Alle Potentialmessungen mit Normalelektroden setzen stillschweigend voraus, dass sich die Elektrode während der Messung nicht verändert. Das ist nicht so selbstverständlich, wie dies auf den ersten Blick erscheinen mag. Die Elektrode muss ja ein Messinstrument versorgen, dessen Innenwiderstand nicht unendlich groß sein kann, das also einen

Strom verlangt. Zu diesem gehört notwendigerweise eine elektrochemische Reaktion an der Elektrode, die grundsätzlich die Galvani-Spannung beeinflussen kann: Die Elektrode wird dann *polarisiert*. Die Messtechnik sieht sich dementsprechend nach leidlich *unpolarisierbaren Elektroden* um; sie erfordern eine wohl überlegte Chemie und erlauben trotz allem durchweg nur kleine Ströme, verlangen also hochohmige Messinstrumente. Entscheidend ist freilich nicht der Strom, sondern die Stromdichte. Normalelektroden werden deshalb nach Möglichkeit großflächig konstruiert. Das geht allerdings nicht immer, z.B. dann nicht, wenn das Aktionspotential vom Sehnerv einer einzelnen Facette im Fliegenauge bestimmt werden soll.

6.8.2 Thermospannung

Auch bei Metallkontakte kann nur eine Sorte von Ladungsträgern leichtfüßig die Grenzfläche überqueren: die Elektronen. Die Ionen sitzen auf ihren Plätzen im Kristallgitter fest. Folglich entsteht auch hier eine Galvani-Spannung. Weil sie nicht gemessen werden kann, kümmert man sich meist nicht weiter um sie. Streng genommen liegt aber ein geerdeter Kupferdraht auf einem anderen Potential als ein geerdeter Silberdraht. Streng genommen liegen auch die kupfernen Klemmen eines Messinstruments auf einem anderen Potential als der Messingbügel, mit dem sie einmal kurzgeschlossen sein mögen. Trotzdem fließt kein Strom, denn alle Galvani-Spannungen im Kreis addieren sich zu null. Dafür sorgt schon der Energiesatz: Würden sich die Spannungen nicht aufheben, würde ein Strom fließen und Joule-Wärme entwickeln. Woher sollte die Energie kommen?

Grenzflächenspannungen ändern sich freilich mit der Temperatur. Hängt man deshalb an die Klemmen eines empfindlichen Spannungsmessers zwei Kupferdrähte und verbindet man ihre Enden mit einem Draht aus Konstantan (Abb. 6.65), so schlägt das

Instrument aus, sobald die beiden *Lötstellen* (sie müssen nicht wirklich verlötet sein) auf unterschiedliche Temperaturen gebracht werden. Das Instrument misst die *Thermospannung*, ein von den beiden Metallen abhängiges Maß für die Temperaturdifferenz. Der Energiesatz ist damit zufrieden und der 2. Hauptsatz der Wärmelehre auch: Die heiße Lötstelle nimmt sowieso Wärme vom Messobjekt auf und leitet sie längs des Drahtes zur kalten weiter; da fällt auch ein bisschen Energie für die Joule-Wärme im Spannungsmesser mit ab. Steckt man jetzt die eine Lötstelle in ein mit Eiswasser gefülltes Dewar-Gefäß, so bekommt man ein genaues und schnelles Thermometer, das sich in Grad Celsius eichen lässt. Es kann sogar Fernthermometer spielen, denn der Spannungsmesser darf auch über ein langes Kabel angeschlossen werden (Abb. 6.66). Die Spannungen ausgesuchter *Thermopaare* wie Kupferkonstanten, Nickel-Nickelchrom usw. sind genau vermessen und tabelliert; die zuständige Industrie achtet durch sorgfältige Kontrolle der Legierungen auf Reproduzierbarkeit. Einziger Nachteil: Thermospannungen zwischen Metallen sind recht kümmerlich – das speziell für hohe Temperaturen entwickelte Thermopaar Platin-Platinrhodium liefert nur etwa 10 mV für 1000 K Temperaturdifferenz. Die *differentielle Thermokraft*

$$\alpha = dU_{th}/dT$$

ist also klein und zudem selbst noch abhängig von der Temperatur.

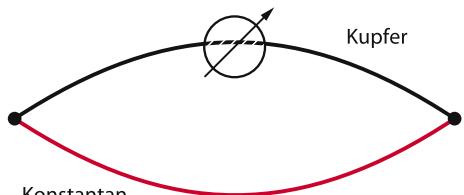


Abb. 6.65. Schema des Thermoelements. Befinden sich die beiden Lötstellen auf unterschiedlichen Temperaturen, so heben sich die beiden Galvani-Spannungen nicht auf. Die Differenz wird vom Instrument als Thermospannung angezeigt

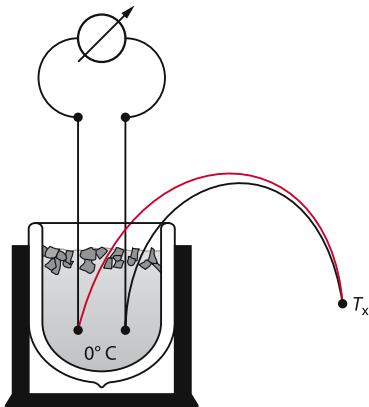


Abb. 6.66. Messung der Temperatur mit einem in °C eichbaren Thermoelement: Die Vergleichslötstelle wird durch Eiswasser auf 0 °C gehalten. Das Instrument darf über eine lange Leitung angeschlossen werden (Fernthermometer)

wichtig

Ein Thermoelement nutzt die Temperaturabhängigkeit der Kontaktspannung zur Temperaturmessung.

6.8.3 Halbleiter

Die technisch verwendeten *Halbleiter* wie Silizium und Germanium sind Elektronenleiter ähnlich den Metallen – aber sie sind es zumeist nicht aus eigener Kraft: Ihnen werden in Spuren bestimmte Fremdatome zugesetzt, z.B. 1 ppm Antimon (*ppm* bedeutet „part per million“, also einen Gehalt an Fremdatomen von 10^{-6}).

Im Gegensatz zu den Gitterbausteinen eines Metalls bleiben die eines Halbleiters neutrale Atome; Antimon aber, eingesprengt auf Gitterplätzen des Siliziums, kann für wenig thermische Energie Elektronen abdissoziieren, die dann für eine elektrische Leitfähigkeit sorgen – dies sogar mit recht hoher Beweglichkeit. Der *Antimon-Donator* bleibt derweil an seinen Gitterplatz gefesselt (Abb. 6.67, rechtes Teilbild). Durch passende *Dotierung* mit Donatoren kann die

Leitfähigkeit grundsätzlich in weiten Grenzen eingestellt werden – die technischen Schwierigkeiten, derartig kleine Mengen gezielt in einen Kristall einzubauen, stehen hier nicht zur Debatte. Eine solche, von negativen Elektronen getragene Leitfähigkeit heißt *n-Leitung*.

Diese Bezeichnung ist nur dem verständlich, der weiß, dass man einen Halbleiter auch anders dotieren kann, mit Akzeptoren nämlich, die in Silizium z.B. von Gallium-Atomen gebildet werden. Sie wirken so, als spalteten sie elektronenähnliche Partikel mit positiver Elementarladung ab, **Defektelektronen** geheißen (Abb. 6.67, linkes Teilbild). Diese etwas gewundene Ausdrucksweise hat ihren Grund darin, dass der Mechanismus des Stromtransports nach Dotierung mit Akzeptoren korrekt nur unter einem Aufwand an wellenmechanischer Rechnung beschrieben werden kann. Ein Festkörperphysiker sollte ihn beherrschen, aber Praktiker der Halbleiter-elektronik können darauf verzichten. Hier

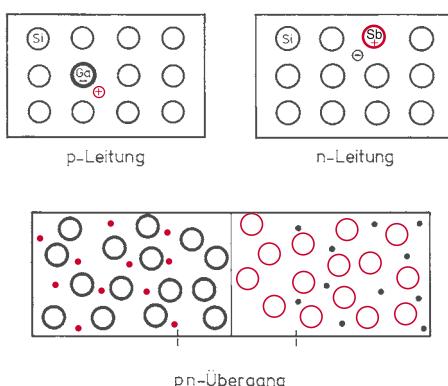


Abb. 6.67. Dotierung des Halbleiters Silizium, schematisch. Rechtes oberes Teilbild: Sb-Atome auf Gitterplätzen (*Donatoren*) spalten bewegliche Elektronen ab und werden positive Ionen. Linkes oberes Teilbild: Ga-Atome auf Gitterplätzen (*Akzeptoren*) spalten Defektelektronen (auch „Löcher“ genannt) ab und werden negative Ionen. Unteres Teilbild: die Grenze zwischen einem p- und einem n-Gebiet innerhalb eines Einkristalls bildet einen *pn-Übergang* mit einer Raumladungszone verminderter Leitfähigkeit, in der bewegliche Ladungsträger nahezu fehlen (Dicke in der Größenordnung μm) – Si-Atome sind hier nicht mitgezeichnet

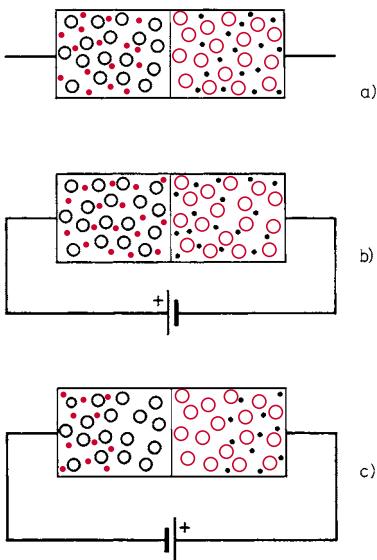


Abb. 6.68. pn-Übergang als Gleichrichter, schematisch. Ohne äußere Spannung hat die Raumladungszone eine bestimmte Dicke und relativ hohen Widerstand (a). Legt man den positiven Pol einer Batterie an das p-Gebiet, so schwemmt man Defektelektronen wie Elektronen in die Raumladungszone hinein; sie wird schmäler, der Widerstand sinkt: Durchlassrichtung (b). Polt man um, so wird sie dicker und erhöht den Widerstand: Sperrrichtung (c)

muss also die Feststellung genügen, dass sich durch Dotierung auch eine wie von positiven Ladungen getragene **p-Leitung** willkürlich erzeugen lässt, – und das sogar in zwei unmittelbar aneinandergrenzenden Zonen ein und desselben Einkristalles. Ein solches Gebilde heißt **pn-Übergang** und besitzt eine Phasengrenze mit Galvanispannung: Zwei der vier Ladungsträgersorten können die Grenze überschreiten, die Elektronen aus dem n-Gebiet nämlich und die Defektelektronen aus dem p-Gebiet, aber die positiven Donator-Ionen und die negativen Akzeptor-Ionen können dies nicht. Ohne nähere Begründung sei hier folgendes konstatiert: An der Dotierungsgrenze des pn-Überganges bildet die Galvanispannung eine vergleichsweise dicke Raumladungszone aus, in der beide Arten beweglicher Ladungsträger weit unterrepräsentiert sind – die Raumladung stammt von Donatoren

und Akzeptoren (☞ Abb. 6.67, unteres Teilbild). Es leuchtet ein, dass diese Zone relativ hohen elektrischen Widerstand haben muss, weil bewegliche Ladungsträger knapp sind. Dieser Widerstand lässt sich aber durch eine äußere Spannung merklich erniedrigen; nur muss sie so gepolt sein, dass sie Elektronen wie Defektelektronen in die Raumladungszone hineindrückt (☞ Abb. 6.68 b). Dann wird der schlecht leitende Bereich schmäler, sein Widerstand sinkt und lässt einen vergleichsweise großen Strom hindurch. Polt man um, so saugt man bewegliche Träger auch noch aus der Raumladungsschicht heraus, sie wird dicker (☞ Abb. 6.68 c), erhöht ihren Widerstand und sperrt den Strom, wenn auch nicht vollkommen: der pn-Übergang wirkt als Gleichrichter. Es sei nicht verschwiegen, dass dieses Bild die wahren Verhältnisse arg simplifiziert – aber es ist ganz anschaulich, nicht ganz falsch und gibt zumindest die Polarität von Durchlass- und Sperrrichtung korrekt wieder.

Der modernen Halbleitertechnik macht es keine ernsthafte Mühe, auf einem p-leitenden Si-Scheibchen eine dünne n-leitende Oberflächenschicht mit nur wenigen Elektronen darin zu erzeugen (☞ Abb. 6.69). Die beiden Elektroden an ihren Enden sind nur durch diese Elektronen leitend miteinander verbunden; den Strompfad durch das Innere des Scheibchens versperrt der pn-Übergang. Man lässt nun über der n-Schicht eine dünne Haut aus isolierendem Quarzglas (SiO_2) wachsen und versieht sie außen mit einem schmalen Metallbelag. Dieser bildet dann mit der n-Schicht einen Kondensator; lädt man ihn, so ändert man die Zahl der Elektronen in seinen „Platten“,

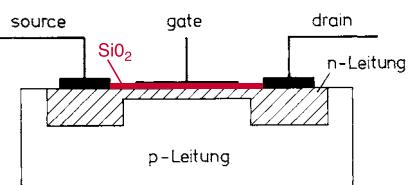


Abb. 6.69. MOSFET, schematisch. (Einzelheiten im Text)

also auch in der n-Schicht. Entsprechend ändert sich deren Leitwert zwischen den Elektroden: Spannung an der metallischen **Gate**-Elektrode steuert den Strom zwischen **Source**- und **Drain**-Elektrode. Dieser sog. **Mosfet** (Metal-Oxyd-Semiconductor Field-Effect-Transistor) hat sich weite Gebiete der Verstärker- und Rechenmaschinentechnik erobert. Er ist winzig und kann darum millionenweise auf kleinem Raum zusammengepackt werden. Hätte man ihn nicht rechtzeitig erfunden, so gäbe es heute kein Computer-Zeitalter.

Auch die elektrische Leitfähigkeit eines undotierten Silizium-Stäbchens ist nicht null: Für rund ein Elektronenvolt thermischer Energie spalten die Atome des Grundgitters bewegliche Ladungsträger ab, und zwar gleich als Elektronen-Defektelektron Paare – sie bleiben selbst neutral. Diese **Eigenleitung** eines Halbleiters (Gegenstück zu der durch Dotierung erzwungenen **Störleitung**) nimmt mit steigender Temperatur kräftig zu: Eigenhalbleiter sind **Heißleiter**. Auch für sie gibt es technische Verwendung.

Die Erzeugung eines Elektron-Defektelektron-Paares braucht Energie; sie muss nicht aus der thermischen Bewegung stammen, sie darf auch von Licht geliefert werden. Halbleiter erlauben deshalb die Herstellung von **Photowiderständen** – Bauelementen, die ihren Leitwert bei Lichteinstrahlung kräftig heraufsetzen. Ein technisches Beispiel liefert der Belichtungsmesser der meisten Filmkameras für Amateure; er wird aus Kadmiumsulfid (CdS) gefertigt. Sein Vorteil: er ist sehr empfindlich – sein Nachteil: er braucht eine Batterie. Wer vergisst, sie rechtzeitig auszuwechseln, wundert sich über fehlbelichtete Filme.

Strahlt man Licht auf einen pn-Übergang, so werden die optisch erzeugten Ladungsträgerpaare gleich im Feld der Galvanispannung geboren und von ihm getrennt. Das bedeutet einen Strom im Außenkreis, sofern dieser geschlossen ist: Der pn-Übergang wird zum **Photoelement**, das ohne Batterie einen Strommesser versorgen kann – Prinzip der **Solar-Zellen**, die Satelliten

mit Strom versorgen: direkter Umsatz von Strahlungsenergie in elektrische.

Auf der Erde könnte dieses Prinzip, großtechnisch eingesetzt, grundsätzlich manche Probleme der Energieversorgung mildern helfen, insbesondere bei der Beseitigung des Energiemülls Wärme: Er fällt sozusagen nicht an. Für den Wärmehaushalt der Erde ist es gleichgültig, ob Sonnenlicht wie bisher vom Wüstensand unmittelbar in Wärme umgesetzt wird oder auf dem Umweg über elektrische Energie, die zwischendurch Bedürfnisse menschlicher Kultur befriedigt. Dem steht vorerst noch manches technische Hindernis im Wege, darunter ein ausgesprochen banales: Man müsste den Solarbatterien gar zu oft die Scheiben putzen, nicht nur der Vögel wegen. Satelliten haben diese Sorge nicht.

6.9

Elektrische Unfälle

Einleitung

Elektrische Unfälle kommen vor und können tödlich enden. Man muss sich und andere schützen. Physiologisch wirksam ist der Strom; Spannungen haben nur insoweit Bedeutung, als sie Ströme auslösen.

Im Elektrolyten, also auch im Menschen, transportieren elektrische Ströme nicht nur Ladung, sondern auch Materie. Das führt zu Konzentrationsverschiebungen in den Körperzellen, die aber harmlos sind, solange sie sich in den von der Natur vorgesehenen Grenzen halten. Schließlich darf der Mensch sein eigenes EKG nicht spüren. Geringfügige Störungen werden auch dann stillschweigend überspielt, wenn eine äußere Spannung der Auslöser war. Starke Störungen können aber leicht zu Dauerschäden führen und sogar zum Tod. Auf jeden Fall tun sie weh.

Besondere Gefahr droht dem Herzen. Seine Funktion verlangt eine koordinierte Kontraktion aller seiner Muskelfasern nach dem Kommando des Steuerzentrums, das den Puls regelt. Fällt die Koordinierung aus, so kann es zu meist tödlichem **Herzflimmern**

kommen; es lässt sich elektrisch auslösen. Gefährlich sind demnach vor allem Ströme, deren Bahnen von Hand zu Hand quer durch den Brustkorb laufen. Wer im Laboratorium mit ungeschützten hohen Spannungen zu tun hat, hält darum nach alter Expertenregel immer eine Hand fest in der Hosentasche, denn dann geht ein Schlag allenfalls von der anderen Hand in den Fuß und nicht ganz so dicht am Herzen vorbei. Robuste Elektriker prüfen zuweilen mit Zeige- und Mittelfinger, ob „Strom in der Leitung ist“ Zumal mit ölichen Händen kann das gut gehen, weil kein lebenswichtiges Organ im Stromkreis liegt. Wer einen elektrischen Schlag bekommt, unterbricht meist durch seine Schreckreaktion den Stromkreis. Wer aber einen defekten Tauchsieder voll umfasst, dessen Hand verkrampt sich möglicherweise so, dass er nicht wieder loslassen kann.

Ausgelöst werden elektrische Unfälle von Spannungsquellen; die physiologische Wirkung röhrt aber vom Strom her – folglich hat der Widerstand im Stromkreis erhebliche Bedeutung und mit ihm die Frage: Wie kommt der Strom von dem spannungsführenden Metallteil durch das Unfallopfer zur Erde? Dicke Schuhsohlen, weiche Teppiche, Holz-, Kunststoff- und Fliesenböden mögen hier manches Schlimme schon gemildert haben. Die feuchten Kacheln des Badezimmers sind da weniger gut. Wer aber großflächig geerdet in der Badewanne sitzt, muss alle elektrischen Geräte meiden; schon der kleinste Isolationsfehler im Griff eines Haartrockners kann gefährlich werden. Bis 0,4 mA braucht man nichts zu befürchten; ab 100 mA muss man aber mit dem Schlimmsten rechnen.

wichtig

Wechselstrom von 50 Hz:

- <0,4 mA: keine spürbare Wirkung
- 0,4–4 mA: geringe, aber merkliche Wirkung
- 5–25 mA: erhebliche Störungen
- 25–80 mA: Bewusstlosigkeit, reversibler Herzstillstand
- >100 mA: Verbrennungen, Herzstillstand

Welche Spannungen gehören zu diesen Strömen? Das hängt sehr vom Einzelfall ab. Grob über den Daumen gepeilt hat der menschliche Körper einen Widerstand in Kilohm-Bereich. Die 230 V der Steckdose können als schon tödlich sein.

Wer mit technischer Wechselspannung Silber elektrolytisch abscheiden versucht, wird enttäuscht: Was sich an einer Elektrode während einer Halbwelle abscheidet, geht in der nächsten wieder in Lösung. In dieser Beziehung sind lebende Organismen empfindlicher, aber bei hinreichend hohen Frequenzen werden selbst stärkere Ströme auch für sie ungefährlich.

Die moderne Elektrifizierung der Haushalte ist nur zu verantworten, wenn strenge Sicherheitsvorschriften konsequent eingehalten werden. Vor einer Taschenlampenbatterie braucht man sich nicht zu schützen. Man darf ihre Brauchbarkeit sogar dadurch überprüfen, dass man seine Zunge zwischen die Kontaktbleche hält: Schmeckt es sauer, ist die Batterie noch in Ordnung. Bei 4,5 V kann man sich das leisten. Spannungen bis 24 V mit den Händen anzufassen, bedeutet für den Menschen im Allgemeinen keine ernstliche Gefahr; sie sind sogar für Puppenstuben und Modelleisenbahnen zugelassen. Das gilt aber nur für Zuleitungen an den „Körperstamm“, nicht für Körperhöhlen oder gar das Körperinnere (und für die sehr niederohmige Erdung in der Badewanne ebenfalls nicht). Einen Haushalt kann man mit 24 V leider nicht versorgen. Schon dem Toaströster müssten 20 Ampere angeliefert werden, über ein dickes und unhandlich steifes Kabel.

Die 230 V der Steckdose sind alles andere als harmlos. Auf jeden Fall darf man den Spannung führenden **Phasenleiter** nicht versehentlich berühren können. Er muss sorgfältig gegen das Gehäuse eines elektrischen Gerätes isoliert sein – kein Problem, wenn das Gehäuse selbst zuverlässig isoliert. In kondensierendem Wasserdampf (Haartrockner im Badezimmer) tut es das nicht unbedingt. Da man nicht wissen kann, welche der beiden Litzen **Nullleiter** ist, welche Spannung führt (ob der Netzstecker

nämlich so oder anders herum in der Steckdose steckt), müssen beide Leitungen vom Gehäuse elektrisch getrennt sein. Für den Hausgebrauch genügt die sog. „Betriebsisolation“, in Sonderfällen wird eine zusätzliche „Schutzisolierung“ verlangt. Kommt es aber, zum Beispiel wegen eines Kabelbruchs, zu einem Isolationsfehler beim Phasenleiter, kann das Gerät lebensgefährlich werden.

Um dieses Risiko zu mindern, haben Steckdosen und die meisten Stecker einen dritten Kontakt, den **Schutzkontakt**. Er wird vor der Steckdose (vom Kraftwerk aus gesehen) mit dem Nullleiter elektrisch verbunden (☞ Abb. 6.70 a), hinter dem Stecker mit dem Gehäuse des Gerätes. Damit liegt dieses berührungssicher auf Erdpotential. Kapazitive und andere Leckströme führt der Schutzleiter zuverlässig ab. Wird aber die Isolation des Phasenleiters ernsthaft beschädigt, so gibt es Kurzschluss über den Schutzleiter und die Sicherung vor der Steckdose „fliegt heraus“. Ein Kabelbruch im Schutzleiter führt zu der Situation, die anfangs noch allgemein akzeptiert wurde. Erst Kabelbruch plus Isolationsfehler werden gefährlich; man nennt das *doppelte Sicherheit*.

Tritt dieser doppelte Fehler tatsächlich ein, so bekommt man bei Berührung des Gehäuses einen elektrischen Schlag und zieht normalerweise die Hand instinktiv zurück, bevor Ernsthaftes geschieht. Darauf verlassen sollte man sich aber nicht. Es ist besser, Leckströme zu begrenzen. Dafür sorgt ein **Fehlerstromschutzschalter** („FI-Schutzschalter“), der vor der Steckdose fest installiert wird. Elektrisch liegt er hinter der Verbindung von Schutz- und Nullleiter (☞ Abb. 6.70 b). Der FI-Schutzschalter vergleicht die beiden Ströme in Phasen- und Nullleiter miteinander; im Idealfall müssen sie gleich sein. Besteht eine Differenz, so kann sie harmlos über den Schutzleiter abgeflossen sein, möglicherweise aber auch nicht ganz so harmlos über den Patienten. Wird ein Grenzwert überschritten (meist 30 mA), so unterbricht der Schutzschalter die Stromversorgung der Steckdose(n) und schaltet so die angeschlossenen elektrischen Geräte ab.

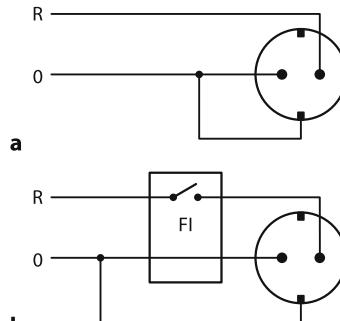


Abb. 6.70. Die Funktionen des Schutzkontakte (SK): Im Haushalt ist der Schutzkontakt mit dem Nullleiter (0) verbunden (a); ein Isolationsfehler des Phasenleiters (R) führt zum Kurzschluss. Der Fehlerstrom-Schutzschalter (FI) unterbricht die Stromversorgung, wenn die Differenz zwischen den Strömen in Phasen- und Nullleiter eine Grenzwert überschreitet (b)

6.10 Magnetostatik

Einleitung

Zusätzlich zum elektrischen Feld erzeugen elektrische Ladungen **Magnetfelder**, sobald sie sich bewegen; zusätzlich zur Coulomb-Kraft im elektrischen Feld unterliegen elektrische Ladungen der (magnetischen) Lorentz-Kraft, sobald sie sich in einem fremden **Magnetfeld** bewegen. Die Magnetostatik kennt nur zeitlich konstante **Magnetfelder**.

6.10.1 Magnetische Felder

Schon im Mittelalter navigierten Kapitäne und Seeräuber nicht nur nach der Sonne und den Gestirnen, sondern auch nach dem Kompass, also einem kleinen Stabmagneten, der sich einigermaßen zuverlässig in Nord-Süd-Richtung einstellt, wenn man ihm erlaubt, sich reibungsarm um eine vertikale Achse zu drehen. Er tut dies als kleiner magnetischer Dipol im großen Magnetfeld der Erde (☞ Abb. 6.71). Ganz analog würde sich ein elektrischer Dipol einstellen (s. Kap. 6.5.4), wenn die Erde ein entsprechendes elektrisches Feld besäße. Wie die-

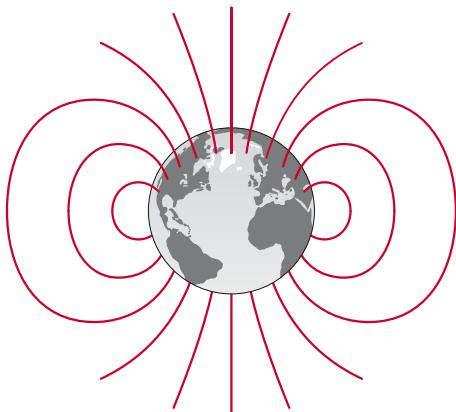


Abb. 6.71. Magnetfeld der Erde

ses kann auch ein **magnetisches Feld** mit Hilfe von Feldlinien dargestellt werden; eine Kompassnadel stellt sich nach Möglichkeit zu ihnen parallel. Nur laufen sie nicht von plus nach minus, sondern von Nord nach Süd – Bezeichnungen dürfen frei vereinbart werden. Die noch genauer zu definierende **magnetische Feldstärke** ist auf jeden Fall ein Vektor. Auch in magnetischen Feldern ziehen sich ungleichnamige Pole an, stoßen sich gleichnamige ab.

wichtig

Magnetische Felder können wie elektrische Felder qualitativ durch Feldlinien dargestellt werden.

Einigermaßen kräftige Magnetfelder kann man sichtbar machen. Man legt einen glatten Karton beispielsweise auf einen Hufeisenmagneten und streut Eisenfeilspäne darüber. Wenn man durch vorsichtiges Klopfen ein wenig nachhilft, ordnen sich die Späne zu einer Art Feldlinienbild; legt man noch eine Kompassnadel dazu, so meint man zu „sehen“, wie die Feldlinien versuchen, die Nadel als magnetischen Dipol in Feldrichtung zu drehen (Abb. 6.72). Ein Magnetfeld ist ein Raumzustand, in dem auf einen magnetischen Dipol ein Drehmoment ausgeübt wird, solange er sich noch nicht im Feld ausgerichtet hat.

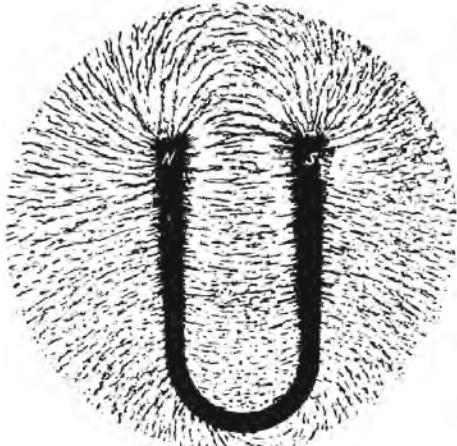


Abb. 6.72. Magnetische Feldlinien lassen sich mit Eisenfeilspänen sichtbar machen: Hufeisenmagnet ohne und mit Kompassnadel (nach R.W. Pohl)

wichtig

Ein Magnetfeld ist ein Raumzustand, in dem auf einen magnetischen Dipol ein Drehmoment ausgeübt werden kann.

Dipol besteht aus zwei entgegengesetzt geladenen Kugeln, die von einem isolierenden Stab auf Distanz gehalten werden. Zerbricht man den Stab, kann man die beiden Ladungen im Prinzip beliebig weit auseinander ziehen; man muss nur die dazu nötige Arbeit gegen die Coulomb-Kraft aufbringen. Zerbricht man hingegen einen makroskopischen magnetischen Dipol, also einen Stabmagneten, so bekommt man zwei kleinere magnetische Dipole, beide vollständig mit Nord- und Südpol ausgestattet. Es gibt keine magnetischen Einzelladungen im Sinne der elektrischen, die z.B. durch Ionen repräsentiert werden können.

Kompassnadeln reagieren nicht nur auf Magnete, sie reagieren auch auf elektrische Ströme: Sie stellen sich so gut, wie es ihre Lagerung erlaubt, quer zum Draht (Abb. 6.73). Tatsächlich umgibt sich ein Strom mit kreisförmig-konzentrischen magnetischen Feldlinien, die weder Anfang noch Ende haben (Abb. 6.74); sie hüllen den stromdurchflossenen Draht wie ein Schlauch ein. Für den Umlaufsinn der Feldlinien gibt es eine Rechte-Hand-Regel: Strom in Richtung des Daumens, Feldlinien in Richtung der gekrümmten Finger.

Stellt man parallel zum ersten Draht einen zweiten, der aber in Gegenrichtung vom Strom durchflossen wird, so überlagern sich die beiden Ringsysteme; sie verstärken sich im Gebiet zwischen den Drähten und kompensieren sich mehr oder weniger im Außenraum. Man kann auch gleich einen einzigen Draht zur Schleife biegen; sein Feld ähnelt dem eines kurzen Stabma-

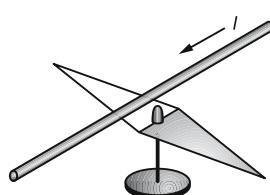


Abb. 6.73. Eine Kompassnadel stellt sich quer zu einem elektrischen Strom I

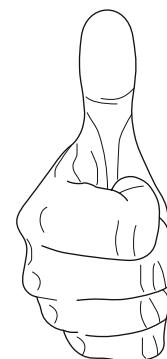
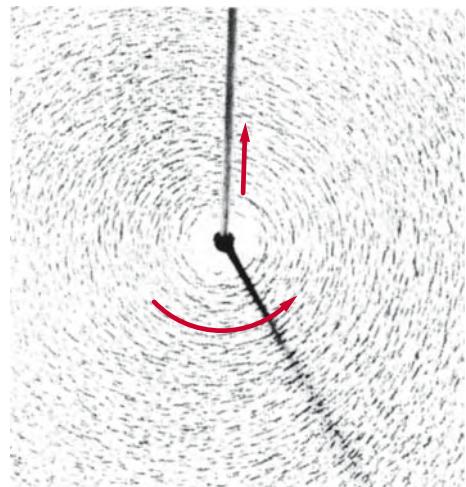


Abb. 6.74. Ein stromdurchflossener Leiter umgibt sich mit ringförmig geschlossenen magnetischen Feldlinien, hier durch Eisenfeilspäne sichtbar gemacht (nach Orear). Für den Umlaufsinn der Feldlinien gibt es eine Rechte-Hand-Regel: Strom in Richtung des Daumens, Feldlinien in Richtung der gekrümmten Finger

gneten – nur kann man jetzt gewissermaßen in dessen Inneres blicken. Setzt man einige solcher Schleifen, parallel geschaltet und von gleichen Strömen durchflossen, hintereinander, so wird der „Stabmagnet“ länger (Abb. 6.75): Viele kleine, parallel orientierte Dipole geben einen großen. Setzt man die Schleifen dicht genug und macht man die Reihe lang gegenüber dem

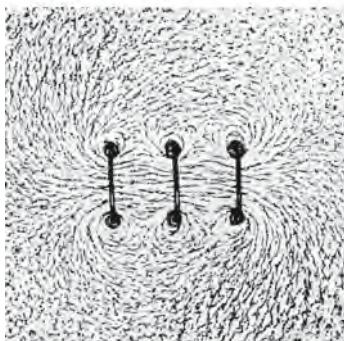
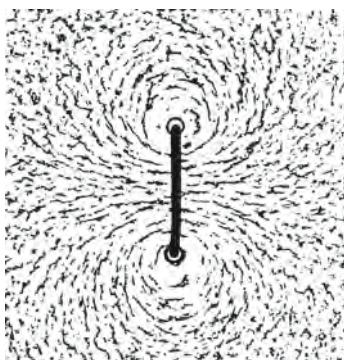


Abb. 6.75. Magnetfeld einer Stromschleife und von drei in gleicher Richtung von Strom durchflossenen Schleifen (nach R.W. Pohl)

Durchmesser, so laufen die Feldlinien im Inneren praktisch parallel: Sie liefern ein homogenes magnetisches Feld in Längsrichtung der Schleifenreihe (☞ Abb. 6.76). Im Außenraum ergibt sich das gleiche Feld wie bei einem entsprechend geformten Per-

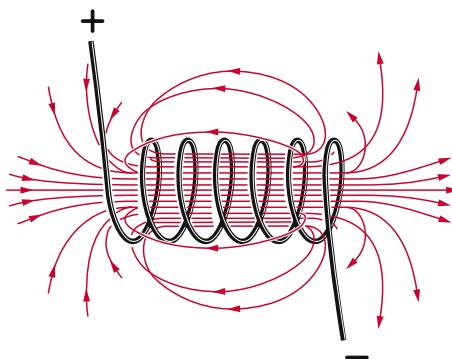


Abb. 6.76. Im Innern einer gestreckten Spule herrscht ein homogenes Magnetfeld (nach Gerthsen)

manentmagneten. Im Innenraum gilt das auch, aber wie die Feldlinien im Inneren eines Permanentmagneten verlaufen, lässt sich nur mit sehr trickreichen Messverfahren herausfinden.

Alle Beispiele zeigen: Magnetische Feldlinien bilden immer in sich geschlossene Schleifen, ganz anders als elektrische Feldlinien, die immer auf elektrischen Ladungen starten oder enden. Dies liegt eben daran, dass es keine magnetischen Ladungen gibt.

wichtig

Magnetische Feldlinien bilden
immer geschlossene Schleifen.

Frage: Der Nordpol einer Kompassnadel zeigt nach Norden. Wo also liegt der Nordpol des Erdmagnetfeldes?

Antwort: In der Antarktis. Dass Atlanten ihn in die Arktis verlegen, ist zwar physikalisch falsch, aber trotzdem sinnvoll: man müsste sonst zu viel erklären.

6.10.2 Kräfte im Magnetfeld

Wenn der Stabmagnet „Kompassnadel“ auf das Magnetfeld der Erde reagiert, dann reagiert auch eine stromdurchflossene Spule auf eine andere stromdurchflossene Spule und sogar ein einzelner stromdurchflossener Draht auf einen anderen. Auf welchem technischen Weg die Magnetfelder entstehen, kann schließlich keinen grundsätzlichen Unterschied ausmachen. Die einfachste Geometrie bekommt man, wenn man einen horizontalen Draht quer zu einem ebenfalls horizontalen, homogenen Magnetfeld spannt. Schickt man jetzt einen Gleichstrom durch den Draht, so versucht er, nach oben oder unten aus dem Feld herauszukommen. Auf ihn wirkt eine vertikale Kraft (☞ Abb. 6.77), die nicht nur zur Stärke des Magnetfeldes und zum Strom proportional ist, sondern auch zur Länge l , mit der

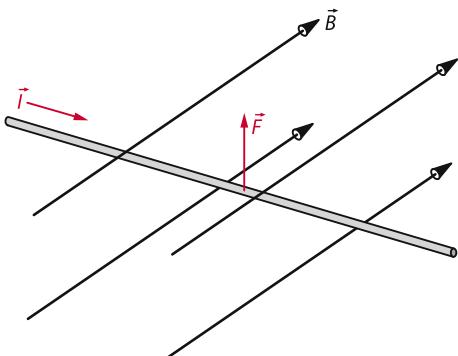


Abb. 6.77. Auf einen vom Strom \vec{I} durchflossenen Draht, der quer im Magnetfeld \vec{B} liegt, wirkt eine zu beiden senkrechte Kraft \vec{F}

sich der Draht im Feld befindet, sei es, weil er nicht länger ist, sei es, weil das Feld nicht weiter reicht. Weil, wie in der Zeichnung dargestellt, Draht, also Strom \vec{I} , Magnetfeld \vec{B} und Kraft \vec{F}_L , senkrecht aufeinander stehen, wird der Zusammenhang zwischen ihnen durch ein Kreuzprodukt gegeben. Man nennt die Kraft

$$\text{Lorentz-Kraft } \vec{F}_L = I \cdot \vec{I} \times \vec{B}$$

Da diese Gleichung den Strom I zum Vektor ernennt, kann sie die Drahtlänge l nur als skalaren Faktor werten. Die Größe \vec{B} ist ein Maß für die Stärke des magnetischen Feldes; sie bekommt den Namen **magnetische Flussdichte** und die Einheit $\text{Vs/m}^2 = \text{T (Tesla)}$.

Warum nennt man \vec{B} nicht „magnetische Feldstärke“? Man tut es zuweilen, und vielleicht setzt sich diese Bezeichnung mit der Zeit offiziell durch. Historisch wurde der Name aber an eine zu \vec{B} proportionale und im Vakuum als Vektor parallelgerichtete Größe \vec{H} mit der Einheit A/m vergeben. Diese Größe ist für das ingenieurmäßige Rechnen von Bedeutung. Kapitel 6.10.5 geht darauf ein.

Die Kompassnadel ist ein magnetisches Analogon zum elektrischen Dipol; der Satz „Drehmoment gleich Dipolmoment mal Feldstärke“ lässt sich elektrisch wie magnetisch interpretieren. In der Natur existiert aber kein magnetisches Analogon zur elektrischen Einzelladung; der Satz „Kraft gleich

(skalare) Ladung mal Feldstärke“ lässt sich nur im elektrischen Fall formulieren. Das hat zur Konsequenz:

Elektrische Erscheinungen werden beherrscht von der Coulomb-Kraft \vec{F}_C ; sie steht parallel zu den Feldlinien, hängt an der Feldstärke \vec{E} .

Magnetische Erscheinungen werden beherrscht von der Lorentz-Kraft \vec{F}_L ; sie steht quer zu den Feldlinien, hängt an der Flussdichte \vec{B} .

Biegt man den Draht zu einer rechteckigen

wichtig

Kraft auf Strom im Magnetfeld:
Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = I \cdot \vec{I} \times \vec{B}$.

Schleife, drehbar um eine horizontale Achse gelagert, so dreht er sich bis in die Stellung der Abb. 6.78. Dann hört die Bewegung auf: Alle Leitereile stehen jetzt senkrecht zum Feld, die Kräfte möchten die Leiterschleife auseinander ziehen; das verhindert aber ihre mechanische Festigkeit. Schaltet man den Strom kurz vor Erreichen dieser Stellung ab und kurz danach in Gegenrichtung wieder ein, so dreht sich die Schleife dank ihrer mechanischen Trägheit über den Todpunkt hinweg und dann unter Kraftwirkung im alten Drehsinn weiter. Nach diesem Prinzip arbeiten viele Elektromotoren: Ein mit der Achse fest verbundener Polwender

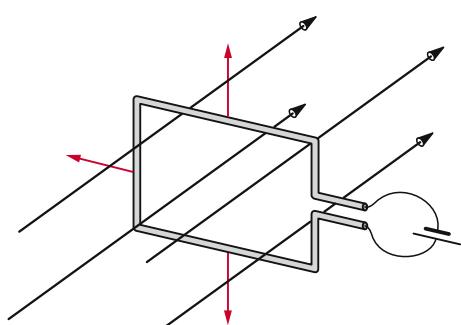


Abb. 6.78. Eine um eine horizontale Achse drehbare Leiterschleife dreht sich bei Stromfluss bis in die gezeichnete Stellung

schaltet den Strom in der Schleife immer im richtigen Moment auf Gegenrichtung um. Zur Verstärkung der Kraft wird der Draht in vielen Windungen zu einer Drehspule gewickelt und bekommt auch noch einen Weich-eisenkern. Will man einen solchen Motor mit Wechselspannung betreiben, dann muss man mit ihr auch das äußere Magnetfeld erzeugen. Dann wechseln Feld und Strom synchron ihr Vorzeichen; der Motor läuft, als würde er mit Gleichspannung betrieben.

Die Drehspule bildet einen stromabhängigen magnetischen Dipol. Analog zum elektrischen Dipol ordnet man ihm ein sog. **magnetisches Moment \vec{m}** zu, ein magnetisches Dipolmoment also, und schreibt für das wirkende Drehmoment

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}.$$

Gibt man einer Drehspule mit Spiralfedern eine Ruhestellung vor und setzt sie quer in ein Magnetfeld, so wird sie zum Strommesser: Mit wachsendem I wächst ihr Dipolmoment, mit diesem das Drehmoment, mit diesem der Auslenkwinkel. So arbeiten alle analog anzeigenenden **Drehspulinstrumente** (☞ Abb. 6.79). Primär reagiert ein solches Instrument auf die Kraft, die ein stromdurchflossener Leiter im Magnetfeld erfährt, also auf Strom; es kann aber zum Spannungsmesser umgeicht werden, weil der Widerstand der Drehspule bekannt und ohmsch ist.

Fließt ein Strom im Metalldraht, so wandern Elektronen. Auch ein Strahl freier Elektronen, z.B. in einer Fernsehbildröhre, bedeutet einen Strom, auf den die Lorentz-Kraft wirkt. In der Tat wird der Elektronenstrahl in einer Fernsehbildröhre mit Magnetfeldern gesteuert. Die Formel für die Lorentz-Kraft auf ein einzelnes Elektron lautet:

$$\vec{F}_L = e_0 \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Hierbei ist e_0 die Elementarladung des Elektrons und \vec{v} seine Geschwindigkeit. Weil hiernach die Lorentz-Kraft immer senkrecht auf der Geschwindigkeit steht, wird

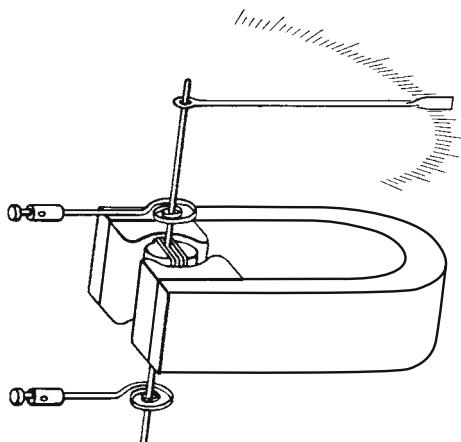


Abb. 6.79. Drehspulinstrument. Ein starker Hufeisenmagnet erzeugt mit Polschuhen und zylinderförmigem Weicheisenkern ein konstantes Magnetfeld, das im Wesentlichen radialsymmetrisch auf die Achse der Drehspule zuläuft. Diese ist reibungsarm in Spitzen gelagert und wird von zwei Spiralfedern gehalten, die zugleich als Stromzuführungen dienen (nach Gerthsen)

ein Elektronenstrahl in einem homogenen Magnetfeld auf eine Kreisbahn abgelenkt und irgendwelche anderen frei fliegenden geladenen Teilchen (Ionen) auch. Aus dem Durchmesser der Kreisbahn lässt sich die Masse des Teilchens bestimmen. Zu diesem Zweck hat die Technik komfortable **Massen-spektrometer** entwickelt, die auf geschickte Weise die Ablenkung geladener Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern kombinieren.

Was aber ist mit der Kompassnadel, die dieses Kapitel eingeleitet hat? Offensichtlich übt das Magnetfeld der Erde ein Drehmoment auf sie aus. Folglich muss sie ein magnetisches Moment besitzen. Das können ihr nur die Atome gegeben haben, aus denen sie besteht. Normalerweise sind es Atome des Elementes Eisen. Um genau zu verstehen, wie diese zu einem magnetischen Moment kommen, müsste man Quantenphysik betreiben. In einem ganz einfachen klassischen Bild ist die Vorstellung erlaubt, die Elektronen der Atomhülle kreisten um den Atomkern, bildeten also einen atomaren Ringstrom. Der erzeugt dann ein Magn-

feld und gibt dem Atom ein magnetisches Moment.

6.10.3

Erzeugung von Magnetfeldern

Die einfachste Anordnung, mit der man ein Magnetfeld erzeugen kann, ist ein einfacher stromdurchflossener Draht. Die Magnetfeldlinien laufen in konzentrischen Kreisen um ihn herum (☞ Abb. 6.74). Nachmessen zeigt, dass für die Stärke des Magnetfeldes im Abstand r vom Draht gilt:

$$B = \mu_0 I / 2\pi r$$

Das Feld wird also mit wachsendem Abstand schwächer. μ_0 ist die

magnetische Feldkonstante:

$$\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$$

Der Umlaufsinn des Feldes folgt der Schraubenregel: Dreht man eine Schraube mit Rechtsgewinde im Umlaufsinn, so windet sich die Schraube in Stromrichtung.

Wickelt man den Draht zu einer Spule auf, so addieren sich die Felder der einzelnen Schleifen, wie es ☞ Abb. 6.75 und ☞ Abb. 6.76 anschaulich machen. Das Feld im Inneren einer langen zylindrischen Spule ist homogen und hat die Stärke:

$$B = \mu_0 \cdot n \cdot I / l$$

Dabei ist n die Windungszahl und l die Länge der Spule.

Dies sind spezielle Formeln für spezielle Situationen. Will man das Magnetfeld für andere Situationen berechnen, so braucht man allgemeinere Formeln, die gemeinhin mathematisch komplizierter sind. Eine solche Formel ist das sogenannte **Durchflutungsgesetz**:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$$

Diese Formel enthält ein Linienintegral, wie es schon in Kapitel 6.5.3 vorkam, um dort den Zusammenhang zwischen Potential und elektrischen Feld zu beschreiben. Grob gesprochen wird die magnetische Flussdichte längs einer Linie im Raum aufaddiert. Der Kreis auf dem Integralzeichen bedeutet, dass diese Linie hier in sich selbst geschlossen sein soll. I ist der Strom, der durch diese geschlossene Linie fließt. Um diese Formel erfolgreich zur Magnetfeldberechnung anwenden zu können, muss man Vektoranalysis beherrschen. Nur in einfachen Fällen geht es auch ohne (siehe Kapitel 6.10.5).

Ströme durch Drähte sind aber nicht die einzige Quelle magnetischer Felder. Wären sie es, so gäbe es kaum technische Anwendungen für Magnetfelder, denn sie wären schlicht zu schwach.

Schraubt man einen Elektromotor auseinander, so stellt man fest, dass alle Spulen in ihm um Eisenkerne gewickelt sind. Eisen ist ein **ferromagnetisches Material**, das das magnetische Feld in der Spule um bis zu einem Faktor 10000 verstärkt. Erst dadurch werden die magnetischen Felder und Kräfte so groß, dass es sich lohnt, einen Elektromotor zu bauen.

Rechenbeispiel 6.17: Luftspule

Eine Spule habe 1000 Windungen, sei 10 cm Lang und werde von einem Strom von 10 A durchflossen. Welche magnetische Flussdichte ergibt sich im Inneren?

Lösung:

$$B = \mu_0 \frac{1000 \cdot 10 \text{ A}}{0,1 \text{ m}} = \mu_0 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 0,126 \text{ T.}$$

Rechenbeispiel 6.18: Motor aus Draht und Luft

Wir wollen einmal abschätzen, was ein Elektromotor ohne Eisen schaffen kann. Wir nehmen die Anordnung der ☞ Abb. 6.78 und setzen sie in das eben berechnete Ma-

gnetfeld. Statt einer Leiterschleife nehmen wir eine rechteckige Spule mit 1000 Windungen und den Abmessungen 10 cm in Drehachsenrichtung und 5 cm senkrecht zur Drehachse. Welche Kräfte und welches Drehmoment wirkt maximal auf diese Drehspule, wenn 1 A hindurchfließt?

Lösung: Die Lorentzkraft auf einen achsparallelen Teil der Spule beträgt 1000 mal die Kraft auf einen einzelnen Leiter: $F_L = 1000 \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 1\text{A} \cdot 0,126 \text{ T} = 13 \text{ N}$. Das maximale Drehmoment ist dann $T = 5 \text{ cm} \cdot 13 \text{ N} = 0,65 \text{ Nm}$. Das schafft ein Mechaniker mit seinem Schraubenschlüssel mit Leichtigkeit. Eine Straßenbahn bekommt man damit nicht in Bewegung.

6.10.4 Materie im Magnetfeld

Es wurde schon über Substanzen mit höchst unterschiedlichen magnetischen Eigenschaften gesprochen. Eine Kompassnadel stellt einen permanenten magnetischen Dipol dar; einmal aufmagnetisiert behält sie ihre **Magnetisierung** (weitgehend) bei – Substanzen dieser Art bezeichnet man als **harte Ferromagnetika** (auch wenn sie gar kein Eisen enthalten). Die Eisenfeilspäne, die auf glattem Karton Feldlinienbilder produzierten, liefern ebenfalls kleine, aber durchaus makroskopische magnetische Dipole, dies aber nur, solange sie sich in einem äußeren Magnetfeld befinden; im feldfreien Raum verlieren sie (weitgehend) ihre Magnetisierung – Substanzen dieser Art nennt man **weiche Ferromagnetika**. Der glatte Karton hingegen diente nur als mechanische Unterlage; im Vergleich zu den Ferromagneten darf man ihn als **unmagnetisch** ansehen. So ganz ist er das freilich nicht.

Atome bestehen aus einem kleinen Kern, der von einer vergleichsweise großen Elektronenhülle umgeben ist. Auch wenn das Bild nicht genau stimmt, darf man zuweilen so tun, als kreisen die Elektronen in dieser Hülle um den Kern herum wie Planeten um eine Sonne. Ein kreisendes Elektron

repräsentiert aber einen elektrischen Kreisstrom und damit einen elementaren magnetischen Dipol. Dabei gibt es nun zwei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten. Die verschiedenen Elektronen einer Hülle können ihre Kreisbahnen so legen, dass sich ihre magnetischen Dipolmomente kompensieren und sich nur in einem äußeren Feld mehr oder weniger ausrichten; dann ist das Atom als Ganzes unmagnetisch, kann aber magnetisiert werden – solche Substanzen nennt man *diamagnetisch*. Die Kompensation kann aber auch von vornherein nicht gelingen; dann besitzt das einzelne Atom ein magnetisches Moment, das nur deswegen makroskopisch nicht in Erscheinung tritt, weil die thermische Bewegung die Richtungen aller Dipole ständig durcheinander wirbelt; ein äußeres Feld kann sie aber ausrichten – solche Substanzen nennt man *paramagnetisch* (elektrische Analogie wäre die Orientierungspolarisation – s. Kap. 6.6.5).

Ob diamagnetisch, ob paramagnetisch – die Magnetisierung durch ein äußeres Feld bleibt gering. Manche paramagnetischen Atome richten sich aber spontan im Feld ihrer Nachbarn aus und bilden dann im Kristall Domänen gleichgerichteter Magnetisierung. Solange viele Domänen durcheinander liegen, macht sich auch das zunächst nach außen kaum bemerkbar. In einem äußeren Feld wachsen aber die Domänen mit „richtig gerichteter“ Magnetisierung auf Kosten der anderen. Das geht relativ leicht, denn kein Atom braucht dafür seinen Gitterplatz zu verlassen. Die Magnetisierung ist kräftig und kann bis zur vollständigen Ausrichtung, bis zur **Sättigung** steigen. Je mehr Magnetisierung nach Abschalten des äußeren Feldes übrig bleibt, desto „härter“ ist das **Ferromagnetikum**.

Der genaue Zusammenhang zwischen Magnetisierung und außen vorgegebenem Feld (mit Flussdichte \vec{B}_0) ist kompliziert und wird durch eine **Hysteresekurve** beschrieben (☞ Abb. 6.80). Sie ergibt sich, wenn man den Betrag der **Magnetisierung** \vec{M} (definiert als magnetische Dipolmomentdichte analog

zur elektrischen Polarisation \vec{P}) gegen den Betrag von \vec{B}_0 aufträgt. Ist das Material am Anfang völlig unmagnetisiert und wird \vec{B}_0 langsam hochgefahren, so folgt die Magnetisierung der Neukurve bis zu vollständigen Magnetisierung in der Sättigung. Wird \vec{B}_0 nun wieder auf Null reduziert, so sinkt die Magnetisierung auf einen Restwert, die remanente Magnetisierung \bar{M}_R . Für harte Ferromagnetika (Kurve a) ist diese groß (Permanentmagnet), für weiche (Kurve b) klein. Polt man nun \vec{B}_0 um (negative Werte im Diagramm), so wird zunächst diese Restmagnetisierung abgebaut und dann entsteht eine Magnetisierung in Gegenrichtung. Auch diese kann den Sättigungswert nicht übersteigen. Wird \vec{B}_0 wieder auf Null gefahren und dann umgepolzt, wiederholt sich alles entsprechend. Welche Magnetisierung M sich also bei einem bestimmten außen angelegten Feld \vec{B}_0 einstellt, ist nicht eindeutig bestimmt, sondern hängt von der Vorgeschichte ab. Nur bei sehr weichen Ferromagnetika kann der Zusammenhang als näherungsweise linear betrachtet werden. Dann kann man davon sprechen, dass das Magnetfeld einer Spule durch den Eisenkern um einen bestimmten Faktor verstärkt wird. Dieser Faktor hängt von der Geometrie und vom Material ab. Das (magnetische weiche) Material kann dann durch die *relative magnetische Permeabilität* μ_r beschrieben werden. Sie ist das Verhältnis von Flussdichte mit Eisenkern zu Flussdichte ohne Eisenkern in einer geschlossenen Ringspule:

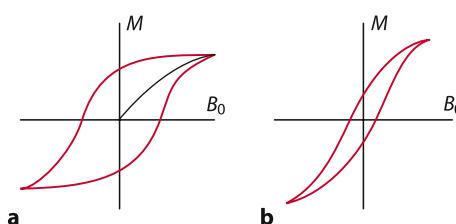


Abb. 6.80 Hysterese: Verlauf der Magnetisierung eines Ferromagneten in Abhängigkeit vom außen angelegten Feld. a) hartmagnetisches Material; b) weichmagnetisches Material

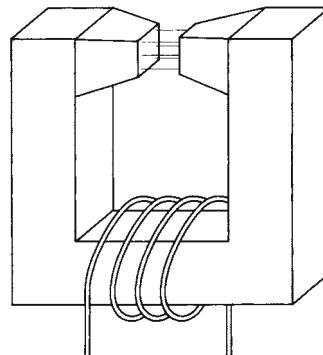


Abb. 6.81 Elektromagnet, schematisch. Die magnetischen Feldlinien laufen weitgehend in der hohen Permeabilität, müssen aber an den Polschuhen austreten.

$$\mu_r = \frac{|\vec{B}|}{|\vec{B}_0|}.$$

μ_r hat je nach Material Werte zwischen 100 und 10000. Das bedeutet, dass die Flussdichten in der Spule mit Eisenkern fast ganz von den atomaren Kreisströmen im Eisen erzeugt wird. Der Strom durch die Spule dient fast nur dazu, die Magnetisierung aufzubauen. Ein weiterer Nutzen des Eisenkerns liegt darin, dass er die Feldlinien führt: das Feld bleibt, auch wenn das Eisen um die Ecke geht, vorwiegend in seinem Inneren (was hier nicht erklärt werden soll). Ein typischer Elektromagnet, der an einer Stelle ein hohes Magnetfeld liefern soll, sieht deshalb aus wie in Abb. 6.81 schematisch dargestellt. Der Eisenkern ist bis auf einen schmalen Luftspalt geschlossen und führt so die Feldlinien im Kreis. Die am Luftspalt zugespitzten Polschuhe konzentrieren das Feld in ein kleineres Volumen.

Ferromagnetische Materialien
verstärken Magnetfelder um viele
Größenordnungen.

wichtig

Freilich steht die thermische Bewegung der Ausrichtung der atomaren Kreisströme entgegen; oberhalb seiner Curie-Temperatur

(bei Eisen ca. 800 °C) wird jeder Ferromagnet zum Paramagneten.

6.10.5 Die Feldgrößen \vec{H} und \vec{D}

Magnetische und elektrische Felder werden jeweils durch eine Größe vollständig beschrieben, \vec{B} im magnetischen, \vec{E} im elektrischen Fall. So behauptet es dieses Buch und so ist heute die Meinung der Physiker. Das war nicht immer so. Ende des 19. Jahrhunderts meinten die meisten, das man jeweils zwei Feldgrößen braucht, grob gesprochen jeweils eine Feldstärke für die Kraftwirkung und eine Flussdichte für die Induktionswirkung des Feldes (von der im nächsten Kapitel die Rede ist). Deshalb führte man noch eine magnetische Feldstärke \vec{H} und eine elektrische Flussdichte \vec{D} ein. In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts wuchs dann die Erkenntnis, dass diese Interpretation falsch war, man verstand jetzt die mikroskopischen Vorgänge bei Polarisation und Magnetisierung besser. Auch Einstein's Relativitätstheorie half. Die Namen sind aber die alten geblieben und deshalb heißt \vec{B} immer noch Flussdichte und nicht Feldstärke, wie es der Größe eigentlich gebührt.

Die Größen \vec{H} und \vec{D} sind aber deshalb nicht überflüssig geworden. Für den Elektroingenieur sind sie wertvolle Rechengrößen für die Berechnung von Feldern. Im Umkehrschluss heißt dies allerdings auch: wer keine Felder ausrechnen will, braucht sich nicht um diese Größen zu kümmern.

Wie sind \vec{H} und \vec{D} überhaupt definiert?
So:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

Neben den Feldgrößen gehen also noch die einen Materialzustand beschreibenden Größen Polarisation \vec{P} und Magnetisierung \vec{M} ein (siehe Kapitel 6.6.5 und 6.10.4); und

zwar in einfachen Fällen so, dass sich ihr Anteil am Feld wieder herausrechnet. An den Achsen der Hysteresekurve in Abb. 6.80 kann deshalb \vec{B}_0 durch \vec{H} ersetzt werden. An der vertikalen Achse kann \vec{M} durch \vec{B} ersetzt werden, da die Flussdichte fast ganz von der Magnetisierung geliefert wird. Die Hysteresekurve verändert sich durch einen solchen Wechsel in den aufgetragenen Größen praktisch nicht.

Ist am betrachteten Ort keine Materie, so sind \vec{H} und \vec{D} einfach über die Feldkonstanten proportional zu \vec{B} und \vec{E} .

Der besondere Nutzen von \vec{H} liegt darin, dass das Durchflutungsgesetz aus Kapitel 6.10.3, das dort tatsächlich nur für den Fall aufgeschrieben wurde, dass keine magnetisierbare Materie anwesend ist, nun für jede Situation hingeschrieben werden kann. Das *Durchflutungsgesetz* in ganz allgemeiner Form lautet:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$$

Mit Hilfe dieses Durchflutungsgesetzes und der Hysteresekurve des Eisens kann zum Beispiel der magnetische Fluss im Luftspalt des Elektromagneten der Abb. 6.81 relativ leicht berechnet werden. Darzustellen, wie das geht sei aber Lehrbüchern der Elektrotechnik überlassen.

6.11 Magnetodynamik

Einleitung

Wenn das Magnetfeld, das eine Leiterschleife durchsetzt, sich ändert, so induziert es in ihr eine elektrische Spannung. Das Induktionsgesetz hat große technische Bedeutung, vor allem für die Generatoren und Transformatoren der Elektrizitätswerke. Wenn man in einer Leiterschleife Strom ein- oder ausschaltet, ändert sich das mit ihm verbundene Magnetfeld; die Folge ist eine Induktion der Leiterschleife auf sich selbst. Diese Selbstinduktion bringt gewisse begriffliche Schwierigkeiten mit sich, hat aber wichtige und nicht nur technische Konsequenzen.

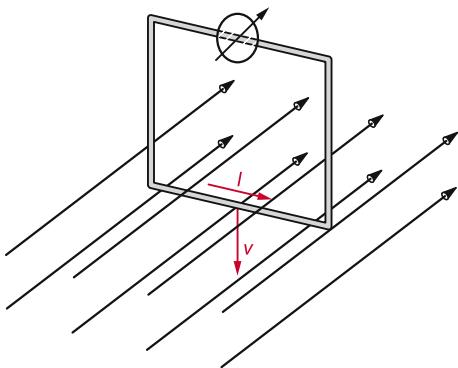


Abb. 6.82. Bewegt man einen Draht mit der Geschwindigkeit v quer zu einem Magnetfeld, so wird an seinen Enden eine Spannung *induziert*. Ist der Leiterkreis außerhalb des Magnetfeldes geschlossen, so fließt ein Strom I

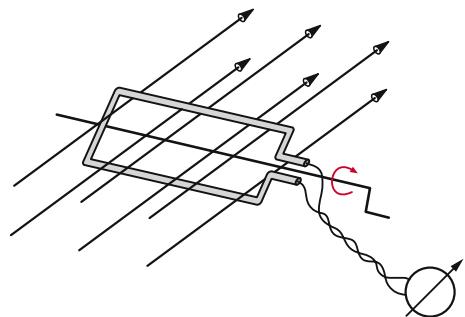


Abb. 6.83. Dreht man eine Leiterschleife im Magnetfeld wie gezeichnet, so wird eine Wechselspannung induziert

6.11.1 Induktion

Für die Lorentz-Kraft hat nur die Bewegung der Ladungsträger Bedeutung, nicht deren Ursache. Liegt sie, wie im vorigen Kapitel besprochen, in einem elektrischen Feld, das die Elektronen einen Draht entlang zieht, so weichen sie im Magnetfeld quer zum Draht aus und nehmen ihn mit; Resultat ist eine mechanisch nachweisbare Kraft. Denkbar wäre aber auch dies: Man bewegt den Draht „von Hand“ quer zu sich selbst durch das Magnetfeld, nimmt also die Elektronen mechanisch mit. Wieder weichen sie quer zu Feld und Bewegung aus, diesmal also in Längsrichtung des Drahtes, und sammeln sich an seinem Ende. Resultat ist eine Spannung und, wenn der Leiterkreis außerhalb des Feldes geschlossen ist, ein elektrischer Strom (☞ Abb. 6.82).

Die Vorhersage des Modells lässt sich leicht experimentell bestätigen. Mit der drehbaren Leiterschleife, die in ☞ Abb. 6.78 verwendet wurde, kann man den Versuch sogar periodisch wiederholen; man ersetzt die Spannungsquelle durch einen Spannungsmesser und dreht die Schleife mit einer Handkurbel (☞ Abb. 6.83). Ergebnis ist eine Wechselspannung. Nach diesem Prinzip arbeiten die Generatoren der Elektrizitäts-

werke in aller Welt. Wer freilich die Schleife nicht dreht, sondern nur in Richtung der Feldlinien parallel verschiebt (☞ Abb. 6.84), der darf keine Spannung erwarten: Für die Lorentz-Kraft zählt ja nur eine Bewegungskomponente quer zum Feld.

Es mag auf den ersten Blick überraschen, aber auch dann, wenn man die komplette Drahtschleife quer zum Feld verschiebt (☞ Abb. 6.85), bekommt man keine Spannung, jedenfalls so lange nicht, wie man im homogenen Teil des Magnetfeldes verbleibt. Eine genauere Überlegung besagt: Wohl zieht die Lorentz-Kraft die Elektronen im oberen und im unteren Horizontaldraht der Schleife zur Seite, aber beide Male in der gleichen geographischen Richtung; im Umlaufsinn der Maschenregel stehen die Spannungen darum gegeneinander und heben sich, da ihre Beträ-

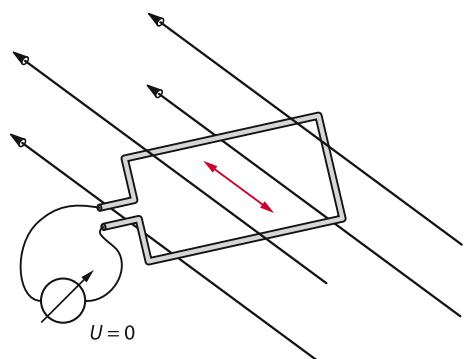


Abb. 6.84. Keine Spannung wird induziert, wenn man die Schleife parallel zum Magnetfeld bewegt

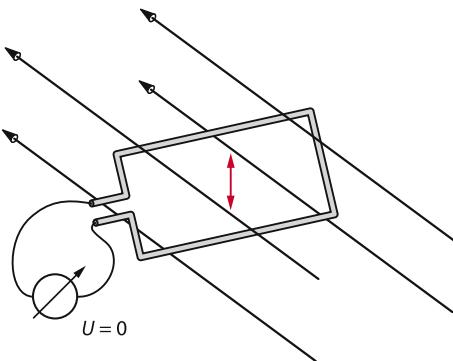


Abb. 6.85. Keine Spannung wird induziert, wenn man die Schleife parallel zu sich selbst in einem homogenen Magnetfeld verschiebt

ge gleich sind, auf. Im inhomogenen Feld tun sie dies nicht; sie sind ja nicht gleich.

Denkbar wäre schließlich noch, dass man die beiden in Frage stehenden Drahtstücke in entgegengesetzten Richtungen verschiebt (☞ Abb. 6.86); das geht nur mit Gewalt, weil man die Schleife verbiegen muss. Immerhin liegen die Lorentz-Kräfte in diesem Fall geographisch entgegengesetzt und addieren die von ihnen erzeugten Spannungen in der Masche.

Die Ergebnisse der fünf Gedankenversuche, die man alle praktisch ausführen kann, lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

- Schleife rotiert, Feld homogen oder inhomogen – Resultat: Wechselspannung,
- Schleife gleitet parallel zum Feld, homogen oder inhomogen – Resultat: keine Spannung,
- Schleife gleitet quer zum homogenen Feld – Resultat: keine Spannung,
- Schleife gleitet quer zum inhomogenen Feld – Resultat: Spannung,
- Schleife wird verformt, Feld homogen oder inhomogen – Resultat: Spannung.

Frage: Gibt es einen übergeordneten Gesichtspunkt, der die beiden spannungsliefernden Fälle von den anderen unterscheidet?

Es gibt ihn. Eine Spannung tritt immer dann auf, wenn der magnetische Fluss Φ , der die Schleife durchsetzt, sich ändert. Der magnetische Fluss ist, grob gesprochen, die

Zahl der Feldlinien, die durch die Schleife hindurchtreten. Mathematisch präziser ist er das Skalarprodukt aus der magnetischen Flussdichte \vec{B} und der Fläche \vec{A} , die von der Schleife umrandet wird:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Hier ist diese Fläche als Vektor angegeben. Dieser Vektor soll senkrecht auf der Fläche stehen und sein Betrag ist der Flächeninhalt. Steht \vec{B} senkrecht auf der Fläche, sind \vec{B} und \vec{A} also parallel, so ist dieses Skalarprodukt einfach gleich dem Produkt der Beträge B und A : $\Phi = B \cdot A$.

Dreht die Schleife aber im Magnetfeld, so wird Φ kleiner – von der tatsächlichen Fläche zählt ja nur die Komponente, die quer im Feld steht und wirklich von ihm durchsetzt wird. Rotiert die Schleife, wie im ersten Fall, so ändert sich der magnetische Fluss also periodisch. Im vierten Fall bleibt A konstant, aber B nicht, und im fünften Fall wird A gewaltsam verändert.

Diese Deutung verleitet zu einer kühnen Hypothese: Wenn es nur auf eine Änderung des wirksamen Fluxes Φ ankommt, dann muss man eine Spannung auch ohne jede mechanische Bewegung induzieren können, indem man eine *Induktionsschleife* zwischen die Windungen einer Magnetspule schiebt und den Spulenstrom ein- oder ausschaltet. In der Tat: Das Experiment be-

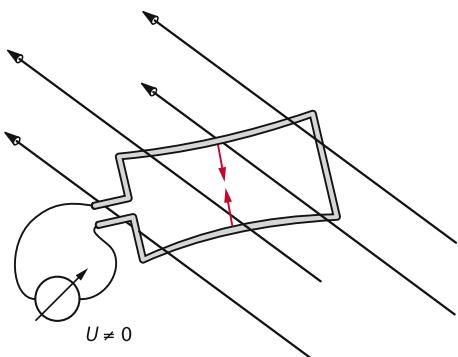


Abb. 6.86. Spannung wird induziert, wenn man die Leiterschleife im Magnetfeld verbiegt

stätigt diese Erwartung! Genaue Messungen führen zum **Induktionsgesetz**:

$$\text{induzierte Spannung } U_{\text{ind}} = \frac{d\Phi}{dt}$$

(oft steht hier in Lehrbüchern ein negatives Vorzeichen. Dies ist nur eine Frage der Vorzeichenkonvention). Springt der Fluss rasch um $\Delta\Phi$, so wird nur ein kurzer

$$\text{Spannungsstoß } \int U(t) \cdot dt = \Delta\Phi$$

induziert.

wichtig

Induktionsgesetz:
induzierte Spannung $U_{\text{ind}} = \frac{d\Phi}{dt}$

Sind die Enden der Induktionsspule über einen Widerstand leitend miteinander verbunden, so gehört zu der induzierten Spannung auch ein Strom und als Produkt beider eine in Joule'sche Wärme umgesetzte elektrische Leistung. Sie muss, dem Energiesatz entsprechend, von demjenigen aufgebracht werden, der beispielsweise die Spule im Magnetfeld dreht. Dies fällt ihm umso schwerer, je höher der Leitwert des Widerstandes ist: Durch Induktion kann mechanische Energie in elektrische umgewandelt werden, unmittelbar und ohne Zeitverzögerung. Darin liegt die Aufgabe der Elektrizitätswerke und ihr Problem zugleich: Sie können elektrische Energie nicht auf Vorrat halten; die Turbine, die den Generator dreht, muss jederzeit just diejenige Leistung an ihn abliefern, die alle Verbraucher zusammen am anderen Ende der Leitung elektrisch verlangen (plus Leistungs- und Reibungsverluste).

Rechenbeispiel 6.19: Generator aus Luft und Draht

Die in Rechenbeispiel 6.17 als Motor betrachtete Anordnung kann auch als Generator gedacht werden, der eine Wechselspan-

nung liefert. Wie groß ist ihr Maximalwert, wenn die Rechteckspule mit einer Winkelgeschwindigkeit von $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$ rotiert?

Lösung: Die Querschnittsfläche der Spule beträgt $A = 0,1 \text{ m} \cdot 0,05 \text{ m} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$. Der magnetische Fluss durch diesen Querschnitt variiert mit dem Drehen der Spule gemäß $\Phi = B \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t)$. Die Zeitableitung ist nach Kettenregel $\dot{\Phi} = \omega \cdot B \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t)$. Die maximale Flussänderung ist also

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_{\text{max}} &= \omega \cdot B \cdot A = 100 \text{ s}^{-1} \cdot 0,126 \text{ T} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \\ &= 0,063 \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} = 0,063 \text{ V.}\end{aligned}$$

Da die Drehspule 1000 Windungen hat ist die induzierte Spannung tausend mal so groß: 63 V. Richtige Generatoren mit Eisenkern können etliche tausend Volt liefern.

6.11.2

Transformatoren

Wer die Spule eines Elektromagneten mit Wechselspannung füttert, bekommt ein magnetisches Wechselfeld, in das er nur eine zweite Spule hineinzuhalten braucht, um in ihr eine frequenzgleiche Wechselspannung induziert zu erhalten. Die Spannung wird umso größer ausfallen, je mehr Windungen die Sekundärspule hat und je vollständiger sie vom magnetischen Fluss der Primärspule durchsetzt wird. Um eine vorgegebene Wechselspannung auf einen anderen Effektivwert zu transformieren,wickelt man am besten beide Spulen auf die Schenkel eines geschlossenen Eisenkerns (☞ Abb. 6.87).

Es leuchtet auf den ersten Blick ein, dass der Effektivwert U_S der in der Sekundärspule induzierten Wechselspannung proportional zu deren Windungszahl n_s ist. Keineswegs auf den ersten Blick leuchtet freilich ein, dass U_S zur Windungszahl n_p der Primärspule umgekehrt proportional ist. Eine korrekte Begründung erfordert mehr Aufwand als die damit gewinnbare Erkenntnis rechtfertigt – Hinweise gibt das nächste Kapitel. Jedenfalls erlaubt ein

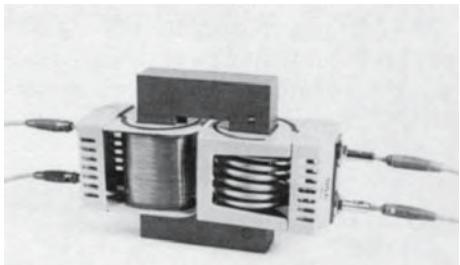


Abb. 6.87. Experimentiertransformator, mit windungsreicher Primärspule (links) und windungssarmer Sekundärspule (rechts) zur Erzeugung hoher Ströme bei kleiner Spannung

Transformator, Wechselspannungen nicht nur herabzusetzen (das könnte ein Spannungsteiler ja ebenfalls), sondern auch heraus. Das Übersetzungsverhältnis zwischen Primärspannung U_p und Sekundärspannung U_s entspricht dem Verhältnis der Windungszahlen n_p und n_s :

$$U_s/U_p = n_s/n_p$$

– genau allerdings nur, solange der Transformator nicht belastet wird, also bei Leerlauf der Sekundärspule.

wichtig

Übersetzungsverhältnis des (unbelasteten) Transformators: $U_s/U_p = n_s/n_p$.

Ist der Transformator nicht im Leerlauf, transportiert er also tatsächlich Energie von der Primär- zur Sekundärseite, so gilt die einfache Übersetzungsformel nicht mehr. Der Transformationsfaktor liegt dann im Allgemeinen niedriger. Er hängt aber auf so komplizierte Weise von der Leistung ab, dass sich besser nur Elektrotechniker damit befassen. Wichtig ist nur zu bemerken, dass die Leistung, die auf der Primärseite hineingeht natürlich auch auf der Sekundärseite wieder herauskommen muss, was (wegen unterschiedlicher Phasenverschiebungen nur ungefähr) heißt: $U_p \cdot I_p = U_s \cdot I_s$. Das Verhältnis der Ströme ist in etwa umgekehrt zum Verhältnis der Spannungen.

Steckdosen liefern Wechselstrom, weil mit Gleichspannung keine Transformatoren betrieben werden können. Die sind aber nach dem heutigen Stand der Technik unerlässlich für die allgemeine Versorgung mit elektrischer Energie. Nur sie erlauben den Umspannwerken, die Leistung, die eine Stadt mit 230 V umsetzen will, aus der Fernleitung mit 340 kV zu beziehen, also mit rund einem Tausendstel des Stromes und rund einem Millionstel an Leitungsverlusten durch Joule'sche Wärme.

Rechenbeispiel 6.20: Hoher Strom aus der Steckdose

Der Transformator in Abb. 6.87 habe primärseitig 500 Windungen und sekundärseitig 5 und werde an die Steckdose (230 V) angeschlossen. Welche Spannung ergibt sich etwa auf der Sekundärseite und welcher Strom kann grob abgeschätzt sekundärseitig gezogen werden, bevor die 16 A Sicherung hinter der Steckdose herausfliegt?

Lösung: Das Windungsverhältnis ist 100 : 1. An der Sekundärseite ist die Spannung etwa 2,3 V und der Strom kann bis ca. 1500 A steigen. Es ist ein schöner Vorlesungsversuch mit diesem Trafo einen dicken Eisennagel durchzuschmelzen.

6.11.3

Selbstinduktion

Auch ein Transformator kann sich nicht am Energiesatz vorbeimogeln. Wenn irgendein Verbraucher von der Sekundärspule Leistung verlangt, dann muss die Primärspule die entsprechende Leistung bei ihrer Spannungsquelle anfordern: Der Strom im Primärkreis weiß, was im Sekundärkreis geschieht. Woher? Die Antwort ist gar nicht so leicht zu geben. Darum soll in diesem Kapitel zunächst nur ein noch recht übersichtlicher Sonderfall besprochen werden.

Die Sekundärspule sei offen (Leerlauf), der Eisenkern lasse sich verlustlos ummag-

netisieren und die Primärspule habe einen ohmschen Widerstand R_0 . An sie werde plötzlich eine Gleichspannung U_0 angelegt. Wer sich gar zu vertrauensvoll auf das Ohm'sche Gesetz verlässt, mag erwarten, dass der Strom I ebenso plötzlich wie die Spannung auf seinen Endwert

$$I_0 = U_0/R_0$$

springt. Das hieße aber auch, dass der magnetische Fluss Φ , der ja dann von der Primärspule erzeugt wird und notwendigerweise zum Strom gehört, ebenfalls ganz plötzlich, d.h. mit extrem hohem $\dot{\Phi}$, auf seinen Endwert Φ_0 heraufschneßen müsste. Nun braucht der Transformator ein $\dot{\Phi}$, um in der Sekundärspule Spannung zu induzieren. Der Fluss durchsetzt aber auch die Primärspule, und die hat gegenüber ihrer Artgenossin keine Vorteile. Folglich induziert $\dot{\Phi}$ auch in der Primärspule selbst eine Spannung; sie sei U_i genannt (*Selbstinduktion*). Die gesamte Spannung an der Spule setzt sich also aus dieser selbstinduzierten Spannung und dem Spannungsabfall U_R am Ohm-Widerstand R_0 zusammen:

$$U_0 = U_R + U_i = R_0 \cdot I + \dot{\Phi}$$

U_i kann U_0 nicht überschreiten, sonst hätten wir gerade ein Perpetuum mobile erfunden, das die Batterie aus dem Nichts auflädt. Wenn aber U_i einen Höchstwert nicht überschreiten kann, dann können es die Anstiegsgeschwindigkeiten des Flusses $\dot{\Phi}$ und des Stromes \dot{I} auch nicht. Folglich steigt der Strom beim Einschalten mit begrenzter Geschwindigkeit an. Wenn er aber steigt, dann verlangt der Spulenwiderstand R_0 einen mit der Zeit wachsenden Anteil an der Batteriespannung U_0 als Spannungsabfall U_R . Für U_i bleibt immer weniger übrig, $\dot{\Phi}$ und \dot{I} müssen immer kleiner werden. Wen wundert es, dass auch hier die Exponentialfunktion ihre Hand im Spiel hat, wie Abb. 6.88 zeigt. Durch die *Selbstinduktion* wird der elektrische Strom *träge*, der Induktionsvorgang wirkt seiner Ursache entgegen (*Lenz'sche Regel*).

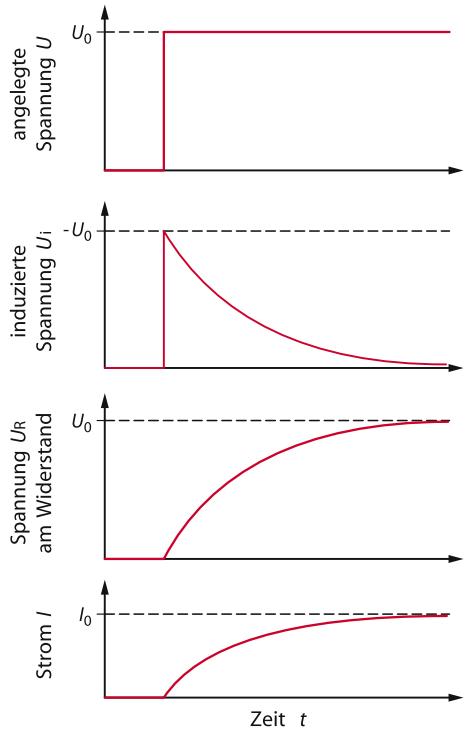


Abb. 6.88. Selbstinduktion. Die Batteriespannung U_0 teilt sich so in induzierte Spannung $U_i(t)$ und Ohm-Spannungsabfall $U_R(t)$ auf, dass der Strom $I(t)$ träge auf seinen Endwert I_0 zuläuft (schematische Skizze, nicht maßstabsgerecht)

Die Energie, die I und U_R zusammen im Widerstand der Spule umsetzen, wird Joule'sche Wärme, nicht aber die Energie, die zu I und U_i gehört: Sie findet sich im magnetischen Feld wieder. Ganz analog zum elektrischen besitzt auch ein magnetisches Feld der Stärke B eine

$$\text{Energiedichte } w = \frac{1}{\mu_r \cdot \mu_0} B^2$$

Die dazu gehörende Energie wird beim Abschalten eines Magnetteldes frei; für große Elektromagneten ist das durchaus ein Problem. Schaltet man nämlich den Spulenstrom plötzlich ab, so versucht die Selbstinduktion auch jetzt, ihre eigene Ursache zu behindern, den Abbau des Feldes also – das heißt aber, dass sie jetzt die Batteriespannung unterstützt. Dem sind aber keine Grenzen nach oben gesetzt: Möglicherweise reicht die induzierte Spannung aus, einen Lichtbogen über dem Schalter zu zünden, der diesen

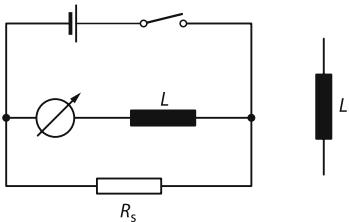


Abb. 6.89. Schaltung zur Beobachtung der Selbstinduktion. Der Schutzwiderstand R_s gestattet die allmähliche „Entladung“ der Induktionsspule nach Öffnen des Schalters. Rechts: Schaltzeichen eines Elements mit (merklicher) Induktivität

zerstört – aber das Magnetfeld (zunächst) erhält. Große Elektromagnete können nur langsam abgeschaltet werden.

Wer die Trägheit des Stromes als Folge der Selbstinduktion beobachten will, dem sei die Schaltung der Abb. 6.89 empfohlen. Hier muss zwar die Batterie neben dem Strom durch die Spule auch noch einen zweiten durch den Schutzwiderstand R_s liefern, das Instrument misst ihn aber nicht mit. Der allein gemessene Strom in der Spule steigt nach dem Einschalten so träge an, wie er es ohne den Schutzwiderstand auch täte; jetzt kann man aber den Schalter gefahrlos öffnen. Für die Spule wird der Stromkreis ja nicht unterbrochen, sie kann sich über den Schutzwiderstand „entladen“. Vom Instrument angezeigt, fließt der Strom noch eine Weile „träge“, nämlich in der alten Richtung, weiter (Abb. 6.90). Wie immer man eine Spule baut, stets ist die Spannung U_i , die sie auf sich selbst induziert, der Änderungsgeschwindigkeit \dot{I} des sie durchsetzenden Stromes proportional. Es liegt darum nahe, einen *Selbstinduktionskoeffizienten* L (kürzer: eine *Induktivität*) durch die Gleichung

$$U_i = L \cdot \dot{I}$$

zu definieren. L bekommt die Einheit Vs/A, auch *Henry* genannt und H abgekürzt. So, wie die Kapazität Kenngröße von Kondensatoren ist, ist die Induktivität die Kenngröße von Spulen, abhängig von deren geometri-

schem Aufbau und einem etwa vorhandenen Eisenkern. Die Formel für eine lange Spule sei ohne Herleitung angegeben:

$$L = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot n^2 \cdot A / l.$$

Hierbei ist: n : Windungszahl, A : Querschnittsfläche, l : Länge der Spule.

Auch ein gerader Draht hat noch ein $L > 0$. Die Induktivität ist aber klein; darum merkt man im Alltag so wenig von der Trägheit des Stromes.

wichtig

Selbstinduktion: Induktion einer Spule auf sich selbst

$$U_i = L \cdot \dot{I}$$

L = Induktivität, Selbstinduktionskoeffizient

Wenn man in Abb. 6.89 den Schalter öffnet, so muss von diesem Moment an die selbstinduzierte Spannung U_i ganz allein den Strom nicht nur durch die Spule, sondern auch durch den Schutzwiderstand treiben. Sind beide Widerstände ohmsch und addieren sie sich zum Gesamtwiderstand R , so gilt zu jedem Zeitpunkt t :

$$U_i(t) + R \cdot I(t) = 0.$$

$U_i(t)$ hängt aber über L an $\dot{I}(t)$. Daraus folgt

$$\dot{I}(t) = -\frac{R}{L} \cdot I(t)$$

Mit anderen Buchstaben ist diese Differentialgleichung schon häufiger aufgetaucht, zuletzt bei der Kondensatorentladung in

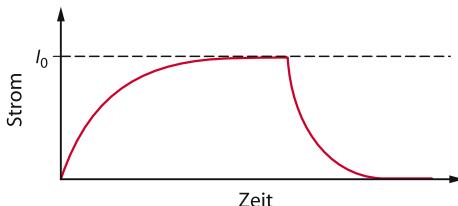


Abb. 6.90. In der Schaltung der Abb. 6.89 steigt der Strom nach Schließen des Schalters träge auf seinen Endwert und fällt nach Öffnen mit kürzerer Zeitkonstanten wieder ab

Kap. 6.4.6. Deshalb kann die zugehörige e-Funktion leicht hingeschrieben werden:

$$I(t) = I_0 \cdot \exp(-t/\tau)$$

mit der Zeitkonstanten $\tau = L/R$.

wichtig

RL-Glied aus Spule und Widerstand:

$$I(t) = I_0 \cdot \exp(-t/\tau)$$

$\tau = L/R$ = Zeitkonstante;

„Trägheit des elektrischen Stromes“

Frage: Warum fällt in Abb. 6.90 der Strom mit kürzerer Zeitkonstanten ab als er zuvor angestiegen ist?

Antwort: In der Anstiegszeitkonstanten steht nur der ohmsche Widerstand der Spule (wenn wir die Innenwiderstände von Batterie und Strommesser vernachlässigen können). In der Zeitkonstanten für den Stromabfall steht auch noch R_S .

6.11.4 Induktiver Widerstand

Verlangt man von einer Spule ohne ohmschen Widerstand, aber mit der Induktivität L , dass sie einen Wechselstrom

$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

führt, dann verlangt sie ihrerseits eine von einem Generator anzuliefernde Wechselspannung,

$$U_g(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi),$$

die der auf sich selbst induzierten Spannung U_i entspricht. Nach den Überlegungen des vorigen Kapitels gilt

$$\begin{aligned} U_g &= U_i(t) = L \cdot \dot{I}(t) = \omega \cdot L \cdot I_0 \cos(\omega \cdot t) \\ &= \omega \cdot L \cdot I_0 \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum Kondensator führt die Spule einen um 90° nachhinkenden Wechsel-

strom, nämlich eine dem Strom *voreilende* Wechselspannung. Analog zum kapazitiven Widerstand R_C eines Kondensators (s. Kap. 6.3.2) lässt sich demnach für die Spule ein *induktiver Widerstand* R_L definieren:

$$R_L = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_0}{I_0} = \omega \cdot L$$

Er steigt mit der Kreisfrequenz ω der Wechselspannung an, hat also gerade den entgegengesetzten Frequenzgang wie R_C . Grundsätzlich lassen sich auch mit Spulen Hoch- und Tiefpässe herstellen.

wichtig

Induktiver Widerstand $R_L = \omega \cdot L$.

Weiterhin führt ein rein induktiver Widerstand wie ein kapazitiver einen im zeitlichen Mittel leistungslosen Blindstrom: Er entzieht der Spannungsquelle für eine Viertelschwingungsdauer Energie, um das Magnetfeld aufzubauen, und liefert sie in der nächsten Viertelschwingungsdauer aus dem zerfallenden Magnetfeld wieder zurück

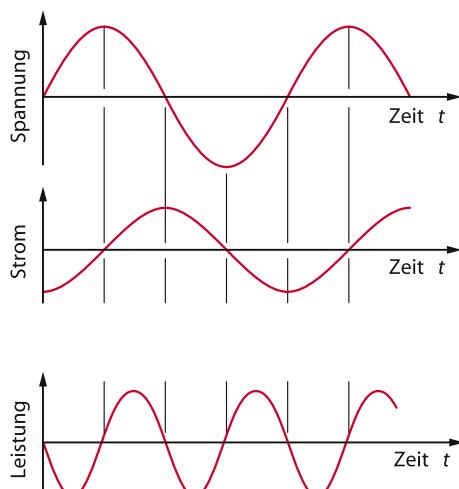


Abb. 6.91. Bei rein induktiver Last läuft die Spannung dem Strom um 90° voraus; im zeitlichen Mittel fließt ein leistungsloser Blindstrom (vgl. Abb. 6.17 und 6.18)

(☞ Abb. 6.91). Allerdings lassen sich nur für relativ hohe Frequenzen Spulen wickeln, deren Ohm-Widerstand klein gegenüber dem induktiven ist. Wird aber in merklichem Umfang Stromwärme entwickelt, so bekommt die Spannungsquelle nur einen Teil der in der letzten Viertelschwingung abgegebenen Energie in der nächsten wieder zurück. Die Folge ist ein Phasenwinkel $\phi < 90^\circ$ und eine

$$\text{Wirkleistung } P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \phi.$$

Beim Transformator hat die Belastung der Sekundärspule Einfluss auf den Phasenwinkel und damit auf die Leistungsaufnahme im Primärkreis. Die Formel für die Wirkleistung gilt übrigens allgemein, also auch für Kondensatoren mit Leckwiderständen. Bei rein ohmscher Last ist $\phi = 0$ und somit $\cos(\phi) = 1$.

Schaltungstechnisch stellen Kondensator und Spule Wechselstromwiderstände mit gegenläufigem Frequenzgang und Phasenverschiebung dar. Schaltet man beide irgendwie mit ohmschen Widerständen zusammen, so erhält man eine Schaltung mit einem Wechselstromwiderstand (*Impedanz*), der einen komplizierten Frequenzgang hat und bei dem auch die Phasenverschiebung frequenzabhängig wird.

6.12 Elektrische Schwingungen

Einleitung

Spule und Kondensator bilden zusammen ein schwingungsfähiges Gebilde, einen *Schwingkreis*. Er ist das elektrische Analogon zum Federpendel. Beide halten sich an die gleiche Schwingungsdifferentialgleichung. Im Dielektrikum des Kondensators setzt sich der Leitungsstrom des Schwingkreises als Verschiebungsstrom fort. Beide Ströme umgeben sich mit geschlossenen magnetischen Feldlinien, die ihrerseits ringförmig geschlossene elektrische Felder induzieren können. Das führt zu elektromagnetischen Wellen, die sich im leeren Raum mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.

6.12.1

Der Schwingkreis

Eine besonders interessante Situation ergibt sich, wenn eine Spule und ein Kondensator zusammengeschaltet werden. Dann entsteht ein schwingungsfähiges Gebilde, ein *elektrisches Pendel* sozusagen. Wie dieses Schwingungen ausführen kann, soll anhand der ☞ Abb. 6.92 erläutert werden, und zwar zunächst nur mit den linken Teilbildern. Die rechten dienen dann später dem Vergleich mit dem mechanischen Federpendel von Kap. 4.1.2.

Zunächst soll der Kreis noch unterbrochen und der Kondensator von außen auf eine bestimmte Spannung U_0 aufgeladen sein. Schließt man jetzt den Stromkreis (1. Teilbild), so entlädt sich der Kondensator. Wäre die Spule nur ein verschwindend kleiner ohmscher Widerstand, so gäbe es einen kurzen und kräftigen Stromstoß – und alles wäre vorbei. Hierzu gehörte aber ein sehr steiler Anstieg des Stromes auf hohe Werte, unmittelbar gefolgt von einem kaum weniger steilen Abfall; dagegen wehrt sich die Spule mit ihrer Selbstinduktion aber ganz entschieden. Im dem Moment, in dem die Spule angeschlossen wird, übernimmt sie die volle Spannung U_0 , die der Kondensator ja zunächst noch hat. Damit erlaubt sie dem Strom eine ganz bestimmte, durch ihren Selbstinduktionskoeffizienten L begrenzte Anstiegs geschwindigkeit $\dot{I}_0 = U_0/L$. Dementsprechend entlädt sich der Kondensator und ist nach einer Weile leer. Von ihm aus könnte alles vorbei sein, aber wieder erhebt die Spule Einspruch: Sie hat inzwischen ein Magnetfeld aufgebaut (2. Teilbild), das nicht einfach und folgenlos wieder zerfallen kann. Es verlangt, dass der Strom noch eine Weile in der alten Richtung weiter fließt, schwächer werdend, aber immerhin. Damit wird der Kondensator aber wieder aufgeladen. Ist das Magnetfeld verschwunden, hat der Kondensator seine alte Spannung, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen (3. Teilbild). Jetzt muss die Spule einen Strom in Gegenrichtung erlauben; hat sich der Kondensator erneut entladen,

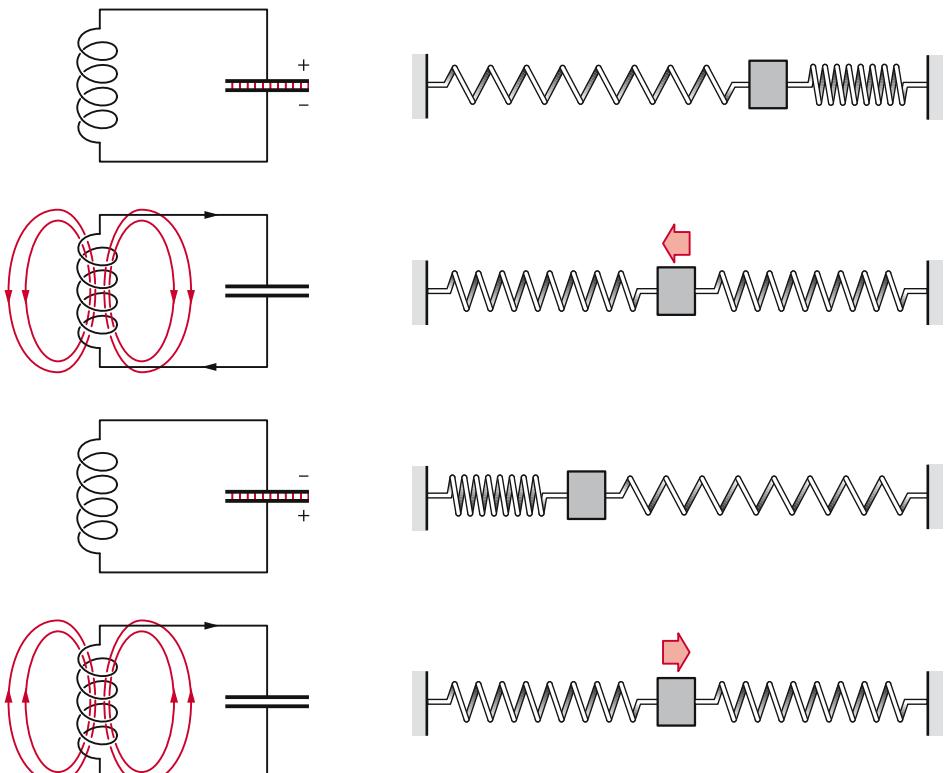


Abb. 6.92. Elektrischer Schwingkreis in Analogie zum Federpendel, Einzelheiten im Text. Beim Schwingkreis pendelt die Energie zwischen dem E -Feld im Kondensator und B -Feld in der Spule hin und her

ist auch das Magnetfeld wieder vorhanden, aber in umgekehrter Richtung (4. Teilbild). Um zerfallen zu können, erzwingt es in der Spule wieder einen Strom, der den Kondensator auflädt – just bis in die Situation, die zu Beginn vorlag: Der **Schwingkreis** hat eine volle Schwingung absolviert.

Die Analogie zum mechanischen Federpendel (s. Abb. 4.1) zeigen die rechten Teilbilder der Abb. 6.92; es ändert nichts am Prinzip, dass hier die Pendelmasse zwischen zwei Schraubenfedern eingespannt ist: Sie addieren lediglich ihre Federkonstanten. Wie der Vergleich zeigt, entspricht die Spannung U_C am Kondensator der Auslenkung x des Federpendels, die Energie W_E des elektrischen Feldes der potentiellen Energie W_{pot} in den Federn und die Energie W_B des magnetischen Feldes in

der Spule der kinetischen Energie W_{kin} der Pendelmasse. Es kann kaum überraschen, dass dann auch Kapazität C und Federkonstante D einerseits sowie Induktivität L und Masse m des Pendelkörpers andererseits einander entsprechen. Wer dies nicht glauben will, kann den mathematischen Beweis im nächsten Kapitel nachlesen.

wichtig
Ein elektrischer Schwingkreis besteht aus Kondensator und Spule (Kapazität und Induktivität).

Grundsätzlich sollte der Schwingkreis rein sinusförmige Schwingungen konstanter Amplitude ausführen (Abb. 6.93, oberstes Teilbild). Das kann er freilich nur, wenn er

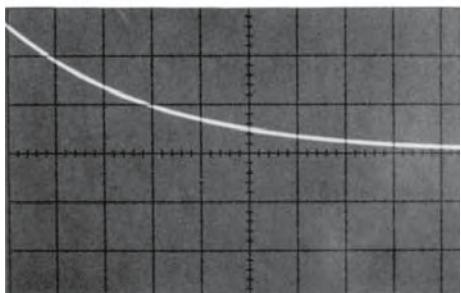
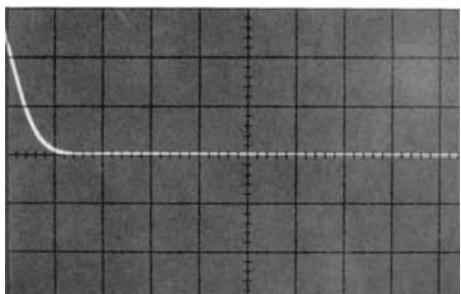
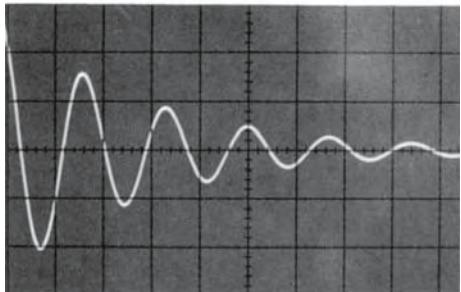
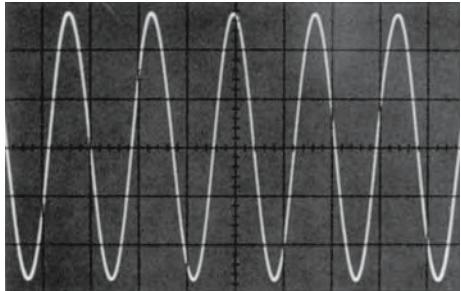


Abb. 6.93. Spannung am Kondensator eines elektrischen Schwingkreises; die Figuren sind vom Bildschirm eines Speicheroszillographen abfotografiert. Von oben nach unten: ungedämpfte Schwingung, gedämpfte Schwingung, aperiodischer Grenzfall, Kriechfall

nirgendwo Wärme entwickelt und (wie sich später noch herausstellen wird) keine elektromagnetische Welle abstrahlt. Tatsächlich

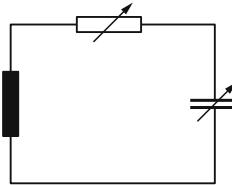


Abb. 6.94. Prinzipschaltung eines Schwingkreises mit variablen „Drehkondensator“ zur Einstellung der Frequenz und variablen Widerstand zur Einstellung der Dämpfung

geht ihm Schwingungsenergie verloren, die Spannungsamplitude am Kondensator wird von Mal zu Mal kleiner: Die Schwingung ist **gedämpft** (2. Teilbild). Durch einen variablen Widerstand im Kreis lässt sich die Dämpfung einstellen. Erhöht man sie, so kann die Schwingung ganz unterbleiben (**aperiodischer Grenzfall**, 3. Teilbild) und schließlich in den exponentiellen Abfall der Kondensatorenentladung des reinen RC-Gliedes übergehen (**Kriechfall**, letztes Teilbild).

Elektrische Schwingungen lassen sich recht bequem mit einem Oszilloskop beobachten und mit variablen Schwingkreisen erzeugen. Die Prinzipschaltung eines solchen Schwingkreises mit einstellbarer Frequenz und Dämpfung zeigt Abb. 6.94. Aus technischen Gründen hält man die Induktivität der Spule meist unverändert oder schaltet sie in groben Stufen. Die einzelnen Kurven der Abb. 6.93 sind so entstanden und von einem Speicheroszillographen abfotografiert worden.

Auch ein gedämpfter elektrischer Schwingkreis kann – ganz analog zum mechanischen Pendel – ungedämpfte freie Schwingungen ausführen, wenn man über eine *Selbststeuerung* immer wieder im richtigen Augenblick die verlorene Energie nachliefernt. Dazu zweigt man z.B. von der Induktionsspule eine kleine Hilfsspannung ab und gibt sie auf die Steuerelektrode eines Transistors. Wenn dies phasenrichtig geschieht, kann die vom Transistor geschaltete Spannungsquelle den Kondensator jeweils im rechten Moment auf die volle Ausgangsspannung aufladen. Dann ist die Schwingung zwar nicht exakt sinusförmig, bei kleiner Dämpfung

spielt die Abweichung aber keine Rolle. Die Frequenz der freien Schwingung liegt bei

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}},$$

wie im nächsten Kapitel mathematisch abgeleitet wird. Dies ist die Eigenfrequenz des elektrischen Schwingkreises.

wichtig

**Elektrischer Schwingkreis:
Eigenfrequenz**

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}.$$

Rechenbeispiel 6.21: Radiobastler

Ein Radiobastler möchte einen Schwingkreis für den UKW-Bereich herstellen, also für ca. 100 MHz. Er besitzt einen Kondensator von 25 pF. Die Spule will er mit dünnem Draht auf einen Bleistiftstummel wickeln (3 cm lang, 7,5 mm Durchmesser). Wie viele Windungen braucht er?

Lösung: Der Schwingkreis soll mit

$$\omega = 2\pi \cdot 10^8 \text{ s}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

schwingen. Also brauchen wir ein

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{(\omega^2 \cdot C)} \\ &= \frac{1}{(3,95 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-2} \cdot 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ F})} \\ &= 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ H} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot n^2 \cdot A/l. \end{aligned}$$

Der Bleistift ist nicht ferromagnetisch, also $\mu_r = 1$. Die Querschnittsfläche ist

$$A = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 7,5 \text{ mm}\right)^2 = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2.$$

Dann gilt für die Zahl der Windungen: $n^2 = L \cdot l \cdot \mu_0 \cdot A = 52,7$, also $n = 7,3$.

6.12.2

Die Schwingungsdifferentialgleichung

Die Analogie zwischen mechanischen und elektrischen Schwingungen lässt sich mathematisch begründen: Beide halten sich an dieselbe Differentialgleichung, wenn auch mit unterschiedlichen Buchstaben und entsprechend unterschiedlichen physikalischen Bedeutungen.

Beim reibunglosen mechanischen Federpendel löst die Auslenkung $x(t)$ eine rücktreibende und darum negative Kraft

$$F(x) = -D \cdot x(t)$$

aus ($D = \text{Federkonstante}$). Diese Kraft beschleunigt die Pendelmasse m nach dem Grundgesetz der Mechanik

$$a(t) = \ddot{x}(t) = \frac{F(t)}{m} = -x(t) \cdot \frac{D}{m}.$$

Das ist die einfachste Form der Schwingungsdifferentialgleichung

$$\ddot{x}(t) = -\text{const.} \cdot x(t),$$

hier mit

$$\text{const.} = D/m.$$

In Worten: Zwischen der (zeitabhängigen) Auslenkung $x(t)$ und ihrer zweiten Ableitung $\ddot{x}(t)$ besteht eine Proportionalität mit negativem Vorzeichen.

Läßt man einen Kondensator auf die Spannung $U(t)$, so enthält er die elektrische Ladung

$$Q(t) = C \cdot U(t)$$

($C = \text{Kapazität}$). Weil sich die Ladung mit der Zeit t ändert, fließt der Strom

$$I(t) = \dot{Q}(t).$$

Gemäß der Maschenregel (s. Kap. 6.4.1) ist die Summe der Spannung am Kondensator und der Spannung an der Spule (Induktivität L) gleich null:

$$\frac{Q(t)}{C} + L \cdot \dot{I}(t) = \frac{Q(t)}{C} + L \cdot \ddot{Q}(t) = 0.$$

Auch dies ist die Schwingungsdifferentialgleichung, jetzt in der Form

$$\ddot{Q}(t) = -\text{const.} \cdot Q(t),$$

hier mit

$$\text{const.} = \frac{1}{L \cdot C}.$$

In Worten: Zwischen der (zeitabhängigen) Ladung $Q(t)$ und ihrer zweiten Ableitung $\ddot{Q}(t)$ besteht eine Proportionalität mit negativem Vorzeichen.

Ganz allgemein kann man der Schwingungsdifferentialgleichung die Form

$$\ddot{Y}(t) = -\text{const.} \cdot Y(t)$$

geben. Ihre Lösungen werden von den beiden Winkelfunktionen Sinus und Kosinus geliefert, denn wenn man einmal ansetzt

$$Y_s = Y_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \text{ und } Y_c = Y_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t),$$

dann erhält man durch Differentiation nach der Zeit

$$\dot{Y}_S = \omega_0 \cdot Y_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) \text{ und}$$

$$\dot{Y}_C = -\omega_0 \cdot Y_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

und durch nochmalige Differentiation

$$\ddot{Y}_S = -\omega_0^2 \cdot Y_0 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t)$$

und

$$\ddot{Y}_C = -\omega_0^2 \cdot Y_0 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t)$$

also in beiden Fällen wie verlangt

$$\ddot{Y} = -\text{const.} \cdot Y.$$

Die Konstante der Differentialgleichung entspricht immer der Kreisfrequenz der Schwingung zum Quadrat. Das bedeutet für das Federpendel

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

und für den Schwingkreis

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}.$$

Diese Ergebnisse stehen in völliger Übereinstimmung mit entsprechenden Beobachtungen.

Wem die mathematische Kurzschrift geläufig ist, der kann die Schwingungsdifferentialgleichung leicht um ein Dämpfungsglied erweitern; es wird proportional zur Geschwindigkeit \dot{x} bzw. zum Strom $I = \dot{Q}$ angesetzt. Die Lösungen liefern dann alle Möglichkeiten gedämpfter Schwingungen von Schwing- bis Kriechfall einschließlich der genauen Bedingung für den aperiodischen Grenzfall. Setzt man schließlich noch ein perio-

disches Glied für einen möglichen Erreger hinzu, so kommen die erzwungenen Schwingungen mit allen Einzelheiten der Resonanzkurve heraus.

6.12.3

Überlagerung von Schwingungen

Legt man einen Sinusgenerator an den Eingang eines Oszilloskop, so erscheint bei richtig eingestellter Zeitablenkung eine saubere Sinuskurve auf dem Bildschirm, etwa dem obersten Teilbild der Abb. 6.93 entsprechend. Elektronisch macht es wenig Mühe, die Signale mehrerer Sinusgeneratoren zu addieren und gemeinsam auf den Oszilloskop zu geben. Er malt dann die Überlagerung der Schwingungen auf seinen Bildschirm. Alles, was in Kap. 4.1.5 vom Mo-

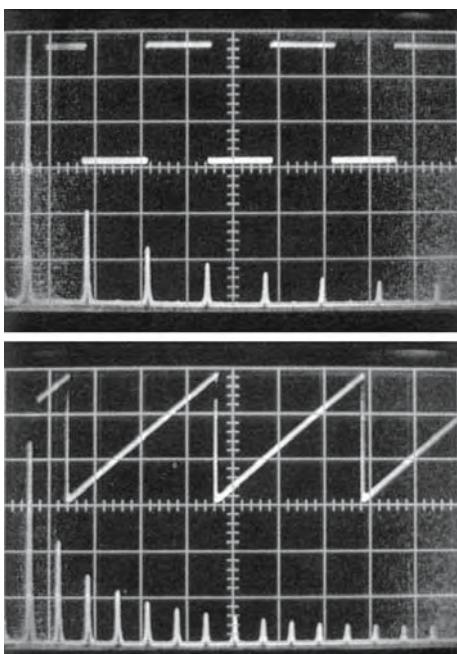


Abb. 6.95. Zwei Spektren elektrischer Schwingungen, geliefert von einem elektronischen Frequenzanalysator; bei der Rechteckschwingung (1. Teilbild) treten nur ungerade Vielfache der Grundfrequenz auf, beim Sägezahn (2. Teilbild) alle ganzzahligen Vielfachen, stets mit abnehmender Amplitude

dell her zu diesem Thema überlegt worden ist, lässt sich im elektrischen Beispiel relativ einfach experimentell nachvollziehen bis hin zur **Fourier-Synthese** einer komplizierteren Schwingung aus ihren **Harmonischen**.

Das Umgekehrte, die **Fourier-Analyse** mit Amplitude und Phasenwinkel, überträgt man am besten einem klug programmierten und digital rechnenden Computer. Interessiert man sich aber nur für das **Spektrum**, kann man also auf die Phasenwinkel verzichten, dann erweist sich der abstimmbare Schwingkreis mit geringer Dämpfung und entsprechend schmaler Resonanzkurve als nützlich. Mit seiner Hilfe filtern übrigens Radioapparate und Fernsehempfänger genau diejenige Information aus dem von der Antenne angelieferten Wellensalat heraus, die der „eingestellte“ Sender bei seiner nur ihm zugeteilten Sendefrequenz abstrahlt. Eine **Frequenzanalytator** genannte undurchsichtige „Blackbox“ stimmt ihren Schwingkreis selbstständig durch und gibt die analysierte Schwingung zusammen mit dem Spektrum auf den Bildschirm des Oszillographen. (☞ Abb. 6.95) gibt zwei Beispiele. Allerdings muss der Hersteller des Gerätes einen Kompromiss zwischen Trennschärfe auf der Frequenzskala und Schnelligkeit der Analyse schließen.

6.12.4

Geschlossene elektrische Feldlinien

Schwingkreise für hohe Frequenzen kommen mit kleinen Kapazitäten und Induktivitäten aus; möglicherweise genügen der Spule schon wenige Windungen. Noch höhere Frequenzen erreicht man ganz ohne Spule. Auch ein zum Kreis gebogener Draht, der zwei Kondensatorplatten verbindet, hat eine Induktivität, denn stromdurchflossen umgibt er sich mit einem Schlauch magnetischer Feldlinien (☞ Abb. 6.96), die auf ihn eine Spannung induzieren, sobald sich Feldstärke und Flussdichte zeitlich ändern. Sie tun dies notwendigerweise, wenn sich der Kondensator entlädt, denn dann bleibt der

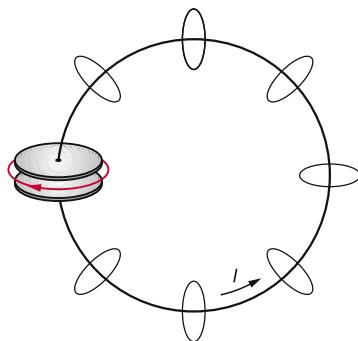


Abb. 6.96. Der Draht, der die Platten eines geladenen Kondensators verbindet, umgibt sich, solange der Strom fließt, mit einem Schlauch geschlossener magnetischer Feldlinien; das sich ändernde elektrische Feld im Dielektrikum des Kondensators tut dies auch

Strom ja nicht konstant. Was geschieht mit dem schlauchförmigen Magnetfeld bei den Kondensatorplatten? Es endet dort nicht, es weitert sich lediglich auf: Obwohl zwischen den Kondensatorplatten kein Strom fließt, herrscht dort ein schlauchförmiges Magnetfeld! Es wird dadurch hervorgerufen, dass sich im Kondensator das elektrische Feld mit einer Änderungsgeschwindigkeit \dot{E} der elektrischen Feldstärke zwischen den Platten ändert. Demnach haben I und \dot{E} die gleiche Wirkung: Ein Strom umgibt sich mit geschlossenen magnetischen Feldlinien, ein sich änderndes elektrisches Feld tut das auch.

Diese Erkenntnis kann auch mathematisch formuliert werden, indem das Durchflutungsgesetz in Kapitel 6.10.3 ergänzt wird. Das Gesetz lautete:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I$$

Anschaulich einfach ist es, den Integrationsweg des Linienintegrals längs einer kreisförmigen Feldlinie zu wählen. Auch um den Kondensator herum ist dieses Integral nicht Null; es fließt dort kein Strom, aber es ist dort ein magnetisches Feld. Also muss auf der rechten Seite noch ein Term hinzukommen, der die Zeitableitung der elektrischen Feldstärke enthält. Hinzu kommt noch die von der Integrationslinie umschlossene Fläche A:

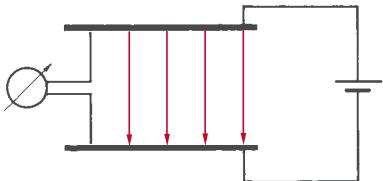


Abb. 6.97. Längs eines Drahtes bricht das elektrische Feld zusammen: das Instrument zeigt die Potentialdifferenz zwischen den Drahtenden

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \cdot I + \epsilon_0 \cdot A \cdot \frac{dE}{dt}$$

Die elektrische Feldkonstante sorgt dafür, dass die Einheiten stimmen.

Auch wenn man dies nicht auf den ersten Blick sieht: Diese Erscheinung ist analog zur magnetischen Induktion (s. Kap 6.11.1). Magnetische Induktion bedeutet nämlich, dass ein sich änderndes magnetisches Feld sich mit einem elektrischen Feld umgibt. In Formelsprache:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -A \cdot \frac{dB}{dt}$$

Zumindest im Gedankenversuch kann man ein elektrisches Feld auch dadurch nachweisen, dass man einen leitenden Draht hineinhält, der in der Mitte von einem unendlich hochohmigen Spannungsmesser mit unendlich kleiner Kapazität unterbrochen ist: weil sich längs des Drahtes ein \vec{E} -Feld nicht halten kann, signalisiert das Instrument genau diejenige Spannung, die der Draht an seinen Enden als Potentialdifferenz vorfindet (☞ Abb. 6.97). Im elektrolytischen Trog (Kap. 6.5.3) funktioniert dieses Verfahren auch praktisch: wegen der relativ guten Leitfähigkeit des Elektrolyten wird von dem Instrument an der Potentialsonde nur ein hoher, aber kein unendlich hoher Innenwiderstand verlangt. Ringförmig geschlossene elektrische Feldlinien wird man vernünftigerweise mit einem fast geschlossenen Drahtring nachzuweisen trachten. d.h. einer Induktionsschleife (☞ Abb. 6.98). Das eingeschlossene Instrument sollte dann die Spannung

$$U = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -A \cdot \frac{dB}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

anzeigen. Das ist genau das Induktionsgesetz aus Kapitel 6.11.1. (Dort stand das Induktionsgesetz mit positivem Vorzeichen: nur eine Frage der Vorzeichenkonvention für die Spannung).

Magnetische Induktion findet aber auch ohne Leiterschleife statt, eben in Gestalt dieses ringförmigen elektrischen Feldes. Und hier zeigt sich noch etwas neues: Elektrische Feldlinien müssen nicht immer, wie bisher behauptet, auf einer positiven Ladung beginnen und auf einer negativen Ladung enden; sie können auch genau wie magnetische Feldlinien geschlossene Kreise bilden. Das tun sie aber eben nur dann, wenn sie von einem sich ändernden Magnetfeld erzeugt werden.

6.12.5 Der schwingende elektrische Dipol

Will man die Eigenfrequenz eines Schwingkreises erhöhen, so muss man Kapazität und Induktivität verringern. Gegebenenfalls kann man auf die Induktionsspule ganz verzichten, wie das vorige Kapitel ja gezeigt hatte: Auch der Drahtbügel, der zwei Kondensatorplatten verbindet, besitzt eine Induktivität. Wenn man mit der Frequenz noch weiter hinauf will, muss man den Kondensator verkümmern lassen: Zwei parallele Drähte haben immer noch eine Kapazität gegeneinander. Auch eine Haarnadel bildet einen Schwingkreis, obwohl

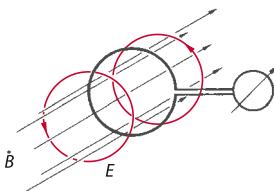
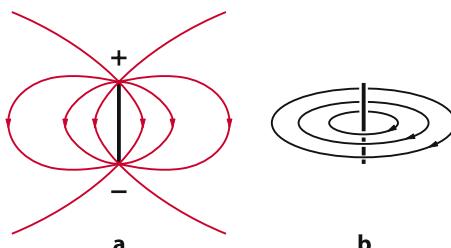


Abb. 6.98. Nachweis ringförmig geschlossener Feldlinien um ein sich änderndes Magnetfeld nach dem Schema in der vorherigen Abbildung: allgemeinere Interpretation des Induktionsversuches

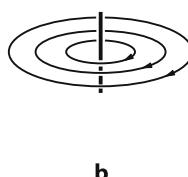
man Kondensator und Spule nicht mehr so recht voneinander trennen kann. Wem die Frequenz immer noch nicht hoch genug ist, dem bleibt als letztes Mittel, die Haarnadel aufzubiegen (☞ Abb. 6.99). Mehr als strecken kann man sie allerdings nicht. Die höchstmögliche Eigenfrequenz besitzt ein Leiter vorgegebener Länge in der Form des geraden Drahtes. Er vermag als elektrischer Dipol elektrisch zu schwingen.

☞ Abbildung 6.100 zeigt grobschematisch die Situationen nach jeweils einer Viertelschwingung des Dipols. In ☞ Abb. 6.100a ist der Dipol gerade durch eine äußere Spannungsquelle aufgeladen worden; es existiert ein inhomogenes elektrisches Feld zwischen seinen Hälften. Dieses Feld löst aber einen Strom aus, der wegen der Selbstinduktion nur ein wenig träge ansteigen kann. Dabei baut er ein konzentrisches Magnetfeld auf. Nach einer Viertelschwingungsdauer ist das *E*-Feld verschwunden und das *B*-Feld auf seinem Maximum (☞ Abb. 6.100b). Von nun an bricht es seinerseits zusammen und zwingt den Strom, in der alten Richtung weiterzulaufen und den Dipol mit entgegengesetztem Vorzeichen wieder aufzuladen. Ist das *B*-Feld verschwunden, so kehrt das neue *E*-Feld die Stromrichtung um (☞ Abb. 6.100c), verschwindet (☞ Abb. 6.100d) und wird vom weiterfließenden Strom in der ursprünglichen Richtung wieder aufgebaut: Ist die Ausgangssituation (von Dämpfungsverlusten einmal abgesehen) wieder erreicht, so ist eine volle Schwingung abgelaufen. Die zugehörige Zeit *T* wird von der Dipollänge *l* und der Lichtgeschwindigkeit *c* bestimmt; es gilt

$$T = 2 \cdot l/c.$$



a



b

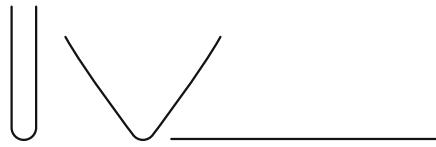


Abb. 6.99. Auch eine Haarnadel bildet noch einen Schwingkreis; die Eigenfrequenz lässt sich weiter erhöhen, wenn man die Haarnadel aufbiegt

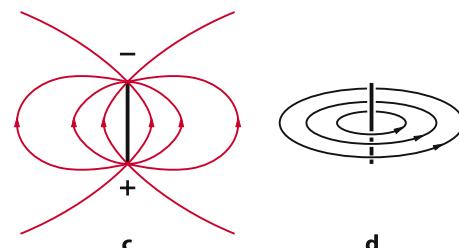
Dies liegt daran, dass sich Veränderungen der elektromagnetischen Felder mit maximal Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Erst die Überlegungen des nächsten Kapitels machen das klarer.

Grundsätzlich dürfte dieses nächste Kapitel hier unmittelbar und ohne neue Überschrift angeschlossen werden, denn wenn ein elektrischer Dipol schwingt, dann strahlt er auch eine **elektromagnetische Welle** ab. Ein schmaler Spektralbereich dieser Wellen hat aber für den Menschen eine ganz besondere Bedeutung: Sein wichtigstes Sinnesorgan reagiert auf elektromagnetische Wellen mit Wellenlängen von etwa einem halben Mikrometer. Vor allem Gesichtssinn und *sichtbares Licht* vermitteln ihm das Bild, das er sich von seiner Umwelt macht; Grund genug, dem Licht ein eigenes großes Kapitel „Optik“ zu widmen.

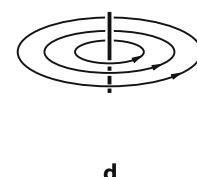
Rechenbeispiel 6.22: Handy-Antenne

Der Handy-Funkverkehr spielt sich bei einer Frequenz von etwa 1 GHz ab. Was ist dann die optimale Sendeantennen-Länge?

Lösung: 1 GHz entspricht einer Periodendauer von 10^{-9} s. In dieser Zeit legt das Licht 0,3 m zurück. Die optimale Länge des strahlenden Dipols beträgt also etwa 15 cm.



c



d

Abb. 6.100. Schwingender Dipol, Einzelheiten im Text

Es gibt zwei Sorten von Ladungen, positive und negative. In der Natur sind die Träger positiver Ladung fast immer die Protonen im Atomkern und die Träger negativer Ladung die Elektronen in der Atomhülle. Sie tragen die kleinstmögliche Ladungsmenge, die **Elementarladung** $e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}$ As. Die Ladungsmenge wird in Ampere mal Sekunde (Coulomb) angegeben. Ladungen können nicht erzeugt oder vernichtet werden. Will man einen Körper negativ aufladen, so muss man ihm Elektronen zuführen, für positives Aufladen Elektronen entziehen. Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige Ladungen ziehen sich an. In beiden Fällen wird die Kraft zwischen zwei Ladungen q_1 und q_2 durch das **Coulomb-Gesetz** bestimmt.

Coulomb-Kraft

$$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$$

F_C : Coulomb-Kraft [N]

q_1, q_2 : Punktladungen [A·s]

r : Abstand der Ladungen [m]

ϵ_0 : elektrische Feldkonstante

$$\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$$

Elektrisches Feld

Man kann diese Kraft auch so beschreiben: eine Ladung Q erzeugt ein **elektrisches Feld** um sich herum mit einer Feldstärke \vec{E} und die andere Ladung q erfährt in diesem Feld eine Kraft:

elektrisches Feld

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_C}{q}$$

\vec{E} : elektrische Feldstärke [V/m]

q : „Probelaadung“ [A · s]

Das elektrische Feld wird veranschaulicht durch **Feldlinien**, die bei den positiven Ladungen beginnen und auf den negativen Ladungen enden. Vor allem im Zusammenhang mit elektromagnetischen Wellen zeigt sich die volle Bedeutung des Feldbegriffs. Elektrische und magnetische Felder enthalten Energie und können diese transportieren.

Strom und Spannung

Wenn ein **elektrischer Strom** durch einen Metalldraht fließt, so bedeutet dies, dass geladene Teilchen, hier Elektronen, durch den Draht strömen. Da Stöße mit den Atomen diesen Fluss behindern, muss eine Kraft auf die Elektronen ausgeübt werden, um den Strom aufrechtzuerhalten. Diese wird von einem elektrischen Feld ausgeübt, das in diesem Draht herrscht. Strömen Elektronen unter der Wirkung des elektrischen Feldes durch den Draht, so verlieren sie genau wie ein Stein, der unter der Wirkung der Schwerkraft herunterfällt, potentielle Energie. Diese wird durch die Stöße mit den Atomen in Wärme umgewandelt. Der Verlust an potentieller Energie, den ein Elektron erleidet, wenn es von einem Ende eines Drahtes zum anderen bewegt, wird durch die **elektrische Spannung** oder Potentialdifferenz U zwischen den Drahtenden beschrieben.

Spannung

$$W_{\text{pot}} = e_0 \cdot U$$

W_{pot} : Verlust an potentieller Energie eines Elektrons

e_0 : Elementarladung

U : Spannung [V, Volt]

Im Draht der Länge l ist die elektrische Feldstärke in etwa überall gleich, sodass gilt:

$$U = I \cdot |\vec{E}|$$

I : Drahtlänge

\vec{E} : Feldstärke im Draht

Strom

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

ΔQ : pro Zeit strömende Ladungsmenge [A · s = C, Coulomb]

t : Zeit [s]

Widerstand

Je höher die Spannung zwischen den Drahtenden, umso höher das Feld und die Kraft auf die Elektronen. Die Elektronen werden dann schneller und der elektrische Strom größer. Für einen Metalldraht und generell für **ohmsche Widerstände** ist der Strom proportional zur Spannung U , der elektrische Widerstand R

Widerstand

$$R = \frac{U}{I}$$

R : Widerstand [Ω , Ohm]

U : Spannung [V, Volt]

I : Strom [A, Ampère]

Ohmsches Gesetz

in vielen Fällen ist R unabhängig von U bzw. I

Der Widerstand hängt von der Länge l des Drahtes, seiner Querschnittsfläche A und vom **spezifischen Widerstand** ρ des verwendeten Materials ab:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

ρ : spez. Widerstand [$\Omega \cdot m$]

l : Drahtlänge

A : Querschnittsfläche

Stromkreis

Im Stromkreis fließen die Ladungsträger im Kreis herum. Sie können dabei nicht verloren gehen (Knotenregel) und wenn sie einmal herumgeflossen sind, befinden sie sich wieder auf demselben elektrischen Potential, haben dieselbe potentielle Energie (Maschenregel). Das bedeutet zum Beispiel für in Serie geschaltete Widerstände R_1, R_2, \dots an einer Batterie, dass die Summe der an ihnen abfallenden Spannungen gleich der Batteriespannung sein muss.

Spannungsteiler

$$U_1 + U_2 + \dots = U_0$$

U_1 : Spannung am Widerstand R_1 [V]

$$U_1 = \frac{R_1}{R_{\text{ges}}} \cdot U_0$$

U_0 : Spannung der Batterie

Reihenschaltung

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

R_{ges} : Gesamtwiderstand [Ω]

Strom / durch alle Widerstände gleich.

Parallelschaltung

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

R_{ges} : Gesamtwiderstand [Ω]

Spannung U an allen Widerständen gleich. Strom I_1 z.B. durch R_1 :

$$I_1 = \frac{R_{\text{ges}}}{R_1} \cdot I_0$$

I_1 : Strom durch R_1 [A]

I_0 : Strom durch R_{ges}

Die Spannungsquelle (zum Beispiel die Batterie) hält die Spannung im Stromkreis aufrecht und „pumpt“ die Elektronen im Kreis herum. Der Strom fließt also auch durch die Spannungsquelle selbst, die einen gewissen **Innenwiderstand** hat, der möglichst klein sein sollte. Sie muss ständig Energie liefern, die in den Widerständen im Stromkreis wieder verheizt wird.

Leistung

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$$

P : Leistung [W, Watt]

U : Spannung [V]

I : Strom [A]

R : Widerstand [Ω]



Kondensator

Zwei parallel im Abstand d liegende Metallplatten mit Fläche A bilden einen **Kondensator**.

Kapazität

$$C = \frac{Q}{U}$$

C: Kapazität [$\frac{As}{V} = F$, Farad]
Q: Ladung auf dem Kondensator
[A · s]

U: Spannung am Kondensator [V]

Energie im Kondensator

$$W = \frac{1}{2} Q \cdot U$$

W: Energie im Kondensator [J]

Kapazität eines Plattenkondensators

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

ϵ_r : relative Permittivität des Isolators
 ϵ_0 : elektrische Feldkonstante
A: Plattenfläche [m^2]
d: Plattenabstand [m]
E: elektrisches Feld im Kondensator
[V/m]

Elektrisches Feld im Kondensator

$$E = \frac{U}{d}$$

Wird ein Kondensator über einen Widerstand entladen, so sinken die Ladung, die Spannung und der Entladestrom exponentiell ab. Auch beim Aufladen ergeben sich exponentielle Verläufe.

Kondensatorentladung über Widerstand R

$\tau = R \cdot C$ τ : Zeitkonstante [s]

Bringt man ein Metallstück in ein elektrisches Feld, so strömen die Leitungselektronen so lange im Metall, bis das Innere feldfrei ist. Man nennt diese Erscheinung **Influenz** und kann sie zur Abschirmung elektrischer Felder nutzen. In Isolatoren gibt es keine freien Ladungsträger. Aber Elektronen und Atomkerne werden durch ein elektrisches Feld etwas verschoben und schwächen es dadurch ab. Dies nennt man **Polarisation** und kann es zum Beispiel dazu nutzen, die Kapazität eines Kondensators zu erhöhen. Beschrieben wird die Feldabschwächung durch die **relative Permittivität** (**Dielektrizitätszahl**) ϵ_r .

Halbleiter

In Metallen ist die Konzentration der frei beweglichen Elektronen (**Leitungselektronen**), die den Strom transportieren, durch das Material vorgegeben und kann praktisch nicht variiert werden. In Halbleitern wie Silizium hingegen werden Leitungselektronen erst durch das Beimischen sehr kleiner Mengen von Fremdatomen (**Donatoren**) erzeugt. Ihre Konzentration und damit der spezifische Widerstand des Materials kann deshalb über weite Bereiche eingestellt werden. Durch Beigabe anderer Fremdatome (**Akzeptoren**) kann darüber hinaus ein Leistungsmechanismus hervorgerufen werden, der als Bewegung von positiven Ladungen (**Defektelektronen**) beschrieben werden kann. Diese vielfältigen Einstellungsmöglichkeiten bei Halbleitern ermöglichen die Bauelemente (Dioden, Transistoren, etc.), die Grundlage moderner Elektronik sind.

Elektrochemie

Viele Moleküle, insbesondere Salze, Säuren und Laugen, zerfallen beim Lösen in Wasser in Ionen, sie dissoziieren. Entstehen dabei H^+ -Ionen oder OH^- -Ionen, so verändert dies den **pH-Wert** des Wassers, der der negative dekadische Logarithmus der H^+ -Ionenkonzentration, gemessen in mol/l, ist. Ionen im Wasser führen zu einer hohen Leitfähigkeit. Fließt ein Strom durch eine Lösung (Elektrolyt), so wird dieser durch die Ionen getragen und an den eingetauchten Elektroden scheiden sich die entsprechenden Substanzen ab (Elektrolyse). Dies nutzt man zum Beispiel großtechnisch, um aus Kochsalz Chlor

und Natrium zu gewinnen. Fertigt man die beiden Elektroden, die man in die Lösung taucht, aus zwei verschiedenen Metallen, so tritt auch ohne äußere Spannungsquelle eine Galvani-Spannung zwischen ihnen auf. Dies beruht darauf, dass an beiden Elektroden unterschiedlich stark Metallionen in Lösung gehen und Elektronen hinterlassen. Verbindet man die Elektroden elektrisch, so fließt ein Strom, um die unterschiedliche Elektronenkonzentration auszugleichen. Dies ist die Basis für alle Batterien.

Magnetisches Feld

Ein elektrischer Strom, sei es ein Strom durch eine Spule oder atomare Kreisströme in einem Permanentmagneten, umgibt sich mit einem magnetischen Feld. Seine Stärke wird durch die (historisch so genannte) **magnetische Flussdichte** \vec{B} beschrieben. Die magnetischen Feldlinien sind immer geschlossen, da es keine magnetischen Ladungen gibt, auf denen sie enden könnten. Ein stromdurchflossener Draht ist deshalb mit kreisförmigen Magnetfeldlinien umgeben. Die Flussdichte nimmt umgekehrt proportional zum Abstand ab. Ein Magnetfeld übt wiederum auf einen elektrischen Strom / durch einen Draht eine Kraft, die **Lorentzkraft** \vec{F}_L aus, die senkrecht auf Strom und Magnetfeld steht.

$$\text{magnetische Kraft auf einen Leiter} \quad \vec{F}_L = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

\vec{F}_L : magnetische Kraft auf einen Leiter [N]
 I : Länge des Leiters [m]

\vec{l} : Strom (mit Richtung) [A]
 \vec{B} : magnetische Flussdichte

[$\frac{N}{Am} = T$, Tesla]

$$\text{Magnetfeld um einen Draht} \quad B = \frac{\mu_0 \cdot |\vec{l}|}{2\pi \cdot r}$$

μ_0 : mag. Feldkonstante

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

r : Abstand vom Draht

$$\text{Magnetfeld in einer Spule} \quad B = \mu_0 \frac{n \cdot |\vec{l}|}{l}$$

B : mag. Flussdichte [T, Tesla]

n : Windungszahl

l : Spulenlänge [m]

Induktion

Ändert man das durch eine Leiterschleife hindurchtretende Magnetfeld, so wird zwischen den Drahtenden eine Spannung **induziert**. In einer geschlossenen Leiterschleife fließt dann ein induzierter Strom. Die induzierte Spannung hängt von der Änderungsgeschwindigkeit des **magnetischen Fluxes** Φ durch die Leiterschleife ab. Der magnetische Fluss ergibt sich aus der von der Leiterschleife eingeschlossenen Fläche \vec{A} , der magnetischen Flussdichte \vec{B} und dem Winkel α , unter dem das Magnetfeld durch die Leiterschleife tritt

$$\text{magnetischer Fluss} \quad \Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \alpha$$

Φ : magnetischer Fluss [$\frac{T}{m^2}$]

\vec{A} : Fläche der Leiterschleife [m^2]

\vec{B} : Magnetfeld durch die Leiterschleife [T]

$$\text{Induktionsspannung} \quad U_{\text{ind}} = \frac{d\Phi}{dt}$$

U_{ind} ist die in eine einzelne Leiterschleife, die vom Fluss Φ durchsetzt wird, induzierte Spannung. [V]

$$\text{Induktivität einer Spule} \quad U_{\text{ind}} = L \cdot \frac{di}{dt}$$

U_{ind} : durch Stromänderung induzierte Spannung

L : Induktivität [$\frac{T \cdot m^2}{A} = H$, Henry]

Materie im Magnetfeld

Materie wird im Magnetfeld **magnetisiert**, was bei den technisch wichtigen **Ferromagneten** zu einer hohen **Feldverstärkung** führt.

Wechselspannung

Technisch werden sehr häufig Wechselspannungen und Wechselströme verwendet, die einen sinusförmigen Zeitverlauf haben. Die Frequenz der Netzspannung beträgt 50 Hz und ihr **Effektivwert** 230 V. In einem ohmschen Widerstand verlaufen Wechselstrom und Wechselspannung synchron. Auch durch einen Kondensator kann ein Wechselstrom „fließen“, indem die Platten immer wieder umgeladen werden. Strom und Spannung sind am Kondensator phasenverschoben: Der Strom läuft der Spannung voraus. Bei einer Spule ist es wegen der Selbstinduktion gerade umgekehrt: Der Strom hinkt der Spannung hinterher. Frequenzabhängige Widerstände werden genutzt, um elektrische Frequenzfilter (**Hochpass**, **Tiefpass**) zu bauen.

Wechselspannung

$$U(t) = U_s \cdot \sin \omega \cdot t$$

U_s : Spannungsamplitude [V]

ω : Kreisfrequenz [1/s]

t : Zeit [s]

Effektivspannung

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_s}{\sqrt{2}}$$

U_{eff} : Effektivspannung [V]

kapazitiver Widerstand (Kondensator)

$$R_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$$

R_C : kapazitiver Widerstand [$\frac{s}{F}$]

C : Kapazität des Kondensator [F]

Der Strom eilt der Spannung um 90° voraus

induktiver Widerstand (Spule)

$R_L = \omega \cdot L$. Der Strom hinkt der Spannung um 90° nach.

R_L : induktiver Widerstand [s/H]]

L : Induktivität der Spule [H]

Schaltet man einen Kondensator und eine Spule parallel, so entsteht ein **Schwingkreis**, in dem Strom und Spannung mit einer charakteristischen **Resonanzfrequenz** f_0 schwingen können.

Frequenz des Schwingkreis

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

f_0 : Frequenz des Schwingkreis [Hz]

Verständnisfragen

1. Üblicherweise bemerkt man weder etwas von der Gravitationskraft zwischen Körpern noch von einer elektrostatischen Kraft. Warum?
2. Mit einem durch Reibung elektrisch aufgeladenen Plastiklineal kann man kleine Papier-schnitzel anziehen. Warum? Manche angezogenen Papierschnitzel hüpfen gleich wieder weg. Warum?
3. Warum können sich elektrische Feldlinien nie kreuzen?
4. Was kann man über das elektrische Feld in einem Bereich sagen, in dem das elektrische Potential konstant ist?
5. Wenn eine Batterie mit einem Plattenkondensator verbunden wird laden sich beide Platten mit der gleichen Ladungsmenge auf (nur das Vorzeichen ist verschieden). Warum? Sind die Ladungsmengen auch noch gleich, wenn die Platten verschieden groß sind?
6. Wenn man die Platten eines aufgeladenen Plattenkondensators auseinander zieht, ändert sich dann die gespeicherte elektrostatische Energie?
7. Sie fallen aus einem Hubschrauber und können ihren Fall durch beherztes Festhalten an einer Hochspannungsleitung stoppen. Bringt Sie die Hochspannung um?
8. Die maximale Spannung von Hochspannungsleitungen beträgt etwa 380000 V. Warum geht es nicht höher?
9. Warum könnte ein guter elektrischer Leiter auch ein guter Wärmeleiter sein?
10. Warum hat ein längerer Draht einen höheren elektrischen Widerstand?
11. Wann wird es bei gleicher Spannungsquelle heller: wenn man zwei gleiche Glühbirnen in Reihe schaltet oder wenn man sie parallel schaltet?
12. Was passiert, wenn eine Glühbirne durchbrennt?
13. Ist ein elektrischer Widerstand ein „Stromverbraucher“? Was verbraucht er?
14. Auf Autobatterien steht drauf, wie viel Ampèrestunden (Ah) sie haben. Was wird damit angegeben?
15. Kann man ein ruhendes Elektron mit einem Magnetfeld in Bewegung setzen?
16. Wird die Oberfläche einer Computer-Festplatte aus magnetisch weichem oder hartem Material gemacht?
17. Ein Magnet zieht im Wesentlichen nur Gegenstände aus Eisen an und nicht beliebige Metalle. Warum?

Übungsaufgaben

Strom, Spannung, Leistung

- 6.1: (I) Vier Taschenlampenbatterien mit je 4,5 V lassen sich auf mehrerelei Weise hintereinander schalten. Welche Gesamtspannungen kann man dadurch mit ihnen erzeugen?
- 6.2: (I) Welchen Strom zieht ein Fernsehempfänger mit 125 W Leistung aus der Steckdose? Welche Leistung setzt eine Röntgenröhre um, die mit 80 kV Hochspannung und 5 mA Röhrenstrom betrieben wird?
- 6.3: (I) Eine Kilowattstunde elektrische Energie kostet 12 Cent. Was kostet es, eine 40W-Glühbirne das ganze Jahr brennen zu lassen?
- 6.4: (II) Wie viele 100W-Glühbirnen kann man gleichzeitig an einer Steckdose betreiben, wenn sie mit einer 16 A -Sicherung abgesichert ist?
- 6.5: (I) Welche Energie, in kWh und J gemessen, speichert ein 45 Ah-Akku bei 12 V?
- 6.6: (II) Ein Elektroauto ist 1000 kg schwer und wird von 26 Batterien mit jeweils 12 V und 45 Ah betrieben. Das Auto fährt mit 40 km/h auf ebener Strecke, die durchschnittliche Reibungskraft ist 240 N. Welche Leistungsaufnahme hat der Motor wenn wir 100 % Effizienz annehmen? Wie lange kann das Auto mit den Batterien fahren?
- 6.7: (I) Mathematisch wird Wechselspannung der Steckdose durch die Gleichung $U(t) = U_s \cdot \cos(\omega t)$ beschrieben. Welche Werte sind für U_s und ω einzusetzen?

Widerstand

- 6.8: (II) Wieso ist das Ohm'sche Gesetz gleichbedeutend mit Beweglichkeit $\mu = \text{const.}$?
- 6.9: (II) Acht gleiche Glühbirnen sind in Reihe an einer Steckdose angeschlossen. Welche Spannung liegt an jeder Birne? Wenn ein Strom von 0,4 A fließt, welchen Widerstand hat jede Birne und welche Leistung setzt sie um?
- 6.10: (II) Es gibt mehrere Möglichkeiten, vier gleiche Widerstände zusammenschalten.
☞ Abbildung 6.101 zeigt acht von ihnen. Sie lassen sich ohne genaue Rechnung nach steigendem Gesamtwiderstand ordnen. Wie? Und was liefert die genaue Rechnung?

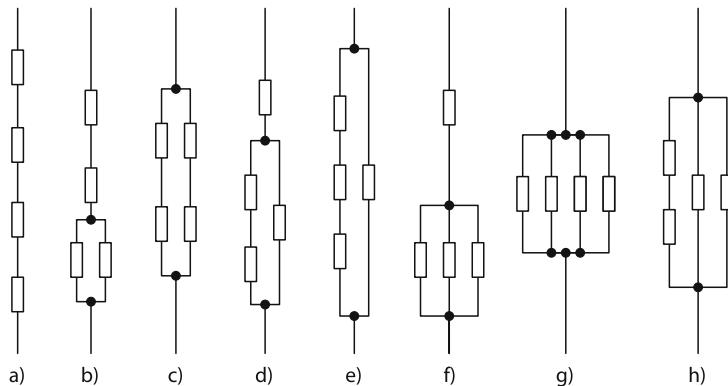


Abb. 6.101. Zu Frage 6.10

- 6.11: (II) Wie teilt ein 6 k Ω -Potentiometer, dessen Schleifkontakt 3 k Ω abgreift, eine Spannung von 60 V auf, wenn es a) nicht belastet und b) mit 3 k Ω belastet wird?
- 6.12: (II) Wenn in der Wheatstone-Brücke der ☞ Abb. 6.26 der Widerstand R_1 7352 Ω beträgt, R_2 6248 Ω und R_3 5000 Ω , wie groß ist bei abgeglicher Brücke dann R_4 ?

- 6.13: (II) Welche Potentiale haben die vier markierten Punkte in der nebenstehenden Schaltung (Abb. 6.102)?

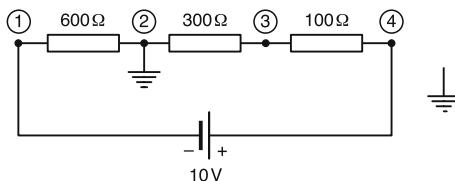


Abb. 6.102. Zu Frage 6.13

- 6.14: (II) Zwei Widerstände an einer Spannungsquelle setzen, wenn sie in Reihe geschaltet werden, nur ein Viertel der Leistung um wie wenn sie parallel geschaltet sind. Ein Widerstand hat $2,2\text{ k}\Omega$. Wie groß ist der andere?
- 6.15: (II) Die Spannung an einer 12V-Autobatterie sinkt auf 10 V, wenn der Anlasser betätigt wird. Der Anlasser zieht einen Strom von 60 A. Wie groß ist der Innenwiderstand der Batterie? Welchen Widerstand hat der Anlassermotor?
- 6.16: (III) In den dreißiger Jahren des vorigen Jahrhunderts kam in Deutschland noch 110 V Gleichspannung aus den Steckdosen. Wollte man da eine 12V, 50W-Glühbirne eines Filmprojektors betreiben, so konnte man nicht wie heute einen Transformator einbauen, der die Spannung herunter transformiert, sondern man schaltete einen Vorwiderstand in Reihe mit der Glühbirne. Welchen Widerstand musste dieser haben und welche Leistung wurde in ihm verheizt?

Feld und Potential

- 6.17: (II) Wie verlaufen die Feld- und Potentiallinien zu der nebenstehenden Elektrodenanordnung ungefähr (Abb. 6.103)?

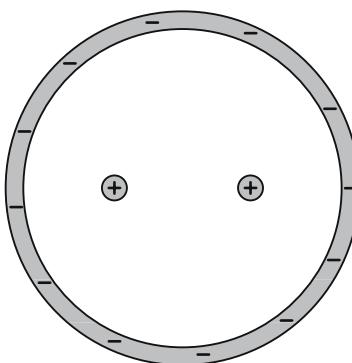


Abb. 6.103. Zu Frage 6.17

- 6.18: (I) Das sog. „Ruhepotential“ einer nicht „feuernden“ Nervenfaser liegt etwas über 70 mV; die Dicke normaler Membranen, die z.B. auch Nervenfasern umgeben, beträgt ungefähr 5 nm. Welche Feldstärke erzeugt das Ruhepotential in der Membran?
- 6.19: (I) Warum werden Dipole im inhomogenen Feld immer in Richtung höherer Feldstärke gezogen?
- 6.20: (I) Nach der Formel für die Coulomb-Kraft muss das Produkt aus der Einheit der Ladung und der elektrischen Feldstärke eine Krafteinheit geben. Wie lässt sich das nachprüfen?

- 6.21: (I) Wie groß ist die Kraft zwischen dem Kern eines Eisenatoms ($Q = 26 \cdot e_0$) und dem Kern nächstens Elektron, wenn wir einen Abstand von $1,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ annehmen?
- 6.22: (II) Zwei geladene Teilchen haben eine Gesamtladung von $80 \mu\text{C}$. Der Abstand zwischen ihnen beträgt 1 m und sie stoßen sich mit 12 N ab. Wie groß sind die einzelnen Ladungen?
- 6.23: (II) Drei positiv geladene Teilchen mit einer Ladung von jeweils $11 \mu\text{C}$ befinden sich in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit einer Kantenlänge von 10 cm. Wie groß ist die resultierende Kraft auf jede Ladung?
- 6.24: (II) Zwei punktförmige Ladungsträger mit je einer Ladung von $+7,5 \mu\text{C}$ und einer Masse von 1 mg befinden sich in Ruhe in einem Abstand von 5,5 cm voneinander. Wenn sie nun losgelassen werden, welche Endgeschwindigkeit erreichen sie, wenn sie sehr weit auseinander sind?
- 6.25: (III) Wie viel Arbeit war erforderlich, um die drei Ladungen aus Aufgabe 6.23 aus dem Unendlichen in ihre Position zu bringen?
- 6.26: (II) Mit welcher Geschwindigkeit treffen die freien Elektronen in der Bildröhre eines Fernsehempfängers auf dem Bildschirm auf, wenn die Röhre mit 2 kV Anodenspannung betrieben wird?
- 6.27: (III) An der Erdoberfläche herrscht ein elektrisches Feld von etwa 150 V/m, das nach unten gerichtet ist. Zwei gleiche Bälle mit einer Masse von 0,54 kg werden von einer Höhe von 2 m fallengelassen. Ein Ball trägt eine Ladung von $+550 \mu\text{C}$, der andere von $-550 \mu\text{C}$. Wie groß ist der Unterschied der Geschwindigkeiten, mit denen sie auf dem Boden auftreffen? Verwenden Sie den Energiesatz und vernachlässigen Sie die Luftreibung.

Kondensator

- 6.28: (I) Die Ladung auf einem Kondensator steigt um $15 \mu\text{C}$ wenn die Spannung von 97 V auf 121 V erhöht wird. Wie groß ist die Kapazität des Kondensators?
- 6.29: (I) Trockene Luft hat eine Durchbruchfeldstärke von $3 \cdot 10^6 \text{ V/m}$. Wie viel Ladung kann auf einen Plattenkondensator gebracht werden, wenn der eine Plattenfläche von 50 cm^2 hat?
- 6.30: (II) In einen geladenen Plattenkondensator wird ein Isolator mit einer Permittivität von $\epsilon_r = 2$ geschoben. Wie ändern sich Kapazität, Spannung und Ladung auf den Platten, wenn
 a) der Kondensator isoliert ist?
 b) der Kondensator noch an der Spannungsquelle angeschlossen ist?
- 6.31: (II) Jede Taste in einer Computertastatur ist mit einer kleinen Metallplatte verbunden, die eine Platte eines Plattenkondensators bildet. Wird die Taste gedrückt, so vermindert sich der Abstand der Kondensatorplatten und die Kapazität erhöht sich entsprechend. Diese Kapazitätserhöhung wird elektronisch registriert und der Rechner weiß dann, dass die Taste gedrückt ist. Nehmen wir an, die beiden Metallplatten haben je eine Fläche von 50 mm^2 und sind 4 mm auseinander, wenn die Taste nicht gedrückt ist. Die Elektronik spricht an, wenn sich die Kapazität um $0,25 \text{ pF}$ erhöht. Wie weit muss die Taste heruntergedrückt werden?
- 6.32: (II) Ein $7,7 \mu\text{F}$ - Kondensator ist auf 125 V aufgeladen. Die Spannungsquelle wird abgekoppelt und dafür ein zweiter, zunächst ungeladener Kondensator mit Kapazität C_2 an den Kondensator angeschlossen. Ein Teil der Ladung fließt auf den zweiten Kondensator über. Dadurch sinkt die Spannung um 15 V. Wie groß ist die Kapazität C_2 ?
- 6.33: (II) Wie ändert sich die in einem Kondensator gespeicherte Energie, wenn:
 a) die Spannung verdoppelt wird?
 b) die Ladungen auf den Platten verdoppelt wird?
 c) der Plattenabstand verdoppelt wird während der Kondensator mit einer Spannungsquelle verbunden bleibt?
- 6.34: (II) Ein großer 4 F - Kondensator hat genug Energie gespeichert, um 2,5 kg Wasser von 20°C auf 95°C zu erhitzen. Welche Spannung liegt am Kondensator?

- 6.35: (II) Welche Kapazität muss man in einem *RC*-Glied zu einem ohmschen Widerstand von $10\text{ k}\Omega$ hinzuschalten, um die Grenzfrequenz f^* zwischen Hoch- und Tiefpass auf 50 Hz zu bringen?

Stromleitung, Elektrochemie

- 6.36: (III) In welcher Größenordnung liegt die Geschwindigkeit, mit der die Elektronen in der Zuleitung zu einer Schreibtischlampe hin und her pendeln? (Leistung 60 W, Kupferquerschnitt $0,75\text{ mm}^2$, Molare Masse $M(\text{Cu})=63,54\text{ g/mol}$).
- 6.37: (I) Die Technik hat für Vakuumröhren sog. „Oxidkathoden“ entwickelt, die nicht bis zu sichtbarer Glut geheizt werden müssen. Was bedeutet das für die Austrittsarbeit?
- 6.38: (II) Wieso führt der Dissoziationsgrad $x_0=1,9 \cdot 10^{-9}$ beim Wasser zu pH 7?
- 6.39: (II) Welche Wasserstoffionenkonzentration gehört zu pH 2,5?
- 6.40: (II) Bei der elektrolytischen Abscheidung von Silber aus Silbernitrat (AgNO_3) wurde gemessen: $\Delta m/\Delta Q=1,1179\text{ mg/C}$. Welche molare Masse $M(\text{Ag})$ und welche Atommasse $m_M(\text{Ag})$ folgen daraus? Silber ist hier einwertig.

Magnetfeld

- 6.41: (II) Ein längerer Draht befindet sich in einem Magnetfeld von 10^{-4} T und verläuft senkrecht zu den Feldlinien. Nun wird ein Strom von 5 A durch den Draht geschickt. Wo und in welchem Abstand vom Draht ist dann die Feldstärke Null?
- 6.42: (II) Zwei Drähte verlaufen senkrecht zueinander und haben einen kürzesten Abstand von 20 cm. Wie groß ist das magnetische Feld genau zwischen ihnen, wenn der eine Draht 20 A und der andere Draht 5 A Strom führt?
- 6.43: (II) Ein langer Draht, durch den 12 A fließen, übt auf einen 7 cm entfernten parallelen Draht eine anziehende Kraft von $8,8 \cdot 10^{-4}\text{ N}$ pro Meter aus. Wie groß ist der Strom im zweiten Draht und welche Richtung hat er?
- 6.44: (I) Wie groß ist die Kraft auf ein Flugzeug, dass mit 120 m/s senkrecht zum Erdmagnetfeld von $5 \cdot 10^{-5}\text{ T}$ fliegt und eine Ladung von 155 As trägt?
- 6.45: (II) Ein stromführender Draht wird zu einem Quadrat mit 6 cm Kantenlänge gebogen. Der Strom durch den Draht betrage 2,5 A. Welches Drehmoment wirkt auf diese Leiterschleife in einem gleichförmigen Magnetfeld ($B = 1\text{ T}$), wenn die Feldlinien
a) senkrecht zu der Schleifenebene stehen?
b) parallel zur Schleifenebene und zu zwei Kanten des Quadrates liegen?

Induktion

- 6.46: (II) In einer geschlossenen Spule mit 100 Windungen, einer Querschnittsfläche von 25 cm^2 und einem Widerstand von $25\text{ }\Omega$ wird ein Magnetfeld parallel zur Spulenachse in 2 Sekunden von 0 T auf 1 T erhöht. Welcher induzierte Strom fließt dabei im Mittel durch die Spule?

- 6.47: (II) Zwischen den Polschuhen eines großen Elektromagneten (Abb. 6.104) wird eine Probespule mit konstanter Geschwindigkeit parallel zu sich selbst genau auf der Symmetrieebene des Feldes entlang gezogen, aus dem feldfreien Raum in den feldfreien Raum. Wie sieht der Verlauf der induzierten Spannung, bezogen auf die momentane Position der Probespule, qualitativ aus?

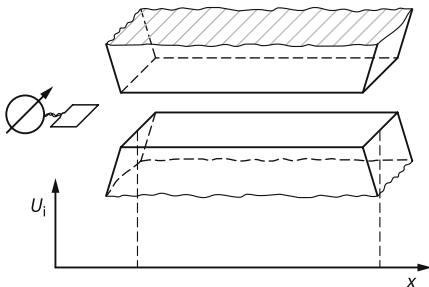


Abb. 6.104. Zu Frage 6.46

- 6.48: (II) Ein einfacher Generator hat eine quadratische Drehspule mit einer Kantenlänge von 10 cm und 720 Windungen. Die Spule wird in einem 0,65 T -Magnetfeld gedreht. Wie schnell muß sie mindestens gedreht werden um eine effektive Spannung von 50 V zu liefern?

- 6.49: (II) Jede Schule besitzt in ihrer physikalischen Sammlung einen „Experimentiertrafo“, bestehend aus einem U-Kern mit aufsetzbarem Joch und einem Satz auswechselbarer Spulen. Vorhanden seien die Spulen mit 24, 250, 500, 1000 und 25.000 Windungen. Welche Kombination wird der Lehrer wählen, wenn er für einen Versuch ca. 12 kV Hochspannung haben möchte und für einen anderen 6 V Niederspannung. Primäre Spannungsquelle ist die Steckdose (230 V).

Schwingkreis

- 6.50: (II) Welche Größen im elektrischen Schwingkreis entsprechen der Auslenkung x des Federpendels, der Geschwindigkeit v seines Pendelkörpers, der potentiellen und der kinetischen Energie?

7.1	Elektromagnetische Wellen	298
7.1.1	Der strahlende Dipol	298
7.1.2	Spektralbereiche	300
7.1.3	Wellenausbreitung	301
7.2	Geometrische Optik	303
7.2.1	Lichtbündel	304
7.2.2	Spiegelung	306
7.2.3	Brechung	308
7.2.4	Dispersion	311
7.2.5	Linsen	312
7.2.6	Abbildung durch Linsen	314
7.2.7	Abbildungsgleichungen	316
7.2.8	Dicke Linsen und Objektive	318
7.2.9	Das Auge	319
7.2.10	Optische Instrumente	320
7.3	Intensität und Farbe	324
7.3.1	Strahlungs- und Lichtmessgrößen	324
7.3.2	Optische Absorption	326
7.3.3	Temperaturstrahlung	328
7.4	Wellenoptik	329
7.4.1	Polarisiertes Licht	330
7.4.2	Interferenz	332
7.4.3	Kohärenz	334
7.4.4	Dünne Schichten und Beugungsgitter	335
7.4.5	Beugungsfiguren	337
7.5	Quantenoptik	339
7.5.1	Das Lichtquant	340
7.5.2	Energiezustände und Spektren	342
7.5.3	Laser	345
7.5.4	Röntgenstrahlen	346
7.6	Elektronenoptik	348
7.6.1	Elektronenbeugung	348
7.6.2	Elektronenmikroskope	349
7.6.3	Die Unschärferelation	351

Optik ist die Lehre vom Licht, vor allem von seiner Ausbreitung. Als Licht bezeichnet man zunächst einmal diejenige Strahlung, die das Auge des Menschen wahrnimmt, also elektromagnetische Wellen in einem sehr schmalen Spektralbereich. In erweitertem Sinn werden auch die benachbarten Gebiete als Licht bezeichnet. Kennzeichen der Wellenausbreitung sind Interferenz und Beugung. Allerdings machen sie sich im makroskopischen Alltag meist gar nicht bemerkbar, weil die Wellenlänge sichtbaren Lichtes zu klein ist. Dann gelten die Regeln der geometrischen Optik. Licht überträgt Energie. Der selektiven Empfindlichkeit des menschlichen Auges wegen müssen für den Strahlungsfluss einer elektromagnetischen Welle und den Lichtstrom verschiedene Messverfahren und Einheiten definiert werden. Sichtbares Licht wird von Atomen und Molekülen emittiert und absorbiert. Weil sie so klein sind und weil die kurzen Wellenlängen hohe Frequenzen zur Folge haben, spielt hier eine Eigenschaft der Natur eine bedeutsame Rolle, die sich im Alltag sonst nicht bemerkbar macht: die Quantelung der Energie.

7.1 Elektromagnetische Wellen

Einleitung

Ein schwingender Dipol strahlt eine elektromagnetische Welle ab, d.h. die Kombination von einem elektrischen und einem magnetischen Wechselfeld gleicher Frequenz. Die beiden Feldstärken stehen senkrecht aufeinander und quer zur Ausbreitungsrichtung. Im Vakuum läuft die Welle mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, der absolut höchsten Geschwindigkeit, die von der Natur zugelassen wird. Licht im engsten Sinn ist das „sichtbare Licht“ mit Wellenlängen zwischen $0,4 \mu\text{m}$ (blau) und $0,8 \mu\text{m}$ (rot). Aber auch die anschließenden nicht sichtbaren Spektralbereiche werden „Licht“ genannt, ultraviolettes und infrarotes. Wellen werfen keine scharfen Schatten, sie werden von Hindernissen „gebeugt“.

7.1.1 Der strahlende Dipol

Die Bilderreihe der letzten Abbildung des vorigen Kapitels (Abb. 6.100) macht zwar plausibel, wieso ein gerader Draht als elektrischer Dipol schwingen kann und eine Eigenfrequenz besitzt, aber sie schematisiert die Feldverteilung doch zu sehr. Nicht nur die Ladungen des Dipols lösen ein elektrisches Feld aus, dasselbe tut auch das sich ändernde Magnetfeld um den Dipol herum. Resultat: Die elektrischen Feldlinien werden

in einer Weise vom Dipol weggedrängt, wie dies Abb. 7.1 etwas realistischer darstellt, und zwar durch Teilbilder in zeitlichen Abständen von jeweils $T/6$, dem Sechstel einer Schwingungsdauer. Beim ersten Null-

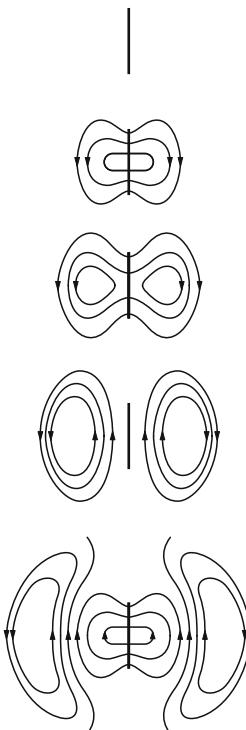


Abb. 7.1. Verlauf der elektrischen Feldlinien um einen schwingenden Dipol, schematisch, aber realistischer als in Abb. 6.100 gezeichnet (nach R.W. Pohl)

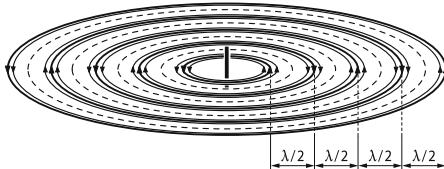


Abb. 7.2. Verlauf der magnetischen Feldlinien in der Symmetrieebene eines schwingenden Dipols, Momentaufnahme (nach R.W. Pohl)

durchgang (4. Teilbild) ist der Dipol selbst feldfrei; das Feld hat sich von ihm gelöst und bildet in der Zeichenebene ein System geschlossener Feldlinien, räumlich aber einen torusähnlichen Schlauch mit dem Dipol als Achse. Danach entstehen neue Feldlinien gleicher Gestalt aber mit entgegengesetztem Vorzeichen und drängen die alten nach außen ab. Diese nehmen zunächst nierenförmige Gestalt an, passen sich aber mit wachsendem Abstand immer mehr Kreisausschnitten an. Das zugehörige Magnetfeld läuft mit, in Form konzentrischer Kreise, die mit periodisch wechselndem Umlaufsinn gewissermaßen aus dem Dipol herausquellen. Abbildung 7.2 zeigt eine „Momentaufnahme“ für die Symmetrieebene des Dipols. In ihr sind die beiden Felder am stärksten, nach oben und unten werden sie schwächer und in der Längsrichtung des Dipols geschieht gar nichts mehr. Praktisch strahlt der Dipol in alle Richtungen, aber er strahlt nicht homogen.

Greift man ganz willkürlich eine einzige Ausbreitungsrichtung heraus, so kann man in räumlicher Darstellung die Stärken der beiden Felder, wieder als Momentaufnahme, graphisch aufzeichnen. Abbildung 7.3 zeigt das Ergebnis, nämlich ein elektrisches Wechselfeld parallel zur Dipolachse und ein magnetisches Wechselfeld senkrecht dazu. Beide schwingen synchron, sie haben ihre Maxima und ihre Nulldurchgänge zur gleichen Zeit am gleichen Ort (absolut exakt stimmt diese Feststellung nicht, aber die Abweichungen brauchen nur den Spezialisten zu interessieren). Maxima wie Nulldurchgänge laufen mit Lichtgeschwindigkeit vom Dipol weg, dabei nehmen beide Felder ihre

Energieinhalte mit: Der Dipol strahlt eine **elektromagnetische Welle** ab und muss die entsprechende Leistung liefern. Auch wenn er selbst keine Stromwärme entwickelte, kämen seine Schwingungen durch Strahlungsdämpfung rasch zur Ruhe, würden sie nicht durch einen passenden Wechselspannungsgenerator immer wieder aufgefrischt.

wichtig

Elektromagnetische Welle: ein elektrisches und ein magnetisches Wechselfeld schwingen synchron zueinander; sie stehen (im Wesentlichen) senkrecht aufeinander und senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung.

In jeder halben Schwingungsdauer kommt die Welle um eine ganze Dipollänge weiter. Dem entspricht die schon am Ende des letzten Kapitels genannte Beziehung $T = 2 \cdot l / c$ zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit c , der Dipollänge l und der Schwingungsdauer T , denn die allgemeine Beziehung

$$c = \lambda \cdot f = \lambda / T$$

gilt für elektromagnetische Wellen genauso wie für alle anderen.

wichtig

Für alle Wellen gilt:
Ausbreitungsgeschwindigkeit
= Wellenlänge · Frequenz.

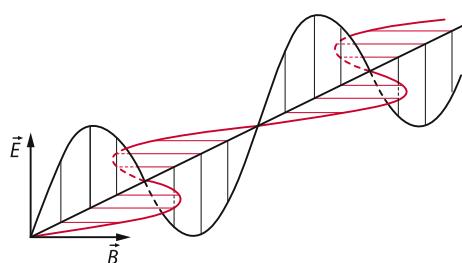


Abb. 7.3. Augenblicksdiagramm einer nach hinten laufenden elektromagnetischen Welle

Elektromagnetische Wellen entstehen, weil ein sich änderndes elektrisches Feld sich mit magnetischen Feldlinien umgibt und umgekehrt. Formelmäßig wird dieser Sachverhalt durch die beiden geschlossenen Linienintegrale des Kap. 6.12.6 beschrieben. Sie enthalten die beiden Naturkonstanten ϵ_0 und μ_0 . Verwunderlich wäre es nicht, wenn diese Größen die Ausbreitungsgeschwindigkeit bestimmten. Multipliziert man ihre Einheiten miteinander, so bekommt man

$$\frac{\text{Vs As}}{\text{Am Vm}} = \frac{s^2}{\text{m}^2}$$

also den Kehrwert des Quadrates der Einheit der Geschwindigkeit. Das legt die Vermutung nahe, für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum könne

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}$$

gelten. In einem Medium wären dann noch dessen Dielektrizitätszahl ϵ_r und Permeabilität μ_r in die Wurzel hineinzumultiplizieren. Selbstverständlich kann eine solche *Dimensionsanalyse* einen physikalischen Zusammenhang nicht nachweisen; sie kann aber Hinweise geben, wo es sich lohnen könnte, mit genauen Rechnungen einem möglichen Zusammenhang nachzuspüren.

7.1.2 Spektralbereiche

Der Gesichtssinn des Menschen reagiert nicht auf Licht allein. Wem so sehr mit der Faust aufs Auge geschlagen wird, dass er „Sterne sieht und die Funken stieben“, der sieht die Sterne und die Funken wirklich, aber sie sind die Folgen eines mechanischen Reizes und keines optischen. Man kann es auch weniger gewalttätig haben: Schon ein leichter Druck auf den ausgeruhten, von Licht abgeschirmten Augapfel löst im Gehirn das Signal „Licht“ aus, wie ein jeder leicht bei sich selbst nachprüfen kann.

Zum Gesichtssinn gehört nicht nur das Auge mit Hornhaut, Linse, Glaskörper und Netzhaut, sondern auch der Sehnerv mitsamt dem für das Sehen zuständigen beträchtlichen Teil des Großhirns. Alles zusammen vermittelt dem Menschen Eindrücke von einer bei ausreichendem Licht

bunten, immer aber räumlichen Welt, und das, obwohl die Netzhaut nur flächenhafte Bilder aufnehmen kann. Hier lässt sich der Gesichtssinn denn auch täuschen: Zumal in ebene Bilder interpretiert er virtuos räumliche Vorstellungen hinein, sofern die Perspektive auch nur einigermaßen stimmt – Maler und Photographen nutzen das aus. Der Gesichtssinn hat auch nur eine begrenzte Aufnahmegergeschwindigkeit: Bei einer Folgefrequenz von 25 Hz und mehr verschmelzen diskrete Bilder zu einem kontinuierlichen Eindruck – Film und Fernsehen nutzen dies aus. Auf jeden Fall aber liefert der Gesichtssinn dem Menschen weit vollkommenere Informationen über seine Umwelt als die vier anderen Sinne zusammen. Voraussetzung ist natürlich, dass der Sinneseindruck „Licht“ durch das physikalische Phänomen „Licht“ ausgelöst wird und nicht durch mechanische Reize oder gar durch Rauschgifte. Die beiden Bedeutungen des Wortes *Licht* müssen deshalb sorglich auseinander gehalten werden; sie sind zwar eng miteinander verknüpft, können aber unabhängig voneinander existieren. Licht im physikalischen Sinn war in der Welt, lange bevor es Augen gab.

Konstruiert ist das Auge des Menschen für den Nachweis elektromagnetischer Wellen, deren Wellenlängen um ein halbes Mikrometer herum liegen. Die für den Normalsichtigen damit verbundenen Farbeindrücke reichen von violettblau bei kurzer Wellenlänge (ca. 450 nm) über grün (ca. 520 nm) und gelb (ca. 570 nm) bis rot bei langer Wellenlänge (ca. 700 nm).

Die Welt ist gar nicht bunt, sie sieht nur so aus. Ohne Augen gäbe es keine Farben, sondern nur elektromagnetische Wellen unterschiedlicher Wellenlänge. Dass bei Nacht alle Katzen grau sind, liegt auch nicht an den Katzen, sondern an der Netzhaut. Von deren Sensoren sprechen bei schwachem Licht nur die *Stäbchen* an, die lediglich Grautöne vermelden, und noch nicht die für das Farbsehen zuständigen *Zapfen*. Von ihnen gibt es drei Gruppen, durch drei verschiedene Farbstoffe (*Sehpurpur*) für die langen, die mittleren und die kurzen Wellen des sichtbaren Spektrums sensibilisiert. Aus den relativen Sig-

nalstärken dieser drei Zäpfensorten konstruiert das Gehirn den Farbeindruck. Für den Fernsehbildschirm reicht es dehalb, das Bild aus nur drei Farben (Blau, Grün, Rot) aufzubauen.

Grob gemessen reicht der **sichtbare Spektralbereich** von etwa 400 nm bis etwa 800 nm. Das ist nicht viel, just eine Oktave im Sinne der Akustik. Tieraugen geht es da nicht besser, es lohnt nämlich nicht, auf der Erde einen größeren Empfindlichkeitsbereich zu entwickeln. Die Sonne strahlt zwar noch weit außerhalb dieses Bereiches Licht ab, aber es kommt auf der Erde nicht mehr an: Das kurzwellige **Ultraviolett** wird vor allem vom Ozon der hohen Atmosphäre abgefangen, während der Wasserdampf wesentliche Teile vom langwolligen **Infrarot** herausnimmt. Augen sehen in dem relativ schmalen „spektralen Fenster“, das von der irdischen Lufthülle durchgelassen wird (☞ Abb. 7.4).

Es ist üblich, nicht nur die Strahlung im sichtbaren Spektralbereich als *Licht* zu bezeichnen, sondern auch die angrenzenden Gebiete. Was dann weiter außen liegt, heißt auf der kurzweligen Seite *Strahlung* (Röntgen- und γ -Strahlung) und auf der anderen *Welle* (Millimeter-, Meter-, Kurz-, Mittel- und Langwelle im Radiobereich). Physikalisch handelt es sich dabei um immer die gleiche Erscheinung: um elektromagnetische Wellen, nur durch Frequenz und Wellenlänge voneinander unterschieden (☞ Abb. 7.5). Darum ist auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit im ganzen Spektrum prinzipiell dieselbe, die

Vakuum-Lichtgeschwindigkeit

$$c = 299.792.459 \text{ m/s.}$$

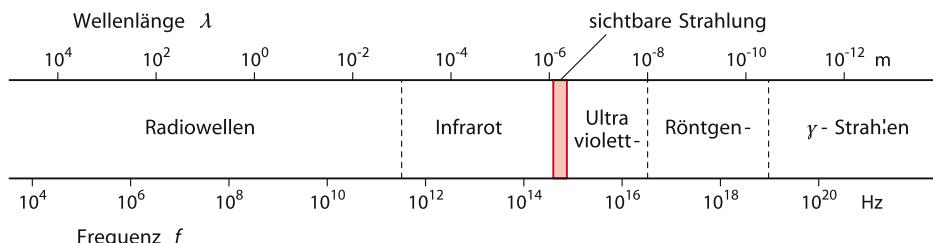


Abb. 7.5. Das Spektrum der elektromagnetischen Wellen

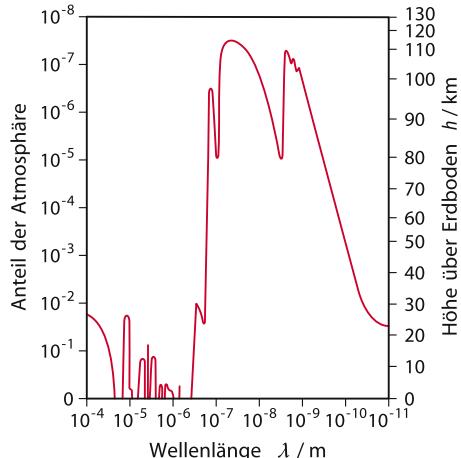


Abb. 7.4. Eindringen der Sonnenstrahlung von außen in die Erdatmosphäre. Angegeben ist der Anteil der Atmosphäre, bis zu dem 10% der einfallenden Strahlungsleistung noch vordringen (*linke Ordinate*); diese Angabe ist in der rechten Ordinate auf Höhe über dem Erdboden umgerechnet worden

Es ist erlaubt, sich stattdessen $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ oder auch 300.000 km/s zu merken.

wichtig
Lichtgeschwindigkeit (im
Vakuum) $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
(wichtige Naturkonstante).

7.3 Wellenausbreitung

Alle Wellen breiten sich nach den gleichen Gesetzen aus. Darum ist es durchaus erlaubt, auch die Ausbreitung des Lichts am Modell

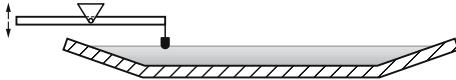


Abb. 7.6. Skizze einer Wellenwanne im Schnitt; ein Stift tippt periodisch in ein flaches Wasserbecken

der Wasserwellen zu studieren; die *Wellenwanne* (☞ Abb. 7.6) ist ein nützliches Hilfsmittel im Bereich der Optik. Sie reduziert zugleich die immer ein wenig unübersichtliche Wellenausbreitung im Raum auf die leichter überschaubaren Verhältnisse der Ebene.

Bei hinreichend großem Abstand von der Wellenquelle, vom *Wellenzentrum*, sind Wellen immer kugel- bzw. kreisförmig (☞ Abb. 7.7); wenn nichts im Wege steht, breiten sie sich gleichmäßig nach allen Richtungen aus. Geht man sehr weit weg, so erscheinen sie in einem hinreichend schmalen Bereich der Beobachtung als ebene Wellen mit gerader Front in der Wanne (☞ Abb. 7.8). Lässt man die Welle an einem Hindernis vorbeilaufen, so hängt das Resultat sehr von der Größe dieses Hindernisses ab. Ist es klein gegenüber der Wellenlänge, so wird es zu einem sekundären Wellenzentrum (☞ Abb. 7.9), ist es sehr groß, so entsteht hinter ihm ein *Schattenraum*, der, wenn man nicht allzu genau hinsieht, durch Geraden begrenzt wird, vom Wellenzentrum aus über die Kanten des Hindernisses hinweg gezeichnet (☞ Abb. 7.10). Sieht man aber genauer hin, so dringt die Welle doch etwas in den Schattenraum hinein. Das ist auch beim umgekehrten Fall eines breiten

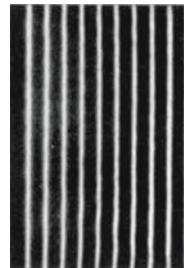


Abb. 7.8. „Ebene Wellen“ in einer Wellenwanne (nach R.W. Pohl)

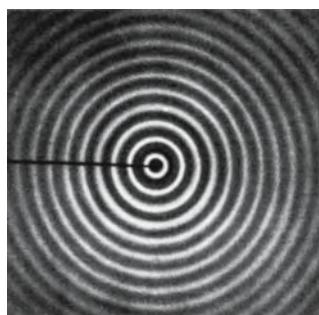


Abb. 7.7. „Kugelwellen“ in einer Wellenwanne (nach R.W. Pohl)

Spaltes so (☞ Abb. 7.12). Macht man einen solchen Spalt schmäler, so wird dieser Effekt immer stärker. Im Grenzfall, wenn die Spaltbreite klein ist verglichen mit der Wellenlänge, gibt es hinter dem Spalt gar keinen Schatten mehr und die Welle breitet sich als Kreiswelle überall hin aus (☞ Abb. 7.11). Auch das ganz kleine Hindernis von (☞ Abb. 7.9) warf ja keinen Schatten. Wellen können also „um die Ecke“ gehen. Diese Erscheinung nennt man **Beugung**. Sie ist umso ausgeprägter, je kleiner die Abmessungen der Hindernisse gegenüber der Wellenlänge sind. Für Schallwellen ist das aus dem Alltag geläufig. Man kann jemanden, der hinter einem Baum steht, durchaus etwas zurufen und er hört es, weil die Schallwellenlänge eher größer als der Baumdurchmesser ist und der Schall „um den Baum herum“ geht. Ist das Hindernis hingegen groß (ein Haus), dann wirft es einen Schatten und hinter dem Hindernis ist es wirklich dunkel

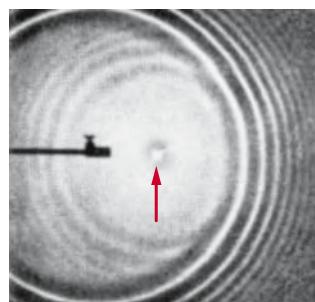


Abb. 7.9. Ein kleines Hindernis (Pfeil) wird zum Wellenzentrum (nach R.W. Pohl)

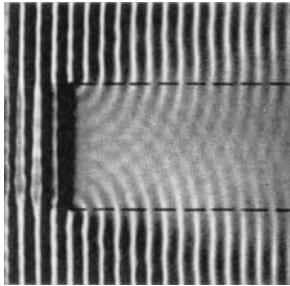


Abb. 7.10. Ein großes Hindernis wirft einen Schatten (nach R.W. Pohl)

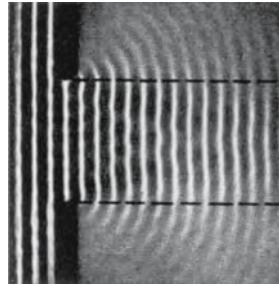


Abb. 7.12. Ein größeres Loch liefert ein begrenztes Wellenbündel (nach R.W. Pohl)

(beziehungsweise still). Ist die Lichtwellenlänge vernachlässigbar gegenüber allen Lineardimensionen des Experiments, so ist der Ausdruck **Lichtstrahl** mit scharfer Bündelbegrenzung gerechtfertigt.

Für Röntgenstrahlen gilt dies in höherem Maß als für sichtbares Licht, aber auch dessen Wellenlänge ist in der normalen Umgebung des Menschen verschwindend klein. Darum hat es auch so lange gedauert, bis man seine Wellennatur erkannte. Derjenige Teil der Optik, der sich um diese nicht kümmert, heißt **geometrische Optik**.

Wellen können sich, wie Schwingungen, bei der Überlagerung verstärken, schwächen und sogar auslöschen. Dies nennt man **Interferenz** (s. Kap. 7.4.2). Zusammen mit der Beugung führt Interferenz zu **Beugungsfiguren** (s. Kap. 7.4.5). Das Wort „Strahl“, das gerade Bündelbegrenzung, scharfe Schatten und gleichmäßige Ausleuchtung des schattenfreien Raumes einschließt, wird diesen

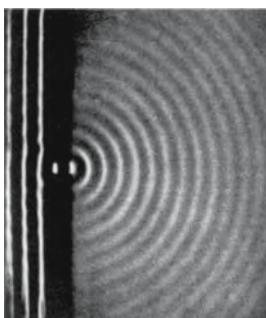


Abb. 7.11. Ein kleines Loch wird zum Wellenzentrum (nach R.W. Pohl)

Erscheinungen nicht mehr gerecht. Interferenz und Beugung machen sich umso deutlicher bemerkbar, je näher die Wellenlänge λ an die Abmessungen der „Geräte“ des Experiments herankommt: Die **Langwelle** des Deutschlandfunks ($\lambda \approx 1$ km) läuft über Berg und Tal und wirft keine Schatten, die **Ultrakurzwelle** der Fernsehsender ($\lambda \approx 3$ m) lässt sich zwar von Bäumen kaum stören, ist aber tief unten in den schmalen Tälern der Eifel nicht unmittelbar zu empfangen. Derartige Effekte behandelt die **Wellenoptik**: Als weiterführende Theorie schließt sie alle Aussagen der geometrischen Optik ein, eben in der Näherung vernachlässigbarer Wellenlänge – vernachlässigbar im Vergleich zu den Abmessungen der Objekte im Wellenfeld.

7.2

Geometrische Optik

Einleitung

Im Allgemeinen ist die Wellenlänge sichtbaren Lichtes vernachlässigbar klein. Dann kann man seine Ausbreitung auf dem Papier durch am Lineal gezogene Geraden beschreiben. Hindernisse werfen scharfe Schatten; Löcher blenden divergente Lichtbündel aus; matte Oberflächen streuen Licht nach allen Seiten und werden so zu Sekundärlichtquellen; blanke Oberflächen reflektieren regulär, nämlich nach dem Reflexionsgesetz. Ebene Spiegel erzeugen virtuelle Spiegelbilder, Hohlspiegel unter Umständen auch reelle. Größere Bedeutung in Natur und Technik hat die optische Bilderzeugung durch Brechung (Snellius-Brechungsgesetz). Grundsätzlich

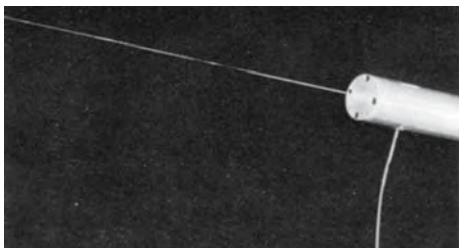


Abb. 7.13. Lichtbündel eines Helium-Neon-Lasers, durch Rauch deutlicher sichtbar gemacht

genügt hierzu eine einzige brechende Fläche. Die Technik bevorzugt die Abbildung durch Linsen, also durch zwei und mehr brechende Flächen; sie hat ihre optischen Instrumente zu hoher Perfektion entwickelt.

7.2.1 Lichtbündel

Als Carl Friedrich Gauß überprüfen wollte, ob der Satz von der Winkelsumme im Dreieck auch dann noch gilt, wenn dieses Dreieck vom Brocken im Harz, vom Hohen Hagen bei Göttingen und vom Großen Inselberg bei Eisenach aufgespannt wird, da maß er auf jedem der drei Gipfel den Winkel, den er zwischen den beiden anderen sah. Zusammengezählt ergaben sie in der Tat mit hoher Genauigkeit 180° . Gauß hat dabei stillschweigend vorausgesetzt, dass Lichtbündel als Seiten eines mathematischen Dreiecks fungieren können, sich also geradlinig im Raum ausbreiten.

Ein geometrisches Gebilde, das, von einem Punkt ausgehend, gerade durch den Raum läuft und nur in dieser einen Richtung ausgedehnt ist, heißt in der Mathematik *Strahl*. Physikalisch lässt sich ein solcher Strahl nicht realisieren, das *Lichtbündel* eines Lasers (s. Kap. 7.5.3) kommt ihm aber einiger-

maßen nahe (☞ Abb. 7.13). Es hat zwar einen durchaus nachweisbaren Durchmesser, aber der ist doch vergleichsweise klein. Mit wachsendem Laufweg wird er allerdings immer größer, denn das Lichtbündel auch des besten Lasers ist immer noch *divergent*, es hat einen nicht verschwindenden *Öffnungswinkel* ω , (näherungsweise) definiert als Quotient aus Bündeldurchmesser d und Abstand l von der als punktförmig angesehenen Lichtquelle (☞ Abb. 7.14). Dahinter steht eine gewisse Abstraktion, denn wirklich existierende Lichtquellen sind immer ausgedehnt und werfen von einem Hindernis neben dem eigentlichen *Kernschatten* einen *Halbschatten*, in den sie mit einem Teil ihrer strahlenden Oberfläche hineinleuchten (☞ Abb. 7.15).

wichtig

Öffnungswinkel eines Lichtbündels: $\omega = d/l$.

Der Mensch sieht Licht nur dann, wenn es in seine Augen fällt. Bündel, die quer zur Blickrichtung laufen, bleiben unbemerkt. Man kann sie sich deshalb nur dadurch sichtbar machen, dass man ihnen Fremdkörper wie Staub, Wasserdampf oder Tabakrauch in den Weg bringt: Sie streuen Licht aus dem Bündel hinaus und zum kleinen Teil in ein Auge oder in die Linse eines Fotoapparates hinein. Auch die handfesten Gegenstände der täglichen Umwelt werden, wenn man sie beleuchtet, zu unselbständigen *Sekundärlichtquellen*, die Licht aus dem Primärbündel seitlich hinauswerfen. In der Welt der frühen Menschen gab es im Wesentlichen nur eine *Primärlichtquelle*, die Sonne. Auch wenn sie nicht „scheint“, genügt das Streulicht der Wolken, um die Szene hinreichend zu erhellen. Selbst bei klarem Himmel reicht



Abb. 7.14. Bündelbegrenzungen

eines „schlanken“ Bündels. Hier gilt für in guter Näherung: Öffnungswinkel $\omega = \frac{\text{Bündeldurchmesser } d}{\text{Laufweg } l}$

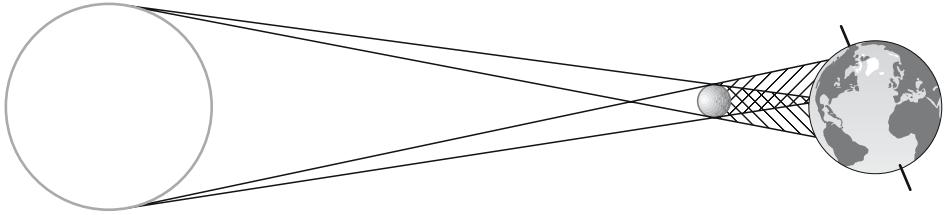


Abb. 7.15. Dort, wo der von der Sonne geworfene Kernschatten des Mondes die Erdoberfläche trifft, kann man eine totale Sonnenfinsternis beobachten. Im Bereich des Halbschattens deckt der Mond nur einen Teil der Sonnenscheibe ab (partielle Sonnenfinsternis)

das Streulicht, die anderen Primärlichtquellen des Kosmos, die Fixsterne, völlig zu überstrahlen. Man lasse sich hierdurch nicht irreleiten: Lichtbündel verschiedener Quellen durchsetzen sich gegenseitig, ohne sich (nennenswert) zu beeinflussen. Auch am Tage sind die Sterne „da“, aber das Auge nimmt ihr schwaches Licht nicht wahr, weil es von dem hellen zu sehr beansprucht wird.

wichtig

Eine Primärlichtquelle erzeugt Licht, eine Sekundärlichtquelle streut Licht.

Sekundärstrahler sind naturgemäß weitauß lichtschwächer als der primäre, der sie beleuchtet. Der Gesichtssinn ist zur Wahrnehmung von Sekundärstrahlern entwickelt worden, mit entsprechender Empfindlichkeit. Direktes Sonnenlicht blendet nicht nur, es kann die Netzhaut schädigen. Auch künstliche Primärstrahler wie Glühbirnen sollten durch Mattglas abgedeckt werden oder einen Raum indirekt beleuchten.

Aus den unzähligen, diffus in alle Richtungen durcheinander laufenden Sekundärlichtbündeln blendet ein Auge nur einen

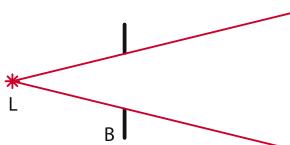


Abb. 7.16. Divergentes Lichtbündel, aus dem Licht der allseitig strahlenden Punktlichtquelle L von der Blende B herausgeblendet. Die Bündelbegrenzungen werden schon vor der Blende gezeichnet

verschwindend kleinen Bruchteil für sich selbst heraus. Es handelt sich um schlanke, divergente Bündel, mit von der Pupille bestimmten, kleinen Öffnungswinkeln. Die Ausgangspunkte dieser Bündel vermag das Hirn zu erkennen; es setzt aus ihnen ein räumliches Bild der Umwelt zusammen.

Wollte man bei einem konkreten, optischen Problem alle benutzten Lichtbündel auf Papier zeichnen, die Linienfülle würde unüberschaubar. Darum beschränkt man sich auf ganz wenige besonders wichtige Bündel und zeichnet von ihnen nur die Bündelbegrenzungen, wie sie durch Blenden festgelegt werden – und das nicht nur hinter, sondern auch vor der Blende, als wüsste das Bündel schon, was ihm noch widerfahren wird (☞ Abb. 7.16). Zuweilen wird auch diese Methode noch zu unübersichtlich; dann zeichnet man nur den *Zentralstrahl* längs der Bündelachse, der die Hauptrichtung des Bündels markiert. In jedem Fall stehen Lichtstrahlen, auf Papier gezeichnet, für Ausschnitte aus elektromagnetischen Kugelwellen bis hin zum Grenzfall des *Parallellichtbündels*, das mit dem Öffnungswinkel null eine (streng genommen nicht realisierbare) ebene Welle darstellt (☞ Abb. 7.17).

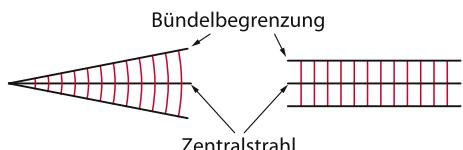


Abb. 7.17. Lichtstrahlen repräsentieren als Bündelbegrenzungen wie als Zentralstrahlen Ausschnitte aus elektromagnetischen Kugelwellen (Wellenfronten hier rot gezeichnet, „Momentaufnahme“). Grenzfall: Parallellichtbündel, ebene Welle

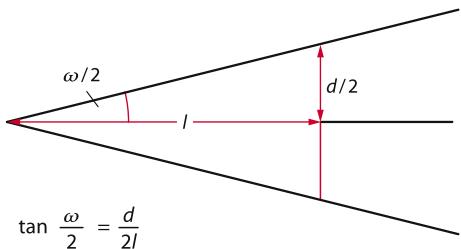


Abb. 7.18. Zur Herleitung der korrekten Formel für den Öffnungswinkel

Zumeist sind optisch genutzte Lichtbündel so schlank, dass man für ihre Öffnungswinkel $\omega = d/l$ schreiben darf. Die korrekte Formel lautet freilich

$$\tan(\omega/2) = d/(2l),$$

wie Abb. 7.18 zeigt. Zuweilen wird auch $\omega/2$ als Öffnungswinkel bezeichnet.

7.2.2 Spiegelung

Nur im Sonderfall einer matt getünchten Oberfläche streut ein Körper das Licht, das ihn trifft, völlig diffus nach allen Seiten. Im Allgemeinen gibt er dem Licht eine mehr oder weniger ausgeprägte Vorzugsrichtung mit, die von der Einfallsrichtung abhängt. Je ausgeprägter dies geschieht, desto blander und glänzender erscheint die Fläche. Idealisierter Grenzfall ist die reguläre **Reflexion** eines vollkommenen Spiegels: Das einfallende Licht wird vollständig zurückgeworfen und bleibt dabei so scharf ausgerichtet, wie es ankam. Einfallender und reflektierter Strahl liegen zusammen mit dem *Einfallslot*, der Flächennormalen am Auftreffpunkt, in

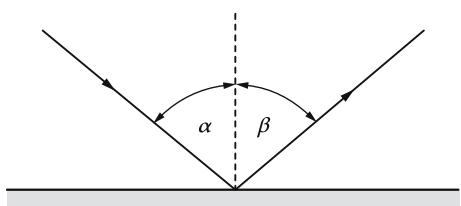


Abb. 7.19. Zum Reflexionsgesetz

einer Ebene; *Einfallsinkel* α und *Ausfallsinkel* β , zum Lot gemessen, sind gleich (Abb. 7.19). Dies ist die Aussage des **Reflexionsgesetzes**. Bei *senkrechter Inzidenz* ($\alpha = \beta = 0^\circ$) läuft ein Strahl in sich selbst zurück; in dem anderen Grenzfall der *streuenden Inzidenz* ($\alpha = \beta = 90^\circ$) wird er gar nicht abgelenkt.

Reflexionsgesetz:
Einfallsinkel = Ausfallsinkel.

wichtig

Setzt man zwei Spiegel im rechten Winkel zusammen, so erhält man einen *90°-Winkel Spiegel*, der schlanke Bündel parallel zu sich selbst zurückwirft, gleichgültig, aus welcher Richtung sie auftreffen, sofern dies nur in der Zeichenebene der Abb. 7.20 geschieht. Will man sich von dieser Einschränkung frei machen, muss man drei Spiegel zusammensetzen wie die Ecke einer Kiste. Nach diesem Prinzip arbeiten die Rückstrahler an Fahrzeugen und Fahrbahnmarkierungen („Katzenaugen“).

Bei einem ebenen Spiegel stehen alle Einfallsloge parallel. Ein divergent einfallendes Bündel behält deshalb nach der Reflexion seinen Öffnungswinkel bei: Zentralstrahl wie Randstrahlen folgen dem Reflexionsgesetz (Abb. 7.21). Das reflektierte Bündel scheint deshalb von einem Punkt herzukommen, der im gleichen Abstand hinter dem Spiegel liegt wie die wahre Lichtquelle vor ihm. Genau diesen Punkt meldet das

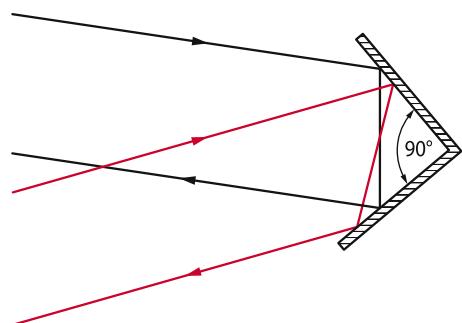


Abb. 7.20. Ein 90°-Winkel Spiegel wirft in der Zeichenebene anlaufendes Licht parallel zu sich selbst zurück

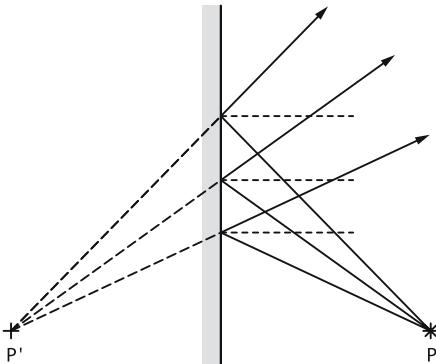


Abb. 7.21. Reflexion am ebenen Spiegel. Ein im reflektierten Bündel platziertes Auge meldet das virtuelle Spiegelbild P' der Lichtquelle P als Ausgangspunkt des Bündels an das Gehirn

Auge seinem Hirn als Ausgangspunkt des reflektierten Bündels: Ein Mensch sieht ein **virtuelles Bild** an einer Stelle, an der sich tatsächlich etwas ganz anderes befindet.

Spiegelbilder sind seitenverkehrt. Dies ist nicht eine Eigentümlichkeit der Optik, sondern der Richtungsbegriffe des Menschen: Wer von Ost nach West in einen Spiegel schaut und seine rechte Hand hebt, hebt seine nördliche Hand; sein Spiegelbild hebt ebenfalls die nördliche Hand, aber weil es von West nach Ost schaut, ist es die linke. Zwei Menschen, die sich gegenüberstehen, sind gleicher Meinung bezüglich oben und unten, aber entgegengesetzter bezüglich rechts und links.

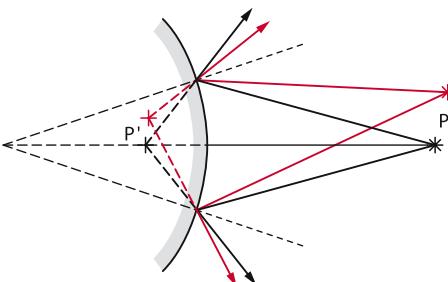


Abb. 7.22. Ein gewölbter Spiegel vergrößert den Öffnungswinkel des reflektierten Bündels gegenüber dem des einfallenden. Ein Auge meldet ein verkleinertes, etwas an den Spiegel herangerücktes, virtuelles Spiegelbild P' der Lichtquelle P

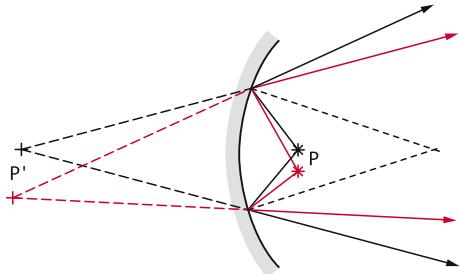


Abb. 7.23. Hohlspiegel bei kleinem Objektabstand. Der Öffnungswinkel wird verkleinert, bleibt aber positiv: virtuelles, vergrößertes und vom Spiegel weggerücktes Bild P' von der Lichtquelle P

Ist ein Spiegel vorgewölbt, so stehen die Einfallsröhre nicht mehr parallel nebeneinander; der Öffnungswinkel des reflektierten Bündels ist größer als der des einfallenden, und das virtuelle Bild erscheint verkleinert und an den Spiegel herangerückt (☞ Abb. 7.22). Verkehrsspiegel an unübersichtlichen Einfahrten nutzen das aus; sie liefern ein vergleichsweise großes Bildfeld, erschweren aber die Abschätzung von Entfernungen.

Anders ist es beim Hohlspiegel: Hier wird der Öffnungswinkel verkleinert. Das kann zu zwei verschiedenen Konsequenzen führen. Liegt die Lichtquelle hinreichend nahe am Spiegel, so bleibt das reflektierte Bündel divergent, und der Betrachter sieht wieder ein virtuelles Bild (☞ Abb. 7.23), diesmal vergrößert und vom Spiegel abgerückt: Prinzip des Rasierspiegels. Bei hinreichend großem Abstand der Lichtquelle ist der Öffnungswinkel des einfallenden Bündels aber so klein, dass der des reflektierten negativ wird. Das gespiegelte Bündel bleibt nicht divergent, es läuft konvergent auf einen Punkt zu und erst hinter ihm divergent weiter (☞ Abb. 7.24). Von nun ab verhält es sich, als sei es im Konvergenzpunkt entstanden; ein Auge meldet diesen Punkt als Ausgangspunkt des reflektierten Bündels, der Mensch sieht ein **reelles Bild** an einer Stelle, an dem sich die Lichtquelle zwar nicht befindet, das Licht aber immerhin gewesen ist. Es scheint nicht, wie beim virtuellen Bild, nur von dort zu kommen, es kommt wirklich von dort.

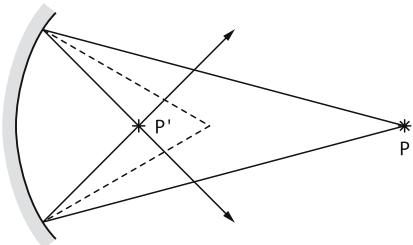


Abb. 7.24. Hohlspiegel bei großem Objektabstand: Der Öffnungswinkel wird bis ins Negative verkleinert. Das reflektierte Bündel läuft konvergent auf den reellen Bildpunkt P' der Lichtquelle P zu und erst hinter P' wieder divergent auseinander

wichtig

Ein virtuelles Bild wird von divergenten Lichtbündeln erzeugt und lässt sich nur durch abbildende Systeme wahrnehmen (Auge, Kamera).

Ein reelles Bild wird von konvergenten Lichtbündeln erzeugt und lässt sich auf einem Bildschirm auffangen.

Die Erzeugung reeller Bilder realer Objekte heißt in der Optik *Abbildung*. Vornehmlich die Teleskope der Astronomen benutzen hierfür tatsächlich Hohlspiegel; anderswo in Physik und Technik bevorzugt man die Abbildung durch Linsen. Auch die Natur hat sich bei der Konstruktion der Augen höherer Tiere für dieses Verfahren entschieden. Wer die Abbildung durch Linsen beherrscht (sie wird ab Kap. 7.2.6 ausführlich besprochen), kann seine Kenntnisse leicht auf die Abbildung durch Hohlspiegel übertragen. Dies braucht hier also nicht näher behandelt zu werden.

Frage: In Abbildung 7.24 ist in Punkt P eine Lichtquelle und in Punkt P' ihr reelles Bild. Setzen wir nun die Lichtquelle in den Punkt P' . Gibt es dann auch ein reelles Bild? Und wenn ja, wo?

Antwort: Bei der Reflexion ist Einfallswinkel gleich Ausfallwinkel. Der Vorgang ist vollkommen symmetrisch und läuft genau umgekehrt ab, wenn man die Richtung des Lichtstrahl umkehrt. Deshalb ergibt

sich ein reelles Bild genau im Punkt P , wo die Lichtquelle vorher war.

7.2.3 Brechung

Ein guter Metallspiegel reflektiert fast vollständig; sein *Reflexionsvermögen*

$$R = \frac{\text{reflektierte Strahlungsleistung}}{\text{einfallende Strahlungsleistung}}$$

liegt kaum 1 % unter 1. Immerhin, es liegt unter 1, und darum gibt es eine Differenz zwischen den beiden Strahlungsleistungen, die in das Metall eindringen muss; dort kommt sie allerdings nicht weit, weil sie schon auf weniger als einer Wellenlänge durch Absorption stecken bleibt. Man kann aber elektrisch leitende Metallschichten auf Glasplatten aufbringen, die so dünn sind, dass sie durchaus noch Licht hindurchlassen. Gold sieht dann grün aus, Silber blau.

Gläser reflektieren weit schlechter und absorbieren eingedrungenes Licht weit weniger. Eine gut geputzte, d.h. streuteilchenfreie Glasscheibe stört den Blick so wenig, dass manche Geschäftshäuser auf ihre Glastüren Sichtstreifen kleben, damit ihre Kunden sie überhaupt bemerken.

In Glas läuft Licht langsamer als im Vakuum; für jedes andere lichtdurchlässige Medi-

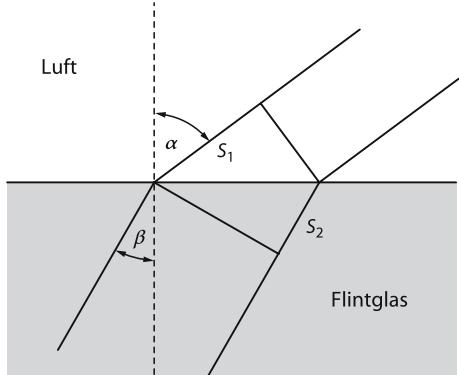


Abb. 7.25. Zur Herleitung des Brechungsgesetzes, Einzelheiten im Text

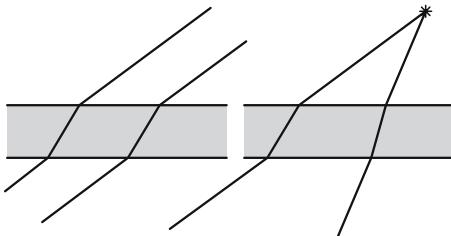


Abb. 7.26. Beim Durchgang durch eine planparallele Glasplatte werden parallele wie divergente Lichtbündel lediglich parallelversetzt

um gilt das auch, sogar für die Luft, wenn man genau genug misst. Infolgedessen durchsetzt Licht eine Glasplatte nur bei senkrechter Inzidenz ohne Richtungsänderung; bei schrägem Einfall wird es *gebrochen*. Fällt, wie in Abb. 7.25 gezeichnet, ein Parallellichtbündel von oben rechts, aus dem Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit c kommend, unter dem Einfallswinkel α auf die ebene Oberfläche eines *brechenden Mediums*, so kommt zunächst einmal der untere Randstrahl ein klein wenig früher an als der obere, um die Zeitspanne

$$\Delta t = s_1/c$$

nämlich. Im Medium herrscht die Lichtgeschwindigkeit $v < c$; das Licht kann in Δt deshalb nur die Strecke

$$s_2 = v \cdot \Delta t = s_1 \cdot v/c$$

durchlaufen und muss darum, will es Parallelbündel bleiben, seine Richtung ändern. Den Ausfallwinkel β liefern die beiden aus Bündelbegrenzung und Wellenfront gebildeten Dreiecke der Abb. 7.25, und zwar durch die Gleichung

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{c}{v} = n;$$

der Quotient c/v wird *Brechzahl* n oder auch *Brechungsindex* genannt. Gebrochen wird Licht nicht nur beim Übertritt vom Vakuum in ein brechendes Medium, sondern auch bei Wechsel zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Brechzahlen n_1 und n_2 .

Darum gibt man dem *Brechungsgesetz* besser die vollständige Form

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

wichtig

Brechzahl

$$n = \frac{\text{Lichtgeschwindigkeit } c \text{ im Vakuum}}{\text{Lichtgeschwindigkeit } v \text{ im Medium}} > 1$$

$$\text{Brechungsgesetz: } \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Tritt Licht vom optisch „dünneren“ Medium (dem mit der kleineren Brechzahl) in ein „dichteres“ über, so wird es *zum Lot hin* gebrochen, andernfalls *vom Lot weg*. Beim Durchgang durch eine planparallele Glasplatte heben sich beide Brechungen gegenseitig auf; ein Lichtbündel wird lediglich parallelversetzt (Abb. 7.26). Den Blick durchs Fenster stört das nicht.

Anderes gilt bei einem Teich. Hier ist das brechende Medium Wasser dick, und die Sekundärlichtquelle, etwa die Rückenflosse eines Goldfischs, befindet sich mitten darin. Das divergente Lichtbündel kommt nicht so geraden Weges beim Auge an, wie der Gesichtssinn vermutet; darum wird die Flosse an einer anderen Stelle „gesehen“ als sie sich befindet, und der Rest des Fisches auch. Das führt zu markanten Verzerrungen, vor allem bei schräger Blickrichtung (Abb. 7.27).

Mehr als streifende Inzidenz ist nicht möglich: Nach ihrer Definition können Einfalls- und Ausfallwinkel 90° , kann ein Sinus 1 nicht überschreiten. Demzufolge erlaubt das Brechungsgesetz beim Übertritt aus einem dünnen in ein dichteres Medium keinen Austrittswinkel β , der größer wäre als durch die Ungleichung

$$\sin \beta \leq n_1/n_2 < 1$$

vorgegeben. Im dichteren Medium gibt es demnach einen Winkelbereich, den Licht

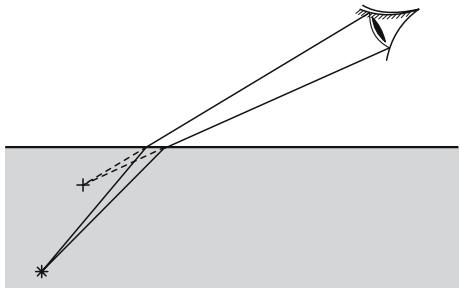


Abb. 7.27. Das vom Auge ausgeblendete Bündel einer Lichtquelle, die sich in einem brechenden Medium befindet (Goldfisch im Teich), scheint von einer Stelle zu kommen, an der sie sich nicht befindet; „gesehen“ wird der Goldfisch senkrecht über seiner wahren Position, denn Entfernung registriert der Gesichtssinn nicht über den Öffnungswinkel des Lichtbündels (d.h. über die „Akkommodation“ des Auges, s. Kap. 7.2.9), sondern durch den Konvergenzwinkel der Augen (s. Kap. 7.2.11)

von außen nicht erreichen kann. Er ist in **Abb. 7.28** dunkler gerastert.

Was geschieht mit Licht, das, aus diesem Bereich stammend, von der Seite des dichteren Mediums aus die Grenzfläche anläuft und heraus möchte? Gezeichnete **Strahlen-gänge** sagen nichts über die Marschrichtung des Lichtes aus: *Lichtwege sind umkehrbar*. Daraus folgt notwendigerweise: Kann Licht aus dem dünnern Medium *in* einen bestimmten Bereich des dichteren nicht hinein, so kann umgekehrt Licht *aus* diesem Bereich das dichtere Medium nicht verlassen – es verbleibt unter *Totalreflexion* auf der dichteren Seite der Grenzfläche. Das Reflexionsvermögen lässt sich hier von 1 kaum noch unterscheiden, allenfalls wird es ein wenig durch möglicherweise vorhandene Streuteilchen und Absorptionsschichten an der Grenzfläche beeinträchtigt. Der Winkel

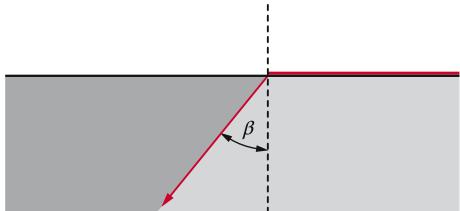


Abb. 7.28. Zum Grenzwinkel der Totalreflexion, Einzelheiten im Text

β der **Abb. 7.28** heißt **Grenzwinkel der Totalreflexion**. Man kann ihn zur Bestimmung von Brechzahlen verwenden.

wichtig

Totalreflexion: Licht kann optisch dichteres Medium nicht verlassen, wenn der Grenzwinkel der Totalreflexion β_{grenz} überschritten wird:
 $\sin \beta_{\text{grenz}} = 1/n$
 (bei Übertritt in Vakuum oder Luft).

In der Medizin wird die Totalreflexion beim sog. **Lichtleiter** angewendet, um Körperhöhlen, wie etwa den Magen, für photographische Zwecke auszuleuchten. Man nehme ein Bündel feiner Glasfäden, der einzelne vielleicht 30 µm im Durchmesser; er lässt sich dann leicht um den Finger wickeln, ohne zu brechen. Gibt man durch seine Stirnfläche Licht in ihn hinein, so kann es nur durch die Stirnfläche am anderen Ende wieder heraus: Auf Seitenflächen trifft es auch in der Biegung immer nur mit Winkeln jenseits des Grenzwinkels der Totalreflexion auf (**Abb. 7.29**). Zwischen zwei Reflexionen kommt das Licht nicht weit; ehe es das andere Ende eines Dezimeter langen Glasfadens erreicht, hat es einige hundert Spiegelungen hinter sich gebracht. Läge das Reflexionsvermögen auch nur um ein Promille unter der 1, käme kaum noch Licht an. Legt man ein Bündel dünner Glasfäden sorgfältig parallel ausgerichtet nebeneinander, so kann man mit ihnen auch gewissermaßen „Punktweise“ Bilder übertragen (*Faseroptik*). Auch in der Nachrichtentechnik setzen sich Lichtleiter zur Datenübertragung immer mehr durch.

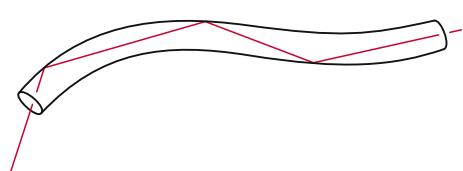


Abb. 7.29. Lichtleiter, schematisch. Das durch eine Stirnfläche eingedrungene Licht kann wegen der Totalreflexion erst an deren anderen Stirnfläche wieder hinaus

Rechenbeispiel 7.1: Girls best friend

Die Lichtgeschwindigkeit in Diamant beträgt $1,24 \cdot 10^8$ m/s. Was heißt das für den Brechungsindex?

Lösung:

$$n = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,24 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 2,42.$$

Im Vergleich zu Glas ($n \approx 1,5$) ist das ein sehr hoher Brechungsindex. Es gibt kaum ein durchsichtiges Material mit einem höheren. Der Brechungsindex bestimmt auch das Reflexionsvermögen durchsichtiger Stoffe. Bei senkrechtem Lichteinfall reflektiert Diamant 17% des Lichtes, Glas nur 4%. Das macht den ganzen Charme des Diamanten aus: er glitzert so schön.

Rechenbeispiel 7.2: Mit den Augen eines Fisches

Wasser hat den Brechungsindex $n = 1,33$. Wie groß ist der Grenzwinkel der Totalreflexion? Was sieht man, wenn man von unter Wasser nach oben auf eine völlig glatte Wasserfläche schaut?

Lösung:

$$\beta_{\text{grenz}} = \arcsin \frac{1}{1,33} = 49^\circ.$$

Die Welt oberhalb des Wasserspiegels ist auf ein kreisrundes Sichtfeld mit einem Blickwinkel von 49° zur Senkrechten komprimiert. Jenseits von 49° sieht man Reflexionen vom Boden des Sees.

7.2.4 Dispersion

Brechzahlen sind von Frequenz und Wellenlänge abhängig; meist fallen sie mit wachsendem λ ab. Man bezeichnet diesen Effekt als **Dispersion**. Er ist nicht groß, wie die Ordinate der Abb. 7.30 zeigt. Trotzdem lässt er sich mit einem *Prisma* leicht demonst-

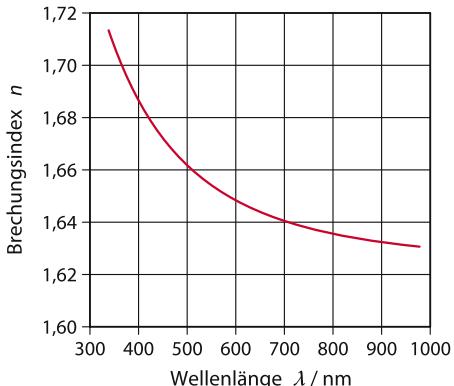


Abb. 7.30. Dispersionskurve von Flintglas

rieren. Abbildung 7.31 zeigt schematisch ein Parallellichtbündel, das ein 60° -Prisma symmetrisch durchsetzt: Brechung zum Lot beim Eintritt, hier ein Abknicken nach rechts bedeutend; Brechung beim Austritt vom Lot weg, wieder ein Abknicken nach rechts bedeutend, denn die beiden Lote sind ja um den Prismenwinkel γ gegeneinander gekippt.

wichtig

Dispersion:
Abhängigkeit der Brechzahl von der
Wellenlänge, d.h. $n = n(\lambda)$.

Es leuchtet ein, dass der Ablenkwinkel δ nicht nur vom Einfallswinkel α und dem Prismenwinkel γ abhängt, sondern auch von der Brechzahl n und damit von deren Dispersion $n(\lambda)$. Abbildung 7.31 kann deshalb nur nach einem Laserexperiment gezeichnet worden sein: Laserlicht ist mono-

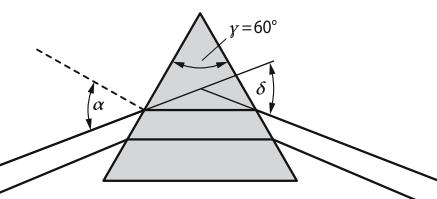


Abb. 7.31. Ein Parallellichtbündel durchsetzt symmetrisch ein 60° -Glasprisma; Einfallswinkel α , Ablenkwinkel δ

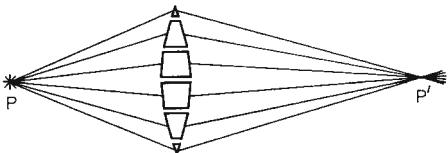


Abb. 7.32. Ein Prismenstapel zieht Parallellichtbündel, deren Zentralstrahlen von einem Punkt P stammen, in einem Punkt P' zusammen – sofern die brechenden Winkel richtig gewählt werden

chromatisch, es enthält praktisch nur Licht einer Wellenlänge, sodass sich die Dispersion nicht auswirkt. Lässt man aber ein schmales Bündel Sonnenlicht auf das Prisma fallen, so wird das ursprünglich „weiße“ Licht in alle Farben des Regenbogens aufgespalten. Vom Gesichtssinn als weiß empfundenes Licht ist normalerweise ein homogenes Gemisch aus allen Wellenlängen des sichtbaren Spektralbereiches, wie es etwa von Wolken als Sekundärstrahlern abgegeben wird. Im blauen Himmel überwiegen die kürzeren, im Abendrot die größeren Wellenlängen. Das Prisma kann eine Wellenlängen- oder auch Frequenzgemisch *spektral zerlegen*, in sein *Spektrum* zerlegen.

wichtig

Spektrale Zerlegung: Aufteilung eines Wellenlängengemisches in einzelne Wellenlängen.

7.2.5 Linsen

Von der Seite gesehen muss ein optisches Prisma nicht unbedingt die Form eines Dreiecks haben. Für das in **Abb. 7.31** gezeichnete Bündel hat die Spitze des Prismas keine Bedeutung, sie kann gekappt werden. Wichtig ist nur der *brechende Winkel* γ ; mit ihm wächst der Ablenkwinkel δ .

Zumindest im Gedankenversuch kann man sich einen Stapel aufeinandergesetzter Prismen nach Art der **Abb. 7.32** vorstellen. Ihre brechenden Winkel sollen so gewählt sein, dass sie die (gezeichneten) Zentral-

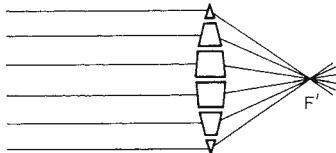


Abb. 7.33. Parallel anlaufende Bündel werden nach F' gesammelt

strahlen von Parallellichtbündeln, die alle vom Punkt P ausgehen, in einen Punkt P' hinein sammeln. Auch parallel ankommende Bündel würden sie sammeln, aber auf kürzeren Abstand, also in den Punkt F' der **Abb. 7.33**. Mit schmaleren Prismen ließe sich eine größere Anzahl von Bündeln erfassen; im Grenzfall wird dann die Oberfläche des Glaskörpers nicht mehr von Facetten gebildet, sondern von zwei Zylindermänteln mit horizontaler Achse. Es ändert sich nichts Wesentliches, wenn man den einen zur Ebene entarten lässt: eine derartige *Zylinderlinse* zieht ein anlaufendes Parallellichtbündel zu einem horizontalen Strich zusammen (**Abb. 7.34**). Setzt man dicht hinter die Linse eine zweite mit vertikaler Zylinderachse, so wird das Bündel zu einem Punkt zusammengezogen (**Abb. 7.35**). Dieses Resultat kann man auch in einem Schritt haben, wenn man den Glaskörper durch zwei Kugelflächen begrenzt; er bildet dann eine *sphärische Linse*, und zwar eine *bikonvexe Sammellinse*. Wieder ändert sich nichts Wesentliches, wenn die eine Fläche zur Ebene entartet (*Plankonvexlinse*). Nicht die äußere Form ist das Entscheidende an einer Linse, sondern ihre *Brennweite*.

Als Brennweite f bezeichnet man den Abstand der Brennebene von der Linse. In der Brennebene liegen die Konvergenzpunkte aller Bündel, die als Parallelbündel unter verschiedenen Richtungen an der anderen

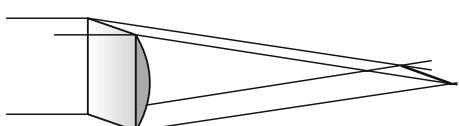


Abb. 7.34 Eine Zylinderlinse liefert einen Bildstrich

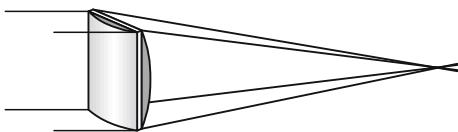


Abb. 7.35 Zwei Zylinderlinsen mit gleichen Brennweiten und zueinander senkrechten Zylinderachsen bilden ab wie eine sphärische Linse

Seite der Linse anlaufen (☞ Abb. 7.36), in der Brennebene liegen also auch die reellen Bilder, welche die Linse von weit entfernten Objekten entwirft. Die Lage der Bildpunkte kann man leicht ermitteln: im Zentrum der Linse stehen sich deren Oberflächen parallel gegenüber, die dort durchlaufenden *Zentralstrahlen* werden ohne Richtungsänderung durchgelassen (die Parallelversetzung darf man, bei dünnen Linsen zumindest, vernachlässigen).

Grundsätzlich kann eine sphärische Linse in ihrer Mitte dünner sein als am Rand. Einfallende Parallellichtbündel werden dann nicht gesammelt, sondern zu divergenten Bündeln aufgeweitet (☞ Abb. 7.37); sie scheinen von Punkten zu kommen, die auf einer Ebene vor der Linse liegen. Es ist deshalb sinnvoll, einer solchen *konkaven* oder *Zerstreuungslinse* eine negative Brennweite zuzuordnen.

„Starke“ Linsen haben kurze Brennweite, werden also durch eine Kenngröße mit kleiner Maßzahl charakterisiert. Wem das missfällt, der bevorzugt zur Kennzeichnung die *Brechkraft*, sie ist als Kehrwert der Brennweite definiert. Ihre Einheit heißt *Dioptrie* (dpt), sie entspricht dem Kehrwert eines Meters:

$$1 \text{ dpt} = 1 \text{ m}^{-1}$$

Jeder, der eine Brille trägt, weiß, dass Augenoptiker immer mit Dioptrien rechnen. Das liegt vor allem daran, dass sich die Brechkräfte zweier dicht hintereinandergesetzter Linsen (wie Auge und Brille) näherungsweise addieren.

Eine Sammellinse bildet Parallellichtbündel in eine einzige Ebene ab, sie liegt im Abstand der Brennweite. Strenggenommen

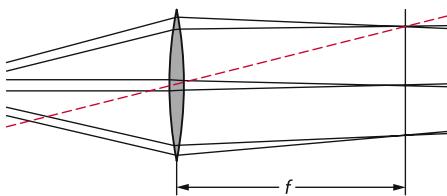


Abb. 7.36. Parallellichtbündel werden von der Linse auf Punkte zusammengezogen, deren Lage durch den zugehörigen Zentralstrahl vorgeben ist; dieser muss nicht vom Licht des Bündels realisiert werden (rot: Zentralstrahl des oberen Bündels)

ist dieser Satz keine Feststellung, sondern ein Postulat, das keine existierende Linse exakt zu erfüllen vermag. Man sagt deshalb, sie habe *Linsenfehler*. Am leichtesten einzusehen ist der Farbfehler (*chromatische Aberration*), eine Folge der Dispersion des Linsenmaterials: rotes Licht bekommt eine größere Brennweite als blaues. Besonders bei großen Linsen mit kleiner Brennweite stört der Öffnungsfehler (*sphärische Aberration*): randnahe Bündel haben eine etwas kleinere Brennweite als zentrumsnahe. Weiteren Ärger bereitet der *Astigmatismus*: wer schräg auf eine Linse schaut, sieht sie perspektivisch verkürzt und schätzt darum die Krümmung ihrer Oberfläche in der einen Richtung höher ein als in der anderen. Die Folge: ein schräg einfallendes Parallellichtbündel wird gar nicht in einem Punkt zusammengezogen, sondern in zwei zueinander senkrechte Striche mit verschiedenen Entfernungen von der Linse. Dies gilt erst recht (und dann auch für ein achsen-parallel einfallendes Bündel), wenn zumindest

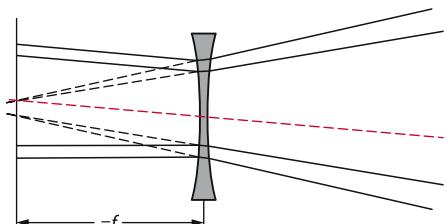


Abb. 7.37. Eine Zerstreuungslinse weitet Parallellichtbündel zu divergenten Bündeln auf; sie scheinen von virtuellen Bildpunkten auf der bildseitigen Brennebene vor der Linse zu stammen: negative Brennweite. Der Zentralstrahl des oberen Bündels ist rot gezeichnet

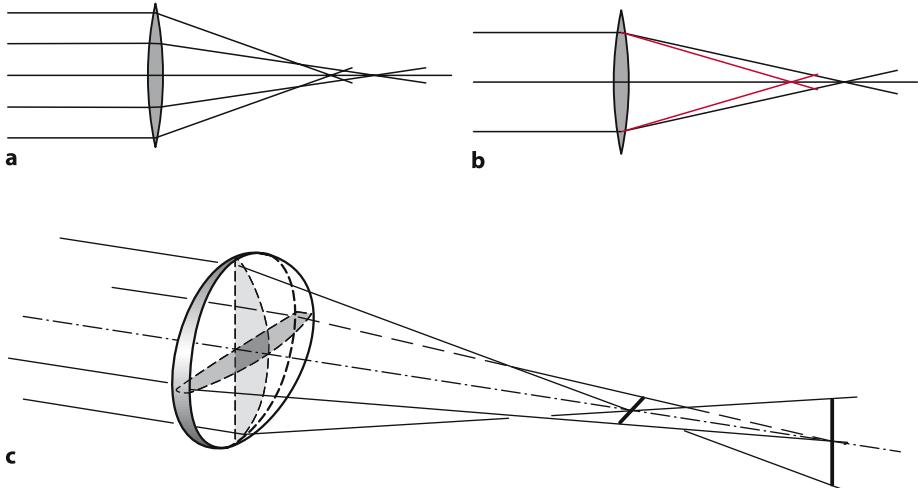


Abb. 7.38. (a) Öffnungsfehler und (b) Farbfehler, Einzelheiten im Text. (c) Eine astigmatische Linse („sphärisch“ mit Zylinderanteil) gibt zwei zueinander senkrechte Bildstriche.

eine Oberfläche der Linse tatsächlich in der einen Richtung stärker gekrümmt ist als in der anderen dazu senkrechten. Die Linse ist dann keine sphärische Linse mehr, sondern hat einen Zylinderanteil. In dieser Weise entsteht der Astigmatismus des Auges, eine Fehlsichtigkeit, die durch ein Brillenglas mit entsprechendem Zylinderanteil korrigiert werden kann. Schließlich liegen die Bildpunkte eines ebenen Gegenstandes nicht notwendigerweise selbst in einer Ebene – man spricht dann von Bildfeldwölbung („Fischaugeneffekt“). Abb. 7.38 deutet die wichtigsten Linsenfehler schematisch an.

Linsenfehler lassen sich *korrigieren*, durch Kompensation nämlich. Mehrere Linsen, aus verschiedenen Glassorten geschliffen und geschickt zusammengesetzt, können ihre Fehler gegenseitig weitgehend aufheben und insgesamt trotzdem noch wie eine abbildende Linse wirken. Speziell gegen die sphärische Aberration und Bildfeldwölbung helfen auch asphärische Linsen, also solche mit zum Beispiel parabolisch gekrümmten Oberflächen. Ihre Herstellung mit computergesteuerten Maschinen ist recht teuer. Die Güte derartiger *Objektive* bestimmen vor allem Qualität und Preis von Kameras, Fernrohren und Mikroskopen.

7.2.6 Abbildung durch Linsen

wichtig

Einer hinreichend dünnen Linse kann man zuverlässig die Ebene zuordnen, von der aus die Abstände zu Gegenstand und Bild gemessen werden müssen; sie heißt **Hauptebene**. Senkrecht zu ihr durch die Linsenmitte läuft die **optische Achse**. Ein achsenparallel einfallendes Parallellichtbündel wird von der Linse in den Brennpunkt F' zusammengezogen, er liegt auf der Achse im Abstand der Brennweite f von der Hauptebene (Abb. 7.39).

Der letzte Satz enthält im Grunde alles, was man über die Abbildung durch (fehlerfreie) Linsen wissen muss; den Rest kann man sich leicht überlegen.

Erstens: Linsen wirken symmetrisch – unmittelbar einleuchtend bei einer bikonvexen Linse – d.h. die Brennweiten auf beiden Seiten der Hauptebene sind gleich.

Zweitens: Lichtwege sind umkehrbar – d.h. das divergente Lichtbündel einer Quelle im Brennpunkt verlässt die Linse als achsenparalleles Parallelbündel.

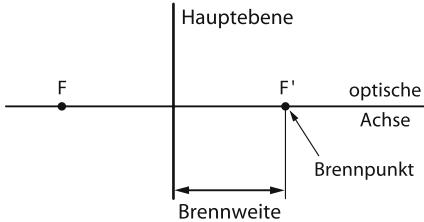


Abb. 7.39. Die wesentlichen Elemente einer dünnen Linse

Drittens: Zentralstrahlen, d.h. Strahlen durch den Schnittpunkt von Achse und Hauptebene werden auch dann nicht gebrochen, wenn sie schräg einfallen. Damit lässt sich der für die Bildkonstruktion wichtige Tatbestand auch folgendermaßen formulieren:

wichtig

Jeder **achsenparallele Strahl** wird an der Hauptebene zum **Brennstrahl** und umgekehrt; jeder **Zentralstrahl** läuft geradeaus weiter.

Abb. 7.40 illustriert dies.

Nun weiß eine Linse nicht, ob ein achsenparallel bei ihr ankommender Strahl (etwa der schwarz gezeichnete in Abb. 7.40) zu einem Parallellichtbündel gehört und damit einer sehr fernen Lichtquelle entstammt, oder ob er Teil eines divergenten Bündels ist, das etwa von einer Lichtquelle im Punkte P ausgehen könnte; in jedem Fall knickt der Strahl an der Hauptebene zum Brennstrahl

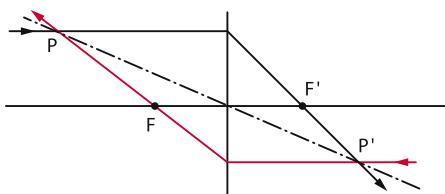


Abb. 7.40. Der schwarz gezeichnete, von links achsenparallel einlaufende Strahl wird rechts von der Hauptebene zum Brennstrahl; analoges gilt für den rot gezeichneten, von rechts anlaufenden Strahl. Der strichpunktierte Zentralstrahl wird nicht abgeknickt. Man kann die Zeichnung auch als Konstruktion der Abbildung des Gegenstandspunktes P in den Bildpunkt P' auffassen

ab. Zum divergenten Bündel des Punktes P gehört nun aber auch der blau gezeichnete Strahl, wenn auch in Gegenrichtung durchlaufen. Er ist links der Hauptebene Brennstrahl, also rechts achsenparallel. Er trifft den schwarzen im Punkte P' – und dies gilt für alle Strahlen des divergenten Bündels aus P, der Zentralstrahl zeigt es unmittelbar: die Linse bildet P nach P' ab, und weil Lichtwege umkehrbar sind, auch P' nach P. Nach diesem Schema lässt sich zu jedem Punkt eines Gegenstandes der zugehörige Bildpunkt konstruieren. Da grundsätzlich drei Strahlen für die Konstruktion zur Verfügung stehen, kann man sogar seine Zeichengenauigkeit überprüfen.

Es ist keineswegs notwendig, dass die zur Bildkonstruktion auf dem Papier verwendeten Strahlen im praktischen Versuch als Lichtbündel tatsächlich realisiert werden. Strahlen dürfen auch weit außerhalb der Linsenfassung auf die Hauptebene treffen, Lichtbündel laufen nur durch die Linsenöffnung; auf jeden Fall wird aber alles, was vom Gegenstandspunkt P ausgeht, im Bildpunkt P' gesammelt, sofern es nur durch die Linse hindurchkommt. Deren Durchmesser bestimmt den Öffnungswinkel des abbildenden Bündels, nicht aber die Lage des Bildpunktes. Auch ein Elefant lässt sich photographieren, obwohl er viel größer ist als Linse und Kamera (Abb. 7.41).

Alle Abbildungen dieses Kapitels sind bisher stillschweigend für Sammellinsen gezeichnet worden, obwohl im Text schlicht von „Linsen“ die Rede war. Tatsächlich gelten die aufgestellten Sätze auch für Zerstreuungslinsen, sofern man nur Folgendes beachtet: Im üblichen Zeichenschema konstruierter Strahllängen liegt der *Gegenstandspunkt* P links, der *Bildpunkt* P' rechts der Hauptebene – Entsprechendes gilt für den *gegenstandsseitigen* Brennpunkt F und den *bildseitigen* F'; eine Zerstreuungslinse aber hat negative Brennweite, bei ihr liegt im Schema F' links und F rechts. Die Bildkonstruktion läuft dann nach dem gleichen Verfahren ab (Abb. 7.42a), sie führt zu einem virtuellen Bild, verkleinert und an die Hauptebene herangerückt.

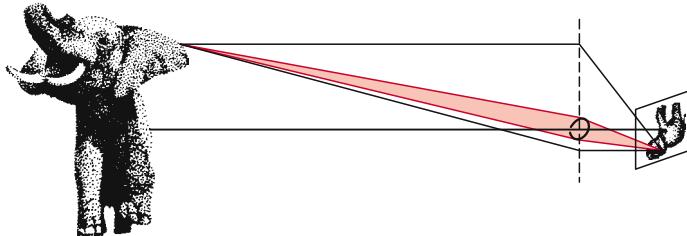


Abb. 7.41. Strahlengang zu Bildkonstruktion (schwarz) und abbildendes Bündel (rot) vom Elefantenohr bei der Photographie; schematisch

Auch Sammellinsen können virtuelle Bilder geben, dann nämlich, wenn P innerhalb der Brennweite f liegt. Auch jetzt wird das Bild nach dem gleichen Schema konstruiert (☞ Abb. 7.42b); man lasse sich nicht dadurch beirren, dass der gegenstandsseitige Brennstrahl jetzt nicht mehr von P über F zur Hauptebene gezeichnet werden kann, sondern nur umgekehrt von F über P . Die auf Papier gezeichneten Strahlen müssen ja nicht durch Lichtbündel realisiert werden. Geometrische Optik steht darstellender Geometrie sehr nahe.

7.2.7 Abbildungsgleichungen

Man kann nach dem Schema des vorigen Kapitels den Zusammenhang zwischen **Gegenstandsweite a , Bildweite b** und Brennweite f mühsam und Punktweise durch Konstruktion mit Bleistift und Lineal gewinnen, man kann ihn aber auch ausrechnen mit Hilfe der **Abbildungsgleichung**

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Herleitung: In ☞ Abb. 7.43 sind zusätzlich zu den bisher schon genannten Elementen der optischen Abbildung der Linsenmittelpunkt M und die Abstände z und z' der Punkte P und P' von der optischen Achse eingetragen. Auf der Gegenstandsseite enthält der Strahlengang drei ähnliche rechtwinklige Dreiecke mit dem Brennstrahl als Hypotenuse. Das kleinste mit dem rechten Winkel bei M hat Achse und Hauptebene als

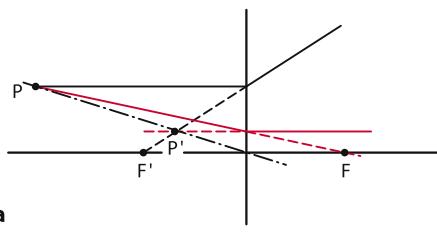
Katheten, ihre Längen betragen f und z' . Das mittlere hat seine spitzen Ecken bei P und F , seine Katheten sind $x = a - f$ und z . Diese beiden Dreiecke sind einander ähnlich, darum stehen einander entsprechende Seiten untereinander im gleichen Verhältnis:

$$\frac{z}{a-f} = \frac{z'}{f},$$

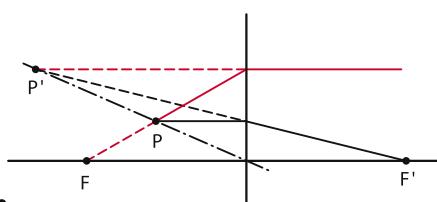
also

$$\frac{z'}{z} = \frac{f}{a-f}.$$

z' und z sind aber Messwerte für die Größen von Bild und Gegenstand. Deshalb liefert diese Gleichung den Vergrößerungs- bzw. Verkleinerungsfaktor der Abbildung.



a



b

Abb. 7.42. Virtuelle Bilder, Bezeichnungen wie Abb. 7.40. Unteres Teilbild: Zerstreuungslinse, d.h. negative Brennweite, bildseitiger Brennpunkt F' links von der Hauptebene. Oberes Teilbild: Sammellinse, Gegenstandsweite kleiner als Brennweite;

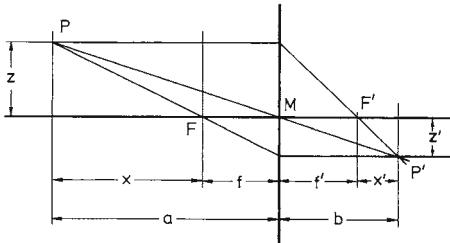


Abb. 7.43. Zur Herleitung der Abbildungsgleichung (Einzelheiten im Text).

Eine weitere Gleichung dafür liefert ein Vergleich der rechtwinkligen Dreiecke mit spitzen Winkeln bei P und M bzw. P' und M:

$$\frac{z'}{z} = \frac{b}{a}$$

Beide Gleichungen zusammen geben:

$$\frac{f}{a-f} = \frac{b}{a}.$$

Auf beiden Seiten den Kehrwert nehmen und durch a teilen liefert schon fast die Abbildungsgleichung.

wichtig

Für die Berechnung der reellen

Abbildung mit dünner Linse:

$$\text{Abbildungsgleichung: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

$$\text{Vergrößerung: } \frac{z'}{z} = \frac{f}{a-f}$$

Ist $a = 2f$ so ist der Abbildungsmaßstab gerade $1:1$ und Bildweite gleich Gegenstandsweite.

Rechenbeispiel 7.3: Scharfstellen

Das „Normalobjektiv“ einer Kleinbildkamera hat die Brennweite $f = 50 \text{ mm}$. Dem entspricht auch der Abstand zwischen bildseitiger Hauptebene und Film bei „Normaleinstellung auf Unendlich“. Um wie viel Millimeter muss das Objektiv zur Scharfein-

stellung auf einen 45 cm entfernten Gegenstand vorgeschoben werden?

Lösung: Für „Normaleinstellung auf Unendlich“ lautet die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{f}$$

und deshalb $b = f = 50 \text{ mm}$. Für $a = 45 \text{ cm}$ ergibt sich

$$b = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{a} \right)^{-1} = 56,23 \text{ mm.}$$

Also muss das Objektiv um $6,23 \text{ mm}$ verschoben werden. Ist die Brennweite kleiner, wird auch dieser Verschiebeweg kleiner. Das nützen Autofocus-Kameras gern aus: Die Verschiebemechanik kann bei kleiner Brennweite (z.B. 35 mm) einfacher und ungenauer werden.

Rechenbeispiel 7.4: Teleobjektiv

Ein Tierfreund möchte einen scheuen Hase auf 3 m Distanz bildfüllend auf seinen Kleinbildfilm (Bildmaße $24 \times 36 \text{ mm}$) bannen. Welche Brennweite muss sein Objektiv dazu haben?

Lösung: Sagen wir mal, der Hase ist 30 cm hoch, also $z = 30 \text{ cm}$. Die Bildhöhe soll $z' = 26 \text{ mm}$ sein. Die Gegenstandsweite ist $a = 3 \text{ m}$. Jetzt müssen wir nur noch die Gleichung

$$\frac{z'}{z} = \frac{f}{a-f}$$

nach f auflösen. Das Ergebnis ist:

$$f = a \cdot \left(\frac{z}{z'} + 1 \right)^{-1} = 24 \text{ cm.}$$

Es gibt Tricks um zu erreichen, dass ein solches sogenanntes *Teleobjektiv* nicht wirklich so unhandlich lang sein muss (siehe nächstes Kapitel). Will man im Gegenteil möglichst viel aufs Bild bekommen, nimmt man ein *Weitwinkelobjektiv* mit kurzer Brennweite (z.B. 35 mm). Dann lässt sich

eine gewisse Bildverzerrung allerdings nicht vermeiden.

7.2.8 Dicke Linsen und Objektive

Für eine Sammellinse ist jeder Gegenstand mit einer Gegenstandsweite groß gegen die Brennweite praktisch unendlich weit weg; er wird in die Brennebene hinein abgebildet. Daraus ergibt sich ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der Brennweite: man misst den Abstand, in dem man ein Leseglas vor die Zimmerwand halten muss, um das gegenüberliegende Fensterkreuz scharf abzubilden. Die Methode ist freilich nicht sehr genau; nur bei sehr dünnen Linsen kann man hinreichend sicher sagen, wo ihre Hauptebene liegt. Bei dicken Linsen und erst recht bei mehrlinsigen Objektiven wird es schwierig – hier lassen sich Abbildungsgleichung und geometrische Bildkonstruktion nur noch mit sanfter Gewalt der Wirklichkeit anpassen.

Die Methode sei am (vereinfachten) Beispiel eines *Teleobjektivs* erläutert – wer zur Übung den folgenden Strahlengang auf Millimeterpapier nachzeichnet, den können auch kompliziertere

Probleme der geometrischen Optik kaum noch schrecken.

Das Teleobjektiv bestehe aus einer Sammellinse der Brennweite $f_+ = 50$ mm und einer Zerstreuungslinse mit $f_- = 40$ mm, beider Hauptebenen H_+ und H_- in 30 mm Abstand hintereinander. Ein von links achsenparallel auf die konvexe Frontlinse einfallendes Parallellichtbündel steuert konvergent deren Brennpunkt an, wird aber 20 mm vor ihm von der Konkavlinse abgefangen und auf weniger Konvergenz aufgeweitet. Den neuen Konvergenzpunkt kann man ganz formal mit der Abbildungsgleichung ausrechnen: Der Gegenstandspunkt für die Zerstreuungslinse liegt (virtuell, wenn man so will) rechts von der Hauptebene H_- , die Gegenstandsweite ist also negativ, nämlich $a = -20$ mm. Die Brennweite dieser Linse muss ebenfalls negativ angesetzt werden ($f_- = 40$ mm); damit kommt die Bildweite b , bezogen auf die Hauptebene H_- zu +40 mm heraus: reeller Bildpunkt rechts auf der Achse (Abb. 7.44 a). Dort liegt demnach der Brennpunkt des ganzen Objektives. Verlängert man jetzt die Randstrahlen des letzten konvergenten Bündels nach links, so treffen sie die Randstrahlen des einfallenden Bündels 30 mm vor der Hauptebene H_+ der Frontlinse. Stünde dort eine einfache Sammellinse der Brennweite $f_0 = 100$ mm, das von ihr gelieferte konvergente Bündel wäre in Achsen Nähe von dem des Teleobjektives nicht zu unterscheiden. In der Tat darf man dem Objektiv die Brennweite $f_0 = 100$ mm zuordnen, gezählt von einer Hauptebene 30 mm vor der der Frontlinse – die Brennweite des Objektives ist also größer

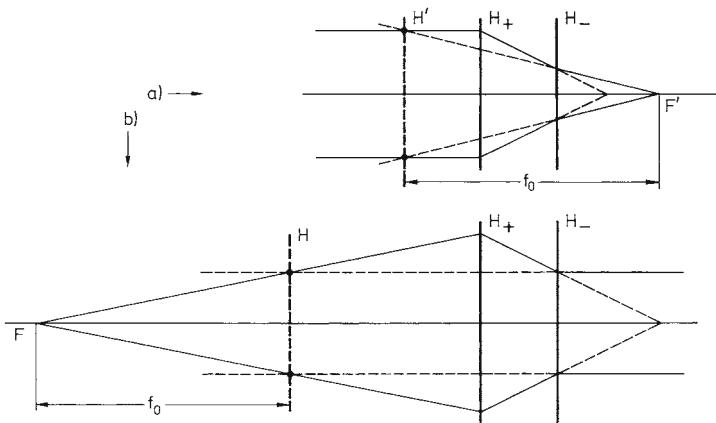


Abb. 7.44. Zur Definition der Hauptebenen: Strahlengang in einem Teleobjektiv (vereinfacht). Oberes Teilbild (a): ein von links einfallendes achsenparalleles Parallellichtbündel wird so in den bildseitigen Brennpunkt F' gesammelt, als stünde in der bildseitigen Hauptebene H' eine einfache Sammellinse. Entsprechendes führt ein von rechts einfallendes Parallellichtbündel zum gegenstandsseitigen Brennpunkt F und der gegenstandsseitigen Hauptebene H . Einzelheiten im Text – gegenüber der dort zum Mitzeichnen gemachten Angaben im Maßstab 1:3 verkleinert

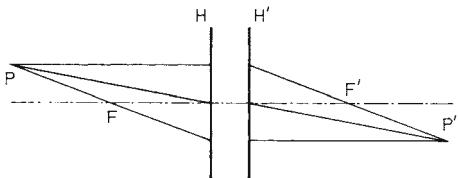


Abb. 7.45. Formale Bildkonstruktion für ein Objektiv: der Raum zwischen den beiden Hauptebenen H und H' wird als nichtexistierend behandelt

als seine Baulänge. Das geht so freilich nur für ein von links einfallendes Bündel.

Wiederholt man die ganze Konstruktion für ein achsenparalleles Bündel von rechts, so kommt man zu dem Teilbild b der Abb. 7.44: der neue Brennpunkt liegt überraschend weit links und die neue Hauptebene auch, aber beider Abstand, die Brennweite, beträgt wieder 100 mm.

Um Abbildungsgleichung und geometrische Konstruktion zu retten, führt man für ein Objektiv zwei Hauptebenen ein, eine gegenstandsseitige (H) und eine bildseitige (H'), und tut so, als existiere der Raum zwischen ihnen gar nicht. Dies gilt sogar für den Zentralstrahl (Abb. 7.45): Er wird vom Gegenstandspunkt P bis zum Schnittpunkt der Achse mit der Hauptebene H gezeichnet und parallel zu sich selbst vom Schnittpunkt Achse – Hauptebene H' fortgesetzt. Hier ist die Konstruktion eines Bildpunktes nur noch darstellende Geometrie: Die abbildenden Lichtbündel laufen auf völlig anderen Wegen als die gezeichneten Strahlen, aber sie laufen von P nach P' .

Herauszufinden, wo bei einem Linsensystem die Hauptebenen liegen, überlässt man lieber einem spezialisierten Computerprogramm. Bemerkenswerterweise können die Hauptebenen sogar außerhalb, zu Beispiel vor dem Objektiv liegen. Teleobjektive können kürzer sein als ihre Brennweite, welche für große Bilder möglichst lang ist.

Die Brennweite entscheidet unter sonst gleichen Umständen über die Bildweite und damit über den Abbildungsmaßstab – je größer f , desto näher glaubt sich der Betrachter des Bildes dem abgebildeten Objekt. Zoom-Objektive mit variabler Brennweite erlauben deshalb dem Filmamateuren wie dem Kamera-

mann des Fernsehens „Fahraufnahmen“, die gar keine sind: Ohne Bewegung der Kamera wird das Objekt durch reine Verlängerung der Brennweite scheinbar „herangeholt“.

7.2.9

Das Auge

Grundsätzlich ist für eine Abbildung durch Brechung die Rückseite der Linse gar nicht erforderlich. Eine einzelne Kugelfläche allein tut es auch, nur liegt das Bild dann notwendigerweise innerhalb des Glaskörpers.

Aus welcher Richtung auch immer ein Parallellichtbündel auf eine Glaskugel zuläuft, einer seiner Strahlen trifft senkrecht auf und geht ungebrochen durch den Kugelmittelpunkt weiter. Alle anderen werden zu diesem Strahl hin abgeknickt und treffen ihn in einem Bildpunkt, jedenfalls sofern der Bündelquerschnitt von einer äußeren Blende hinreichend eingeengt wird (Abb. 7.46 a). Jedes Bündel hätte da gern seine eigene Blende, aber bei nicht zu großem Sehwinkel zwischen ihnen geht es auch mit einer einzigen Blende aus.

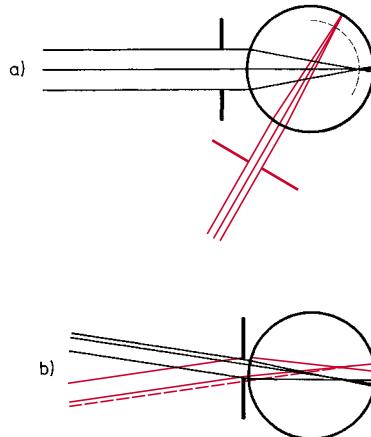


Abb. 7.46. Abbildung schlanker Bündel durch eine einzige Kugelfläche. Brennfläche ist eine Kugelfläche (a). Bei nicht zu großem Winkel gegeneinander dürfen zwei Parallellichtbündel durch die gleiche Blende treten (b). Die Zeichnung verlangt für die Brechzahl der Kugel einen Wert über 2; für sichtbares Licht allenfalls durch Diamant realisierbar

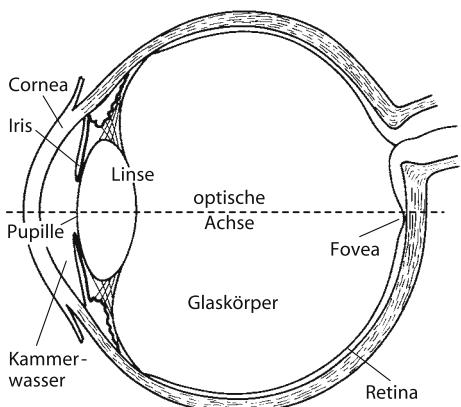


Abb. 7.47. Horizontaler Schnitt durch ein menschliches Auge

gen (☞ Abb. 7.46 b). Die Bildpunkte unendlich ferner Gegenstände liegen nicht mehr auf einer Brennebene, sondern auf einer kugelförmigen Brennfläche, konzentrisch zur Glaskugel selbst. Das ist die Grundlage der Abbildung im Auge.

Das Auge des Menschen besteht zunächst einmal aus einem kugelförmigen Glaskörper von 23 mm Durchmesser mit einer Pupille vorn, das Licht hereinzulassen, und der lichtempfindlichen Netzhaut (*Retina*) hinten (☞ Abb. 7.47). Seine Brechzahl beträgt 1,34 und die sich daraus ergebende Brennweite ist zu lang, um Parallellichtbündel ohne weiteres auf die Retina abzubilden. Als erste und wichtigste Maßnahme zur Abhilfe wölbt die Natur beim Eintrittsfenster die *Hornhaut* ein wenig vor. Dadurch wird der Krümmungsradius ein wenig kleiner als der des Augapfels und die Brechkraft entsprechend größer: sie kommt auf 43 dpt. Das genügt aber noch nicht: Die restlichen 15 dpt übernimmt eine echte Linse, bestehend aus einer gallertartigen Masse mit der Brechzahl 1,42. Sich selbst überlassen nähme sie, von der Oberflächenspannung veranlasst, Kugelform an – Fische besitzen solche Augenlinsen und stellen scharf wie ein Photoapparat durch Verschieben. Säuger sind raffinierter, sie ziehen die Kugel mit radial angreifenden Spannfasern flach und machen so aus ihr eine echte Bikonvexlinse.

Zum Scharfstellen kann ein Ringmuskel sich gegen diese Fasern stemmen; das erlaubt der Linse, der Oberflächen-Spannung etwas mehr nachzugeben und mit der Krümmung auch die Brechkraft zu erhöhen: Der Brennpunkt rückt näher an das Zentrum des Augapfels und das Bild näherer Objekte auf die Retina.

Bei manchen Menschen ist der Augapfel ein wenig zu groß für die Krümmung der Hornhaut; auch bei völlig entspanntem Auge liegen die Bilder von Mond und Sternen noch vor der Netzhaut und können nicht scharfgestellt werden. Nur hinreichend nahe Gegenstände werden scharf gesehen. Die lebenswichtigen großen Sehweiten lassen sich aber durch eine Brille mit Zerstreuungslinsen zurückgewinnen: Einfallende Parallelbündel müssen derart divergent aufgeweitet werden, dass ihre Konvergenzpunkte hinter der Hornhaut bei entspanntem Auge gerade auf die Netzhaut fallen. Auch das Umgekehrte kommt vor: Der Augapfel ist zu kurz, die Krümmung der Hornhaut zu gering; fehlende Brechkraft des *weitsichtigen* Auges ersetzt eine Brille mit Sammellinsen. Augenoptiker rechnen immer mit der Brechkraft, also dem Kehrwert der Brennweite, weil sich näherungsweise bei hintereinandergesetzten Linsen die Brechkräfte addieren (wenn man die Brechkraft einer Zerstreuungslinse negativ nimmt).

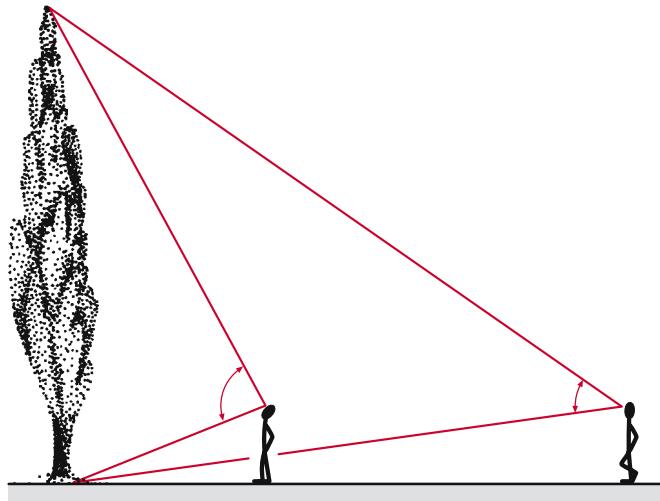
wichtig

Bei dicht hintereinandergestellten Linsen addieren sich näherungsweise die Brechkräfte.

7.2.10 Optische Instrumente

Wie groß ein Spaziergänger eine Pappel sieht, hängt nicht nur von der Höhe des Baumes ab, sondern auch von seiner Entfernung. Entscheidend ist die Größe des Bildes auf der Netzhaut, und die wird vom Sehwin-

Abb. 7.48. Je näher der Beobachter an die Pappel herangeht, umso größer wird der Sehwinkel, unter dem sie ihm erscheint



kel bestimmt, dem Winkel zwischen den Zentralstrahlen der abbildenden Bündel von Fuß und Gipfel der Pappel (☞ Abb. 7.48). Sonne und Mond erscheinen dem irdischen Beobachter gleich groß – sie sind es nicht, aber ihre *Sehwinkel* sind es. Wenn man ein Objekt „mit einem Blick“ erfassen kann, beträgt der Sehwinkel nur einige Grad. Dann darf man in guter Näherung schreiben:

$$\text{Sehwinkel} = \frac{\text{Abmessung des Objektes}}{\text{Entfernung des Objektes}}$$

Der Mensch sieht, was auf seiner Netzhaut erscheint: ein flaches Bild der Umwelt. Der Gesichtssinn hat aber gelernt, dieses Bild räumlich zu interpretieren. Bei hinreichend nahen Gegenständen hilft dabei das *binokulare*, das beidäugige Sehen: Da beide Augen aus etwas unterschiedlichem Gesichtswinkel schauen, übermitteln sie auch etwas verschiedene Bilder vom gleichen Objekt; das Gehirn deutet diese Unterschiede räumlich. *Stereoskopische Doppelauflnahmen* nutzen diese Fähigkeit; sie erlauben sogar, den Eindruck der Tiefe kräftig zu übertreiben, wenn die beiden Bilder nämlich aus Positionen aufgenommen wurden, die weit mehr als nur einen Augenabstand auseinander lagen. Die räumliche Interpretation gelingt aber auch bei einem flachen Bild mühelos,

sofern es nur die Perspektive einigermaßen richtig wiedergibt. Ein ferner Gegenstand muss kleiner gezeichnet werden, denn in der Natur käme ihm ein kleiner Sehwinkel zu.

Wer etwas genauer betrachten will, muss den Sehwinkel vergrößern. Das gängige Verfahren heißt: näher herangehen. Im Theater ist das nicht möglich und in freier Wildbahn nur selten. Man greift zum Opernglas oder zum Feldstecher. Ist man aber schon so nahe, dass die Scharfeinstellung keine weitere Annäherung mehr erlaubt, hilft eine *Lupe*. Im einfachsten Fall besteht sie aus einer Sammellinse von wenigen Zentimetern Brennweite. Von allen Gegenstandspunkten in ihrer Brennebene erzeugt sie Parallellichtbündel, die das entspannte Auge auf seine Netzhaut abbildet, als kämen sie von unendlich fernen Gegenständen. Die Sehwinkel werden jetzt aber von der Lupe vorgegeben; sie sind so groß, als könnte das Auge auf deren Brennebene scharf stellen (☞ Abb. 7.49). Der Abstand zwischen Lupe und Auge spielt der Parallelbündel wegen keine grundsätzliche Rolle. Nur wenn man ihn klein hält, erlaubt die Lupe ein größeres Gesichtsfeld, denn dieses wird von der Linsenfassung begrenzt. Große Lesegläser verschwenden Glas, denn sie erzeugen weite Parallelbündel, von denen die kleine Pupille des Auges nur einen kleinen Bruchteil aus-

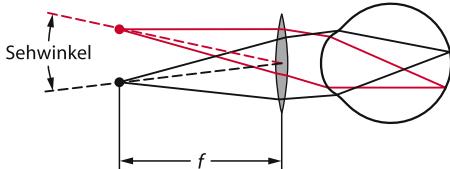


Abb. 7.49. Strahlengang einer Lupe

nutzen kann; damit erlauben sie aber, das Buch weiterhin auf den Knien zu halten. Der Uhrmacher klemmt seine kleine Lupe unmittelbar vor das Auge und muss sein Werkstück entsprechend dicht heranholen.

Den *Vergrößerungsfaktor* Γ eines optischen Instruments bezieht man auf die von ihm bewirkte Vergrößerung des Sehwinkels:

$$\Gamma = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}}$$

Bei der Lupe entspricht der Gewinn an Sehwinkel dem Gewinn an Nähe zum Objekt. Dabei bezieht man den Sehwinkel ohne Instrument auf die offizielle *Bezugssehweite* von 25 cm (sie wird zuweilen nicht ganz glücklich „deutliche Sehweite“ genannt). Folglich gilt

$$\Gamma = \frac{25\text{cm}}{f_{\text{Lupe}}}$$

wichtig

Optische Instrumente:

Vergrößerungsfaktor Γ

$$= \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}}$$

$$\text{Sehwinkel} = \frac{\text{Abmessung des Objektes (Bildes)}}{\text{Entfernung des Objektes (Bildes)}}$$

Auf weniger als Nasenlänge kann man ein Objekt nur schwer an das Auge heranführen; dadurch ist der Bereich sinnvoller Lupenbrennweiten nach unten begrenzt. Niemand muss aber das Objekt seines Interesses unmittelbar unter die Lupe nehmen: Es genügt ein reelles Bild, entworfen von einem *Objektiv* in handlichem Abstand vor der Na-

senspitze. Deckt sich dieser Abstand so ungefähr mit der Brennweite des Objektivs, so ist der betrachtete Gegenstand weit weg, ein verkleinertes Bild liegt in der Brennebene, und das Instrument ist ein Fernrohr. Hat das Objektiv demgegenüber kurze Brennweite, dann liegt das Objekt nahezu in seiner Brennebene, ein vergrößertes Bild auf Abstand dahinter in Nasennähe, und das Instrument ist ein *Mikroskop*. Das Grundsätzliche seines Strahlenganges zeigt Abb. 7.50.

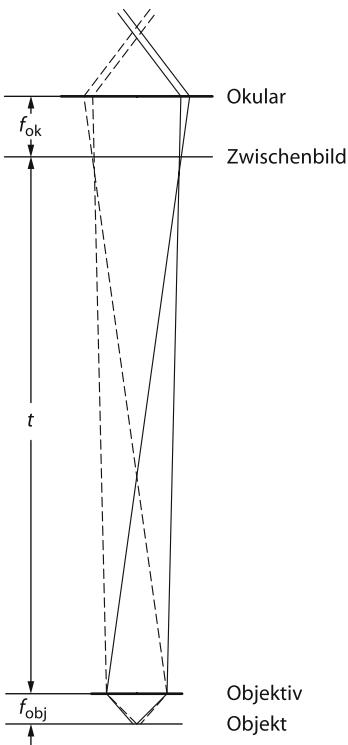


Abb. 7.50. Mikroskop, grundsätzlicher Strahlengang; das Objektiv entwirft mit seiner kurzen Brennweite f_{obj} ein vergrößertes reelles Zwischenbild im Abstand der „optischen Tubuslänge“ t (meist 180 mm) hinter seiner bildseitigen Hauptebene, das Okular macht daraus Parallelbündel für das Auge des Betrachters. In die Ebene des Zwischenbildes kann ein Okularmikrometer gesetzt werden (vgl. Abb. 1.5). In der Nähe dieser Ebene befindet sich meist eine konvexe Feldlinse, die der Vergrößerung des überschaubaren Bildfeldes dient. Das Objekt befindet sich etwas unterhalb der gegenstandsseitigen Brennebene, weil das Zwischenbild nicht im Unendlichen liegt; der Effekt ist zu gering, um in der Zeichnung maßstabsgerecht dargestellt werden zu können

Die optische Industrie hat sich darauf geeinigt, das Zwischenbild des Mikroskops normalerweise 180 mm hinter die Hauptebene des Objektivs zu legen; dadurch kommt der Mikroskopisch mit dem Objekthalter in handliche Entfernung. Demnach ist das Zwischenbild gegenüber dem Objekt ziemlich genau um den Abbildungsmaßstab $\Gamma_{\text{obj}} = 180 \text{ mm}/f_{\text{obj}}$ vergrößert. Es wird mit einer Lupe betrachtet, die jetzt *Ocular* heißt und den Vergrößerungsfaktor $\Gamma_{\text{ok}} = 250 \text{ mm}/f_{\text{ok}}$ mitbringt. Daraus ergibt sich für die Gesamtvergrößerung des Mikroskops

$$\Gamma_M = \Gamma_{\text{obj}} \cdot \Gamma_{\text{ok}} = \frac{180 \text{ mm}}{f_{\text{obj}}} \cdot \frac{250 \text{ mm}}{f_{\text{ok}}}$$

Γ_{obj} und Γ_{ok} sind auf den Mikroskopobjektiven und -okularen eingraviert, auf den Objektiven zusätzlich noch die „numerische Apertur“, von der im nächsten Kapitel die Rede sein wird.

Das Zwischenbild existiert nicht materiell, es schwebt frei im Tubus des Mikroskops. Man kann an seine Position eine Glasplatte bringen, in die ein Maßstab eingeritzt ist, ein sog. *Ocularmikrometer*: Der Beobachter sieht es zusammen mit dem Objekt scharf (vgl. hierzu Abb. 1.5). Das Zwischenbild „steht auf dem Kopf“, es ist gegenüber dem Objekt um 180° gedreht, aber es ist nicht seitenverkehrt wie ein Spiegelbild. Der Kopfstand stört nicht und man lernt rasch, wie man ein Objekt auf dem Mikroskopisch verschieben muss, um es richtig ins Bildfeld zu bekommen.

Mikroskope können sich erheblich darin unterscheiden, wie das Objekt beleuchtet wird. Durchsichtige Objekte kann man von unten beleuchten (*Hellfeld*). Man kann sie und Oberflächen auch von der Seite beleuchten und sieht dann helle Strukturen auf dunklem Untergrund (*Dunkelfeld*). Man kann mit dem Licht auch von oben durch das Objektiv kommen (*Auflicht*). Arbeitet man mit polarisiertem Licht, kommt zuweilen die Struktur von Kristallschliffen besonders gut heraus (Abb. 7.51). Mit der komplizierteren *Phasenkontrast-Mikros-*



Abb. 7.51. Das Gefüge eines gegläuteten Aluminium-Vielkristalls tritt im Polarisationsmikroskop deutlich hervor (nach G. Gottstein)

kopie kann man nicht nur hell-dunkel-Unterschiede in Objekten sehen, sondern auch Brechungsindexunterschiede im Objekt. Auch die Topographie einer Oberfläche kommt wesentlich deutlicher heraus. In Scanning-Laser-Mikroskope kann man gar nicht mehr hineinschauen. Ein elektronisch gesteuerter Lichtstrahl tastet das Objekt ab und liefert eine perspektivische Darstellung der dreidimensionalen Struktur einer Oberfläche auf einen Computerbildschirm.

Auch beim astronomischen *Fernrohr* wird das Objekt kopfüber abgebildet. Alle Mondkarten haben den Südpol oben, also so, wie man den Mond von der Nordhalbkugel der Erde im *umkehrenden astronomischen Fernrohr* sieht. Darauf muss nicht achten, wer seinen *Feldstecher* benutzt. Der ist ja für terrestrische Beobachtung gebaut und darf sein Bild eben nicht auf den Kopf stellen. Man muss aber die Parallelbündel, die man seinem Auge mit vergrößertem Sehwinkel anbieten will, nicht unbedingt mit einer Sammellinse herstellen, die *hinter* dem Zwischenbild liegt; eine Zerstreuungslinse *vor* ihm tut es auch. Dann werden die Sehwinkel nicht umgekehrt und das Bild erscheint auf der Netzhaut in gewohnter Stellung. So arbeitet das *Opernglas*. Hohe Vergrößerungen verlangen beim Fernrohr langbrennweite Objektive und entsprechend große Lichtwege. Trotzdem kann man mit kleiner Baulänge auskommen, wenn man den Strahlengang durch mehrfache Reflexionen zusammenfaltet. Der Prismenfeldstecher benutzt hierfür totalreflektierende Prismen, mit denen er das Bild auch gleich noch aufrichtet.

Vom Standpunkt der geometrischen Optik sind den Vergrößerungsfaktoren optischer Instrumente keine Grenzen gesetzt. Tatsächlich wird die noch sinnvolle Vergrößerung aber durch Beugungerscheinungen bestimmt, die von der Wellenlänge des Lichtes abhängen (Kap. 7.4.4): Details von Objekten, die unter $1\text{ }\mu\text{m}$ liegen, lassen sich im Lichtmikroskop kaum noch auflösen. Das entspricht einer Grenzvergrößerung von etwa 1000, genug für Einzeller und viele Bakterien, zu wenig für Viren.

Rechenbeispiel 7.5: Vorsicht mit dem Objektiv

Wie dicht muss die Frontlinse eines Mikroskopobjektivs mit dem Vergrößerungsfaktor 100 an das Objekt herangeführt werden?

Lösung: Genau lässt sich das erst sagen, wenn man die Lage der gegenstandsseitigen Hauptebene kennt. Auf jeden Fall muss das Objekt ziemlich genau in die gegenstandsseitigen Brennebene gebracht werden: $f \approx 180\text{ mm} / 100 = 1,8\text{ mm}$. Um eine möglichst hohe Auflösung zu erlangen (Kapitel 7.4.4), muss ein möglichst großer Winkelbereich vom Objektiv erfasst werden. Deshalb ist der Glaskörper der Linse bei so stark vergrößernden Objektiven tatsächlich oft nur noch wenige Zehntel Millimeter vom Objekt entfernt. Die Gefahr, beim Scharfstellen das Objekt zu beschädigen, ist dann groß.

7.3 Intensität und Farbe

Einleitung

Elektromagnetische Wellen transportieren Energie. Dem entspricht eine Strahlungsleistung; sie wird „Strahlungsfluss“ genannt und bildet die Grundlage aller anderen Strahlungsmessgrößen, deren Definitionen lediglich unterschiedliche geometrische Randbedingungen berücksichtigen. Wer darüber nicht weiter nachdenken will, spricht von der „Intensität“ einer Strahlung. Weil das aber zu Verwechslungen führen kann, sollen die verschiedenen Strahlungsmessgrößen

hier aufgeführt werden. Parallel zu ihnen muss man Lichtmessgrößen definieren, um die spektrale Verteilung des Wahrnehmungsvermögens der menschlichen Netzhaut zu berücksichtigen.

7.3.1

Strahlungs- und Lichtmessgrößen

Eine elektromagnetische Welle transportiert Energie. Sie tut dies mit einer Leistung, die **Strahlungsfluss** genannt wird, üblicherweise den Buchstaben Φ bekommt und in Watt gemessen werden kann. In einem schmalen Frequenzbereich transportiert die Welle zusätzlich sichtbares Licht, dieses mit einem **Lichtstrom**, der ebenfalls den Buchstaben Φ bekommt, aber in **Lumen** (lm) gemessen wird. Bei der **Strahlungsmessung** zählt nur die Leistung, unabhängig von ihrer spektralen Verteilung. Bei der **Lichtmessung** wird die spektrale Verteilung entsprechend der spektralen Empfindlichkeit des normalen menschlichen Auges bewertet. Strahlungsleistung im Grünen bringt viel, im Blauen und Roten weniger, im Ultravioletten und Infrarot gar nichts.

Von Strahlungsfluss und Lichtstrom wird eine ganze Reihe von Strahlungs- und Lichtmessgrößen abgeleitet, die sich im Wesentlichen nur durch Geometriefaktoren voneinander unterscheiden. Wo diese keine Rolle spielen, darf man die nicht sauber definierte Vokabel **Intensität** benutzen. Immer ist das aber nicht erlaubt; deshalb müssen diese Größen hier kurz besprochen werden, mehr zum Nachschlagen, nicht zum Auswendiglernen.

wichtig

Strahlungsmessgrößen: wellenlängenunabhängig,

Lichtmessgrößen: an die spektrale Empfindlichkeit des Auges angepasst.

Ein Strahlenbündel besitzt eine Querschnittsfläche A_0 und damit die

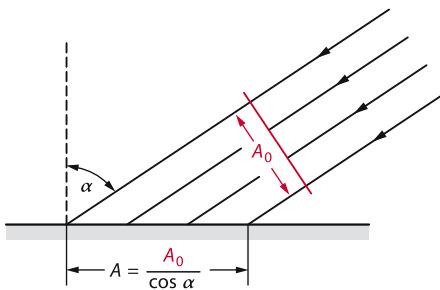


Abb. 7.52. Bei schräger Inzidenz verteilt sich die Strahlungsleistung aus dem Bündelquerschnitt A_0 auf die größere Empfängerfläche A

$$\text{Strahlungsflussdichte } \varphi = \Phi/A_0$$

zu messen in W/m^2 . Ist der Strahler so klein, dass er als punktförmig angesehen werden darf, so nimmt die Querschnittsfläche des divergenten Bündels mit dem Quadrat des Abstandes r zur Strahlenquelle zu:

$$\varphi \sim 1/r^2.$$

Das ist das *quadratische Abstandsgesetz*, von dem schon in Kap. 4.3.4 die Rede war.

Seit vielen Jahrtausenden liefert die Sonne auf die Distanz des Erdbahnradius Strahlung mit der extraterrestrischen Solarkonstanten $1,36 \text{ kW/m}^2$ ab; auf der Erdoberfläche kommt davon noch ungefähr 1 kW/m^2 an, aber nur auf einer Empfängerfläche, die quer in der prallen Mittagssonne steht. Steht sie schräg, wird sie also unter dem Einfallswinkel α vom Sonnenschein getroffen, so erfasst ein Bündel mit der Querschnittsfläche A_0 eine Empfängerfläche A , die um den Faktor $1/\cos \alpha$ größer ist (Abb. 7.52). Dementsprechend definiert man die

$$\text{Bestrahlungsstärke } E = \Phi/A = \varphi \cdot \cos \alpha,$$

ebenfalls mit der Einheit W/m^2 . Die gleiche Einheit besitzt schließlich noch die gesamte Strahlung der Quelle, wenn man sie auf deren Fläche A' bezieht, also die

$$\text{spezifische Ausstrahlung } M = \Phi/A'.$$

Jedes von einer punktförmigen Strahlenquelle ausgehende divergente Bündel erfasst einen bestimmten Raumwinkel ω . In Analogie zum Bogenmaß des ebenen Winkels, also zum Quotienten aus erfasster Bogenlänge und Kreisradius mit der dimensionslosen „Einheit“ Radian, definiert man den Raumwinkel als Quotienten aus erfass-

ter Kugelfläche und Quadrat des Kugelradius (Abb. 7.53) und gibt ihm die ebenfalls dimensionslose „Einheit“ Steradian ($\text{sr} = \text{m}^2/\text{m}^2$). Das quadratische Abstandsgesetz unterstellt konstanten Raumwinkel.

Die Oberfläche einer Kugel beträgt $4\pi r^2$; größer als 4π kann ein Raumwinkel also nicht werden. Eine ebene Strahlerfläche hat über sich nur den Halbraum 2π . Im Allgemeinen leuchtet sie ihn nicht gleichmäßig aus. Man muss also damit rechnen, dass die (als Differentialquotient definierte)

$$\text{Strahlstärke } I = d\Phi/d\omega$$

mit der Einheit W/sr von der Strahlrichtung abhängt. Zudem wird I auch noch von der Wellenlänge λ bzw. der Frequenz f der Strahlung abhängen. Das führt gleich zu zwei *spektralen Strahlstärken*, nämlich

$$I_f = dI/df \text{ und } I_i = dI/d\lambda$$

mit den Einheiten Ws/sr und $\text{W/(m} \cdot \text{sr)}$.

Ein für Strahlungsmessungen gut verwendbares Instrument ist das *Strahlungsthermometer*. Es misst primär die stationäre Temperaturerhöhung, die ein geschwärztes Blech als Strahlungsempfänger infolge der absorbierten und in Wärme umgesetzten Strahlungsgenergie annimmt; sie ist der Bestrahlungsstärke im Wesentlichen proportional und das über einen weiten Spektralbereich. Das hat messtechnische Bedeutung, denn die Strahlungsmessgrößen sind ja wellenlängenunabhängig definiert.

Für den Bereich sichtbaren Lichts wird zu jeder *Strahlungsmessgröße* eine korrespondierende *Lichtmessgröße* definiert. Sie bekommt einen eigenen Namen und eine eigene Einheit, üblicherweise aber das gleiche Buchstabsymbol. Das *Candela* (cd) ist Einheit der *Lichtstärke* I , das *Lumen* (lm = cd · sr) die des *Lichstromes* und das *Lux* (lx = lm/m²) die der *Beleuchtungsstärke*. Die folgende Tabelle fasst das Wichtigste zusammen.

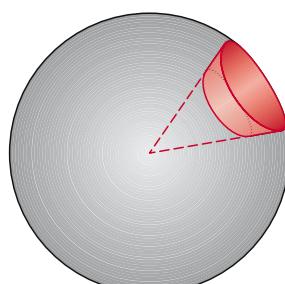


Abb. 7.53. Zur Definition des Raumwinkels

Strahlungsmessgröße	Einheit	Lichtmessgröße	Einheit
Q	Strahlungs-energie	J	lm·h
$\Phi = \dot{Q}$	Strahlungs-fluss	W	lm
$I = F/w$	Strahl-stärke	W/sr	Licht-stärke
$L = I/A_0$	Strahl-dichte	W/(m ² sr)	Leucht-dichte
$E = F/A$	Bestrah-lungsstärke	W/m ²	Beleuch-tungsstärke
			lx

Die Lichtstärke ist Grundgröße des SI; die Einheit Candela wird so definiert, dass für schmelzendes Platin eine Leuchtdichte von $6 \cdot 10^5 \text{ cd/m}^2$ herauskommt. Für das menschliche Auge liegt dieser Wert hart an der Grenze der Blendung. Von Schwelle bis Blendung überdeckt der Gesichtssinn 8 Zehnerpotenzen der Leuchtdichte. Als Anhaltswerte können gelten:

- 10^{-2} cd/m^2 Schwelle (ohne Farberkennung)
- 10 cd/m^2 ausreichend zum Lesen
- 10^3 cd/m^2 gute Schreibtischbeleuchtung
- 10^6 cd/m^2 Blendung

Es ist Sache der Technik, für die Lichtmessung die spektrale Empfindlichkeit von Photozellen mit Hilfe von Farbfiltern der spektralen Empfindlichkeit des Auges anzupassen.

Geeignete Messgeräte sind unter dem Namen **Spektralphotometer** im Handel. Ihr wichtigster Teil ist der **Monochromator** (☞ Abb. 7.54). Das weiße Licht einer Glühbirne wird vom *Kondensor* auf den schmalen *Eingangsspalt* Sp 1 konzentriert, vom *Kollimator* als Parallelbündel auf ein Prisma gegeben, dort spektral zerlegt und in die Brennebene einer weiteren Linse zusammengezogen. Hier entsteht ein Spektrum aus dicht an dicht liegenden, nach der Wellenlänge sortierten Bildern des Eingangsspaltes. Der *Ausgangsspalt* Sp 2 fischt einen schmalen Wellenlängenbereich heraus und gibt ihn auf die nächste Linse, die das divergente Bündel wieder parallel richtet und durch das auszumessende Filter oder auch eine Kuvette schickt (sie kann eine Flüssigkeit enthalten, deren Absorption untersucht werden soll). Eine letzte Linse sammelt dann das durchgelassene Licht auf die nachweisende Photozelle. Die Abbildung kann auch durch Spiegel, die spektrale Zerlegung durch ein Beugungsgitter (s. Kap. 7.4.4) erfolgen (Vorteil: Die Absorption im Glas wird vermieden). Die Optik hinter dem Austrittsspalt und die Photozelle machen den Monochromator zum Spektrometer.

Man vergleicht jetzt die von der Kuvette durchgelassene Strahlstärke $I(\lambda)$ mit der einfallenden Strahlstärke $I_0(\lambda)$ – wegen der Reflexionsverluste am Glas zieht man die Kuvette nicht einfach aus dem Strahlengang heraus, sondern vertauscht sie mit einer leeren Division liefert die **Durchlässigkeit**

$$D(\lambda) = \frac{\text{durchgelassene Strahlstärke } I(\lambda)}{\text{einfallende Strahlstärke } I_0(\lambda)}$$

Sie liegt notwendigerweise zwischen 0 (vollständige Absorption) und 1 (keine Absorption).

Senkt ein bestimmtes Filter die Strahlstärke I für eine bestimmte Wellenlänge auf die Hälfte ab, so reduziert ein zweites Filter gleicher Eigenschaft I auf ein Viertel, ein Drittes auf ein Achtel usw.: Optische Filter, hintereinander gestellt, multiplizieren ihre Durchlässigkeit D . Dass sie außerdem ihre Dicken d

7.3.2 Optische Absorption

Farben im Sinne des lateinischen Wortes *color* sind subjektive Sinneseindrücke, allenfalls mit Worten beschreibbar, aber keiner rein physikalischen Messung zugänglich. Niemand kann wissen, ob er das Rot einer Rose gerade so sieht wie sein Nachbar. **Farben** im Sinne des lateinischen Wortes *pigmentum* kann man kaufen. Es handelt sich um Farbstoffe, die Licht unterschiedlicher Wellenlänge unterschiedlich **absorbieren**. Diese Eigenschaft ist nicht auf den sichtbaren Spektralbereich beschränkt und lässt sich zuverlässig ausmessen – am einfachsten bei **Farbfiltern** aus buntem Glas.

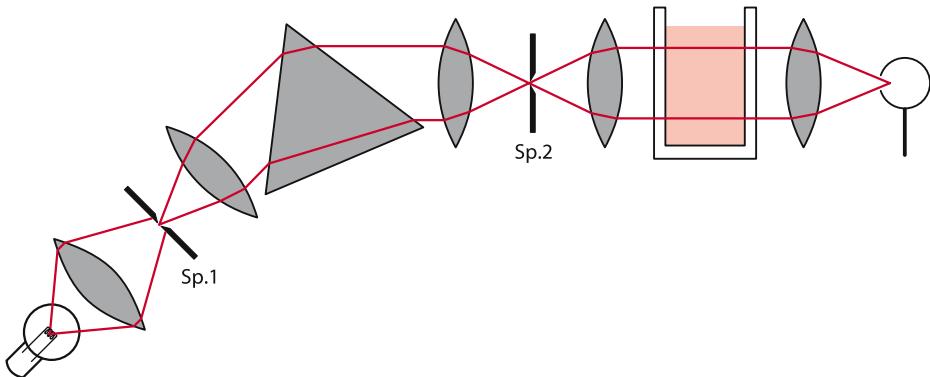


Abb. 7.54. Spektralphotometer, schematischer Strahlengang; Einzelheiten im Text

addieren, hat dann Bedeutung, wenn sie aus gleichem Material gefertigt sind und folglich Durchlässigkeit und Absorption in gleicher Weise spektral verteilen, wie etwa homogene Flüssigkeiten in der Küvette der Abb. 7.54. Dann gilt nämlich das sog. *Lambert-Gesetz*:

$$D(\lambda, d) = \exp(-k(\lambda) \cdot d)$$

mit der *Extinktionskonstanten* $k(\lambda)$. Sie ist eine Materialkenngröße mit der SI-Einheit m^{-1} . Ihr Kehrwert wird *Eindringtiefe* $a(\lambda)$ genannt. Bei so genannten *Graufiltern* sind a und k unabhängig von der Wellenlänge, zumindest im sichtbaren Spektralbereich.

Absorbiert wird Licht von einzelnen Atomen, Ionen, Molekülen, Molekülkomplexen, die beispielsweise in einer wässrigen Lösung herumschwimmen. Jede Teilchenart bevorzugt bestimmte Wellenlängenbereiche und trägt ihr *Absorptionsspektrum* wie eine Visitenkarte mit sich herum: *Hämoglobin*, zuständig für den Sauerstofftransport im Blut, hat in seiner oxidierten Form *Oxyhämoglobin* ein deutlich anderes Absorptionsspektrum als in seiner reduzierten Form (Abb. 7.55). Deshalb sieht auch das sauerstoffbeladene arterielle Blut hellrot aus und das venöse bläulicher: Zufällig liegen die wesentlichen Absorbtionen im sichtbaren Spektralbereich.

Das Absorptionsspektrum sagt zunächst nur etwas über die spektrale Verteilung der optischen Absorption und ermöglicht damit, bestimmte Substanzen in einer Lösung

zu identifizieren, also eine qualitative chemische Analyse. Die Messung der Extinktionskonstanten $k(\lambda)$ selbst erlaubt aber auch eine quantitative Analyse, denn zumindest bei nicht zu hohen Konzentrationen erweist sich das k einer bestimmten Wellenlänge als zur Konzentration c der absorbierenden Teilchen in der Lösung proportional. Dies besagt das *Beer-Gesetz*:

$$k(\lambda) = K(\lambda) \cdot c,$$

(Abb. 7.56). Zusammen mit dem Lambert-Gesetz ergibt es das *Lambert-Beer-Gesetz*

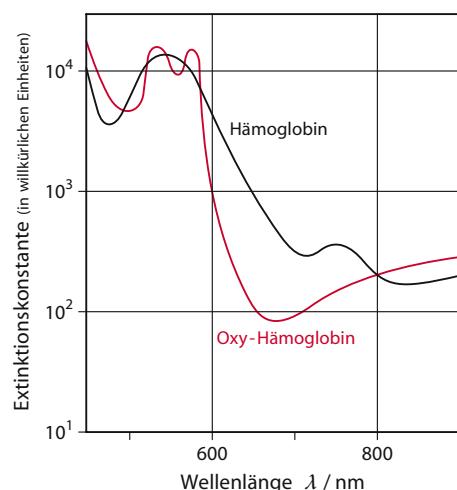


Abb. 7.55. Absorptionsspektrum von Hämoglobin (schwarz) und Oxy-Hämoglobin (rot)

$$I(\lambda, c, d) = I_0[\exp(-K(\lambda) \cdot c \cdot d)].$$

Von ihm „leben“ viele analytische Laboratorien geradezu., denn es erlaubt, Stoffe zu identifizieren und ihre Konzentration in einer Lösung zu bestimmen.

Wieso?

Dass viele, vor allem komplizierte Moleküle ein charakteristisches Absorptionsspektrum besitzen, lässt sich anschaulich begründen. Sie bestehen nun einmal aus Atomen, die unter Beteiligung von Coulomb-Kräften chemisch aneinander gebunden sind. Viele Moleküle stellen deshalb elektrische Dipole dar. Ein äußeres elektrisches Feld versucht nicht nur, die Moleküle zu drehen, es biegt auch an ihnen herum. Nun sind die Molekülteile nicht vollkommen starr miteinander verbunden: Sie können mit einer durch Masse und Bindungskräfte festgelegten Eigenfrequenz gedämpft um ihre Normalage schwingen. Passt die Frequenz des elektrischen Wechselfeldes, so kommt es zu Resonanz und Energieübertragung. Die Frequenzen der meisten Molekülschwingungen liegen im Bereich infraroten Lichts – die Folge ist Infrarotsorption. In dicken Atlanten beziehungsweise Computerdatenbanken sind die Spektren zahlloser Substanzen mit ihren Werten für $K(\lambda)$ gesammelt – unentbehrliches Hilfsmittel der chemischen *Absorptionsspektralanalyse*.

wichtig

Optische Absorption

- Durchlässigkeit $D(\lambda) = I(\lambda)/I_0(\lambda)$
- Lambert-Gesetz: $D(d) = \exp(-k \cdot d)$
 $k(\lambda) = \text{Extinktionskonstante}$
 $d: \text{Schichtdicke}$
- und
- Beer-Gesetz: $k(\lambda) = K(\lambda) \cdot c$
(für kleine Konzentrationen c)
- bilden zusammen
- Lambert-Beer-Gesetz:
 $I(\lambda, c, d) = I_0[\exp(-K(\lambda) \cdot c \cdot d)].$

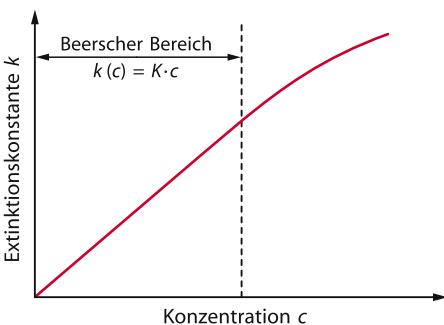


Abb. 7.56. Das Beer'sche Gesetz

Das Lambert-Beer-Gesetz ist kein Naturgesetz, sondern ähnlich dem Ohm'schen Gesetz nur eine oft erfüllte Regel.

Rechenbeispiel 7.6: Grau in Grau

Zwei Graufilter haben die Durchlässigkeiten $D_1 = 0,60$ und $D_2 = 0,35$. Welche Durchlässigkeit haben sie hintereinander gesetzt?

Lösung: Hintereinandergesetzte optische Filter multiplizieren ihre Durchlässigkeiten: $D = D_1 \cdot D_2 = 0,21$.

7.3.3 Temperaturstrahlung

Siehe auch Kap. 5.4.2.

Eine Tapete wirkt umso dunkler, je weniger Licht sie zurückstreut, je mehr sie also absorbiert. Völliges Schwarz lässt sich freilich mit keinem Farbanstrich erreichen, eher schon mit einem Stoff wie Samt: Zwischen den feinen Haaren kann sich das Licht in Mehrfachstreuung totlaufen. Zuverlässig schwarz ist das Spundloch eines leeren Fasses: Licht, das bei ihm hereinkommt, findet den Weg nicht wieder nach draußen. Dazu müssen die Innenwände nicht einmal dunkel gefärbt sein; auf ein paar Streuungen mehr oder weniger kommt es nicht an. Die Pupille eines Auges erscheint schwarz, obwohl der Augenhintergrund rot aussieht und strukturiert ist. Als *schwarzen Körper* bezeichnet man in der Physik ein kleines Loch in einer großen Kiste.

Schon in Kap. 5.2.4 wurde festgestellt: Was Licht absorbiert, strahlt auch Licht ab. Nur deshalb lässt sich thermodynamisches Gleichgewicht auch über Strahlung einstellen. Die Welt befindet sich aber nicht im Gleichgewicht – zum Glück, denn sonst gäbe es auf ihr nichts zu sehen. Alle Körper erschienen gleich hell und hätten keine Konturen, denn was die dunklen vom Umgebungslicht weniger zurückstreuend, müssten sie als Eigenstrahlung mehr aussenden. Wenn man durch eine kleine Klappe in den Brennofen einer Porzellanfabrik hineinschaut, sieht man in der Tat nichts als gleichmäßige Glut. In der normalen Umwelt des Menschen haben aber nur Primärlichtquellen Bedeutung, deren Oberflächentemperaturen weit über Zimmertemperatur liegen. Baum und Tier strahlen demgegenüber selbst nur im unsichtbaren Infrarot. Dass man die Eigenstrahlung der Hand photographieren kann, hatte Abb. 5.11 bereits gezeigt.

Was mehr absorbiert, strahlt auch mehr; folglich strahlt der schwarze Körper am meisten. Seine **schwarze Strahlung** hängt nur von der Temperatur ab. Abbildung 7.57 zeigt ihre spektrale Verteilung, berechnet nach der „Planck-Strahlungsformel“ (Max Planck, 1858–1947). Man sieht auf den ersten

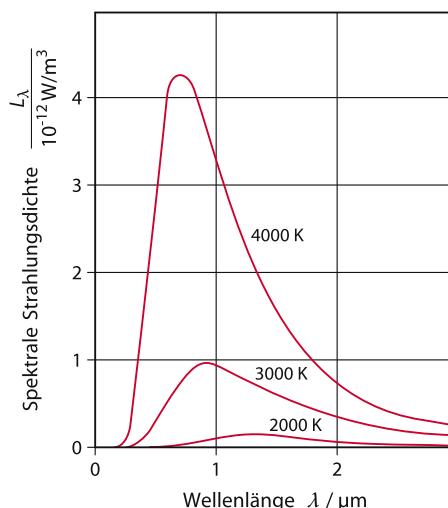


Abb. 7.57. Spektrum der schwarzen Strahlung für drei verschiedene Temperaturen

Blick, dass die gesamte Strahldichte $M(T)$, die Fläche unter der Kurve also, rapide mit der Temperatur anwächst. Sie folgt dem

$$\text{Stefan-Boltzmann-Gesetz: } M(T) = \sigma \cdot T^4$$

mit der **Strahlungskonstanten**

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$. Dabei verschiebt sich die Strahlung insgesamt zu kürzeren Wellen; erst bei etwa 600 °C beginnt ein Körper, sichtbar zu glühen. Für das Wellenlängenmaximum λ_{\max} der schwarzen Strahlung gilt das

$$\text{Wien-Verschiebungsgesetz } \lambda_{\max} = S/T$$

$$\text{mit } S = 2898 \text{ } \mu\text{m} \cdot \text{K}.$$

wichtig

Schwarze Strahlung:

$$\text{Stefan-Boltzmann-Gesetz: } M(T) = \sigma \cdot T^4$$

mit $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$.

Rechenbeispiel 7.7: Strahlender Mensch

Bei welcher Wellenlänge liegt das Maximum der Eigenstrahlung des Menschen ungefähr?

Lösung: Mit dem Wien'schen Verschiebungsgesetz bekommen wir:

$\lambda_{\max} = S/T = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K} / 310 \text{ K} = 9,3 \mu\text{m}$. Das liegt im infraroten Spektralbereich. Zur Erinnerung: wir hatten im Rechenbeispiel 5.8 abgeschätzt, dass der nackte Mensch mit etwa 160 W abstrahlt, also wie zwei kräftige Glühbirnen. Durch die Kleidung wird das auf praktisch null reduziert.

7.4

Wellenoptik

Einleitung

Lichtwellen können sich bei Überlagerung verstärken (konstruktive Interferenz) oder auch auslöschen (destruktive Interferenz). Da die Orte konstruktiver und destruktiver Interferenz wellenlän-

genabhängig sind, führt Interferenz bei weißem Licht zu Farberscheinungen (Schillerfarben). Lichtwellen können auch „um die Ecke gehen“. Man nennt diese Erscheinung Beugung. Das Auflösungsvermögen eines Mikroskops wird grundsätzlich durch die Beugung an der Fassung der Objektlinse begrenzt.

7.4.1 Polarisiertes Licht

Licht gehört zu den transversalen Wellen: Die beiden Vektoren des elektrischen und des magnetischen Feldes stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung, wie Abb. 7.3 bereits dargestellt hat. Damit sind die Richtungen der beiden Vektoren aber noch nicht festgelegt, sondern nur eingeschränkt: Dem einen Feld steht eine ganze Ebene zur Verfügung, in der es grundsätzlich seine Schwingungsrichtung frei wählen kann; das andere muss dann den rechten Winkel einhalten. In der Symmetrieebene des schwingenden Dipols liegt der elektrische Vektor parallel zur Dipolachse (s. Abb. 7.1): Die abgestrahlte Welle ist **polarisiert**, genauer, sie ist *linear polarisiert* (es gibt auch noch zirkulare und elliptische Polarisation; beide brauchen hier nicht besprochen zu werden).

Von einer makroskopischen Lampe darf man sagen, sie sei aus unzähligen Dipolen zusammengesetzt, die unabhängig voneinander in allen nur denkbaren Richtungen schwingen. Was sie gemeinsam abstrahlen, ist unpolarisiertes *natürliches* Licht, in dem alle Polarisationsrichtungen in unauflösbar rascher Zeitfolge vorkommen. Keine wird im Mittel bevorzugt.

Ein bequemes Verfahren natürliches Licht zu polarisieren bieten die **Polarisationsfolien**. Sie sind *dichroitisch*, d.h. sie bestehen aus einem Material, dessen Absorptionspektrum von der Polarisationsrichtung des einfallenden Lichtes abhängt. So wird etwa für eine bestimmte Richtung des elektrischen Vektors der ganze sichtbare Spektralbereich nahezu ungehindert hindurchgelassen, für die dazu senkrechte Richtung aber schon auf weniger als einem Millimeter

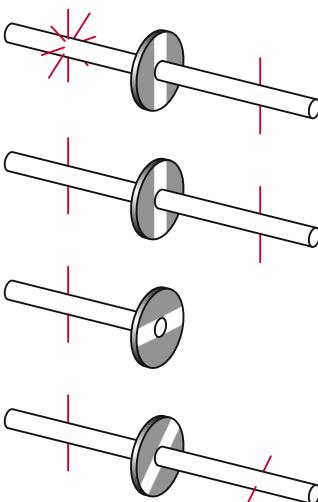


Abb. 7.58. Lineare Polarisation. Natürliches Licht nutzt mit seinem elektrischen Vektor die Ebene senkrecht zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit voll und gleichmäßig aus (1. Teilbild, linke Seite). Ein Polarisator lässt nur eine, hier vertikale Schwingungsrichtung hindurch (1. Teilbild, rechte Seite). Ein Analysator mit gleicher Polarisationsrichtung hindert den Durchgang polarisierten Lichtes nicht (2. Teilbild); er lässt kein Licht mehr durch, wenn man ihn um 90° dreht („gekreuzte Polarisatoren“, 3. Teilbild). In Zwischenstellungen wird das Licht mehr oder weniger stark durchgelassen; die Richtung seines elektrischen Vektors hält sich an die Vorgabe des letzten Polarisators

fast vollständig abgefangen. Eine solche Folie erscheint dem Auge grau: Nur knapp die Hälfte vom Lichtstrom des natürlichen Lichtes lässt sie passieren. Erst eine zweite Folie am Strahlengang macht deutlich, dass es sich nicht um einfache Graufilter handelt: Möglicherweise schwächt die zweite Folie den Lichtstrom allenfalls durch die unvermeidlichen Reflexionsverluste. Dann stehen die beiden Polarisatoren *parallel*. Dreht man aber die zweite Folie in ihrer eigenen Ebene um 90° , dann lässt sie kein Licht mehr durch: Die Polarisatoren sind *gekreuzt*. Auch in den Stellungen dazwischen absorbiert die zweite Folie Licht, mit wachsendem Drehwinkel immer mehr. Die Schwingungsrichtung des durchgelassenen Lichtes dreht sich mit; sie folgt immer dem Befehl des letzten Polarisators. Abbildung 7.58 versucht, diesen Tatbestand etwas schematisch zu skizzieren.

ren. Nach altem Sprachgebrauch wird der zweite Polarisator gern *Analysator* genannt; physikalisch unterscheidet er sich von dem ersten, dem *Polarisator*, nicht.

wichtig

Natürliches Licht: unpolarisiert, d.h. Schwingungsrichtung des elektrischen Vektors wechselt rasch und regellos. (Linear) polarisiertes Licht: Schwingungsrichtung wird über längere Zeit konstant gehalten.

Einige der komplizierten organischen Moleküle, z.B. manche Zucker, sind *optisch aktiv*; sie drehen den elektrischen Vektor des sie durchsetzenden Lichtes selbst dann noch, wenn sie in Wasser gelöst sind – der magnetische Vektor dreht sich selbstverständlich mit. Bringt man eine mit Zuckerwasser gefüllte Küvette zwischen gekreuzte Polarisatoren, so hellt sich das Gesichtsfeld auf. Man bekommt wieder Dunkelheit, wenn man den Analysator um einen Winkel δ nachdreht – man hätte auch den Polarisator um den gleichen Winkel in Gegenrichtung drehen können. δ ist der Länge der Küvette proportional und der Konzentration der aktiven Moleküle: Messverfahren der *Saccharimetrie* zur raschen Bestimmung des Zuckergehaltes im auspressten Saft einer Rübe.

wichtig

Optische Aktivität: Drehung der Polarisationsebene bei Durchgang durch eine Lösung optisch aktiver Moleküle.

Auch in der freien Natur gibt es polarisiertes Licht, meist freilich von natürlichem Licht überlagert – man spricht von *unvollständiger Polarisation*. Bienen orten mit seiner Hilfe die Sonne auch dann noch, wenn sie von Wolken oder Bergen verdeckt wird: Das Streulicht des blauen Himmels ist polarisiert wie anderes Streulicht meist auch. Dies lässt sich leicht einsehen. Man darf die Streuteil-

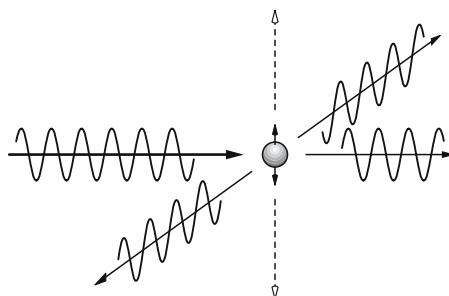


Abb. 7.59. Polarisation durch Streuung. Die vom einfallenden Licht in Resonanz angeregten Dipole strahlen nicht in ihrer Längsrichtung; polarisiert einfallendes Licht wird in Richtung seines elektrischen Vektors nicht gestreut. Voraussetzung: Die Streuteilchen dürfen nicht so groß sein, dass sie *depolarisieren*

chen nämlich als Dipole auffassen, die vom einfallenden Licht zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden – naturgemäß nur in Richtungen, die der elektrische Vektor des Primärlichtes vorgibt. Die Dipole schwingen also nur senkrecht zu dessen Einfallsrichtung und strahlen dementsprechend quer zu dieser Richtung linear polarisiertes Licht ab. Das sieht man besonders deutlich, wenn das einfallende Licht bereits linear polarisiert ist: In Richtung seines eigenen elektrischen Vektors kann es nicht gestreut werden (☞ Abb. 7.59); Dipole strahlen nicht in ihrer Längsrichtung (s. Kap. 7.1.1).

Das Modell vom Resonanzdipol funktioniert auch noch bei der Polarisation durch Reflexion (*Brewster-Gesetz*). Hier halten sich die reflektierenden Dipole bereits an die neue Marschrichtung des gebrochenen Lichtes im optisch dichteren Medium. Muss das reflektierte Bündel senkrecht zu dieser Richtung laufen, so kann es kein Licht enthalten, dessen elektrischer Vektor in der EinfallsEbene schwingt, in der Ebene also, die von Lot und Einfallsrichtung gebildet wird (☞ Abb. 7.60). Der zugehörige Einfallswinkel hängt von der Brechzahl des Mediums ab; er heißt *Brewster-Winkel*. Lenkt man also unter diesem Winkel in richtiger Richtung linear polarisiertes Licht auf eine Glasplatte, so geht alles durch, nichts wird reflektiert.

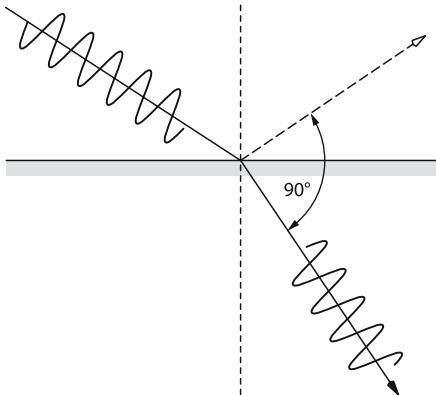


Abb. 7.60. Brewster-Gesetz (Einzelheiten im Text)

wichtig

Polarisation durch Streuung und durch Brechung: Ein vom Licht zu Schwingungen angeregter elementarer Dipol strahlt nicht in seiner Längsrichtung.

7.4.2 Interferenz

Indirekt folgt die Wellennatur des Lichtes bereits aus seiner Polarisierbarkeit: Nur transversale Wellen lassen sich so, wie beschrieben, polarisieren. Den offenkundigen Beweis liefert aber erst die *Interferenz*, die Überlagerung von zwei Wellenzügen gleicher Wellenlänge und Frequenz. Es müssen nicht Lichtwellen sein; Wasser- und Schallwellen interferieren genauso. Man kann sogar an einem rein geometrischen Modell recht anschaulich erläutern, was bei der Überlagerung zweier Kreiswellen (als ebenem Schnitt zweier Kugelwellen) passieren muss.

Die Momentaufnahme einer Kreiswelle sei dargestellt durch ein System konzentrischer Kreise gleicher Strichbreite, abwechselnd jeweils schwarz und hell auf transparente Folie gezeichnet; sie sollen Wellentäler und Wellenberge repräsentieren. Legt man zwei derartige Systeme um 12 „Wellenlängen“ ge-

geneinander versetzt übereinander, so erhält man die Figur der Abb. 7.61. Sie suggeriert, was bei einer entsprechenden Überlagerung zweier Wellen tatsächlich herauskommt: ein System heller und dunkler *Interferenzstreifen*. Abbildung 7.62 bringt den experimentellen Beweis für Wasserwellen.

Zur Begründung sei an die Überlagerung von Schwingungen erinnert (s. Kap. 4.1.5 und 6.12.3). Eine jede Welle löst überall in ihrem Wellenfeld lokale Schwingungen aus; überlagern sich zwei Wellenfelder, so überlagern sich auch deren Schwingungen. Konstruktive Interferenz verstärkt, destruktive mindert die Amplitude der Auslenkung und löscht die Schwingung im Grenzfall aus.

Im Modell der konzentrischen Kreise erscheinen die Minima dort, wo schwarze und helle Streifen sich gegenseitig abdecken; die Folien lassen kein Licht hindurch. Bei den Maxima fällt schwarz auf schwarz und hell auf hell; Licht kann durchtreten.

wichtig

Interferenz: Überlagerung zweier Wellen gleicher Wellenlänge;
Maximum: beide Wellen am Ort in Phase, Wellenberg trifft auf Wellenberg und Tal auf Tal;
Minimum: beide Wellen am Ort in Gegenphase, Wellenberg trifft auf Wellental und umgekehrt.

Es ist nicht zu leugnen: Die Vorhersage des Modells widerspricht der alltäglichen optischen Erfahrung, denn sie behauptet, dass Licht plus Licht unter Umständen Dunkelheit ergeben könnte. Trotzdem soll das Modell hier weiter verfolgt werden, und zwar quantitativ. Angenommen sei, dass die beiden Wellenzentren nicht nur mit gleicher Frequenz und Amplitude, sondern auch in gleicher Phasenlage schwingen. Dann hängt die Phase der von jedem Wellenfeld ausgelösten lokalen Schwingung nur vom Laufweg ab, von der Entfernung des „Aufpunktes“ vom Wellenzentrum. Beträgt er ein ganzzahliges (nämlich n -faches) Vielfaches der Wellenlänge λ , so sind Zentrum und

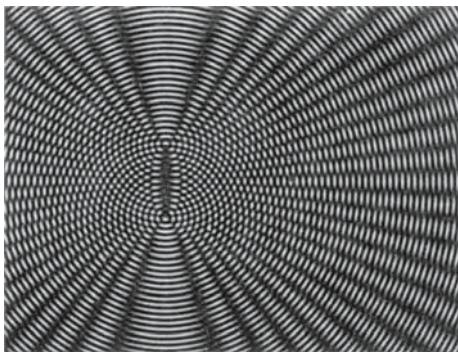


Abb. 7.61. Modellversuch zur Interferenz. Zwei Wellenfelder werden durch zwei Systeme konzentrischer Kreise simuliert. Auslöschung dort, wo helle und dunkle Streifen alternierend aufeinander treffen, also Berg auf Tal und Tal auf Berg: destruktive Überlagerung der lokal ausgelösten Schwingungen (nach R.W. Pohl)

lokale Schwingung in Phase; beträgt er ein ungeradzahliges $(2n + 1)$ -faches von $\lambda/2$, so sind sie in Gegenphase. Das gilt gegenüber beiden Wellenzentren. Wie eine Überlagerung sich auswirkt, bestimmt demnach der **Gangunterschied** x der beiden Wellen, die Differenz der beiden Laufwege. Es kommt zu Verstärkung und Maximum, wenn

$$x = n \cdot \lambda;$$

es kommt zu Auslöschung, wenn

$$x = (2n+1) \cdot \lambda/2.$$

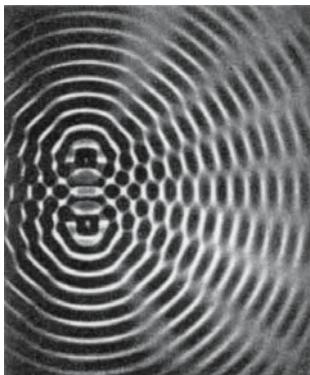


Abb. 7.62. Interferenz zweier Wasserwellen in der Wellenwanne (nach R.W. Pohl)

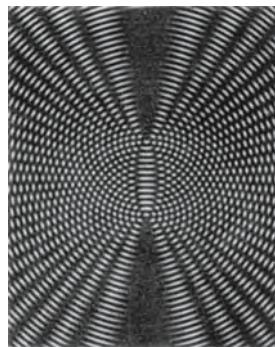


Abb. 7.63. Modellversuch zur Interferenz; gegenüber der Abb. 7.61 ist der Abstand der Wellenzentren um eine halbe Wellenlänge erhöht worden (nach R.W. Pohl)

Am leichtesten zu erkennen ist dies in Richtung der verlängerten Verbindungslinie beider Wellenzentren. In Abb. 7.61 beträgt ihr Abstand genau 12 Wellenlängen, geradzahliges Vielfaches von $\lambda/2$: Verstärkung oben und unten. In Abb. 7.63 ist dieser Abstand auf 12,5 Wellenlängen erhöht, ungeradzahliges Vielfaches von $\lambda/2$: Auslöschung.

wichtig

Gangunterschied: Differenz der Abstände von den beiden Wellenzentren zum gemeinsamen Aufpunkt.

Alle Punkte auf der Symmetrieebene zwischen den Wellenzentren sind dadurch ausgezeichnet, dass sie zu beiden Zentren gleichen Abstand haben; der Gangunterschied ist null: Auf der Symmetrieebene liegt das Maximum 0. Ordnung. Der Winkel α_n , um den das Maximum n -ter Ordnung gegen diese Ebene versetzt ist, lässt sich für hinreichend große Abstände leicht anhand der Abb. 7.64 ausrechnen. Die beiden beim fernen Aufpunkt interferierenden Strahlen verlassen die Zentren praktisch parallel. Ihren Gangunterschied x bis zum Treffpunkt findet man, indem man von einem Zentrum ein Lot auf den Strahl des anderen fällt. Zwischen diesem Lot und der Verbindungslinie der Zentren liegt der gleiche Winkel α wie zwischen der Richtung der Strahlen und

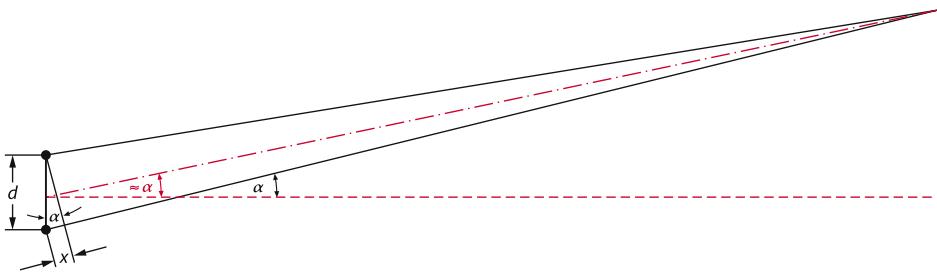


Abb. 7.64. Zur Herleitung der Beziehung für den Winkel α zwischen der Symmetrieebene zweier Wellenzentren und der Richtung eines Interferenzmaximums

der Symmetrieebene. Aus der Definition der Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck folgt dann

$$\sin \alpha = x/d$$

(d = Abstand der Zentren). Mit $x = n \cdot \lambda$ ergibt sich als Bedingung für das Maximum n -ter Ordnung

$$\sin \alpha_n = n \cdot \lambda / d.$$

Aus dieser Beziehung kann man die Wellenlänge λ bestimmen, wenn man α_n und d gemessen hat.

7.4.3 Kohärenz

Wenn Licht eine elektromagnetische Welle ist, warum gehören dann optische Interferenzen nicht zu den alltäglichen Erfahrungen?

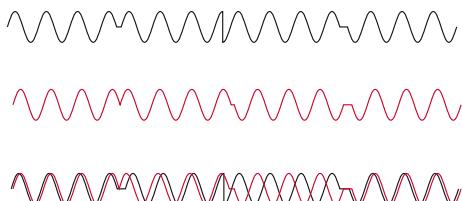


Abb. 7.65. Normalerweise werden die Wellenzüge des Lichtes von einer Unzahl rasch und unregelmäßig aufeinander folgender Wellengruppen gebildet. Eine Überlagerung führt zu ebenso rasch wechselnden Interferenzfiguren, die vom Auge nur als gleichmäßige und konstante mittlere Helligkeit wahrgenommen werden

gen, die jedermann geläufig sind? Reale, makroskopische Lampen bestehen aus unzähligen mikroskopischen Oszillatoren, die unabhängig voneinander schwingen. Ein jeder kann plötzlich seine Schwingung unterbrechen und ein Weilchen später wieder anfangen, jetzt aber in anderer Phasenlage und Polarisationsrichtung. Normalerweise wird ein Lichtbündel von einer Unzahl rasch und unregelmäßig aufeinander folgender Wellengruppen gebildet. Abbildung 7.65 versucht, dies im ersten Teilbild grobschematisch anzudeuten.

Überlagern sich zwei derartige Wellenzüge (zweites und drittes Teilbild der Abb. 7.65), so verstärken sie sich für kurze Zeit, löschen sich aber mit ihren nächsten Wellengruppen schon wieder aus. Es bilden sich zwar Interferenzfiguren, aber sie wechseln ihre Plätze so rasch und unregelmäßig, dass sich nur eine konstante und gleichmäßige mittlere Helligkeit beobachten lässt. Licht getrennter Quellen liefert keine beobachtbare Interferenz, es ist *inkohärent*.

Dagegen hilft nur eines: Man muss ein Lichtbündel aufspalten und die beiden Teilstücke einander überlagern. Auch dann besteht jedes Teilstück aus einer unregelmäßigen Folge kurzer Wellengruppen, aber diese Folge ist in beiden Bündeln die gleiche (Abb. 7.66). Je nach Gangunterschied verstärken oder schwächen sie sich auf Dauer: Die Interferenzfigur steht still. Voraussetzung ist freilich, dass der Gangunterschied unter der (mittleren) Länge der einzelnen Wellengruppen bleibt; er darf die *Kohärenzlänge* des Lichtes nicht überschreiten.

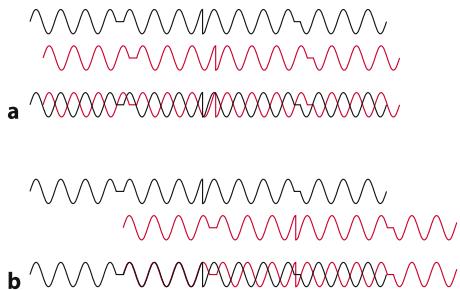


Abb. 7.66a,b. Spaltet man ein Lichtbündel in zwei Teilbündel auf, so bestehen beide aus der gleichen Folge von Wellengruppen und werden damit interferenzfähig (a), solange der Gangunterschied die Kohärenzlänge nicht überschreitet (b)

wichtig

Kohärenz: feste Phasenbeziehung zwischen zwei interferierenden Wellenzügen,
Kohärenzlänge: Länge eines ungestörten Wellenzuges zwischen zwei Phasensprüngen.

7.4.4 Dünne Schichten und Beugungsgitter

Experimentell gibt es viele Möglichkeiten, ein Lichtbündel aufzuspalten, z.B. durch Reflexion an Vorder- und Rückseite eines dünnen Glimmerblattes (Dicke d). Eine Lichtquelle bekommt dadurch zwei virtuelle Spiegelbilder, die im Abstand $2d$ hintereinander stehen. Die Kohärenzlänge des Lichtes einer Quecksilberdampflampe genügt, um ein stehendes Interferenzfeld zu bilden, das auf der Wand metergroße Ringe erzeugt (☞ Abb. 7.67).

Die Interferenzmaxima bilden spitze Kegel, aus denen die Zimmerwand Kreise herausschneidet. Deren Zentrum liegt in Richtung größten Gangunterschiedes der interferierenden Wellen; dort befindet sich das Maximum oder Minimum der höchsten Ordnung. Das Maximum 0. Ordnung tritt nicht auf; es müsste ja auf der Symmetrieebene zwischen den beiden virtuellen Wellenzentren, also hinter dem Glimmer-

blatt liegen. Solche Interferenzeffekte treten immer dann auf, wenn zwei reflektierende Grenzflächen nur wenige Lichtwellenlängen, dass heißt also wenige tausendstel Millimeter auseinander liegen. Da die Interferenzbedingungen wellenlängenabhängig sind, sind solche Erscheinungen meistens bunt. Besonders prachtvoll zeigt sich das z.B. bei dünnen Ölfilmen auf Wasser, bei denen die Interferenz zwischen dem von der Oberseite

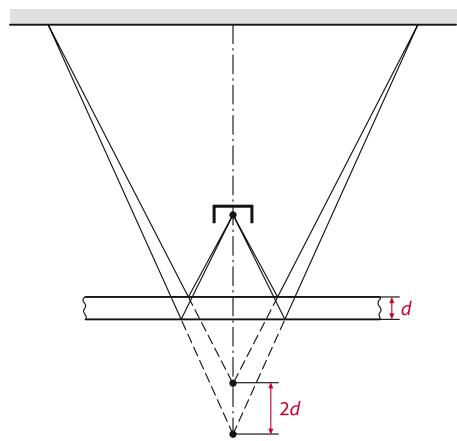


Abb. 7.67. Interferenzversuch nach R.W. Pohl. Das Licht einer Quecksilberdampflampe wird an Vorder- und Rückseite eines Glimmerblattes der Dicke d reflektiert. Es entsteht ein Wellenfeld, das von den beiden virtuellen Spiegelbildern der Lampe herzurühren scheint. Sie stehen im Abstand $2d$, strahlen kohärent und liefern an der Wand metergroße Interferenzringe, gestört durch den Schatten der Lampe und ihrer Halterung. Dass in vier schmalen Zonen die Ringe fehlen, hängt mit einer optischen Spezialität des Glimmers zusammen, der sog. Doppelbrechung

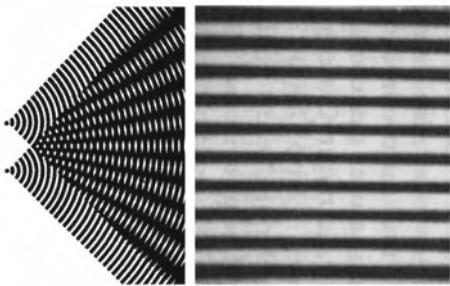


Abb. 7.68. Interferenzstreifen eines Doppelspaltes (nach R.W. Pohl)

und der Unterseite des Ölfilms reflektierten Licht schillernde Farben hervorruft. Entsprechendes sieht man bei Seifenblasen.

Interferenz an dünnen Schichten wird auch technisch genutzt. Bei *reflexvermindernden Schichten* auf Brillengläsern und photographischen Objektiven interferieren sich Reflexionen im sichtbaren Spektralbereich weitgehend weg. Statt Reflexionsverminderung kann aber auch Reflexionsverstärkung erreicht werden. Die Reflektoren moderner Halogenlampen sind nicht, wie man meinen könnte, mit Metall beschichtet, sondern mit einem ganzen Stapel dünner Interferenzschichten. Diese bewirken, dass das sichtbare Licht reflektiert wird, die Wärmestrahlung des infraroten Lichtes aber hindurchgeht und dadurch das beleuchtete Objekt nicht so stark erwärmt wird (*Kaltlichtquellen*). Dieses Beispiel lässt schon vermuten, dass so auch Filter gebaut werden können, die nur einen ganz bestimmten, schmalen Wellenlängenbereich durchlassen (*Interferenzfilter*).

Eine weitere Methode, mit Licht kleiner Kohärenzfläche Interferenzerscheinungen zu beobachten, nutzt die **Beugung** aus. Im Kap. 7.1.3 wurde diese Erscheinung schon beschrieben. Lässt man insbesondere Licht durch ein sehr kleines Loch oder einen Spalt hindurchtreten, so kommt auf der anderen Seite eine Welle mit kreisförmigen Wellenfronten heraus (s. Abb. 7.11). Schneidet man also in ein Blech zwei schmale Slitze, in geringem Abstand parallel zueinander (*Doppelspalt*) und beleuchtet dieses von der

einen Seite, so interferieren die auf der anderen Seite austretenden kreisförmigen Wellen miteinander (Abb. 7.68). Die Slitze strahlen kohärent, weil sie von praktisch der gleichen Primärwelle angeregt werden. Folglich liefern sie ein System paralleler Interferenzstreifen mit der 0. Ordnung in der Mitte. Der Streifenabstand ergibt sich aus den Überlegungen zur Abb. 7.64. Entsprechende Messungen zeigen, dass die Wellenlängen sichtbaren Lichtes tatsächlich in einem relativ schmalen Bereich um $0,5 \mu\text{m}$ liegen.

wichtig

Beugung am Doppelspalt

$$\text{Maximum } n\text{-ter Ordnung: } \sin \alpha_n = n \cdot \lambda/d.$$

Wenn man den Doppelspalt zu einem **Beugungsgitter** aus vielen äquidistanten Spalten erweitert (Abb. 7.69), so ändert sich an den Richtungen der Interferenzmaxima nichts, wohl aber an der Strahlungsleistung zwischen ihnen: Beim Doppelspalt fällt sie allmählich auf den Wert null und erreicht ihn genau in der Mitte zwischen zwei Maxima. Beim Gitter sind die Maxima deutlich schärfer und durch breite dunkle Streifen voneinander getrennt, umso deutlicher, je mehr Gitterspalten beleuchtet werden (Abb. 7.70). Warum? Der Doppelspalt liefert lediglich zwei Wellenzüge; nur bei einem Gangunterschied von $\lambda/2$ (oder ei-

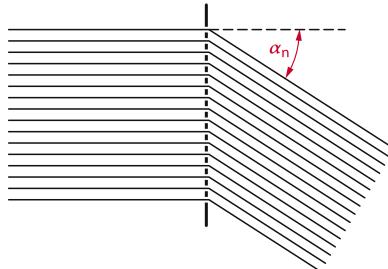


Abb. 7.69. Beugungsgitter, schematisch. Die Richtungen der Interferenzmaxima sind die gleichen wie beim Doppelspalt; die Maxima selber sind aber wesentlich schärfer ausgeprägt, weil sich auch die Wellenzüge weit entfernter Spalte mit entsprechend höheren Gangunterschieden gegenseitig auslöschen können

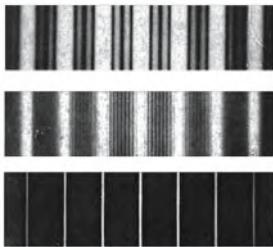


Abb. 7.70. Beugungsfiguren von Gittern mit 6, 10 und 250 Spalten (nach R.W. Pohl)

nem ungeradzahligen Vielfachen davon löschen sie sich vollkommen aus. Bei einem Gitter mit 1000 Slitzen genügt aber schon ein Gangunterschied von einem Tausendstel λ zwischen Nachbarn zur Auslöschung, denn dies bedeutet eine halbe Wellenlänge Gangunterschied zwischen den Slitzen 1 und 501, zwischen 2 und 502 usw.: Zu jedem Wellenzug aus einem Slitz findet sich schon jetzt ein zweiter, der die zur Interferenzauslöschung notwendige halbe Wellenlänge Gangunterschied mitbringt.

Optische Gitter haben praktische Bedeutung: Beleuchtet man sie mit einem Parallelbündel weißen Lichtes, so fächern sie es in wellenlängensortierte Parallelbündel auf, ein jedes ausgesandt in Richtung seines Interferenzmaximums. Ähnlich den Prismen können auch Beugungsgitter Licht spektral zerlegen (*Gitterspektrometer*). Aus dem täglichen Leben kennt man das von den Compact Discs zur Musikwiedergabe. Die digitale Information ist auf einer CD in Rillen gespeichert, die einen Abstand von $1,6 \mu\text{m}$ haben. Das liefert ein gutes Beugungsgitter und lässt die CDs auf der Abspielseite bunt schillern.

Rechenbeispiel 7.8: Kohärenzlänge

Angenommen, Abb. 7.67 sei mit dem grünen Licht der Quecksilberlampe ($\lambda = 546 \text{ nm}$) und einem $0,11 \text{ mm}$ dicken Glimmerblatt erzeugt worden. Von welcher Ordnung ungefähr wäre dann das zentrale Maximum? Wie groß müsste die Kohärenzlänge der Lampe mindestens gewesen sein?

Lösung: Der kleinste Gangunterschied entspricht dem Abstand der virtuellen Spiegelbilder, also zweimal die Glimmerdicke. Für die Ordnung gilt also: $n = 2 \cdot d/\lambda = 0,22 \text{ mm}/546 \text{ nm} \approx 400$. Die Kohärenzlänge muss $2 \cdot d = 0,22 \text{ mm}$ deutlich übersteigen.

Rechenbeispiel 7.9: Die Spektren überlappen

Weißes Licht mit Wellenlängen zwischen 400 nm und 750 nm fallen auf ein Beugungsgitter mit 4000 Slitzen auf ein Zentimeter. Zeige, dass das Blau ($\lambda = 450 \text{ nm}$) der dritten Ordnung mit dem Rot ($\lambda = 700 \text{ nm}$) der zweiten Ordnung überlappt.

Lösung: Der Abstand der Slitze im Gitter beträgt $d = 1/400 \text{ cm} = 2,5 \mu\text{m}$.

Für die Lage des dritten Interferenzmaximums des blauen Lichts ergibt sich:

$$\sin \alpha_3 = 3 \cdot \frac{450 \text{ nm}}{2,5 \mu\text{m}} = 0,54,$$

das ist $\alpha_3 = 33^\circ$. Für Rot ergibt sich:

$$\sin \alpha_3 = 2 \cdot \frac{700 \text{ nm}}{2,5 \mu\text{m}} = 0,56,$$

das ist $\alpha_3 = 34^\circ$.

7.4.5 Beugungsfiguren

Gleichmäßige Beugung aus einem Loch oder Slitz heraus in den ganzen Halbraum hinein (s. Abb. 7.11) setzt einen Locheindruck, eine Slitzbreite voraus, die gegenüber der Wellenlänge klein ist. Bei Wasserwellen lässt sich das noch einigermaßen erreichen, bei sichtbarem Licht würden die Interferenzfiguren aber zu dunkel für eine bequeme Beobachtung. Folglich macht man die Slitz breiter. Ein breiter Slitz liefert aber schon für sich allein eine Beugungsfigur. Abbildung 7.71 zeigt sie. Um dies zu verstehen, nimmt man an, in der Slitzebene liegen elementare Wellenzentren dicht an dicht, die vom (senkrecht einfallsenden) Primärlicht zu gleichphasigen Schwingungen



Abb. 7.71. Beugungsfigur eines Spaltes; in dem die Bildmitte zur Vermeidung von Überstrahlungen ausgeblendet ist (nach R. W. Pohl)

angeregt werden und entsprechend abstrahlen (*Huygens-Elementarwellen*). Hat der Spalt die Breite D , so beträgt der Gangunterschied zwischen den beiden unter dem Winkel α emittierten Randstrahlen $x = D \cdot \sin \alpha$. Deckt sich x mit der Wellenlänge λ , so bekommt ein Randstrahl gegenüber dem des Elementarzentrum in der Spaltmitte den Gangunterschied $\lambda/2$, und beide löschen sich durch Interferenz aus (☞ Abb. 7.72).

Demnach lässt sich zu jedem Elementarzentrum in der einen Spalthälfte ein korrespondierendes in der anderen finden, dessen Welle sich mit der seinen weginterferiert: α bestimmt die Richtung des ersten Minimums in der Beugungsfigur des Einzelspaltes. Vergleichbare Situationen wiederholen sich immer dann, wenn der Gangunterschied zwischen den Randstrahlen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge wird. Dazwischen bleibt ein Teil elementarer Wellenzentren übrig, die keinen Partner zur Interferenzlöschung finden. Ein einzelner Spalt der Breite D liefert demnach Beugungsminima in Richtungen, die der Beziehung

$$\sin \alpha_n = n \cdot \lambda / D$$

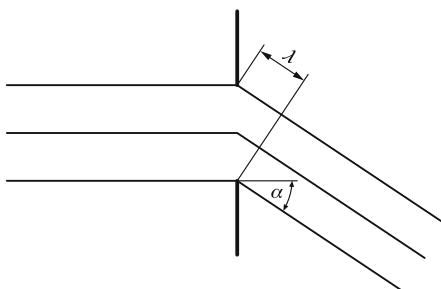


Abb. 7.72. Zur Beugung am Spalt. In der Spaltebene werden elementare Wellenzentren als Ausgangspunkte von *Huygens-Elementarwellen* angenommen. Erstes Interferenzminimum bei einer vollen Wellenlänge Gangunterschied zwischen den Randstrahlen

gehoren. Sie ähnelt der Formel für die Interferenzmaxima zweier punktförmiger Wellenzentren.

wichtig
Beugung am Spalt,
Minimum: $\sin \alpha_n = n \cdot \lambda / D$.

Bemerkenswert an dieser Formel ist: Je schmäler der Spalt, je kleiner D , umso größer wird α , umso breiter also das zentrale Maximum im Beugungsmuster. Diese paradox anmutende Tatsache ist wichtig, um das **Auflösungsvermögen** von optischen Instrumenten zu verstehen. Grundsätzlich liefert jedes Loch eine Beugungsfigur, auch die Fassung einer Linse. Selbst ein ideales, im Sinne der geometrischen Optik fehlerfreies Objektiv bildet deshalb einen Gegenstandspunkt nicht in einen Bildpunkt ab, sondern als ausgedehntes Beugungsscheibchen. Desse Durchmesser bestimmt das Auflösungsvermögen zum Beispiel eines Mikroskops: Zwei Detailpunkte des Objekts können allenfalls dann noch getrennt wahrgenommen werden, wenn das Beugungsscheibchen des einen mit seinem Zentrum auf das erste Minimum des anderen fällt (☞ Abb. 7.74). Will man ein hohes Auflösungsvermögen, so muss also der Durchmesser der Objektivlinse möglichst groß sein. Eine genauere Betrachtung zeigt, dass das Verhältnis von Linsendurchmesser zu Brennweite möglichst groß sein muss. Deshalb rückt das Objektiv umso dichter an das Objekt heran, je höher die Vergrößerung gewählt wird. Bei maximaler Vergrößerung ist der Abstand zuweilen nur noch ein zehntel Millimeter oder kleiner, um die nötige Auflösung zu erreichen. Maß für das Auflösungsvermögen ist die numerische Apertur des Objektivs. Sie ist der Sinus des halben Winkels des

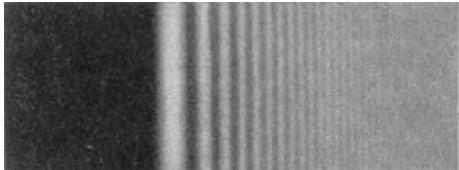


Abb. 7.73. Beugung an der Halbebene (nach R.W. Pohl)

Winkelbereiches, den das Objektiv erfasst. Dieser hängt eng mit dem Verhältnis Durchmesser zu Brennweite zusammen. Es gilt nun in etwa:

$$\text{numerische Apertur} = \frac{\lambda}{d},$$

wobei d der kleinste noch auflösbare Distanz ist. Sehr gute Objektive erreichen eine numerische Apertur von etwa 0,9. Die Auflösbare Länge d ist also immer etwas größer als die Lichtwellenlänge λ . Die Verwendung von kurzwelligem blauen Licht bringt die beste Auflösung.

Beugung tritt nicht nur an Spalten oder Löchern auf, sondern an beliebigen Kanten. Das Licht dringt dort etwas in den Schatten ein und im hellen Bereich bildet sich ein Streifenmuster (☞ Abb. 7.73). Dies alles lässt sich nachrechnen mit dem Prinzip der **Huygens-Elementarwellen**. Man kann die Ausbreitung einer jeden Welle durch die Annahme deuten, dass alle Punkte im Raum des Wellenfeldes zu elementaren Sekundärstrahlern werden, die phasengleich mit der erregenden Welle schwingen. Diese Wellenzentren liegen im freien Bündel dicht an dicht, ihre Sekundärwellen interferieren sich in allen Richtungen weg, außer in der

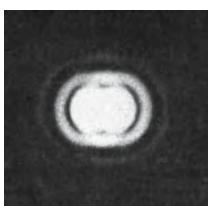


Abb. 7.74. Zum Auflösungsvermögen eines Mikroskops: überlappende Beugungsscheiben zweier Bildpunkte (nach R.W. Pohl)

Richtung der durchlaufenden Welle. Sobald aber, z.B. durch einen schattenwerfenden Schirm, lokal Wellenzentren ausfallen, bekommt der Rest die Möglichkeit, eine Beugungsfigur zu bilden, wie sie ☞ Abb. 7.73 zeigt. Sie lässt sich in der Tat mit dem Huygens- Prinzip quantitativ deuten, was hier aber nicht vorgeführt werden soll.

Rechenbeispiel 7.10: Breit aber dunkel

Das Licht einens He-Ne-Lasers ($\lambda = 633 \text{ nm}$) fällt auf einen $1 \mu\text{m}$ weiten Spalt. Wie breit ist das Beugungsmaximum gemessen in Winkelgrad beziehungsweise in Zentimetern auf einem 20 cm entfernten Schirm?

Lösung: das erste Minimum erscheint unter dem Winkel:

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{d} = \frac{633 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}} = 0,633 \Rightarrow \alpha = 39^\circ.$$

Die halbe Breite x auf dem Schirm ergibt sich aus dem Tangens dieses Winkels:

$$\tan \alpha = \frac{x}{20 \text{ cm}} \Rightarrow x = 20 \text{ cm} \cdot 0,82 = 16,4 \text{ cm}.$$

Die volle Breite hat den doppelten Wert. Das Maximum ist also sehr breit, aber auch sehr lichtschwach, denn durch $1 \mu\text{m}$ kommt nicht viel Licht durch. Um das im Hörsaal vorzuführen, muss man sehr gut abdunkeln.

7.5

Quantenoptik

Einleitung

Ein Vorgang, der sich periodisch wiederholt, kann seine Energie nicht kontinuierlich, sondern nur in diskreten Beträgen ändern, Quanten genannt. Nach einem fundamentalen Naturgesetz ist die Quantenenergie ΔW_Q der Frequenz f proportional: $\Delta W_Q = h \cdot f$. Die Planck-Konstante h ist so klein, dass die Quantenbedingung bei makroskopischen Oszillatoren keine Rolle spielt. Darum gehört sie nicht zur Alltagserfahrung des

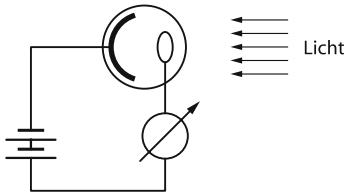


Abb. 7.75. Vakuumphotozelle, schematisch

Menschen. Dennoch sind die Quanten naturgegeben; in atomaren Dimensionen haben sie erhebliche Konsequenzen von der Spektralanalyse bis zur Röntgenstrahlung. Licht breitet sich zwar als Welle aus, emittiert und absorbiert wird es aber in Quanten. Wenn man genau weiß, was man meint, darf man ein Lichtbündel auch als Quantenstrom interpretieren.

7.5.1 Das Lichtquant

Licht transportiert Energie; grundsätzlich muss deshalb ein Elektron, das sein Metall verlassen möchte, sich die dafür nötige Austrittsarbeit auch von absorbiertem Licht geben lassen können. Praktisch geschieht dies in der sog. „Vakuumphotozelle“, einem evakuierten Glaskolben mit einer großflächigen **Photokathode** und einer unscheinbaren Anode gegenüber, die einfallendem Licht möglichst wenig im Weg stehen soll. Legt man zwischen beide eine Spannung mit richtigem Vorzeichen, misst man bei passender Beleuchtung in der Tat einen **Photostrom** (☞ Abb. 7.75); polt man um, fließen allenfalls Leckströme. Dies ist der **lichtelektrische Effekt (Photoeffekt)**.

Wer es ganz genau nimmt, spricht vom *äußeren* Photoeffekt, im Gegensatz zum *inneren*, bei dem nicht Leitungselektronen ihren Leiter verlassen, sondern lediglich gebundene Elektronen vorübergehend zu Leitungselektronen werden und so die Resistivität des *Photoleiters* während der Belichtung ändern. Dieser innere Photoeffekt wird üblicherweise in Lichtmessgeräten ausgenutzt.

Die Vakuumphotozelle vermag sogar eine Spannung zu erzeugen. Ein Elektron kann nämlich vom absorbierten Licht mehr als

nur die exakte Austrittsarbeit übernehmen, den Überschuss als kinetische Energie ins Vakuum mitnehmen und so bei passender Startrichtung die Anode nicht nur ohne Nachhilfe durch äußere Spannung erreichen, sondern sogar eine Gegenspannung überwinden. Diese stellt sich als *Leerlaufspannung* U_L dann von selbst ein, wenn man Batterie und Strommesser aus dem Außenkreis herausnimmt und ihn über einen hochohmigen Spannungsmesser schließt. Das Ergebnis sorgfältiger Messreihen überrascht: U_L hängt nicht von der Bestrahlungsstärke der Photokathode ab, sondern von der Wellenlänge des Lichts, besser von dessen Frequenz f . Unterhalb einer Grenzfrequenz f_g passiert gar nichts, oberhalb steigt U_L linear mit f an (☞ Abb. 7.76). Mit dem „klassischen“ Bild einer elektromagnetischen Welle ist dieses experimentelle Faktum nicht zu verstehen, denn deren Leistung und Energie hängt nur von den Amplituden der beiden Felder und ab und nicht von der Frequenz f . Was tun?

Deuten lässt sich der äußere Photoeffekt mit der **Quantenhypothese**: Ein rotierendes Rad, ein schwingendes Pendel, kurz jedes System, das einen periodischen Vorgang mit der Frequenz f ausführt, kann die Energie dieses Vorganges nicht kontinuierlich ändern, wie die klassische Physik annimmt, sondern nur in Sprüngen mit der

$$\text{Quantenenergie } W_Q = h \cdot f.$$

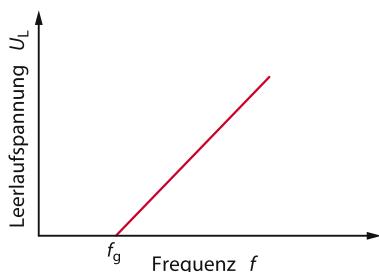


Abb. 7.76. Abhängigkeit der Leerlaufspannung U_L einer Vakuumphotozelle in Abhängigkeit von der Frequenz f des Lichtes. Die Grenzfrequenz f_g , bei der der Photoeffekt einsetzt, hängt vom Material der Photokathode, nicht aber von der Bestrahlungsstärke des Lichtes ab

Das **Planck'sche Wirkungsquantum** h , nach seinem Entdecker Max Planck benannt (1858–1947) erweist sich als fundamentale Naturkonstante:

$$h = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 4,1357 \cdot 10^{-15} \text{ eVs.}$$

Sie wird *Wirkungsquantum* genannt, denn die Joulesekunde ist Einheit der physikalischen Größe *Wirkung* (Energie mal Zeit).

wichtig

Quantenhypothese: Ändern kann ein periodischer Vorgang mit der Frequenz f seine Energie nur in Quantensprüngen
 $\Delta W_0 = h \cdot f$,
Planck'sches Wirkungsquantum $h \approx 4 \cdot 10^{-15} \text{ eVs.}$

Dass sie nicht früher entdeckt wurde, liegt an ihrer Kleinheit. Das Pendel von Großvaters Standuhr schwingt mit etwa einem Hertz. Die zugehörige Quantenenergie von weniger als 10^{-33} J entzieht sich jeder Messung. Wenn die Uhr abgelaufen ist, schwingt das Pendel nach einer e-Funktion aus; Quantensprünge kann niemand erkennen. Molekülschwingungen absorbieren oder emittieren meist infrarotes Licht; dazu gehören dann Frequenzen in der Größenordnung 10^{14} Hz und Quantenenergien im Bereich $0,1 \text{ eV}$ – für makroskopische Systeme immer noch blitzwenig, aber für ein einzelnes Molekül keineswegs. Bei Zimmertemperatur liegt die ihm zustehende mittlere thermische Energie nur in der gleichen Größenordnung, nicht etwa weit darüber.

Die Quantenhypothese macht Beobachtungen nach Art der Abb. 7.76 geradezu selbstverständlich: Liegt die Austrittsarbeit W_A des Metalls über der Quantenenergie W_Q des Lichtes, kann das Elektron mit ihr nichts anfangen; liegt sie darunter, bleibt dem Elektron die Differenz, um die Leerlaufspannung U_L aufzubauen:

$$h \cdot f = W_Q = e_0 \cdot U_L + W_A.$$

Das ist die Gleichung eines linearen Zusammenhangs. Mit der Grenzfrequenz f_g lässt sich demnach die Austrittsarbeit messen:

$$W_A = h \cdot f_g.$$

Im Bereich der elektromagnetischen Wellen versteht man unter *energiereicher Strahlung* eine kurzwellige Strahlung mit hoher Quantenenergie, nicht etwa eine „intensive“ Strahlung mit hoher Strahlungsstärke. Bei der Photokathode bewirkt eine Steigerung der Bestrahlungsstärke lediglich, dass mehr Quantenenergien absorbiert werden und mehr Elektronen austreten können: Der Photostrom steigt, nichts sonst. So gesehen, darf man einen Strahlungsfluss (Watt) als Strom von *Quanten*, von *Photonen* interpretieren, als „Quantenstrom“ oder „Photonenstrom“, gemessen als Anzahl durch Sekunde. Nur darf man sich nicht vorstellen, da flögen Photonen wie Schrotkugeln durch die Gegend. Licht wird in Quanten emittiert und absorbiert, aber unterwegs ist es Welle. Beugung und Interferenz lassen keine andere Deutung zu.

Dahinter steckt der berühmte *Dualismus von Welle und Korpuskel*, der in den 20er-Jahren schier zu einem „Umsturz im Weltbild der Physik“ führte – so der Titel einer Buches aus jener Zeit – und die Grenze der bis dahin betriebenen (und bisher in diesem Buch behandelten) sog. „klassischen Physik“ markiert. Diese Physik ist nicht falsch, in ihrem Geltungsbereich liefert auch die „moderne Physik“ keine anderen Ergebnisse; sie tut es nur auf kompliziertere und weniger anschauliche Weise. Die Welt der Quanten bleibt freilich der klassischen Physik verschlossen.

wichtig

Licht breitet sich als Welle aus, wird aber in Quanten (Photonen) emittiert und absorbiert.

Rechenbeispiel 7.11: Photonen aus der Glühlampe

Wie viele sichtbare Photonen kommen gröszenordnungsmäig aus einer 100 W Glühbirne?

Lösung: Wir nehmen eine mittlere Wellenlänge von 500 nm für das sichtbare Licht. Das liefert eine Energie des einzelnen Photons von

$$W_Q = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz} \\ = 4 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

Da unsere Glühbirne pro Sekunde 100 J abgibt, wären das etwa 10^{20} Photonen. Tatsächlich gehen aber nur etwa 5 % der Leistung in sichtbares Licht (der Rest ins Infrarot). Deshalb ist 10^{19} eine bessere Schätzung.

7.5.2 Energiezustände und Spektren

Moleküle sind nicht starr; ihre Teile können gegeneinander schwingen und, da sie meist nicht elektrisch neutral sind, als schwiegende Dipole elektromagnetische Wellen abstrahlen oder mit ankommenden in Resonanz geraten. Die Eigenfrequenzen organischer Moleküle liegen im Bereich bis etwa 10^{14} Hz hinauf, entsprechen also infrarotem Licht. Jede Molekülsorte besitzt ein sie charakterisierendes Spektrum, das, meist in Absorption beobachtet, gern zur chemischen Absorptionspektralanalyse benutzt wird (s. Kap. 7.3.2). Soweit das Bild der klassischen Physik. Die Quantenphysik fügt nur noch ergänzend hinzu: Auch ein molekularer Oszillatator kann seine Schwingungsenergie nur in Quantensprüngen ändern; ihm sind nur diskrete Energiezustände erlaubt, die man in vertikaler Energieskala wie die Sprossen einer Leiter übereinander zeichnen kann.

Auch Atome emittieren Licht. Die an sich farblose Flamme des Bunsenbrenners wird leuchtend gelb, wenn Spuren von Kochsalz in sie hineingeraten. Ein Fingerabdruck auf einem sauberen Stab aus Quarzglas genügt bereits. Eine spektrale Zerlegung liefert zwei eng benachbarte, scharfe Linien bei 589,0 nm und 589,6 nm, die sog. „D-Linien“ des Natriums. Atome anderer Elemente führen zu anderer Flammenfärbung, die in

einfachen Fällen eine durchaus praktikable Methode zur qualitativen chemischen Analyse liefert. In den raffinierten Techniken der *Emissions-Spektral-Analyse* ist dieses Verfahren zu hoher technischer Vollkommenheit entwickelt worden.

Beim Atom fällt es der klassischen Physik schwer, einen mechanischen Oszillatator mit Rückstellkraft und geladener Pendelmasse zu identifizieren; darum verzichtet man auf sie ganz und hält sich gleich an die Energiezustände der Quantenmechanik, an das *Niveauschema*, das man für jedes chemische Element in mühsamer Kleinarbeit aus dem Spektrum seines Atoms hat erschließen müssen.

Zunächst einmal befindet sich ein Atom im Zustand niedrigster Energie, im *Grundzustand*. Dort passiert solange nichts, wie dem Atom keine *Anregungsenergie* zugeteilt wird, mit der es mindestens in einen angeregten Zustand übergehen kann. Woher diese Energie stammt, spielt keine Rolle; sie darf der thermischen Energie einer Flamme entstammen, dem Elektronenstoß in einer Gasentladung oder auch einem genau passenden Quant. Führt die Anregung nur in den ersten angeregten Zustand, so hat das Atom keine Wahl: Es kann nur mit dem gleichen Quantensprung in den Grundzustand zurückkehren, mit dem es ihn verlassen hat. Ist das Atom aber in einen höheren angeregten Zustand gelangt, darf es unter Beachtung bestimmter *Auswahlregeln* entscheiden, ob es in einem großen Sprung, also unter Emission eines relativ energiereichen „kurzwelligen“ Quants zurückkehrt oder in mehreren Sprüngen mit mehreren Quanten. Zuweilen geht das bis zum Grenzfall des Hoppelns von Sprosse zu Sprosse, von Niveau zu Niveau.

Die Abstände der Sprossen sind nicht gleich wie bei einer Leiter, sie werden nach oben immer kleiner, die zugehörigen Quanten immer „langwelliger“. Das macht die Übersetzung eines beobachteten Spektrums in das zugehörige Niveauschema so mühsam. Relativ leicht gelingt dies noch beim einfachsten aller Atome, dem des Wasserstoffs; Abb. 7.77 zeigt einen

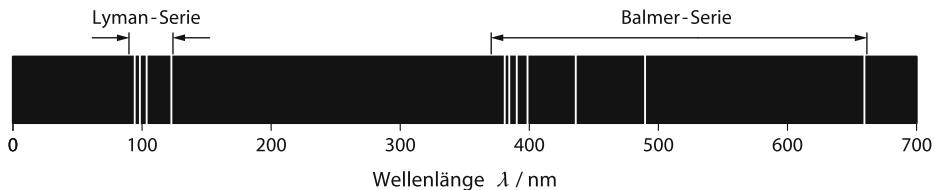


Abb. 7.77. Spektrum des Wasserstoffs (Ausschnitt); die stärkeren Linien sind hier von Hand gezeichnet; zu kurzen Wellen folgen noch zahlreiche, dichter beieinander liegende schwächeren Linien

zeichnerisch etwas reduzierten Ausschnitt aus seinem Spektrum. Man erkennt zwei *Serien* mit kurzweligen *Seriengrenzen*, vor denen sich die Spektrallinien so drängeln, dass sie sich nicht mehr getrennt zeichnen lassen. Zur Emission von Linien der *Lyman-Serie* im Ultravioletten gehören Quantensprünge in den Grundzustand, zu der ins Sichtbare reichenden *Balmer-Serie* Sprünge in den ersten angeregten Zustand. Die infrarote *Paschen-Serie* mit Sprüngen in den zweiten angeregten Zustand ist in der Abbildung nicht mehr enthalten.

☞ Abbildung 7.78 zeigt das Niveauschema des Wasserstoffs. Bei Atomen „höherer“, weiter oben im Periodensystem stehender Elementen sehen die Niveauschemata kom-

plizierter aus. Führt man einem H-Atom im Grundzustand mehr als die Quantenenergie zur Lyman-Grenze, also mehr als 13,59 eV zu, verliert es sein Hüllelektron und wird zum H^+ -Ion: Die Lyman-Grenze entspricht der Ionisierungsenergie. Dies legt die Vermutung nahe, dass alle Niveauschemata etwas mit den Elektronenhüllen der Atome zu tun haben. Davon wird später noch die Rede sein (s. Kap. 8.1.1).

wichtig

Niveauschema:

Graphische Darstellung der einem Atom von der Quantenmechanik erlaubten Energiezustände mit Grundzustand und angeregten Zuständen. Quantensprünge zwischen diesen Zuständen entsprechen Linien im Emissions- oder Absorptionsspektrum.

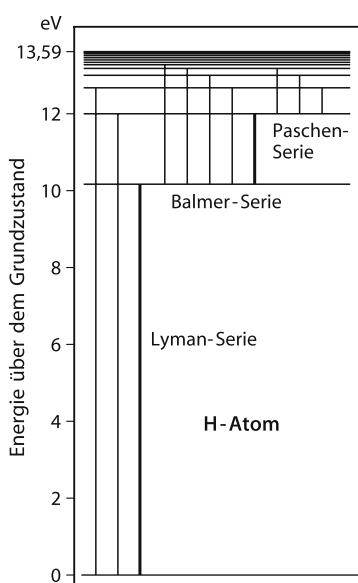


Abb. 7.78. Niveauschema des Wasserstoffatoms (nach R.W. Pohl)

Im Licht einer Natriumdampflampe wirft kalter Natriumdampf tiefschwarze Schatten. Das gleiche Licht, das ein Atom emittiert, wird auch von ihm absorbiert. Fällt das so angeregte Atom nach kurzer Zeit wieder in den Ausgangszustand zurück, emittiert es das Quant, das es eben erst absorbiert hatte; das eingestrahlte Licht wird ohne Frequenzänderung gestreut. Zwischen den Quantensprüngen von Emission und Absorption vergeht aber eine gewisse Zeit; sie hängt von der mittleren *Lebensdauer* des angeregten Zustands ab. Die beiden Quanten wissen also nichts voneinander, und die Phasen der beiden zugehörigen Wellen auch nicht: Die Streuung erfolgt inkohärent, der in ☞ Abb. 7.59 beschriebene Polarisationsversuch funktioniert nicht.

wichtig

Kohärente Streuung: Streuzentrum

selbst gar nicht beteiligt,

inkohärente Streuung: Absorption und rasch folgende Re-Emission eines Quants.

Führt der Quantensprung der Anregung in einem Schritt über mehrere Niveaus hinweg, darf das Atom bei der Abregung in mehreren Quantensprüngen von Niveau zu Niveau zurückkehren. Jedes der emittierten Quanten ist dann „kleiner“, jede emittierte Strahlung langwelliger als bei der Absorption. Der Energiesatz muss nur in summa befolgt werden. Leuchtstoffe werden auf diesen Mechanismus hin geradezu gezüchtet. Sie erlauben, kurzwelliges ultraviolettes oder Röntgenlicht sichtbar zu machen: Ein solcher Leuchtstoff wird von energiereichen Quanten angeregt und strahlt dafür energieärmere Quanten im sichtbaren Spektralbereich wieder ab. Liegt die Lebensdauer der angeregten Zustände unter 10 Nanosekunden, so spricht man von *Fluoreszenz*, andernfalls von *Phosphoreszenz*. Oberbegriff zu beiden ist *Lumineszenz*. Man muss einen Leuchtstoff nicht auf optische Anregung hin züchten; der Bildschirm des Fernsehempfängers verlangt *Elektrolumineszenz*, Glühwürmchen betreiben *Biolumineszenz*.

Die Anregung durch Elektronenstoß in der Gasentladung hat große technische Bedeutung, denn sie erzeugt wenig Wärme und wenig infrarotes Licht, liefert also einen wesentlich besseren Wirkungsgrad als die Glühbirne. Nur ist ihr Licht so farbig, dass man es allenfalls zur Straßenbeleuchtung und besser zur Lichtreklame in sog. „Neonröhren“ verwenden kann (die nur selten wirklich Neon enthalten). Quecksilberdampflampen emittieren blau-grünes Licht und vor allem ultraviolettes. Man kann es zur Bräunung der Haut verwenden; in *Leuchtstoffröhren* fängt man das UV im Glaskolben ab und setzt es mit geeigneten Leuchtstoffen in sichtbares Licht um. Durch deren geschickte Mischung eine spektrale Verteilung zu erreichen, die

das menschliche Auge als angenehm empfindet, ist nicht ganz einfach.

Atome emittieren und absorbieren die für sie charakteristischen Linienspektren nur, solange sie auch wirklich Atome sind, im Dampf also, im Gas. Sobald sie sich in chemischer Bindung einem Molekül anschließen, vergessen sie ihr eigenes Spektrum: Das Molekül bestimmt jetzt das Niveauschema. Hier nun kommt das Anschauungsvermögen des Menschen in Bedrängnis. In Kap. 7.3.2 waren die infraroten Absorptionsbanden organischer Moleküle als Resonanzkurven von Oszillatoren gedeutet worden, von Schwingungen einzelner Molekülteile gegeneinander. In der Quantensprache muss man diese Banden aber als Folge des energetischen Abstandes angeregter Zustände im Niveauschema des Moleküls beschreiben. Sie sind nur deswegen nicht scharf und monochromatisch, weil die Lage eines Niveaus statistisch schwankt – auch die Spektrallinien der Atome sind nicht unendlich scharf. Diese Schwankungen werden umso größer, je dichter man die Moleküle zusammenpackt und je mehr thermische Energie man ihnen zur Verfügung stellt. Deshalb sendet ein glühendes Metall ja auch ein kontinuierliches Spektrum aus, obwohl es aus Atomen besteht: Die Niveaus sind so sehr verschmiert, dass ihre Abstände alle gewünschten Quantensprünge erlauben. Es hängt vom Einzelfall ab, ob man mit dem klassischen Modell der Oszillatoren auskommt, oder ob man besser die Quantenphysik und die Energieniveaus bemüht. Anschaulich verbinden lassen sich die beiden Modelle nicht.

Streng genommen sind alle Vorgänge gequantelt, denen sich eine Frequenz zuordnen lässt. Strenggenommen kann das Pendel einer Standuhr Reibungsenergie nur in Quanten abgeben. Praktische Bedeutung hat diese Quantelung nicht, weil die Quantenenergie im Vergleich zur Schwingungsenergie verschwindend klein ist. Wäre die Planck-Konstante größer, so gehörten Quanteneffekte zu den Erfahrungen des Alltags; das Anschauungsvermögen hätte sich längst auf sie eingestellt.

7.5.3 Laser

Normalerweise führen die Atome einer Gasentladung ihre Quantensprünge völlig unabhängig voneinander aus; entsprechend ist das ausgesandte Licht inkohärent. Von dieser Regel gibt es aber eine markante Ausnahme: der *Laser*. Sie sei am Beispiel des Helium-Neon-Lasers besprochen.

Das Helium dient hier nur der leichteren Anregung. Aus nicht näher zu erörternden Gründen nehmen seine Atome besonders gern eine ganz bestimmte Energie durch Elektronenstoß auf und geben sie als angeregte Atome beim nächsten Treff bevorzugt an Neonatome unmittelbar weiter. Dabei geht das He-Atom strahlungslos in seinen Grundzustand zurück. Es hat seine Schuldigkeit getan. Das so angeregte Ne-Atom bevorzugt nun einen Abregungsschritt, der nicht zum Grundzustand zurückführt, sondern lediglich ein infrarotes Quant emittiert. Damit landet das Atom aber in einer Sackgasse: Sein neuer Anregungszustand ist *metastabil*, er hat eine ungewöhnlich lange Lebensdauer. Infolgedessen geraten ungewöhnlich viele Atome in diesen Zustand; sie möchten herunterspringen, trauen sich aber nicht.

Irgendwann riskiert es ein Atom im metastabilen Zustand aber doch. Dann sendet es ein Quant der Laserlinie von 632,8 nm Wellenlänge aus (helles Rot). Dieses Quant verbreitet nun die Kunde von dem mutigen Springer; Folge: Andere Atome wagen es auch. Weil sie aber nicht aus eigenem Entschluss *spontan* heruntergesprungen sind, sondern auf Abruf gewartet haben, gibt das erste Quant die Phasenlage vor: Alle anderen Quanten schließen sich an. Abbildung 7.79 versucht, diesen Vorgang der *stimulierte Emission* schematisch darzustellen. Von ihr hat der Laser seinen Namen: Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation. Weil sich die Strahlung der abgerufenen Quanten in der Phase an die des auslösenden Quants anschließt, bekommt das

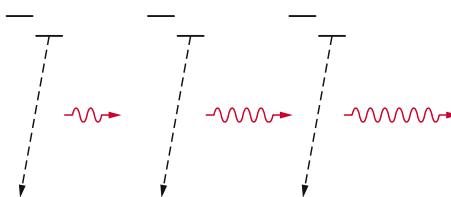


Abb. 7.79. Schema der *stimulierten Emission* beim Laser: Das vom linken Atom bei Übergang aus dem metastabilen Zustand heraus emittierte Quant ruft die anderen Quanten phasenrichtig ab

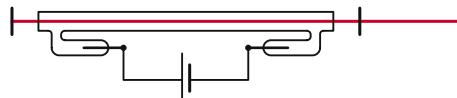


Abb. 7.80. Aufbau eines He-Ne-Lasers, schematisch. Die lange Röhre des Entladungsgefäßes steht zwischen zwei Spiegeln, die den wirksamen Lichtweg für die *stimulierte Emission* verlängern. Der eine Spiegel ist zu wenigen Prozent lichtdurchlässig; bei ihm tritt das Laserbündel aus

Laserlicht eine ungewöhnlich hohe Kohärenzlänge, bis in die Größenordnung Meter. Dies macht seine Besonderheit aus; es erlaubt ungewöhnliche Interferenzversuche.

Die Abrufwahrscheinlichkeit im He-Ne-Laser ist nicht so sehr hoch; das abrufende Quant muss gewissermaßen dicht am wartenden Atom vorbeilaufen. Man baut den Laser deshalb als langes, dünnes Entladungsrohr und verlängert den Lichtweg noch durch zwei Spiegel, zwischen denen das Licht dann hin und her gejagt wird (Abb. 7.80). Der eine Spiegel ist zu wenigen Prozent lichtdurchlässig. Bei ihm tritt der scharf gebündelte, hochkohärente Laserstrahl aus, den Abb. 7.13 gezeigt hat. Nur ein Quant, das in dieser Richtung startet, hat die Chance, Laserlicht abzurufen; wer quer läuft, verlässt das Entladungsrohr zu früh, bleibt allein und emittiert inkohärentes Licht, wie jede andere Gasentladung auch.

Die hohe Kohärenzlänge des Laserlichtes macht ein bemerkenswertes Abbildungsverfahren möglich: die *Holographie*. Dazu muss das schmale Laserbündel zunächst einmal mit einer Linse so stark aufgeweitet werden, dass es den abzubildenden Gegenstand voll ausleuchtet. Danach überlagert man das von diesem zurückgestreute Licht einem Referenzbündel, das von dem gleichen Laser stammt, also zur Streustrahlung kohärent ist. Man kann es sich durch einen Spiegel besorgen, den man an eine Stelle im Laserbündel stellt, an der er nicht stört. Die Überlagerung liefert eine stationäre Interferenzfigur (sofern nichts wackelt). Stellt man eine photographische Platte irgendwo hinein, so hält sie das Interferenzmuster fest, das sich an ihrem Ort befindet – sofern ihr Korn fein genug für Strukturen in den Abmessungen der Lichtwellenlänge ist. Die entwickelte Photoplatte enthält dann das *Hologramm* des fraglichen Gegenstandes. Beleuchtet man es mit Laserlicht, das dem Referenzbündel entspricht, so entsteht ein virtuelles Beugungsbild, das dem Objekt entspricht. Man sieht es, wenn man durch das Hologramm hindurchschaut wie durch ein Fenster. Dabei darf man seine Position wechseln und das Beugungsbild aus verschiedenen Rich-

tungen betrachten: Es zeigt sich jeweils so, wie es das Original auch getan hätte. Hologramme minderer Qualität lassen sich auch in Reflexion und für weißes Licht herstellen. Dazu benutzt man Kunststoffe, die eine mikrometerfeine Riffelung ihrer Oberfläche erlauben: fälschungssicheres Merkmal beispielsweise von Scheck- und Kreditkarten.

Die große Kohärenzlänge des Laserlichtes erlaubt nicht nur interessante Interferenzversuche; die zugehörige scharfe Bündelung führt zu extremen Bestrahlungsstärken E : 5 mW konzentriert auf $0,1 \text{ mm}^2$ bedeutet $E = 50 \text{ kW/m}^2$. Das ist deutlich mehr als die Solarkonstante und erlaubt u.a. feine chirurgische Eingriffe, wie etwa das „Anschweißen“ einer sich ablösenden Netzhaut (*Laserchirurgie*). Generell bluten Schnitte mit dem Laser nicht so stark wie Schnitte mit dem Messer, lassen sich kariöse Bereiche aus Zähnen weniger schmerhaft herausbrennen als herausbohren. Zudem konzentriert sich das Licht noch auf einen sehr schmalen Spektralbereich. Die Folge sind so hohe Feldstärken \vec{E} und \vec{B} , dass es in manchen optischen Substanzen zu „nichtlinearen Effekten“ wie Frequenzverdoppelungen kommen kann.

wichtig

Laser:
Light amplification by stimulated emission of radiation,
Licht hoher Kohärenzlänge, spektraler Schärfe und Intensität.

So oder so: Licht wird in Quanten emittiert und absorbiert, breitet sich aber als Welle aus. Das hier zur Erläuterung der stimulierten Emission benutzte Bild vom geradeaus fliegenden, reflektierten und Artgenossen kohärent abrufenden Quant verquickt die beiden Aspekte in unzulässiger Weise. Trotzdem liefert es eine brauchbare Eselsbrücke für jeden, der eine leidlich anschauliche Vorstellung vom Mechanismus eines Lasers haben möchte, ohne den korrekten Gedanken- und Rechnungsgang der Quantenmechanik nachzuvollziehen. Über die Brücke

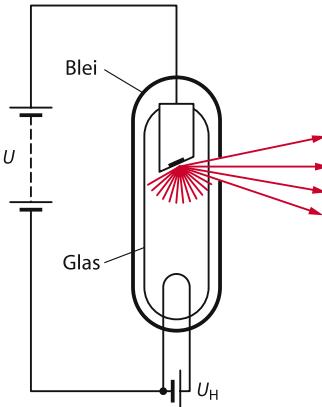


Abb. 7.81. Aufbau und Schaltung einer Röntgenröhre, schematisch. Aus der Glühkathode, geheizt mit der Heizspannung U_H , treten Elektronen aus, die, von der Anodenspannung U beschleunigt, mit der kinetischen Energie $e_0 \cdot U$ auf die Anode treffen und dort bei der Abbremsung Röntgenquanten erzeugen

zu gehen, ist aber nur erlaubt, weil die korrekten Quantenmechaniker festgestellt haben, dass man auch so zum richtigen Ziel gelangt. Selbstverständlich ist das nicht. Wer ein Modell überzieht, muss sich beim Fachmann erkundigen, wieweit das erlaubt ist.

7.5.4

Röntgenstrahlen

In der Vakuumphotozelle geben Quanten Energie an Elektronen ab. Das Umgekehrte geschieht in der **Röntgenröhre**: Elektronen erzeugen Quanten. Die Elektronen stammen aus einer Glühkathode, werden durch eine hohe Spannung beschleunigt und auf die Anode geschossen (☞ Abb. 7.81). Diese bremst sie in wenigen Atomabständen wieder ab; dabei geht der größte Teil der Elektronenenergie in Wärme über. Nur ein kümmlicher Rest in der Größenordnung ein Prozent wird von Quanten übernommen.

Jedes Elektron bezieht die kinetische Energie W_{kin} , die es an der Anode abgibt, aus der Anodenspannung U :

$$W_{\text{kin}} = e_0 \cdot U$$

(genau genommen kommt die thermische Energie, mit der es die Glühkathode verlassen hat, noch hinzu; sie kann als klein vernachlässigt werden). Im günstigsten Fall übergibt ein Elektron beim Abbremsen seine ganze Energie einem einzigen Quant, häufiger nur einen Teil, meistens gar nichts; dann erzeugt es nur Wärme. Folge: Für die Quantenenergie der Röntgenstrahlen existiert eine obere, für das Spektrum eine untere, eine **kurzwellige Grenze**. In Formeln:

$$W_Q = h \cdot f \leq W_{\text{kin}} = e_0 \cdot U,$$

und

$$\lambda \geq \frac{h \cdot c}{e_0 \cdot U}.$$

Das vollständige **Bremsspektrum** einer Röntgenröhre zeigt Abb. 7.82. Es ist vom Material der Anode unabhängig, abhängig aber von der Anodenspannung U . Steigert man sie, so verschiebt sich der Schwerpunkt des Spektrums zu kürzeren Wellen: Die Strahlung wird *härter*. Zugleich wird sie *intensiver*, weil die von den Elektronen umgesetzte Leistung zunimmt. Die Intensität lässt sich aber auch unabhängig von der Anodenspannung durch den Heizstrom der Glühkathode steuern: Er bestimmt deren Temperatur und damit den Emissionsstrom. Die Anodenspannungen medizinisch genutzter Röntgenröhren beginnen bei etwa 10 kV und reichen über 300 kV hinaus. Dem entsprechen Wellenlängen von 0,1 nm abwärts, d.h. von Atomdurchmessern abwärts, jenseits vom Ultravioletten.

wichtig

Röntgenröhre, Röntgenstrahlen:

Freie Elektronen aus einer Glühkathode werden mit Spannungen $U > 10 \text{ kV}$ auf eine Anode geschossen und erzeugen dort bei der Abbremsung energiereiche Quanten. Das Bremsspektrum hat eine kurzwellige Grenze bei $W_Q = e_0 \cdot U$.

Die Quanten der Röntgenstrahlung sind recht energiereich. Deshalb richten sie,

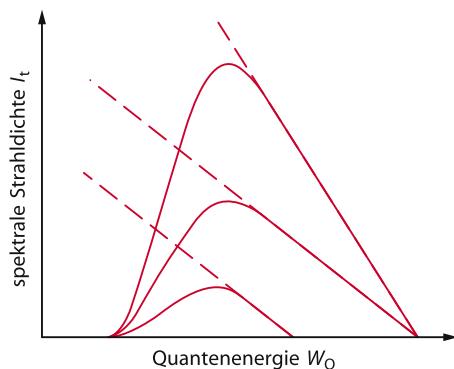


Abb. 7.82. Bremsspektrum einer Röntgenröhre, schematisch. Der Abfall zu kleinen Quantenenergien ist eine Folge der Filterung durch das Strahlfenster; im Vakuum der Röhre setzt sich das Spektrum entsprechend den gestrichelten Geraden fort. Eine Erhöhung der Anodenspannung verschiebt die Gerade parallel zu sich selbst nach rechts (*untere und mittlere Kurve*); eine Erhöhung des Anodenstroms dreht die Gerade im Uhrzeigersinn um ihren Schnittpunkt mit der Abszisse (*mittlere und rechte Kurve*). Dieser Schnittpunkt markiert die kurzwellige Grenze des Bremsspektrums

gelangen sie in Mensch und Tier, erheblichen Schaden im Gewebe an. Warum also überhaupt Röntgenröhren bauen? Weil die Quantenenergie so hoch ist, dringen Röntgenstrahlen gut durch Materialien hindurch, man kann in sie hineinsehen. Dies nutzt der Arzt, um nach zerbrochenen Knochen oder Karies tief im Zahn zu fahnden. Der Werkstoffprüfer kann nach Lunkern oder Rissen in seinem Werkstück suchen.

Für Röntgenlicht lassen sich keine Linsen schleifen, denn in seinem Spektralbereich weichen die Brechzahlen aller Substanzen kaum von 1 ab. Die Röntgendiagnose ist also zunächst einmal auf lebensgroße Schattenbilder, festgehalten auf photographischem Film, angewiesen. Im Schattenbild überdecken sich Organe des Patienten, die in Strahlrichtung hintereinander lagen. Im Gegensatz zum Lichtmikroskop erlaubt der Schattenwurf nicht nur eine Ebene des Objekts scharf abzubilden; seine Schärfentiefe lässt sich nicht begrenzen. Hier hilft die **Röntgentomographie** (die früher **Computertomographie** genannt wurde). Sie durchleuchtet den Patienten momentan im-



Abb. 7.83. Computertomographie eines Kopfes

mer nur mit einem dünnen „Nadelstrahl“, verschiebt ihn in einer Ebene, registriert dabei die durchgelassene Dosisleistung und wiederholt das Ganze in der gleichen Ebene noch einmal aus einer anderen Richtung. Ein Computer merkt sich die zu allen Positionen des Nadelstrahls gehörenden Dosisleistungen, rechnet danach die Röntgenschwächung für jeden Kreuzungspunkt aus und setzt so ein Bild der abgetasteten Ebene aus „Pixels“ von der Größen des Strahl durchmessers zusammen (☞ Abb. 7.83). Der diagnostische Gewinn ist beträchtlich, der technische Aufwand auch.

Noch raffinierter nutzt der Kristallograph die Röntgenstrahlen in der **Röntgenstrukturanalyse**. Sie durchdringen nicht nur den Kristall, ihre Wellenlänge hat auch die gleiche Größenordnung wie die Abstände der schön gleichmäßig angeordneten Atome im Kristall. Er wirkt deshalb auf das Röntgenlicht wie ein Beugungsgitter in der Wellenoptik, nur dreidimensional. Freilich ist es nicht leicht, die Beugungsfigur eines zunächst ja unbekannten dreidimensionalen Raumgitters richtig zu interpretieren. In Grenzen geht es aber und man kann dabei sogar Aussagen über die Struktur der Gitterbausteine gewinnen, selbst wenn es komplizierte biologische Moleküle sind. Die Doppelhelix-Struktur der Desoxyribonukleinsäure DNS, der Trägerin aller Erbinformationen irdischen Lebens, wurde so gefunden.

7.6

Elektronenoptik

Einleitung

Eine Abbildung im Sinn der Optik setzt voraus, dass divergente Strahlenbündel in konvergente umgewandelt werden können und dabei die Abbildungsgleichung hinreichend genau einhalten; die Abbildung verlangt nicht, dass dies mit Licht geschieht. Mit frei fliegenden Elektronen geht es auch. Im Licht- wie im Elektronenmikroskop wird das Auflösungsvermögen durch die Beugung am Objektiv begrenzt: Auch materielle Teilchen zeigen Beugung und Interferenz, breiten sich als Wellen aus. Daraus folgt die folgenschwere Unschärferelation.

7.6.1

Elektronenbeugung

Licht ist als kontinuierliche elektromagnetische Welle unterwegs; bei Emission und Absorption benehmen sich die Photonen aber wie diskrete Teilchen. Da wäre es nicht mehr als recht und billig, wenn sich echte Teilchen, Elektronen etwa, unterwegs wie Wellen benähmen. Sie tun dies in der Tat.

Auch Elektronen können eine photographische Emulsion schwärzen. ☞ Abbildung 7.84 zeigt das photographische Positiv der Beugungsstreifen, die ein zur Hälfte von einem Blech mit scharfer Kante abgedecktes Elektronenbündel erzeugt hat; es entspricht der ☞ Abb. 7.73 im Kap. 7.4.5, das mit Licht erzeugt worden war. Ein Zweifel ist nicht mehr möglich: Auch Elektronen unterliegen der Beugung und der Interferenz, auch materielle Teilchen breiten sich als Wellen aus. Man nennt sie **Materiewellen**.

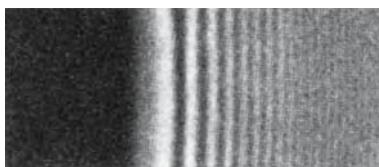


Abb. 7.84. Elektronenbeugung an der Halbebene, photographisches Positiv; man vergleiche mit der Abb. 7.74 (nach R.W. Pohl)

Damit stellt sich die Frage der Wellenlänge λ eines Bündels freier Elektronen. Sie ist von deren Geschwindigkeit abhängig, genauer von deren mechanischem Impuls \vec{p} :

$$\nu = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,2 \cdot 10^{-15} \text{ J}}{m_e}} = \sqrt{\frac{6,4 \cdot 10^{-15} \text{ J}}{9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} \\ = 8,4 \cdot 10^7 \text{ m/s.}$$

$$\lambda = h/p \text{ (de Broglie Wellenlänge)}$$

Die Gleichung gilt nicht nur für Elektronen, sie gilt auch für schwerere Teilchen und sogar für Photonen. Licht überträgt auf einen Absorber nicht nur Energie, sondern auch Impuls; es übt einen **Lichtdruck** aus.

Was „wellt“ bei einer Materiewelle? Wer hat da eine Amplitude? Beim Licht sind es die beiden Felder \vec{E} und \vec{B} . Ihre Amplituden sind ein Maß für die Strahlungsleistung, für die Photonenstromdichte, die einen Absorber erreicht, und damit ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, in einer Zeitspanne Δt auf einem Flächenstück ΔA ein Photon anzutreffen. Analog ist die Amplitude der *Wellenfunktion* einer Materiewelle ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron (oder ein anderes von der Welle repräsentiertes Teilchen) anzutreffen. In diesem Sinn spricht man auch von **Wahrscheinlichkeitswellen**. Je schwerer ein Teilchen, desto größer sein Impuls, desto kürzer die Wellenlänge seiner Materiewelle. Je kleiner λ , desto unauffälliger die Beugungsscheinungen, desto richtiger das Bild der klassischen Physik von geradeaus fliegenden Partikeln.

Rechenbeispiel 7.12: Kurze Wellenlänge

Welche Wellenlänge haben Elektronen in einer Fernsehbildröhre, die mit 2 kV beschleunigt werden? Welche Wellenlänge hat ein 200 g – Ball, der mit 2 m/s geworfen wird?

Lösung:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}.$$

Beim Elektron brauchen wir zunächst die Geschwindigkeit, die sich aus der kinetischen Energie von $2 \text{ keV} = 2000 \text{ V} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} = 3,2 \cdot 10^{-15} \text{ J}$ ergibt:

Das ist schon recht nah an der Lichtgeschwindigkeit. Ein Blick auf Abb. 6.61 zeigt uns aber, dass wir noch mit der Ruhemasse rechnen können. Nun ergibt sich

$$\lambda = \frac{h}{m_e \cdot v} \approx 10^{-11} \text{ m.}$$

Drehen wir die Beschleunigungsspannung auf ein paar Volt herunter, so bekommen wir Wellenlängen, die den von Röntgenstrahlen entsprechen. Elektronen können dann gut an Kristallstrukturen gebeugt werden. Der Ball hingegen bringt es auf eine Wellenlänge von

$$\lambda = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{0,2 \text{ kg} \cdot 2 \text{ m/s}} \approx 10^{-33} \text{ m.}$$

Eine so kleine Länge ist durch keinerlei Messmethode nachweisbar.

7.6.2 Elektronenmikroskope

Mit passend angeordneten Magnetfeldern lassen sich Elektronenstrahlbündel in ähnlicher Weise ablenken wie Lichtbündel mit Linsen. Das erlaubt, beispielsweise **Elektronenmikroskope** zu konstruieren. Deren Strahlengänge entsprechen denen der Lichtmikroskope (Abb. 7.85), besitzen also Strahlerquelle, Kondensor, ein Zwischenbild erzeugendes Objektiv und statt des Okulars eine „Projektionsspule“, die auf dem Leuchtschirm ein reelles Elektronenbild erzeugt, das der Betrachter auch noch durch ein optisches Mikroskop mit großem Objektabstand betrachten kann.

Das Auflösungsvermögen eines Mikroskops wird grundsätzlich durch die Beugung beim Objektiv begrenzt. Die Beschleunigungsspannungen moderner Elektronen-

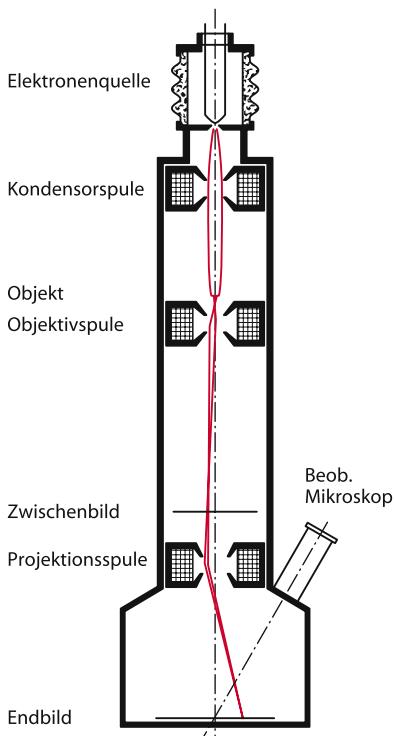


Abb. 7.85. Strahlengang eines Elektronenmikroskops (nach Gerthsen)

mikroskope liegen zumeist im Bereich von 120 kV bis 500 kV. Wer danach erwartet, mit Elektronenwellenlängen im Bereich Picometer ($= pm = 10^{-12} m$) könne man die Auflösung um rund 5 Zehnerpotenzen gegenüber dem Lichtmikroskop ($\lambda \approx 500 nm$) verbessern und so Details vom inneren Aufbau der Atome sichtbar machen, der wird enttäuscht. Die optische Industrie hat gelernt, die Linsenfehler von Objektiven vorzüglich zu korrigieren und so hohe Aperturen zu erreichen. Bei Elektronenlinsen gelingt das nicht; sie erlauben nur kleine Öffnungswinkel und entsprechend kleineres Auflösungsvermögen. Trotzdem ist es in günstigen Fällen und mit sehr hoher Beschleunigungsspannung möglich, die Atomstruktur eines Moleküls sichtbar zu machen (☞ Abb. 7.86). Voraussetzung ist, dass man einen Kristall aus diesen Molekülen zur Verfügung hat.

Elektronenmikroskop:
Strahlengang entspricht dem des
Lichtmikroskops,
Materiewellenlänge üblicherweise im
Bereich Picometer,
Linsenfehler verhindern, den grundsätzlich
möglichen Gewinn an Auflösungsvermögen
voll zu erreichen.

Nicht mit dem Elektronenmikroskop verwechselt werden darf das *Rasterelektronenmikroskop*. Bei ihm wird ein feiner Elektronenstrahl dazu benutzt, das Objekt zeilenweise abzutasten (Ablenkung nach dem Prinzip der Oszilloskopröhre). Alle Punkte der Objektoberfläche emittieren dann so, wie sie vom Elektronenstrahl getroffen werden, nacheinander Sekundärelektronen, also einen elektrischen Strom, der sich verstärken und

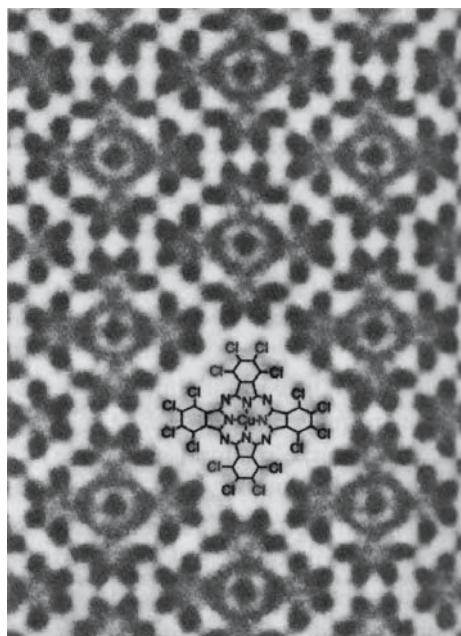


Abb. 7.86. Mit einem 500 keV-Elektronenmikroskop kann man einzelne Atome sehen, hier besonders die schweren, elektronenreichen Atome im chlorierten Kupfer-Phtalocyanin. Organische Moleküle sehen tatsächlich aus wie im Chemiebuch (Auflösung etwa $1,3 \cdot 10^{-10} m$; nach Gerthsen)

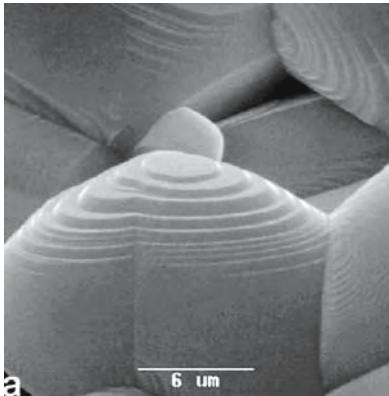


Abb. 7.87. Mit einem Rasterelektronenmikroskop gewonnenes Bild von Titan-Kristallkörnern in einem Sintermaterial. Bei den einzelnen Körnern sieht man kristalline Stufen (nach D. M. Brunette)

zu einer Art „Fernsehbild“ zusammensetzen lässt. Das Auflösungsvermögen wird durch die Bündelung des abtastenden Elektronenstrahls begrenzt; es ist geringer als beim normalen Elektronenmikroskop. Eine große Schärfentiefe erlaubt aber Aufnahmen, die überraschend plastisch wirken (☞ Abb. 7.87).

7.6.3 Die Unschärferelation

Die reine Sinusschwingung

$$y(t) = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

hat weder Anfang noch Ende, denn die Amplitude y_0 der Auslenkung $y(t)$ ändert sich mit der Zeit t ausdrücklich *nicht*. Die Schwingung war schon da, als die Welt geschaffen wurde, und dauert über den jüngsten Tag hinaus unentwegt an. Realistisch ist das nicht, aber mathematisch leicht zu beschreiben. Hingegen muss eine Schwingung, die nur eine begrenzte Zeitspanne Δt andauern soll, mathematisch durch Überlagerung aus vielen Einzelschwingungen zusammengesetzt werden, die sich vor und nach Δt weghinterferieren. Ihre Frequenzen müssen einen Bereich $\Delta\omega$ dicht an dicht ausfüllen – je kleiner Δt , desto größer $\Delta\omega$, und umgekehrt. „Dicht an dicht“ heißt kontinuierlich; die Mathematik braucht unendlich viele Einzelschwingungen mit unendlich kleinen, aber doch unterschiedlichen Amplituden. Sie muss einigen Aufwand treiben, um eine realistische Situation korrekt zu beschreiben.

Was den Schwingungen recht ist, ist den Wellen billig. Ein begrenzter Wellenzug der Länge Δx entspricht der Überlagerung unendlich vieler unendlicher Wellen, deren Wellenlängen λ einen Bereich $\Delta\lambda$ dicht an dicht mit unendlich kleinen, aber unterschiedlichen Amplituden ausfüllen. Je kleiner Δx , desto größer $\Delta\lambda$, und umgekehrt. Zu den großen Kohärenzlängen des Laserlichts gehören mit mathematischer Notwendigkeit besonders schmale Spektrallinien.

Auch die Materiewelle, die ein Elektron repräsentiert, braucht als *Wellenpaket* der Länge Δx einen Wellenlängenbereich $\Delta\lambda$, wenn das Elektron auf den Bereich Δx lokalisiert sein soll. Zu $\Delta\lambda$ gehört aber ein Bereich Δp des mechanischen Impulses und Δv der Geschwindigkeit. Je geringer die *Ortsunschärfe* Δx , desto größer die *Impulsunschärfe* Δp , und umgekehrt. Werner Heisenberg hat herausgefunden, dass das Produkt der beiden Unschärfen nicht kleiner sein kann als die Planck-Konstante h :

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq h,$$

und das prinzipiell, nicht etwa wegen mangelnder Messtechnik (deren Messgenauigkeiten meist viel größer sind). Diese *Unschärferelation* gilt für alle Paare physikalischer Größen, deren Produkt die physikalische Größe *Wirkung* ergibt, sich also in der Einheit $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ messen lässt – beispielsweise auch für Energie- und Zeitunschärfe:

$$\Delta W_Q \cdot \Delta t \geq h;$$

je größer die mittlere Lebensdauer Δt eines angeregten Zustands im Atom, desto schärfer die emittierte Spektrallinie.

Wer Atommodelle entwirft, darf die Unschärferelation nicht vergessen; auch in Gedanken darf man ein Elektron nicht genauer lokalisieren, als die Unschärferelation erlaubt. Anschaulich ist das nicht, denn in der makroskopischen Welt, an der sich das menschliche Anschauungsvermögen entwickelt hat, spielt das Plank-Winkungsquantum h keine nennenswerte Rolle, weil es so klein ist. Das Zusammenspiel von elektromagnetischer Welle und Quant, von Partikel und Materiewelle bleibt unanschaulich; man kann sich allenfalls durch häufigen Gebrauch daran gewöhnen. Dies mag der Grund sein, warum zuweilen vom *Dualismus von Welle und Korpuskel* gesprochen wird, als handele es sich um einen unauflöslichen Widerspruch in der Natur. Der Widerspruch existiert aber nur in der Vorstellungswelt des Menschen; Elektronen und Quanten kennen die Naturgesetze und richten sich nach ihnen. Die Natur ist nicht verpflichtet, ihre Gesetze dem Hirn des Menschen anzupassen.

Licht ist eine **elektromagnetische Welle**. Die Feldstärken stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung; die Welle ist damit transversal und kann mit einem Polarisationsfilter linear **polarisiert** werden. Reflexion und Streuung kann polarisationsabhängig sein.

Vakuumlichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

sichtbares Licht $\lambda = 0,4 \mu\text{m} \text{ bis } 0,8 \mu\text{m}$

λ : Wellenlänge [m]

Lichtintensität

Die **Intensität** einer Welle ist die Energie, die pro Zeiteinheit durch eine Fläche hindurch tritt, die senkrecht zur Ausbreitungsrichtung steht (**Energiestromdichte**). Die **Intensität** nimmt bei einer punktförmigen Lichtquelle mit dem Quadrat des Abstandes von der Lichtquelle ab. Für die **Strahlungsleistung** einer Lampe gibt es physikalische Einheiten (Watt, Watt pro Raumwinkel, Watt pro Quadratmeter) und mit der spektralen Empfindlichkeit des Auges bewertete Einheiten (Lumen, Candela, Lux).

$$\text{quadratisches Abstandsgesetz} \quad I \sim \frac{1}{r^2} \quad \begin{array}{l} I: \text{Intensität [W/m}^2\text{]} \\ (\text{punktförmige Quelle}) \end{array}$$

I : Intensität [W/m²]
 r : Abstand von der Quelle

Absorption

Die meisten Substanzen absorbieren Licht, und zwar unterschiedlich stark bei unterschiedlichen Wellenlängen. Diese Wellenlängenabhängigkeit der Absorption ist charakteristisch für die Anregungszustände der in der Substanz enthaltenen Atome. Innerhalb einer absorbierenden Substanz nimmt die Intensität **exponentiell** mit der Eindringtiefe ab, abhängig von der Konzentration der absorbierenden Atome. Dies wird zur qualitativen und quantitativen chemischen Analyse genutzt (**Absorptionsspektroskopie**).

$$\text{Absorption} \quad I(d) = I_0 \cdot e^{-\mu d} \quad \begin{array}{l} I(d): \text{Intensität [W/m}^2\text{]} \\ I_0: \text{einfallende Intensität} \\ \mu: \text{Absorptionskoeffizient [1/m]} \\ d: \text{Eindringtiefe [m]} \end{array}$$

Brechung

In Materie ist die **Lichtgeschwindigkeit** v reduziert. Darauf ist das Phänomen der Brechung zurückzuführen. Das Verhältnis $c/v = n$ heißt **Brechungsindex** oder **Brechzahl** des Materials. Die Brechzahl hängt meistens von der Frequenz bzw. Wellenlänge des Lichtes ab. Dies wird ausgenutzt, wenn man mit einem Prisma Licht in seine Farben zerlegt.

$$\text{Brechzahl} \quad n = \frac{v}{c} \quad \begin{array}{l} n: \text{Brechzahl (Brechungsindex)} \\ \text{dimensionslos} \\ v: \text{Lichtgeschwindigkeit im Medium [m/s]} \\ c: \text{Vakuumlichtgeschwindigkeit} \end{array}$$

Reflexionsgesetz Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel

$$\text{Berechnungsgesetz} \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \begin{array}{l} \alpha_1: \text{Einfallswinkel Medium 1} \\ n_1: \text{Brechzahl Medium 1} \\ \alpha_2: \text{Einfallswinkel Medium 2} \\ n_2: \text{Brechzahl Medium 2} \end{array}$$

Beim Übergang von einem **optisch dünnen** Medium (kleine Brechzahl) in ein **optisch dichteres** Medium (größere Brechzahl) wird ein Lichtstrahl *zum Lot hin* gebrochen, im umgekehrten Fall *vom Lot weg*. Dies beruht darauf, dass die Lichtwelle im optisch dichten Medium eine niedrigere Geschwindigkeit hat. Dadurch ändert sich nicht ihre Frequenz, wohl aber ihre Wellenlänge, was wiederum zu einer Änderung der Ausbreitungsrichtung führt. Würde beim Übergang von einem dichten Medium in ein dünneres Medium der Ausfallswinkel größer als 90° , so wird alles einfallende Licht an der Grenzfläche reflektiert (**Totalreflexion**).

Grenzwinkel α_{grenz}

$$\sin \alpha_{\text{grenz}} = \frac{n_2}{n_1}$$

α_{grenz} : Grenzwinkel der Totalreflexion

Linse

Sammellinsen können ein **reelles Bild** eines Gegenstandes auf einen Schirm werfen. Wenn bei einer Sammellinse die **Gegenstandweite** kleiner ist als die Brennweite (*Lupe*) – und immer bei Zerstreuungslinsen – ergibt sich kein reelles, sondern nur ein durch die Linse hindurch sichtbares **virtuelles Bild**.

Brennweite: Abstand des Punktes hinter der Linse, in dem sich Strahlen, die vor der Linse parallel laufen, treffen (Sammellinse, Abb. 7.34)

Brechwert

$$D = \frac{1}{f}$$

f : Brennweite [m]

D : Brechwert [$\frac{1}{\text{m}} = \text{dpt}$, Dioptrie]

D positiv: Sammellinse

D negativ: Zerstreuungslinse

Setzt man mehrere Linsen dicht hintereinander, so addieren sich die Brechkräfte. Dabei ist die Brechkraft von Zerstreuungslinsen negativ zu nehmen

Linsengleichung

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

f : Brennweite [m]

a : Gegenstandsweite [m]

b : Bildweite [m]

Gilt für das reelle Bild einer dünnen Sammellinse

Vergrößerungsfaktor

$$\frac{\text{Bildgröße}}{\text{Gegenstandsgröße}} = \frac{a}{b} = \frac{f}{a-f}$$

Vergrößerungsfaktor eines Mikroskops

$$\Gamma_M = \frac{180 \text{ mm}}{f_{\text{Objektiv}}} \cdot \frac{250 \text{ mm}}{f_{\text{Okular}}}$$

f_{Objektiv} : Objektivbrennweite [m]

f_{Okular} : Okularbrennweite

Maximales Auflösungsvermögen entspricht der Wellenlänge des verwendeten Lichts.

Wellenoptik

Tritt Licht durch einen sehr schmalen Spalt, so geht es dort „um die Ecke“ (**Beugung**). Beugung ist dafür verantwortlich, dass das Auflösungsvermögen eines Lichtmikroskops in der Größenordnung der Lichtwellenlänge liegt. Licht von gleichmäßig dicht nebeneinander liegenden Quellen (z. B. im Beugungsgitter) erzeugt ein **Interferenzmuster**, das, wenn weißes Licht eingestrahlt wird, immer farbig ist. Beispiele aus dem Alltag sind die Schillerfarben bei einer Compact Disc, bei Vogelfedern und Schmetterlingen.

Beugung

Licht, das durch einen hinreichend schmalen Spalt fällt, geht „um die Ecke“.



Interferenz

Beugungsgitter

viele Spalten nebeneinander bewirken ein Interferenzmuster mit ausgeprägten, scharfen Intensitätsmaxima unter den Winkeln:

Wenn sich Licht aus verschiedenen Richtungen überlagert, so entsteht ein Interferenzmuster aus hellen und dunklen Gebieten.

$$\sin \alpha_n = \frac{n \cdot \lambda}{g}$$

α_n : Winkel des Intensitätsmaximums

n : Nummer der Ordnung

λ : Wellenlänge [m]

g : Gitterkonstante [m] (Spaltabstand)

Röntgenstrahlen

Auch Röntgenstrahlen sind elektromagnetische Wellen wie Licht, nur mit wesentlich kürzerer Wellenlänge, höherer Frequenz und damit höherer Quantenenergie. Deswegen durchdringen sie biologisches Gewebe, schädigen es aber auch. In der Röntgenröhre werden die Röntgenstrahlen den Beschuss einer Anode mit hochenergetischen Elektronen erzeugt. Typische Beschleunigungsspannungen sind 30–300 kV. Das Spektrum wird geprägt durch die Bremsstrahlung und die charakteristische Strahlung (s. Abb. 8.4, Kap. 8.1.4).

Quanten

In manchen Zusammenhängen kann Licht auch als ein Strom von Lichtquanten (Photonen) mit einer Energie $W_Q = h \cdot f$ (h : Planck-Wirkungsquantum, f : Frequenz) aufgefasst werden. Atome strahlen Licht mit ganz charakteristischen Quantenenergien ab. Dies wird für Analysezwecke genutzt (Spektralanalyse, Absorptionspektroskopie). Umgekehrt kann auch ein Teilchen in gewissen Zusammenhängen als Materiewelle betrachtet werden (*Welle-Teilchen-Dualismus*).

Verständnisfragen

1. Was wäre die Farbe des Himmels wenn die Erde keine Atmosphäre hätte?
2. Welche Werte einer Lichtwelle ändern sich, wenn sie von Luft in Glas eintritt, welche nicht?
3. Warum kann man einen Tropfen Wasser auf dem Tisch sehen, obwohl Wasser transparent und farblos ist?
4. Könnte man aus Eis eine Linse formen, die durch das Fokussieren von Sonnenlicht ein Feuer entfacht?
5. Warum sieht ein Schwimmer alles nur ganz verschwommen, wenn er unter Wasser die Augen aufmacht?
6. Die Linse in einem Overhead-Projektor bildet ein Bild auf einer Folie auf einer Projektionsleinwand ab. Wie muss die Linse verschoben werden, wenn die Leinwand näher zum Projektor gerückt wird?
7. Mit Laserlicht wird das Beugungsmuster eines Spaltes auf einen Schirm geworfen. Wenn das Beugungsmuster entlang einer senkrechten Linie verläuft, wie liegt dann der Spalt?
8. Warum kann man Interferenzexperimente viel besser mit einem Laser durchführen als mit Glühlampen?
9. Warum können Sie jemanden, der hinter einer Hausecke steht zwar hören, aber nicht sehen?
10. Licht welcher Farbe liefert bei einem vorgegebenen Linsendurchmesser die beste Auflösung bei einem Mikroskop?
11. Warum verwenden moderne astronomische Teleskope nur noch Hohlspiegel und keine Linsen?

12. Blaues Licht mit der Wellenlänge λ gelangt durch einen schmalen Schlitz der Breite a und bildet ein Interferenzbild auf einer Projektionsfläche. Wie muss man die Spaltbreite ändern, wenn man mit rotem Licht mit der Wellenlänge 2λ das ursprüngliche Interferenzbild reproduziert will?
-

Übungsaufgaben

Geometrische Optik

- 7.1: (I) Das Licht großer Laser ist so intensiv, dass man den Widerschein eines auf die abgeschattete Seite des Halbmondes gerichteten Bündels von der Erde aus beobachten kann. Von einem 1962 ausgeführten Experiment wird berichtet, das Bündel habe auf dem Mond eine Fläche von 4 km Durchmesser ausgeleuchtet. Wie groß war der Öffnungswinkel?
- 7.2: (II) In einem Textilhaus sollen senkrechte Garderobespiegel so aufgestellt werden, dass sich die Kunden darin von Kopf bis Fuß vollständig betrachten können. Dazu brauchen die Spiegel nicht bis zum Boden reichen, sie dürfen in einer Höhe h über ihm enden. Wie hängt h ab
(1) von der Augenhöhe H des Kunden,
(2) vom horizontalen Abstand d zwischen Kunden und Spiegel?
- 7.3: (I) Der Glaskörper des menschlichen Augen hat die Brechzahl 1,34. Welcher Grenzwinkel der Totalreflexion gegenüber Luft ($n \approx 1,00$) gehört dazu?
- 7.4: (II) Ein Lichtstrahl trifft aus Luft auf eine Glasoberfläche ($n = 1,52$) und wird teilweise reflektiert und teilweise gebrochen. Der Reflexionswinkel ist doppelt so groß wie der Winkel des gebrochenen Strahls. Wie groß ist der Einfallswinkel? ($\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot \cos \alpha$)
- 7.5: (III) Wenn das 60°-Prisma aus dem Flintglas der Abb. 7.30 besteht und das Lichtbündel einem Laser mit der Wellenlänge 632,8 nm entstammt, welchen Einfallswinkel α muss man ihm dann für symmetrischen Durchgang geben und um welchen Winkel δ wird es insgesamt abgelenkt?
- 7.6: (I) Wenn Sie Ihr Spiegelbild in einer Weihnachtsbaumkugel betrachten, sehen Sie dann ein reelles oder ein virtuelles Bild?

Abbildung mit Linsen

- 7.7: (I) Sie wollen sich selbst im Spiegel photographieren. Der Spiegel ist 1,5 m vor Ihnen. Auf welchen Abstand müssen Sie fokussieren?
- 7.8: (II) Zeigen Sie, dass für weit entfernte Objekte die Vergrößerung eines reellen Bildes näherungsweise proportional zur Brennweite ist.
- 7.9: (II) Ein Photograph will einen 22 m hohen Baum aus einer Entfernung von 50 m photographieren. Welche Brennweite muss er für sein Objektiv wählen, damit das Bild vom Baum gerade den 24 mm hohen Film ausfüllt?
- 7.10: (II) Wenn ein Teleobjektiv mit 135 mm Brennweite Objekte zwischen 1,5 m und ∞ scharf abbilden soll, über welche Stecke muss es dann relativ zur Filmebene verfahrbar sein?
- 7.11: (II) Konstruiere (am besten auf Millimeterpapier) für eine Sammellinse mit $f = 30$ mm den Bildpunkt P' zu einem Gegenstandspunkt P , der 6 cm vor der Hauptebene und 2,5 cm neben der optischen Achse liegt. Konstruiere für die gleiche Linse den Bildpunkt eines Parallelbündels, dessen Zentralstrahl durch einen Punkt 6 cm vor der Hauptebene und 2 cm unter der optischen Achse läuft.
- 7.12: (II) Wie weit sind Objekt und reelles Bild auseinander, wenn die abbildende Linse eine Brennweite von 75 cm hat und das Bild um den Faktor 2,75 vergrößert ist?
- 7.13: (I) Unter welchem Sehwinkel erscheinen Sonne und Mond von der Erde ausgesehen?
- 7.14: (II) Welche Brennweite hat eine Lupe mit der Aufschrift „8×“?

Strahlungsmessgrößen

- 7.15: (I) In welchen Raumwinkel strahlt die Sonne?
7.16: (I) Zu welcher Strahlungsmessgröße gehört die Solarkonstante (Kapitel 5.4.5)?
7.17: (II) Welche Leistung strahlt die Sonne in Form elektromagnetischer Wellen ab? (Sie strahlt außerdem noch Teilchenströme ab)

Wellenoptik

- 7.18: (I) Wie müssen die Polarisationsfolien einer Spezialsonnenbrille orientiert sein, wenn sie am Strand den Augen ihres Trägers Sonnenreflexe vom Wasser mildern sollen?
7.19: (II) Einfarbiges Licht fällt auf einen Doppelspalt, bei dem die Spalte 0,04 mm Abstand haben. Auf einem 5 m entfernten Schirm sind die Interferenzmaxima 5,5 cm auseinander. Welche Wellenlänge und welche Frequenz hat das Licht?
7.20: (II) Ein Lehrer steht ein Stück hinter einer 80 cm breiten Tür nach draußen und bläst in seine Trillerpfeife, die einen Ton von etwa 750 Hz aussendet. Wenn wir annehmen, dass draußen auf dem Schulhof nichts reflektiert, unter welchem Winkel wird man die Trillerpfeife kaum hören?
7.21: (II) Für welche Wellenlänge fällt bei einem Beugungsgitter das Maximum 10. Ordnung auf das Maximum 9. Ordnung der Wellenlänge $\lambda = 500 \text{ nm}$?
7.22: (I) Die Flügel eines tropischen Falters schillern in wunderschönem Blau, wenn man sie unter etwa 50° zur Senkrechten betrachtet. Dieser Farbeindruck entsteht, weil die Flügeloberfläche ein Reflexionsbeugungsgitter darstellt. Wenn wir annehmen, dass das gebeugte Licht senkrecht auf den Flügel eingefallen ist, welche Gitterkonstante hat das Beugungsgitter auf dem Flügel in etwa?

Quantenoptik

- 7.23: (II) Zu größeren Wellenlängen gehört kleinere Quantenenergie, zu größerer Quantenenergie kleinere Wellenlänge. Sollte das Produkt $W_Q \cdot \lambda$ konstant sein?
7.24: (I) In welchem Energiefeld liegen die Quanten sichtbaren Lichtes?
7.25: (II) Welchen „Quantenstrom“ (gemessen in Anzahl der Quanten durch Sekunde) gibt ein Laser in sein Lichtbündel, wenn er 5 mW bei der Wellenlänge 632,8 nm abstrahlt?
7.26: (I) Warum gibt es keinen Leuchtstoff, der infrarotes Licht sichtbar macht?
7.27: (II) Eine Röntgenröhre beim Arzt werde mit 150 kV Anodenspannung und 20 mA Elektronenstrom betrieben.
(1) Wie groß ist die höchste Quantenenergie im Bremspektrum?
(2) Welche Leistung wird in der Röhre umgesetzt?
(3) In welcher Größenordnung liegt die Strahlungsleistung der erzeugten Röntgenstrahlen?

8.1	Aufbau des Atoms	358
8.1.1	Das Bohr'sche Atommodell	358
8.1.2	Elektronenwolken	359
8.1.3	Das Pauli-Prinzip	360
8.1.4	Charakteristische Röntgenstrahlung	361
8.2	Aufbau des Atomkerns	361
8.2.1	Nukleonen und Nuklide	362
8.2.2	Der Massendefekt	363
8.2.3	Radioaktivität	364
8.2.4	Nachweis radioaktiver Strahlung	365
8.2.5	Zerfallsgesetz	369
8.2.6	Kernspaltung und künstliche Radioaktivität	371
8.2.7	Antimaterie	372
8.2.8	Strahlennutzen, Strahlenschaden, Strahlenschutz	373

Atom- und Kernphysik

Materie besteht aus Molekülen, ein Molekül aus Atomen, ein Atom aus Kern und Hülle, die Hülle aus Elektronen und der Kern aus Nukleonen, aus Protonen und Neutronen nämlich. An chemischen Reaktionen sind nur die Hüllenelektronen beteiligt. Die (positive) Kernladung bestimmt aber, wie viele Elektronen in die Hülle gehören, und damit auch, zu welchem chemischen Element das Atom gehört. Bei Kernreaktionen wird pro Atom sehr viel mehr Energie umgesetzt als bei chemischen Reaktionen. Kernumwandlungen erfolgen vor allem beim radioaktiven Zerfall und emittieren, dann ionisierende Strahlung.

8.1 Aufbau des Atoms

Einleitung

Das Volumen eines Atoms wird von seiner Elektronenhülle bestimmt, die Masse von seinem Atomkern. Dessen positive Kernladung schreibt die Anzahl der Hüllenelektronen vor und legt die Position des Atoms im Periodensystem der Elemente fest. Warum die Elektronen der Hülle nicht der Coulomb-Kraft folgend in den Kern stürzen, beschreibt das Bohr-Atommodell zwar anschaulich, aber im Widerspruch zur Unschärferelation, während Wellen- und Quantenmechanik das Vorstellungsvermögen strapazieren.

8.1.1 Das Bohr'sche Atommodell

In einem Metall liegen die Atome so dicht nebeneinander, dass sie sich praktisch berühren. Ihre Durchmesser bleiben knapp unter einem Nanometer. Eine Aluminiumfolie, wie man sie zum Grillen verwendet, ist immer noch viele Hundert Atomlagen dick. Für einen Strahl schneller Elektronen sollte da kein Durchkommen sein.

Das Experiment widerspricht. Die allermeisten der eingeschossenen Elektronen durchdringen die Folie, als habe ihnen gar nichts im Wege gestanden; nur einige wenige sind auf Hindernisse gestoßen, die sie aus ihrer Bahn geworfen haben. Atome können deshalb keine Kugelchen aus homogener Materie sein; zumindest aus Sicht schneller Elektronen sind sie im Wesentlichen „leer“. Nur wenn ein Elektron auf den **Atomkern** trifft, wird es abgelenkt. Das geschieht selten, denn

dessen Durchmesser liegt in der Größenordnung Femtometer (10^{-15} m). Ihn umgibt eine wesentlich größere **Hülle** aus Elektronen, deren Durchmesser in der Größenordnung 10^{-10} m liegt. Deren Masse ist klein gegenüber der des Kerns; von durchfliegenden Elektronen wird die Hülle kaum bemerkt.

Im Atom ist die Masse auf den kleinen Atomkern konzentriert, während der Durchmesser von der lockeren Elektronenhülle bestimmt wird.

wichtig

Elektronen sind negativ elektrisch geladen. Nach außen erscheint ein Atom elektrisch neutral. Das ist nur möglich, wenn der Kern ebenso viele positive Elementarladungen besitzt wie die Hülle Elektronen. In der Tat erweist sich die **Kernladungszahl** Z als wichtigste Kenngröße des Atoms. Sie bestimmt seine Position im Periodensystem der chemischen Elemente. Warum aber ist

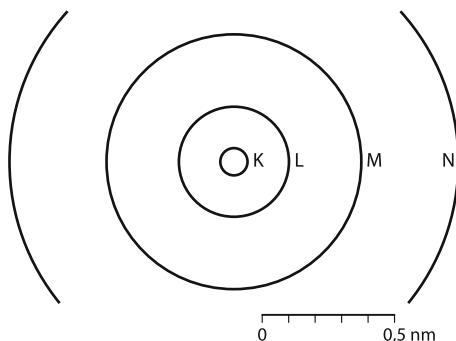


Abb. 8.1. Bohr'sches Atommodell: Maßstabsgerechte Zeichnung der Bohr-Bahnen für das H-Atom; der Kern ist in diesem Maßstab nicht zu erkennen

ein Atom stabil? Warum folgen die Hüllen-elektronen nicht der Coulomb-Kraft des Kerns und stürzen in ihn hinein?

Das **Bohr'sche Atommodell** (Niels Bohr, 1885–1962) macht da eine Anleihe bei der Astronomie: Warum stürzen die Planeten nicht in die Sonne? Weil sie auf geschlossenen Bahnen um sie herumlaufen und so die Kraft der Gravitation mit der Zentrifugalkraft kompensieren. Analog laufen im Bohr'schen Atommodell die Elektronen der Hülle auf geschlossenen Bahnen um den Kern herum.

wichtig

Bohr'sches Atommodell: Die Hüllen-elektronen laufen auf Bohr-Bahnen um den Kern wie Planeten um die Sonne.

Nach den Vorstellungen der klassischen Physik müsste freilich ein auf einer **Bohr-Bahn** umlaufendes Elektron eine seiner Umlauf-frequenz entsprechende elektromagnetische Welle abstrahlen; es würde Energie verlieren und auf einer Spiralfahrt doch in den Kern hineinstürzen. Weil es das offensichtlich nicht tut, half es Bohr gar nichts: Er musste ohne nähere Begründung postulieren, dass dem Elektron lediglich einige stabile Bahnen erlaubt sind, auf denen es nicht strahlt, während es die ihm verbotenen Bereiche dazwischen nur im Quantensprung überqueren darf. Die zu einer Bohr-Bahn gehörende Energie lässt sich berechnen. Spektrum und Niveauschema eines Atoms gestatten somit Aussagen über die erlaubten Bahnen. Für das einfachste aller Atome, das des Wasserstoffs ($Z = 1$, nur ein Elektron in der Hülle) kommen ganz vernünftige Bahnradien heraus, wie Abb. 8.1 zeigt. Die innerste Bahn des Grundzustandes erhält den Kennbuchstaben K, die größeren Bahnen der angeregten Zustände folgen alphabetisch.

wichtig

Ein Atomkern besitzt positive Elementarladungen; die Kernladungszahl Z ist zugleich die Atomnummer im Periodensystem der chemischen Elemente.

So recht befriedigen kann das Bohr-Atom-modell freilich nicht. Das ist auch kein Wunder, denn liefe ein Elektron tatsächlich auf einer Bohr-Bahn, so wären zu jedem Zeitpunkt Ort und Geschwindigkeit, Impuls und Energie gemeinsam genauer bekannt, als die Unschärferelation erlaubt. Niels Bohr konnte das nicht wissen. Als er sein Modell aufstellt, ging Werner Heisenberg (1901–1976) noch zur Schule.

8.1.2

Elektronenwolken

Als elektrische „Punktladung“ sitzt der Atomkern des Wasserstoffs im Zentrum eines kugelsymmetrischen Feldes; die Feldlinien laufen radial nach außen, die Potentialflächen sind konzentrische Kugeln. Wie weit sich das Hüllenelektron entfernen kann, hängt von seiner Energie ab. Sie bestimmt, wann es von innen auf die zugehörige Potentialkugel stößt und zurückgeworfen wird. Ins Wellenbild übersetzt: Die Energie des Elektrons bestimmt, an welcher Kugelschale die eingesperzte Materiewelle reflektiert wird.

Eine reflektierte Welle wird zur stehenden Welle mit Schwingungsbäuchen und Schwingungsknoten, wie Kap. 4.2 am Beispiel der Seilwelle zeigt. Ist das Seil an beiden Enden eingespannt wie die Saite einer Geige, sind ihm nur noch bestimmte Schwingungszustände mit den diskreten Frequenzen von Grund- und Oberschwingungen möglich (s. Kap. 4.3.1). Dies gilt analog auch für die in der Potentialkugel des Atomkerns eingesperzte Materiewelle des Hüllenelektrons. Zwar sind die Details bei einer räumlich stehenden Welle um einiges komplizierter als bei der linearen Seilwelle, aber das ändert nichts am Prinzip. Die Materiewellen erklären zwangslässig die Existenz der Niveauschemata, denn wenn den Elektronen der Hülle nur bestimmte Schwingungsfor-men mit bestimmten Frequenzen möglich sind, dann sind ihnen auch nur bestimmte diskrete Schwingungsenergien möglich.

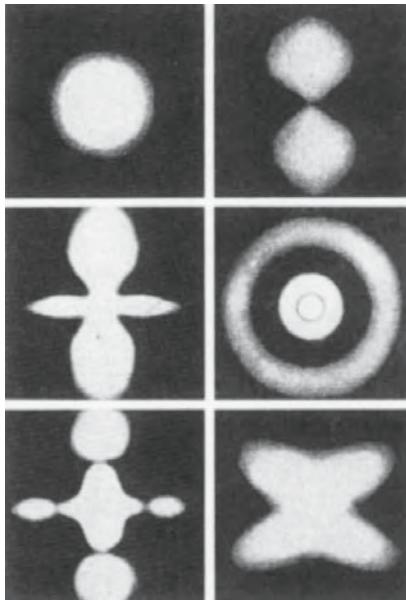


Abb. 8.2. Elektronenwolken kennzeichnen die Aufenthalts wahrscheinlichkeit eines Hüllelelektrons in verschiedenen angeregten Zuständen (nach Finkelnburg)

Materiewellen sind Wahrscheinlichkeitswellen; ihre Amplituden geben ein Maß für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit z.B. des Elektrons im Volumen des Atoms. Wie soll man aber eine räumlich stehende Welle anschaulich darstellen? Man zeichnet verwischte **Elektronenwolken**: Je dichter der Nebel, desto größer die Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Abbildung 8.2 zeigt ebene Schnitte durch einige solcher Elektronenwolken. Sie sind aus Rechnungen gewonnen, nicht etwa mikroskopisch beobachtet.

Erhellend sind solche Bilder nur in Grenzen. Darum spricht man gern weiter von so anschaulichen Bohr-Bahnen, obwohl man weiß, dass es sie, genau genommen, gar nicht gibt. Dabei muss man dann neben den Kreisbahnen der Abb. 8.1 auch noch elliptische Bahnen mit halbwegs gleicher Größe und Energie zulassen. Sie werden zu **Elektronenschalen** zusammengefasst. Die Buchstaben L, M, N usw. bezeichnen derartige Schalen. Nur die K-Schale muss sich allein mit einer Kreisbahn zufrieden geben.

8.1.3

Das Pauli-Prinzip

Das einsame Hüllelelektron des Wasserstoffs darf sich auf jede Bohr-Bahn seines Atoms setzen, sofern es sich die dazu nötige Energie beschaffen kann. Sobald sich aber der Kernladungszahl Z entsprechend mehrere Elektronen in einer Hülle versammeln, müssen sie das **Pauli-Prinzip** beachten: Es erlaubt immer nur zwei Elektronen, gemeinsam auf einer Bohr-Bahn umzulaufen, und keinem weiteren.

Pauli-Prinzip: Jede Bohr-Bahn darf von nicht mehr als zwei Hüllelelektronen besetzt werden.

wichtig

Eine K-Schale besitzt nur eine einzige Bahn, die Kreisbahn. Sie hat also nur für zwei Elektronen Platz. Das genügt dem Wasserstoff ($Z = 1$) und dem Helium ($Z = 2$). Das nächste Element im Periodensystem, das Lithium, muss sein drittes Elektron bereits in die L-Schale setzen. Diese fasst mit Kreis- und Ellipsenbahnen zusammen 8 Elektronen, reicht also bis zum Neon mit $Z = 10$. Natrium ($Z = 11$) braucht bereits einen Platz in der M-Schale. Darüber wird es komplizierter. Zuweilen setzt sich ein neues Elektron „vorzeitig“ in eine höhere Schale, und die innere wird erst bei Elementen mit größerer Atomnummer aufgefüllt. Chemisch zeigt sich eine Systematik: Alle Elemente, deren Elektronen eine Schale voll besetzen, eine Schale „abschließen“, sind reaktionsunwillige **Edelgase**; ihre Nachbarn zu beiden Seiten entwickeln demgegenüber besondere chemische Aggressivität. Elemente, denen nur noch ein Elektron zur abgeschlossenen Schale fehlt, sind **Halogene**. Diejenigen, die ein Elektron zu viel besitzen, sind **Alkalimetalle**. Die ersten bilden gern negative Ionen, die zweiten gern positive, denn dann sind ihre Elektronschalen abgeschlossen. Die chemische Natur eines Elements hängt weitgehend von seinem äußersten Elektron ab; es wird **Leuchtelektron** genannt, weil es auch für das optische Linien-

spektrum des Atoms zuständig ist. Die inneren Elektronen haben ja keine freien Bahnen in ihrer Nähe, in die sie mit den Quantenenergien des Spektrums hineinspringen könnten.

wichtig

Bohr'sches Atommodell und Pauli-Prinzip machen nicht nur die Atomspektren, sondern auch das Periodensystem der chemischen Elemente verständlich.

8.1.4 Charakteristische Röntgenstrahlung

Das Niveauschema eines Atoms wird üblicherweise nur für das Leuchtelektron gezeichnet. Alle anderen Elektronen haben über sich nur besetzte Bahnen und können deshalb ihre Plätze nur mit relativ hohem Energieaufwand verlassen. Immerhin bringt das freie Elektron, das in der Röntgenröhre auf die Anode zujagt, genug Energie mit, um auch einmal einen Artgenossen aus der K-Schale eines Anodenatoms herauszuschlagen (☞ Abb. 8.3). Dessen Platz bleibt aber nicht lange frei, z.B. kann ein Elektron aus der L-Schale nachrücken. Dabei wird dann ein energiereiches Quant aus dem Spektralgebiet der Röntgenstrahlen emittiert, es gehört zur K_{α} -Linie des Atoms. Dem kontinuierlichen Bremsspektrum der Röntgenröhre überlagert sich das Linienspektrum der **charakteristischen Strahlung**, charakteristisch für das

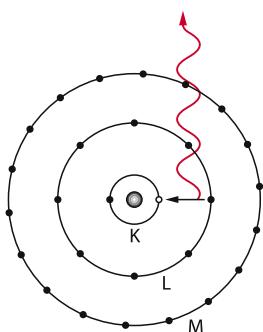


Abb. 8.3. Emission der K_{α} -Linie im Bohr-Atommodell

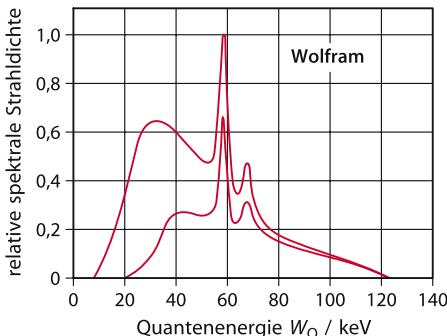


Abb. 8.4. Bremsspektrum mit überlagerter charakteristischer Strahlung. Der Abfall zu kleinen Quantenenergien wird durch Aluminiumfilter hervorgerufen; obere Kurve: Filterdicke 1 mm; untere Kurve: 2 mm

Material am Ort des Brennflecks. Dass die Linien in ☞ Abb. 8.4 recht breit erscheinen, liegt an dem geringen Auflösungsvermögen des benutzten Röntgenmonochromators. Die Quantenenergien der Linien wachsen nahezu proportional mit dem Quadrat der Kernladungszahl. In Absorption treten sie nicht auf, statt ihrer erscheinen etwas kurzwelligere **Absorptionskanten**. Warum? Zur Absorption eines K_{α} -Quants müsste ein K-Elektron in die L-Schale springen; dort ist aber kein Platz frei. Darum kann es nur die höhere Quantenenergie der Absorptionskante annehmen, die ihm erlaubt, die Atomhülle ganz zu verlassen.

Besondere Bedeutung hat das Linienspektrum für die **Röntgenstrukturanalyse** (Kap. 7.5.4). Um ein klares Beugungsbild von einem Kristall zu bekommen, muss das Röntgenlicht monochromatisch mit nur einer Wellenlänge sein, also möglichst nur Quanten einer Energie enthalten

8.2 Aufbau des Atomkerns

Einleitung

Atomkerne bestehen aus Nukleonen, aus Protonen und Neutronen nämlich. Die Masse eines stabilen Kerns ist etwas geringer als die Massen seiner einzelnen Nukleonen zusammen. Dieser „Massendefekt“

entspricht der Bindungsenergie des Kerns. Ein Kern wandelt sich durch radioaktiven Zerfall um, wenn er dadurch seinen Massendefekt vergrößern kann. Instabile Kerne zerfallen zeitlich exponentiell. Übliche Kenngröße des Zerfallsgegesetzes ist die Halbwertszeit. Radioaktivität kann auch künstlich ausgelöst werden und spielt dann in der Medizin eine wichtige Rolle. Einige wenige Kerne lassen sich spalten und werden dadurch für die Energieversorgung der Menschheit bedeutsam.

8.2.1 Nukleonen und Nuklide

Auch der Atomkern, so klein er ist, lässt sich noch in **Nukleonen** zerlegen. Von ihnen gibt es aber nur zwei Sorten: die positiv geladenen **Protonen** und die ungeladenen **Neutronen**. Ihre Massen sind nahezu gleich. Wenn man sich mit 3 Dezimalstellen begnügt, darf man schreiben:

$$m_p \approx m_n \approx 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg.}$$

Als makroskopische Einheit führt das Kilogramm in der Welt der Atome zu unhandlichen Zehnerpotenzen. Deshalb definiert man für diesen Bereich eine

$$\text{atomare Masseneinheit } u = 1,66057 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

und bekommt mit ihr

$$m_p = 1,007265 \text{ u} \quad \text{und} \quad m_n = 1,008650 \text{ u.}$$

Immerhin ist das Neutron um rund 1,5 Promille und damit fast zwei Elektronenmassen schwerer als das Proton. Das hat physikalische Bedeutung.

Die Angelsachsen bezeichnen u als „elementary mass unit“ und schreiben dementsprechend „emu“. Dividiert man eine atomare Masse durch u , so bekommt man eine dimensionslose Zahl, die **relative Atommasse** genannt wird. Sie ist die Maßzahl der molaren Masse, wenn man diese in g/mol angibt.

Das häufigste chemische Element ist der Wasserstoff: ein Proton im Kern, ein Elek-

tron in der Hülle, kein Neutron, $Z = 1$. Wieso sind andere Elemente überhaupt möglich? Zwei oder gar mehr Protonen im Kern müssen sich doch mit der Coulomb-Kraft ihrer positiven Elementarladungen abstoßen. Sie können in der Tat nur zusammenbleiben, weil zwischen Nukleonen eine **Kernkraft** herrscht, nach deren Natur hier nicht gefragt werden soll; sie lässt sich nur durch wellenmechanische Rechnung korrekt erfassen. Jedenfalls bewirkt sie eine kräftige, von der Ladung unabhängige Anziehung, allerdings nur auf extrem kurze Distanz: Die Nukleonen müssen sich gewissermaßen „berühren“, wenn sie Atomkerne, wenn sie **Nuklide** bilden wollen.

Zwei Zahlen kennzeichnen ein Nuklid: Die Protonenanzahl Z und die Neutronenanzahl N . Als Kernladungszahl bestimmt Z die Anzahl der Elektronen in der Hülle und über sie die chemischen Eigenschaften des Atoms. Deshalb ist Z zugleich die **Atomzahl** des chemischen Elementes im Periodensystem. Die Neutronen bestimmen zusammen mit den Protonen die Masse des Kerns und des ganzen Atoms. Darum wird die **Nukleonanzahl** $A = Z + N$ auch **Massenzahl** genannt. Mit ihr unterscheidet man üblicherweise die **Isotope** eines Elementes, also Nuklide gleicher Protonen-, aber unterschiedlicher Neutronenanzahl. Wie kommt es dazu?

wichtig

Kenngrößen des Nuklids:

- ▶ Z = Protonenanzahl,
Kernladungszahl, Atomzahl
- ▶ N = Neutronenanzahl
- ▶ $A = Z+N$ = Nukleonanzahl,
Massenzahl

Die anziehende Kernkraft zwischen zwei Protonen reicht nicht aus, die abstoßende Coulomb-Kraft zwischen zwei positiven Elementarladungen zu überwinden. Mindestens ein Neutron muss mit seiner Kernkraft hinzukommen, zwei sind besser. Es gibt also zwei stabile Isotope des zweiten Elements im Periodensystem, des Edelgases Helium:

Helium-3, He-3, ${}^3\text{He}$, ${}^3\text{He}$ mit $Z = 2$, $N = 1$, $A = 3$,
Helium-4, He-4, ${}^4\text{He}$, ${}^4\text{He}$ mit $Z = 2$, $N = 2$, $A = 4$.

Hier sind die gebräuchlichsten Schreibweisen zusammengestellt. Das chemische Symbol steht für alle Isotope eines Elements. Zu ihrer Unterscheidung fügt man die jeweilige Massenzahl A oben links an. Die Kernladungszahl unten links kann man sich grundsätzlich sparen, da sie ja schon im chemischen Element zum Ausdruck kommt.

wichtig

Isotope sind Nuklide mit gleicher Protonenanzahl Z , aber unterschiedlicher Neutronenanzahl und damit Massenzahl.

Eine gewisse Sonderrolle unter den Isotopen spielen die des Wasserstoffs. Bei einem Kern, der nur aus einem Proton besteht, vergrößert ein hinzukommendes Neutron die Masse gleich um einen Faktor zwei. Dadurch ändern sich zwar nicht die chemischen, wohl aber die physikalischen Eigenschaften so sehr, dass es sich lohnt, dem *schweren Wasserstoff* ${}^3\text{H}$ einen eigenen Namen und ein eigenes chemisches Symbol zu geben: Deuterium ${}^2\text{D}$. Der Atomkern heißt *Deuteron*. Sogar ein *überschwerer Wasserstoff* mit zwei Neutronen existiert, lebt aber nicht allzu lange. Er bekommt ebenfalls einen eigenen Namen und ein eigenes Symbol: Tritium, ${}^3\text{T}$, Triton.

Alle denkbaren Nuklide, ob sie nun existieren oder nicht, lassen sich übersichtlich in der sog. *Nuklidtafel* zusammenfassen. Dafür weist man jedem von ihnen ein quadratisches Kästchen zu und stapelt diese wie Schuhkartons im Regal, Isotope mit gleichem Z nebeneinander, gleiche Neutronenanzahlen N übereinander. Gleiche Nukleonenzahlen A liegen dann in Diagonalen von oben links nach unten rechts. Den Bereich der leichtesten Elemente bis $Z = 4$ (Beryllium) zeigt Abb. 8.5. Abweichend von der Norm ist hier das Tritium als instabiles Nuklid nicht aufgeführt.

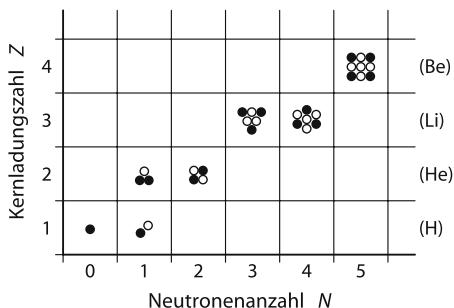


Abb. 8.5. Unteres Ende der Nuklidtafel; volle Kreise symbolisieren Protonen, offene Kreise Neutronen

8.2.2

Der Massendefekt

Es überrascht, aber die Masse des häufigeren Helium-Isotops ${}^4\text{He}$ liegt mit 4,0020 u etwas unter der gemeinsamen Masse der 4 Nukleonen, die es bilden. Mit knapp 2 % springt dieser *Massendefekt* nicht ins Auge, aber bedeutsam ist er durchaus. Hinter ihm steht nämlich die Feststellung der Relativitätstheorie, Masse m und Energie W seien äquivalent entsprechend der Gleichung

$$W = m \cdot c^2.$$

Die Lichtgeschwindigkeit c ist groß, ihr Quadrat erst recht. Demnach wiegt Energie nicht viel. Umgekehrt repräsentiert ein Gramm irgendwelcher Materie bereits 89,9 GJ oder 25000 Kilowattstunden. Um einen Kern des Helium-4 in seine Nukleonen zu zerlegen, muss man ihm seinen Massendefekt zurückgeben, d.h. 27,3 MeV Energie zuführen, immerhin 6,8 MeV pro Nukleon. Sie wurden zuvor als *Bindungsenergie* abgegeben. Diese für die Stabilität eines Nuklids wichtige Größe kann man also gewissermaßen „mit der Waage“ bestimmen. Bei chemischen Reaktionen gilt grundsätzlich dasselbe. Nur liegen hier die frei werdenden Bindungsenergien nur im Bereich einiger eV pro Molekül. Der zugehörige Massendefekt ist auch für die beste Analysenwaage viel zu klein. Insofern haben die Chemiker recht, wenn sie behaupten, bei

ihren Reaktionen blieben die Massen der beteiligten Partner erhalten.

Vom Massendefekt des ^4He „lebt“ die Erde, ihre Flora und Fauna sogar im unmittelbaren Sinn des Wortes, der Mensch nicht ausgenommen. Seit rund 5 Milliarden Jahren „verbrennt“ die Sonne Wasserstoff zu Helium und strahlt die dabei durch Massendefekt frei werdende Energie in den Weltraum hinaus. Das wird vermutlich noch einmal $5 \cdot 10^9$ a so weitergehen, bis sich die Sonne sterbend zum „roten Riesen“ aufbläht, über die Erdbahn hinaus.

8.2.3 Radioaktivität

Grundsätzlich versucht jedes physikalische System, so viel Energie, d.h. so viel Masse loszuwerden, wie ihm die Umstände erlauben. Das Neutron ist um knapp eine Elektronenmasse schwerer als Proton und Elektron zusammen. Tatsächlich kann es sich in ein Proton umwandeln, dabei ein Elektron abstoßen und ihm noch das Äquivalent der verbleibenden Masse als kinetische Energie mitgeben. Aus historischen Gründen bezeichnet man ein solches, praktisch lichtschnelles Elektron, als β -Teilchen. Als man den β -Zerfall entdeckte und ihm einen Namen geben musste, konnte man seine Natur noch nicht feststellen.

Im Atomkern verlieren die Nukleonen ihre Identität; über Stabilität und Zerfall entscheiden Masse und Massendefekt des Kollektives. Darum stößt das Neutron des Deuterons ^2D kein Elektron aus, denn täte es das, entstünde ein Kern aus zwei Protonen. Die werden aber von ihrer Coulomb-Kraft auseinander gejagt. Übersetzt heißt das: Zwei dicht gepackte Protonen sind schwerer als ein Deuteron. Das Triton ^3T ist dahingegen leichter als der Kern ^3He des leichteren Helium-Isotops: Tritium ist ein β -Strahler, es ist **radioaktiv**.

Nuklide, die zu viele Neutronen besitzen, betreiben β -Zerfall (genauer: β^- -Zerfall, s. unten). Aber was heißt das: zu viele Neutronen? In einem stabilen Nuklid müssen

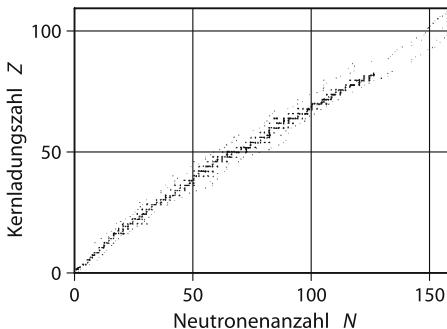


Abb. 8.6. Nuklidtafel. Die dicken Punkte markieren die stabilen Nuklide („stabile Rinne“), die feinen Punkte markieren das leichteste und das schwerste bekannte Isotop des jeweiligen Elements. Weiter außen liegende Nuklide sind so kurzlebig, dass sie sich nicht nachweisen lassen

Kern- und Coulomb-Kräfte in einem ausgewogenen Verhältnis zueinander stehen. Viel Spielraum lässt die Natur ihnen nicht: In der Nuklidtafel besetzen sie nur eine recht schmale **stabile Rinne**. Leichtere Kerne benötigen ungefähr ein Neutron pro Proton, schwerere aber mit wachsendem Z einen immer größeren Neutronenüberschuss. Die stabile Rinne beginnt unten links unter 45° und wird nach oben immer flacher und endet beim letzten stabilen Nuklid, dem Wismut-209 mit 83 Protonen und 126 Neutronen (☞ Abb. 8.6). Ab Atomnummer 84 (Polonium) ist alles radioaktiv.

Um die stabile Rinne zu erreichen, müssen die schweren Elemente vor allem Nukleonen loswerden: Dazu stoßen sie einen vollständigen Atomkern ab, den des Helium-4. Dadurch reduzieren sich die Protonen- und Neutronenanzahlen je um 2, die Nukleonenanzahl also um 4. In der Nuklid-Tafel bedeutet das einen Sprung über 2 Zeilen und 2 Spalten unter 45° nach unten links. Diese Art radioaktiver Strahlen wurde als erste entdeckt; man brauchte einen Namen und nannte sie, weil man nichts besseres wusste, α -Strahlen. Dementsprechend heißen im α -Zerfall emittierten ^4_2He -Kerne bis heute α -Teilchen. Auch das berühmte Radium-226, von Marie Curie (1867–1934) erstmals chemisch isoliert, ist ein α -Strahler. Mit seiner Atomnummer 86 kann es freilich die stabile

Rinne nicht in einem Sprung erreichen; dem ersten α -Zerfall müssen sich weitere anschließen. Die führen aber, ihrer 45° wegen, in der Nuklid-Tafel unter die stabile Rinne. Darum wird ab und an ein β -Zerfall eingeschoben. Er ändert die Massenzahl nicht, erhöht aber die Atomnummer. In der Nuklid-Tafel entspricht er einem Sprung auf das Nachbarfeld oben links. Auf diese Weise zieht ein schweres Atom eine ganze *Zerfallsreihe* hinter sich her. ☺ Abbildung 8.7 zeigt die des Radium-226. Sie verfehlt das stabile Wismut-Isotop $^{209}_{83}\text{Bi}$ und endet beim Blei-Isotop $^{206}_{82}\text{Pb}$.

Was machen Kerne, die, aus welchen Gründen auch immer, oberhalb der stabilen Rinne entstehen? α - und β -Zerfall nützen ihnen nichts, sie müssen Protonen loswerden. Sie tun dies durch Umwandlung eines Protons in ein Neutron. Dazu haben sie grundsätzlich zwei Möglichkeiten. Mancher Kern fängt ein Elektron ein, und zwar von dort, wo es ihm am nächsten ist, aus der K-Schale seiner eigenen Hülle: *K-Einfang*. Der zweite Weg bringt etwas grundsätzlich Neues: Hier stößt der Kern ein *Positron* aus, ein „Elektron mit positiver Ladung“. Es gehört nicht in das Sonnensystem, denn es ist ein Teilchen der hierzu landende nicht lebensfähigen sog. *Antimaterie*, von der in Kap. 8.2.8 noch kurz die Rede sein wird. Positronen gehören, wie die Elektronen, zu den β -Teilchen; zur Unterscheidung spricht man je nach Ladungsvorzeichen von β^- und β^+ -Strahlern. In der Nuklid-Tafel bewirken K-Einfang wie β^+ -Zerfall einen Sprung in das Nachbarfeld unten rechts. ☺ Abbildung 8.8 fasst die Sprünge der besprochenen Zerfallsarten zusammen.

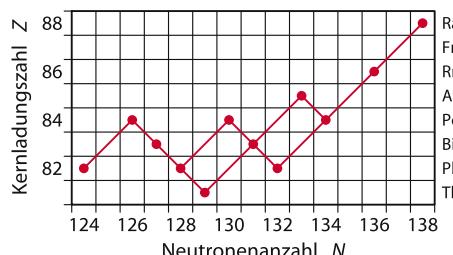


Abb. 8.7. Zerfallsreihe des Radium-226

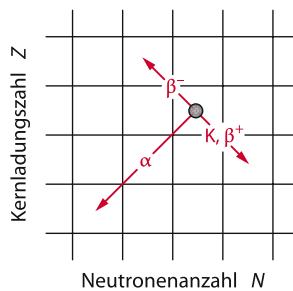


Abb. 8.8. Die wichtigsten Kernumwandlungen im Schema der Nuklidtafel

Für das betroffene Atom ist sein radioaktiver Zerfall ein höchst aufregender Vorgang. Mit seiner Kernladungszahl ändert es seine chemische Natur; es muss seine Nukleonen im Kern und seine Elektronen in der Hülle neu arrangieren. Der neue Kern entsteht in einem angeregten Zustand und sucht nun seinen Grundzustand. Er erreicht ihn nach der gleichen Methode wie die Hülle auch: durch Emission von Quanten. Nur geht es im Kern um wesentlich höhere Energien. Entsprechend kurzwellig ist die emittierte elektromagnetische Welle. Man nennt sie γ -Strahlung. Mit ganz wenigen Ausnahmen wird bei einem α - oder β -Zerfall immer auch ein γ -Quant ausgesandt.

Zerfallsart	emittiert wird	ΔZ	ΔN	ΔA
α	$^4\text{He}_2$	-2	-2	-4
β^-	Elektron	+1	-1	0
β^+	Positron	-1	+1	0
K-Einfang		-1	+1	0
γ	Quant	0	0	0

8.2.4

Nachweis radioaktiver Strahlung

Kernumwandlungen betreffen immer nur einzelne Atome, einzelne Kerne. Diese sind durch die Elektronenhülle weitgehend von der Außenwelt abgeschirmt. Ihre Umwandlungen lassen sich nicht beeinflussen; sie reagieren weder auf Druck, noch auf Tempe-

ratur oder chemische Bindung. Wie will man herausbekommen, was ein einzelner Atomkern tut? Man kann es nur, weil der Energieumsatz bei Kernprozessen vergleichsweise hoch ist. Die Teilchen und Quanten radioaktiver Strahlung verfügen meist über Energien zwischen 0,1 MeV und 1 MeV. Damit kann man zigtausend Moleküle ionisieren. Wenn ein „radioaktiver Strahl“ durch die Luft fährt, hinterlässt er auf seiner Bahn einen nachweisbaren Ionenschlauch. Er berichtet von einem einzelnen Kernprozess.

Dies tut auch der *Halbleiterzähler*: Hier setzt der Strahl normalerweise gebundene Elektronen für kurze Zeit zu Leitungselektronen frei. Im *Szintillationszähler* erzeugen ähnliche Elektronen per Lumineszenz einen Lichtblitz.

Wichtigstes Messinstrument der Kernphysik ist das *Geiger-Müller-Zählrohr*, das einen Zwitter zwischen selbständiger und unselbständiger Gasentladung (Kapitel 6.6.9). Es ist so empfindlich, dass es ein einzelnes ionisierendes Teilchen. Ein Geigerzähler sperrt ein passend ausgesuchtes Gas unter verminderterem Druck in ein Rohr ein und stellt einen dünnen Draht in dessen Achse (Abb. 8.9). Eine Nadel tut es auch („Spitzenzähler“). Wichtig ist der kleine Krümmungsradius, der schon bei mäßigen Spannungen zu hohen Feldstärken führt. Das Rohr muss dünnwandig sein oder ein spezielles Strahlenfenster haben, damit es ionisierende Teilchen überhaupt hereinlässt. Die elektrische Spannung zwischen Zähldraht und Wand wird nun so eingestellt, dass die selbständige Entladung gerade eben noch nicht zündet. Sie wird dann aber von einem einzelnen schnellen Teilchen ausgelöst, wenn dieses durch das empfindliche Volumen dicht um den Draht fährt: Es zieht den Ionenschlauch

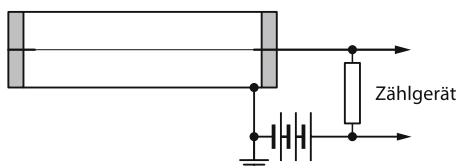


Abb. 8.9. Geiger-Müller-Zählrohr

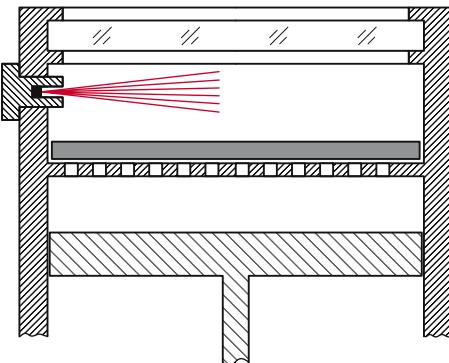


Abb. 8.10. Wilson-Nebelkammer, schematisch. Die eigentliche Beobachtungskammer enthält einen mit Alkohol oder Wasser getränkten Filz, der ständig für Sättigungsdampfdruck sorgt. Durch einen kurzen Zug am Kolben wird die Temperatur in der Kammer in adiabatischer Expansion abgesenkt und der Dampf übersättigt. Er kondensiert bevorzugt an den von der radioaktiven Strahlung ausgelösten Ionenschläuchen

hinter sich her, dessen Elektronen die Lawine starten. Ein hoher Schutzwiderstand stoppt sie sofort wieder; mehr Ladung als die in der Kapazität des Zähldrahtes gespeicherte steht nicht zur Verfügung. Wenn aber die Spannung über dem Zählrohr für die Dauer der Entladung zusammenbricht, dann erscheint sie gleichzeitig über dem Schutzwiderstand und kann elektronisch registriert, gezählt und durch ein Knacken im Lautsprecher hörbar gemacht werden: „Der Geigerzähler tickt.“

wichtig

Geiger-Müller-Zählrohr: Ein einzelnes ionisierendes Teilchen löst eine Elektronenlawine aus, die nach weniger als einer Millisekunde gestoppt wird.

Das Auge ist des Menschen bestes Sinnesorgan; er möchte die Spuren radioaktiven Zerfalls sehen. Auch das erlauben ihm die Ionenschläuche, und zwar mit Hilfe der *Nebelkammer*. Sie nutzt aus, dass die Kondensation einer Flüssigkeit zu den Keimbildungsprozessen gehört (s. Kap. 5.3.2), und dass Ionen ausgezeichnete Kondensations-

keime bilden. Zuvor muss der Dampf freilich kondensationswillig gemacht, d.h. übersättigt werden. Dies erreicht man durch eine Unterkühlung, ausgelöst durch eine rasche und damit praktisch adiabatische Expansion (adiabatisch: ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung, s. Kap. 5.4.2). Daraus ergibt sich das Konstruktionsprinzip einer Nebelkammer, schematisch dargestellt in Abb. 8.10. Fährt beispielsweise ein α -Teilchen unmittelbar nach der Expansion durch die Kammer, so kondensieren Nebeltröpfchen an seinem Ionenschlauch und markieren die Bahn als weißen Strich, deutlich sichtbar in scharfem seitlichen Licht. Die Nebelspur steht für eine knappe Sekunde – lange genug, sie zu fotografieren – und löst sich dann wieder auf.

wichtig

Nachweisgeräte für einzelne radioaktive Strahlen:
Zählrohr und Halbleiterzähler registrieren jeden „Strahl“ als elektrischen Impuls, Szintillationszähler als Lichtblitz, die Nebelkammer bildet Teilchenbahnen ab.

In der Nebelkammer hinterlassen die verschiedenen Teilchenarten charakteristische Spuren. Typisch für die α -Teilchen sind

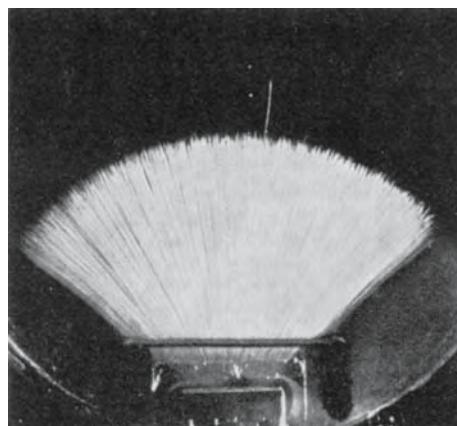


Abb. 8.11. Bahnen von α -Teilchen; das eine Teilchen mit überhöhter Reichweite stammt von einem angeregten Atomkern (Aufnahme: Philipp; nach Finkelnburg)



Abb. 8.12. Bahnen von β -Teilchen; die gerade, nicht geschlossene Nebelspur stammt von einem schnellen Teilchen, die verschlungenen von langsamen (Aufnahme: Rutherford; nach Westphal)

kurze, kräftige, gerade Bahnen einheitlicher Länge, wie sie Abb. 8.11 zeigt. Der Heliumkern ist so schwer, dass er nicht leicht aus seiner Bahn geworfen werden kann. Eben deshalb hat er aber auch eine hohe Ionisationsrate, verliert seine anfängliche kinetische Energie darum verhältnismäßig rasch und läuft sich schon nach wenigen Zentimetern tot. Seine Reichweite ist ein Maß für seine Startenergie. Der „Pinsel“ der Abb. 8.11 lässt erkennen, dass alle aus gleichen Kernprozessen stammende α -Teilchen gleiche Energie mitbekommen. Ihre Bedeutung in der Strahlentherapie ist sehr begrenzt: Einigen Zentimetern Reichweite in Zimmerluft entsprechen allenfalls Zehntelmillimeter in Wasser oder Gewebe.

β -Strahlen ionisieren weitaus schwächer, besonders wenn sie noch schnell und energiereich sind, denn dann haben sie gewissermaßen nur wenig Zeit, im Vorbeifliegen ein Luftmolekül zu ionisieren. In der Nebelkammer hinterlassen sie lange, oftmals unterbrochene, selten gerade und zumeist gegen Ende verschlungene Spuren (Abb. 8.12): Das leichte Elektron wird von jedem Molekül, auf das es einigermaßen zentral trifft, aus seiner Bahn geworfen. Entsprechend gering ist seine Reichweite in

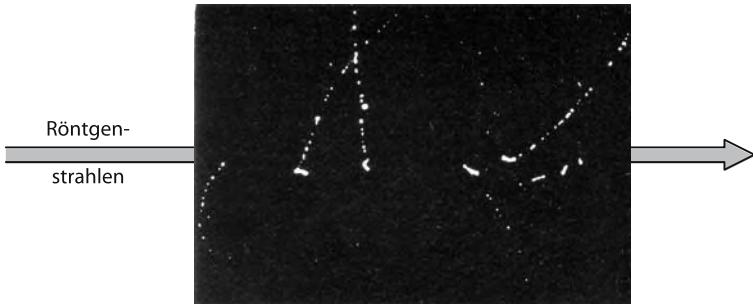


Abb. 8.13. Quanten hinterlassen keine eigenen Spuren in der Nebelkammer; die von ihnen ausgelösten Elektronen ziehen aber Spuren nach Art von β -Teilchen seitlich aus dem Quantenbündel heraus (nach R.W. Pohl)

Wasser und biologischem Gewebe, denn Energien in der Größenordnung einiger MeV wie bei Elektronenbeschleunigern bringen radioaktiv entstandene Elektronen nicht mit. Medizinisch genutzt werden β -Strahlen deshalb nur dann, wenn man das radioakti-

ve Präparat unmittelbar an den Ort des Geschehens bringen kann. Ein Beispiel liefert ^{198}Au , das z.B. als Goldchlorid physiologischer Kochsalzlösung zugesetzt und in die Bauchhöhle eines Patienten gebracht, dort herumvagabundierende Krebszellen abtöten soll.

Leider emittieren (fast) alle β -Strahler auch durchdringende Quanten, der Patient wird also zu einer lebenden γ -Quelle. Glücklicherweise klingt die Aktivität des Gold-Präparates mit einer Halbwertszeit von rund drei Tagen ab (auch in der Kanalisation, in die einige der strahlenden Kerne sicherlich entwischen). γ -Quanten und Röntgenstrahlen hinterlassen in der Nebelkammer unmittelbar keine Spuren. Sie lösen aber bei der Ionisation energiereiche Elektronen aus, die β -Teilchen entsprechen. Deren Spuren starten irgendwo im Wellenbündel und laufen seitlich aus ihm heraus (☞ Abb. 8.13).

α -, β - und γ -Strahlen sind zwar die wichtigsten Produkte radioaktiver Kernumwandlungen, nicht aber die einzigen.

☞ Abbildung 8.14 zeigt die Spuren von Protonen. Dass die Bahnen gekrümmmt sind, hat einen äußerlichen Grund: Die Nebelkammer befindet sich in einem Magnetfeld mit den Feldlinien in Blickrichtung der Kamera. Folglich wird jedes hindurchfliegende Teilchen, sofern es elektrisch geladen ist, von der Lorentz-Kraft auf eine Kreisbahn gezwungen (s. Kap. 6.10.4). Der Drehsinn hängt vom Vorzeichen der Ladung, der



Abb. 8.14. Bahnen von Protonen in der Nebelkammer; sie sind gekrümmt, weil bei der Aufnahme ein Magnetfeld in Blickrichtung der Kamera bestand. Die Aufnahme diente dem Nachweis schneller Neutronen, die als neutrale Teilchen nicht ionisieren und darum keine Bahnspuren hinterlassen. Bei hinreichend zentralem Stoß übertragen sie ihre kinetische Energie auf die in der Kammer in Form von Wasserstoffgas vorhandenen Protonen. (Aufnahme: Radiation Laboratory, University of California; nach Finkenburg)

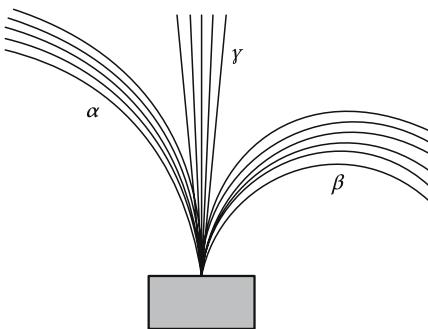


Abb. 8.15. Grobschematische Darstellung der Spuren radioaktiver Strahlen im Magnetfeld: Quanten werden nicht, Elektronen nach der einen und Heliumkerne nach der anderen Seite abgelenkt. Die Zeichnung ist nicht maßstabsgerecht: Ein Feld, das Elektronen in der angegebenen Weise ablenkt, würde α -Teilchen nicht erkennbar beeinflussen

Bahnradius von Geschwindigkeit und spezifischer Ladung q/m ab. Die schweren α -Teilchen werden darum weniger stark abgelenkt als die leichten Elektronen, und in entgegengesetzter Richtung zudem. Die weit verbreitete Abb. 8.15 setzt demnach die Existenz eines Magnetfeldes stillschweigend voraus.

8.2.5 | Zerfallsgesetz

Ein instabiler Kern zerfällt nicht sofort nach seiner Geburt. Jedes radioaktive Nuklid besitzt seine eigene mittlere **Lebensdauer** τ . Ist sie zu groß, als dass sie sich messen ließe, gilt das Nuklid als stabil; ist sie für eine Messung zu klein, gilt das Nuklid als nichtexistent, und sein Kästchen in der Nuklid-Tafel bleibt leer.

Die Radioaktivität wird vom Zufall regiert: Niemand kann vorhersagen, welcher Kern in einem radioaktiven Präparat als nächster zerfallen wird. Auch der Zufall wird von mathematischen Gesetzen regiert: Man kann recht genau vorhersagen, wie viele Kerne eines bekannten radioaktiven Präparates in der nächsten Sekunde, Minute, Stunde oder Woche zerfallen werden. Den

Quotienten aus Anzahl ΔN und Zeitspanne Δt , die **Zerfallsrate**, bezeichnet man als

$$\text{Aktivität } A = \Delta N / \Delta t$$

eines radioaktiven Präparates. Sie ist eine reziproke Zeit; ihre Si-Einheit 1/s bekommt den Namen **Becquerel** (Bq).

Die reziproke Sekunde 1/s dient auch als Einheit der Frequenz, dies aber unter dem Namen Hertz. Weshalb die Unterscheidung? Eine Schwingung ist ein kausaler Vorgang, der radioaktive Zerfall ein zufallsbedingter *stochastischer* Prozess.

Atome sind klein und zahlreich, auch die instabilen. Die Aktivitäten üblicher Präparate für Medizin und Technik bekommen, in Bq gemessen, unangenehm hohe Maßzahlen. Sogar ein normaler erwachsener Mensch strahlt mit „erschreckenden“ 5000 Bq, ohne deswegen als radioaktiv zu gelten. Zu kleineren Maßzahlen führt die vor Einführung des Système International übliche Einheit **Curie** = Ci = $3,77 \cdot 10^{10}$ Bq. Da bleiben dem Menschen nur noch harmlos klingende 0,14 μ Ci.

Es leuchtet ein: Die Aktivität A eines Präparates ist proportional zur Anzahl N der in ihm versammelten radioaktiven Atome und proportional zu deren **Zerfallskonstanten** λ , nämlich umgekehrt proportional zur **Lebensdauer** $\tau = 1/\lambda$:

$$\text{Aktivität } A = \lambda \cdot N = N/\tau.$$

Das gilt so für ein einheitliches Präparat, dessen Nuklid mit einem einzigen Sprung die stabile Rinne erreicht. zieht es eine Zerfallsreihe mit n vergleichsweise kurzlebigen Folgenukliden hinter sich her, so erhöht sich A auf das n -fache. Wegen der Aktivität nimmt N als $N(t)$ mit der Zeit ab, und zwar mit der Geschwindigkeit $\dot{N} = -dN/dt = -A$ (negatives Vorzeichen wegen der Abnahme). Die Anzahl $N(t)$ der zum Zeitpunkt t noch vorhandenen, nicht zerfallenen Kerne folgt demnach der Differentialgleichung

$$\frac{dN}{dt} = \dot{N} = -\frac{N(t)}{\tau}.$$

Rein mathematisch ist das die Differentialgleichung der Kondensatorentladung von

Kap. 6.4.6, nur stand dort anstelle der Teilchenanzahl $N(t)$ die elektrische Spannung $U(t)$. Den mathematischen Formalismus kümmern Buchstaben und ihre physikalischen Bedeutungen nicht. Was U recht ist, ist N billig. Folglich gilt für $N(t)$ das

Gesetz des radioaktiven Zerfalls

$$N(t) = N_0 \cdot \exp(-t/\tau) = N_0 \cdot \exp(-\lambda \cdot t).$$

Die abfallende e-Funktion besagt: In gleichen Zeitspannen Δt geht $N(t)$ von jedem Ausgangswert N_0 auf dessen gleichen Bruchteil hinunter, insbesondere in der **Halbwertszeit** $T_{1/2}$ auf $\frac{1}{2}N_0$. Aus alter Gewohnheit wird in Tabellenbüchern meist die Halbwertszeit und nicht die mittlere Lebensdauer angegeben. Rein mathematisch gilt

Halbwertszeit

$$T_{1/2} = \text{Lebensdauer } \tau \cdot \ln 2 = 0,6931 \cdot \tau.$$

Graphisch liefert der radioaktive Zerfall in linearem Maßstab die schon bekannte abfallende Kurve der Exponentialfunktion (s. Kap. 1.3.4), die an der Ordinate startet und asymptotisch auf die Abszisse zuläuft, ohne sie jemals zu erreichen (☞ Abb. 8.16). Eine Tangente, zu irgendeinem Zeitpunkt t_0 angelegt, schneidet die Abszisse zum Zeitpunkt $t_0 + \tau$, d.h. um 1,4472 Halbwertszeiten nach t_0 . Teilt man die Ordinate logarithmisch, so streckt sich die Kurve zur Geraden.

wichtig

Gesetz des radioaktiven Zerfalls:

$$N(t) = N_0 \cdot \exp(-t/\tau) = N_0 \cdot \exp(-\lambda \cdot t),$$

Kenngrößen des radioaktiven Zerfalls:

mittlere Lebensdauer τ ,

Zerfallskonstante $\lambda = 1/\tau$,

Halbwertszeit $T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2$,

Aktivität

$$A(t) = dN/dt = N(t)/\tau = \lambda \cdot N(t) = \text{Zerfallsrate},$$

Einheiten:

$$\text{Becquerel} = \text{Bq} = 1/\text{s}; \text{Curie} = \text{Ci} = 3,77 \cdot 10^{10} \text{ Bq}.$$

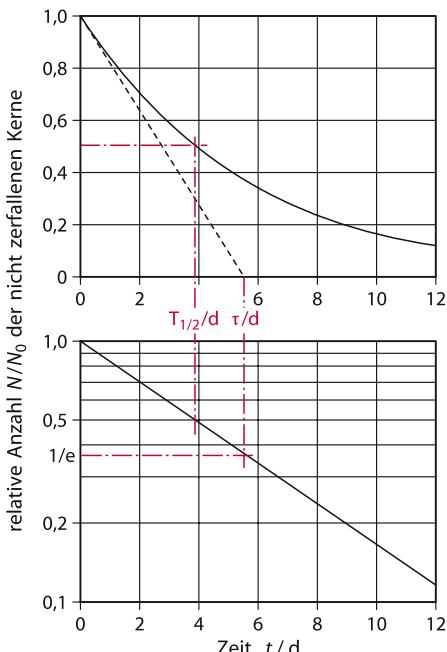


Abb. 8.16a,b. Radioaktiver Zerfall am Beispiel des Radon-222; Halbwertszeit 3,825 Tage, Lebensdauer 5,518 Tage; a Darstellung in linearem Maßstab; b einfache-logarithmische Darstellung

Die Lebensdauern und Halbwertszeiten der Nuklide reichen von 0 (nichtexistent) bis ∞ (stabil). Einige Beispiele seien hier aufgeführt:

- Kalium-40 $T_{1/2} = 1,28 \cdot 10^9$ a
- Kohlenstoff-14 $T_{1/2} = 5730$ a
- Radon-222 $T_{1/2} = 5,825$ d
- freies Neutron $T_{1/2} = 18$ min
- Tantal-181 $T_{1/2} = 6,8$ μ s

Seit Anbeginn der Welt, seit dem Urknall vor etwa 16 Milliarden Jahren, hat das Kalium-40 noch keine 15 Halbwertszeiten erlebt. Zehn Halbwertszeiten bringen den Faktor 1024. Gewiss, das K-40 ist seither deutlich weniger geworden, es ist aber immer noch so viel vorhanden, dass es ganz natürlicherweise in Pflanze, Tier und Mensch vorkommt. 80% der natürlichen Aktivität des Menschen stammen vom K-40. Auch **Kohlenstoff-14** kommt in der Natur vor, durch Kernprozesse in der hohen Atmosphäre ständig erzeugt.

Er dient den Archäologen zur Altersbestimmung von Fossilien. Das Edelgas Radon-222 gehört zur Zerfallsreihe des Radium-226, einer Allerweltssubstanz, die in Spuren überall vorkommt und z.B. auch zur Aktivität des Menschen messbar, wenn auch unwesentlich beiträgt. Radon-222 kriecht aus Mauersteinen und kann in Zimmern, zumal in schlecht gelüfteten, durchaus bedenkliche Konzentrationen erreichen: Wenn es eingeadmet zu dem nicht mehr gasförmigen Polonium-218 zerfällt, wird es nicht wieder ausgeatmet und liefert die Strahlung des Restes der Zerfallsreihe in der Lunge ab.

Rechenbeispiel 8.1: Alter Knochen

Ein Tierknochen in einer archäologischen Ausgrabungsstätte enthält 200 g Kohlenstoff. Er weist eine Aktivität von 15 Zerfällen pro Sekunde auf, die von dem Kohlenstoff-14 Isotop herkommt. Wie alt ist der Knochen? Dazu muss man wissen, dass das Verhältnis $^{14}_6\text{C}$ zu $^{12}_6\text{C}$ zum Zeitpunkt, als das Tier noch atmete und fraß $1,3 \cdot 10^{-12}$ war (natürliche Zusammensetzung in der Luft und den Pflanzen).

Lösung: Als das Tier noch lebte, entsprachen 200 g Kohlenstoff

$$N_0 = \frac{6 \cdot 10^{23} \text{ Atome}}{12 \text{ g}} \cdot 200 \text{ g} \cdot 1,3 \cdot 10^{-12} \\ = 1,3 \cdot 10^{13} \text{ Atome } ^{14}_6\text{C}.$$

Die Aktivität damals war

$$A_0 = \lambda \cdot N_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N_0 = 1,6 \cdot 10^9 \frac{1}{\text{a}} = 50 \text{ s}^{-1}.$$

Nach der gesuchten Zeit sind nur noch 15 Zerfälle pro Sekunde und entsprechend weniger ^{14}C -Atome übriggeblieben. Es ist also:

$$\frac{15 \text{ s}^{-1}}{50 \text{ s}^{-1}} = 0,3 = e^{-\lambda \cdot t} = \exp\left(-\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}}\right) \\ \Rightarrow t = -\frac{\ln 0,3}{\ln 2} \cdot T_{1/2} = 9950 \text{ Jahre.}$$

8.2.6

Kernspaltung und künstliche Radioaktivität

Einige besonders schwere Nuklide sind nicht nur radioaktiv, sondern auch noch spaltbar. Statt ein α - oder β -Teilchen zu emittieren, teilt sich ein solcher schwerer Kern hin und wieder in zwei mittelschwere. Weil die stabile Rinne gekrümmt ist, bleiben dabei ein paar Neutronen übrig.

Diese überzähligen Neutronen sind technisch interessant. Die Kernspaltung muss nämlich nicht spontan erfolgen, sie lässt sich auch provozieren, und zwar gerade durch Neutronen. Damit wird eine **Kettenreaktion** zumindest grundsätzlich möglich: Die bei einer Spaltung freigesetzten Neutronen lösen neue Spaltungen aus. Wenn das in unkontrollierter Lawine geschieht, explodiert eine Atombombe. So ganz leicht ist die Kettenreaktion allerdings nicht zu erreichen. Die Spaltung liefert energiereiche, „schnelle“ Neutronen, braucht aber zur Auslösung langsame, „thermische“ Neutronen. Zum Zweiten ist das spaltbare Isotop ^{235}U in Natururan nur zu 0,7% vorhanden. Zum Dritten enthält Natururan aber ^{238}U , das besonders gern Neutronen einfängt, ohne sich zu spalten. Um Uran bombenfähig zu machen, muss man deshalb das Isotop ^{235}U hoch anreichern – das kostet Geld.

Kernreaktoren liefern nicht nur Energie, sondern zuweilen auch spaltbares Material wie das Plutonium-Isotop ^{239}Pu , das als Transuran zu instabil ist, um auf der Erde noch in natürlichem Vorkommen vorhanden zu sein. Alle heutigen Reaktoren nutzen die Spaltung schwerer Kerne zur Gewinnung nutzbarer Energie. Die Sonne macht es anders: Sie betreibt Kernverschmelzung am unteren Ende des Periodensystems; sie „verbrennt“ Wasserstoff nuklear zu Helium. Auch dabei wird Energie frei, im Vergleich zur eingesetzten Masse sogar sehr viel. Des Menschen Bemühen, es der Sonne gleichzutun, hat schon früh zur Wasserstoffbombe geführt, aber erst in Ansätzen zu nützlichem Gebrauch bei der Energieversorgung.

Kernreaktoren brauchen nur einen Teil der freigesetzten Neutronen für ihre Kettenreak-

tion. Der Rest lässt sich grundsätzlich nutzbringend verwenden: Nahezu jede Substanz, in einen Strom langsamer Neutronen gehalten, wird radioaktiv. Sie bildet durch Neutroneneinfang neue Kerne, die in der Natur nicht mehr vorkommen, weil sie, wenn es sie je gab, längst zerfallen sind. Zum Beispiel bildet Silber unter Neutroneneinfang gleich zwei β^- -aktive Isotope, die wieder zum Element Silber gehören, weil ein Neutron mehr im Kern ja die Atomnummer nicht ändert. Technische Annehmlichkeit der Aktivierung durch Beschuss mit thermischen Neutronen: Man braucht die aktivierte Kerne nicht chemisch aus der nicht aktivierte Matrix herauszupräparieren.

wichtig

Künstliche Radioaktivität:
Durch Neutroneneinfang geht ein stabiles Nuklid in ein meist radioaktives Isotop über.

Künstlich radioaktive Chemikalien erlauben es, komplizierte Reaktionen wie etwa die des organischen Stoffwechsels zu verfolgen. Chemisch verhält sich ja ein aktiviertes Atom bis zu seinem Zerfall nicht anders als ein stabiles vom gleichen Element; durch seine Strahlung verrät es aber als radioaktiver Tracer, wohin es während seiner Lebensdauer durch den Stoffwechsel gebracht wurde. Spritzt man etwa einem Kaninchen radioaktives Jod in den Oberschenkel, kann man mit einem Zählrohr die Aktivität nahe der Einstichstelle leicht nachweisen. Wenig später hat sie aber der Blutkreislauf gleichmäßig über das ganze Tier verteilt, es strahlt von Kopf bis Schwanz. Wieder einige Zeit später findet sich die Aktivität bevorzugt in der Schilddrüse, denn dieses Organ hat eine Vorliebe für Jod.

8.2.7 Antimaterie

Im Gegensatz zu Luft und Wasser, Kohle und Eisen gehören die **Positronen**, die protonenreiche Kerne emittieren, nicht zur

Materie, sondern zur **Antimaterie**. Zu jeder Art materieller Teilchen gibt es grundsätzlich auch **Antiteilchen**, zum Proton das **Antiproton**, zum Neutron das **Antineutron** und zum Elektron das „**Antielektron**“, eben das Positron. Die beiden Massen sind jeweils gleich. Sobald ein Teilchen auf sein Antiteilchen trifft, **zerstrahlen** beide: Sie setzen ihre gemeinsame Masse in Quantenenergie um. Die elektrische Ladung macht keine Probleme; Teilchen und Antiteilchen tragen, wenn sie schon geladen sind, entgegengesetzte Ladung. Denkbar sind sogar Atome aus Antimaterie, denn physikalisch ist es gleichgültig, ob sich ein positiver Kern mit Elektronen umgibt oder ein negativer Kern mit Positronen. Man kann deshalb einer fernen Galaxie nicht ansehen, ob sie möglicherweise aus Antimaterie besteht. Nur darf sie dann der Milchstraße nicht zu nahe kommen. In einer Welt aus Materie kann sich Antimaterie nicht lange halten. Positronen leben in Wasser allenfalls eine Nanosekunde, in Metallen nicht einmal das, in gutem Vakuum aber so viel länger, dass man mit ihnen experimentieren kann. Genau das Gleiche gilt für Materie in einer Welt aus Antimaterie.

Auch der Umkehrprozess zur Zerstrahlung, die Erzeugung von Materie aus Quantenenergie, kommt vor. Man nennt sie **Paarbildung**, denn wegen der Ladungsbilanz muss immer gleich ein Elektron-Positron-Paar entstehen. Abbildung 8.17 zeigt ein entsprechendes Nebelkammerbild: Das Quant ist von unten gekommen und hat in einer Bleiplatte (horizontaler heller Balken) zwei im Magnetfeld entgegengesetzt gekrümmte Bahnen gleicher Ionisationsdichte ausgelöst, eben die Bahnen von einem Elektron und einem Positron.

Alle Kernprozesse müssen nicht nur auf den Energiesatz achten, sondern auch auf die Erhaltung von Impuls und Drehimpuls. Die Paarbildung braucht dafür einen schweren Kern, im Beispiel des Nebelkammerbildes Blei; bei der **Positronenvernichtung** entstehen zwei Quanten, die diametral, mit entgegengesetzten Impulsen also, auseinander fliegen. Beide besitzen genügend Ener-



Abb. 8.17. Nebelkammeraufnahme einer Paarbildung. Elektron und Positron verlassen eine Bleiplatte auf im γ -Quant, das sie erzeugt hat, hinterlässt keine Spur (Aufnahme: Fowler und Lauritsen; nach Finkelnburg)

gie, um leicht aus dem Menschen herauszukommen. Gerade diese beiden diametral auseinander fliegenden Quanten machen Positronenstrahler als radioaktive Tracer medizinisch interessant. Legt man einen Patienten, der diese Positronenstrahler im Körper hat, in eine Röhre mit vielen ringförmig angeordneten Quantendetektoren, so werden, wenn ein Tracer zerfällt und das entstehende Positron gleich wieder vernichtet wird, zwei einander gegenüberliegende Detektoren genau gleichzeitig ansprechen (Koinzidenzmessung). Der Tracer muss genau auf der Verbindungslinie zwischen den beiden Detektoren gewesen sein. Mit dieser Ortsinformation kann man Tomogramme mit einer leidlichen Ortsauflösung von etwa 5 mm berechnen. Die Schnittbilder zeigen dann die Konzentrationsverteilung des Tracers. Diese **Positronenemissionstomographie (PET)** ist aufwendiger als die Röntgentomographie (s. Kap. 7.5.4), vor allem deshalb, weil die als Positronenstrahler verwendeten Isotope Halbwertszeiten von

Minuten bis Stunden haben und vor Ort in einem Beschleuniger erzeugt werden müssen. Das ist so teuer, dass die Methode fast nur zu Forschungszwecken in der Neurologie am Gehirn eingesetzt wird. Da die Positronenstrahler aber in alle möglichen Moleküle, Proteine und sogar Medikamente eingebaut werden können, kann mit dieser Methode die Funktion des Gehirns „live“ beobachtet werden.

8.2.8

Strahlennutzen, Strahlenschaden, Strahlenschutz

Energiereiche Röntgen- und radioaktive Strahlung schädigt biologisches Gewebe und ist deshalb gefährlich. Nur in der Strahlentherapie nutzt man diese zerstörerische Wirkung, um den Krebspatienten von seinen Krebszellen zu befreien. Ansonsten vermeidet man energiereiche Strahlung so gut es geht.

Wie bemisst man, wie viel ein Mensch davon abbekommen hat? Die biologischen Wirkungen der energiereicher Strahlen haben einen handfesten Grund: Sie beruhen auf der von der Strahlung auf den Absorber übertragenen Energie. Darum macht man diese Energie denn auch zur Grundlage der *Dosimetrie*.

Es leuchtet ein, dass ein Elefant mehr vertragen kann als eine Mücke. Dementsprechend bezieht man die absorbierte Energie W auf die Masse m des Absorbers und definiert so die

$$\text{Energiedosis } D = W/m$$

mit der Einheit $\text{Gray} = \text{Gy} = \text{J/kg}$. Ihr hundertster Teil wird *Rad* genannt und mit rd abgekürzt:

$$1 \text{ Gy} = 100 \text{ rd} = 1 \text{ J/kg}$$

Man darf das Rad = rd nicht mit der Einheit des ebenen Winkels (Radian = rad) verwechseln.

α -Teilchen sind wegen ihrer hohen Ionisationsdichte (kurze, kräftige Spuren in der Nbelkammer) biologisch wirksamer als schnelle Elektronen; sie haben eine andere *Strahlenqualität*. Man berücksichtigt dies durch einen *Bewertungsfaktor* q und definiert die

$$\text{Äquivalentdosis } D_q = q \cdot D$$

mit der Einheit *Sievert* = Sv. Weil q eine dimensionslose Zahl ist, entspricht auch das Sievert einem J/kg. Der hundertste Teil wird jetzt *Rem* genannt und rem „abgekürzt“:

$$1 \text{ Sv} = 100 \text{ rem} = 1 \text{ J/kg.}$$

wichtig

Dosisdefinitionen:

- Energiedosis $D = W/m$
- Einheiten Gray = Gy = 100 Rad = 100 rd (= J/kg)
- Äquivalenzdosis $D_q = q \cdot D$
- Einheiten Sievert = Sv = 100 Rem = 100 rem
- Strahlenqualität: Bewertungsfaktor q (dimensionslos)
- schnelle Elektronen, γ -Quanten: $q = 1$
- schnelle Ionen: $q \sim 10$

Die natürliche Strahlenexposition aufgrund von radioaktiven Substanzen in der Umgebung beträgt in der Bundesrepublik etwa 1 mSv pro Jahr. Die medizinische Röntgendiagnostik steuert im Mittel weitere 0,5 mSv pro Jahr bei. Ein Patient in der Strahlentherapie bekommt natürlich sehr viel mehr, einige Sievert, ab; aber es ist ja für einen guten Zweck. Solange die Kernkraftwerke ordnungsgemäß funktionieren, belasten sie die Bevölkerung im Mittel mit maximal 0,01 mSv pro Jahr.

Wer dort arbeitet, ist natürlich einer höheren Belastung ausgesetzt. Die deutsche *Strahlenschutzverordnung* verlangt Aufmerksamkeit, sobald die Möglichkeit besteht, dass jemand im Laufe eines Jahres mehr als 1,5 mSv ungewollt aus künstlichen Strahlenquellen aufnimmt. Bereiche, in denen dies geschehen kann, müssen als „Strahlenschutzbereiche“ gekennzeichnet sein. Wer dort arbeitet, gilt als „Angehöriger strahlenexponierter Berufe“ und ist verpflichtet, seine Personendosis laufend zu kontrollieren, im Allgemeinen durch eine Plakette am Rockaufschlag, die einen strahlenempfindlichen Film enthält. Er wird von einer staatlichen Stelle in regelmäßigen Abständen ausgetauscht und ausgewertet. Wer im Laufe eines Jahres mehr als 50 mSv aufgenommen hat, muss seinen Arbeitsplatz wechseln. Dies muss auch, wer es in 13 aufeinander folgenden Wochen als Frau auf 15 mSv und als Mann auf 30 mSv gebracht hat. Innerhalb dieser Grenzen für die Ganzkörperdosis dürfen den Extremitäten (Füße, Knöchel, Hände und Unterarme) höhere Teildosen zugemutet werden: maximal 0,6 Sv im Laufe eines Jahres und maximal 0,15 Sv in 13 aufeinander folgenden Wochen. Wer, um Komplikationen zu vermeiden, die Plakette nicht regelmäßig trägt, muss das selbst verantworten.

Gegen unnötige Strahlenexpositionen in der Medizin und Technik gibt es drei wirksame Maßnahmen zur Vorbeugung:

- **Weggehen** – das quadratische Abstandsge setz bietet immer noch den zuverlässigsten Strahlenschutz.
- **Abschirmen** – z.B. durch Betonmauern und Bleischürzen.
- **Dosis reduzieren** – nicht mehr Strahlen erzeugen, als absolut unerlässlich ist.

Atom

Ein Atom hat eine Hülle aus **Elektronen** und einen Kern aus **Protonen** und **Neutronen**.

Die Hülle bestimmt die Größe des Atoms und seine chemischen Eigenschaften, der Kern die Masse und die Stabilität. Die Zahl der Elektronen und Protonen ist gleich und heißt **Kernladungszahl**. Sie bestimmt das chemische Element.

Massenzahl A

A: Anzahl der Nukleonen im Kern

Ordnungszahl Z

(Kernladungszahl)

Z: Anzahl der Protonen im Kern oder der Elektronen in der Hülle

Neutronenanzahl N

$N = A - Z$: Anzahl der Neutronen im Kern

Isotope

Atome mit gleicher Ordnungszahl, aber verschiedener Massenzahl

Schreibweise

(Beispiel Helium)

${}^A_Z \text{He}$: oben: Massenzahl; unten: Ordnungszahl

Radioaktivität

Wenn ein Atomkern zerfällt, sendet er Teilchen aus und ändert gegebenenfalls die Kernladungszahl Z, die Neutronenanzahl N und die Massenzahl A. Es ist nicht möglich vorherzusagen, wann ein bestimmter instabiler Atomkern zerfallen wird. Man kann nur eine mittlere Lebensdauer τ für eine bestimmte Kernsorte angeben

Aktivität

Zerfälle pro Sekunde [Bq, Bequerel]

Zerfallsgesetz

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

N: Anzahl radioaktiver Atome

N_0 : Anfangszahl

t: Zeit [s]

τ : Zeitkonstante [s]

Halbwertszeit

$$T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2$$

$T_{1/2}$: Zeit, in der die Hälfte der Atome zerfällt [s]

Radioaktive Strahlung

Zerfallsart	emittiert wird	ΔZ	ΔN	ΔA
α	${}^4 \text{He}_2$	-2	-2	-4
β^-	Elektron	+1	-1	0
β^+	Positron	-1	+1	0
K-Einfang		-1	+1	0
γ	Strahlungsquant	0	0	0

Antimaterie

Wenn ein Positron und ein Elektron zusammentreffen, setzen sie ihre gemeinsame Masse in Energie in Form von zwei diametral auseinanderlaufenden γ -Quanten um (Paarvernichtung).

Verständnisfragen

1. Warum sind die in Periodentafeln angegebenen Massenzahlen vieler Elemente nicht ganzzahlig?
2. Eine radioaktive Substanz hat eine Halbwertszeit von einem Monat. Ist sie nach zwei Monaten verschwunden oder wie viel bleibt übrig?
3. Kann man mit der C-14-Methode zur Altersbestimmung das Alter von Steinen bestimmen?

Übungsaufgaben

- 8.1: (I) In welcher Größenordnung ungefähr liegt die Massendichte von Atomkernen?
(II) Warum wird die Kupfer- K_{α} -Linie von einer Cu-Folie nicht bevorzugt absorbiert?
- 8.3: (I) Welche Kenngrößen haben die beiden stabilen Isotope des dritten Elementes im Periodensystem, Lithium?
- 8.4: (II) Wie viel Masse verliert die Sonne dadurch, dass sie Licht abstrahlt? (Vgl. hierzu Frage 7.17).
- 8.5: (II) In welche Nuklide kann das Bi-214 in der Zerfallsreihe des Radium-226 übergehen und durch welchen Zerfall?
- 8.6: (I) Wieso gilt rein mathematisch $T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2$?
- 8.7: (I) Wie lange (in Halbwertszeiten) muss man warten, bis die Aktivität einer radioaktiven Probe auf 1 % ihres Ausgangswertes abgesunken ist?
- 8.8: (II) Natürliches Silber besteht aus den Isotopen Ag-107 und Ag-109. Welche radioaktiven Nuklide entstehen bei Neutronenaktivierung?
- 8.9: (I) Welche Energie muss ein γ -Quant für eine Paarbildung mindestens besitzen?

1. Grundbegriffe

Antworten auf Verständnisfragen

1.

Es ist die Standardabweichung des Mittelwertes, denn der Mittelwert wird ja als beste Schätzung des wahren Wertes genommen.

2.

Die relative Unsicherheit ändert sich nicht, da die absolute Unsicherheit auch durch drei zu teilen ist.

3.

Nein, die Summe ist nur Null, wenn die Vektoren entgegengesetzt mit gleichem Betrag sind.

4.

Die Vektoren stehen senkrecht aufeinander.

5.

Vektoren sind, das heißt eine Richtung haben: Kraft und Geschwindigkeit. Auch die Bewertung einer Fernsehsendung kann als Vektor geschrieben werden: soundsoviele geben die Note 1, soundsoviele die Note 2 und so weiter. Das sind die Koordinaten.

Lösungen der Aufgaben

1.1

$$1a = 365 \text{ d} = 365 \cdot 24 \cdot 60 \text{ min} = 525600 \text{ min}; \\ 1 \text{ Mikrojahrhundert} = 100 \cdot \mu\text{a} = 10^{-4} \text{ a} \approx 53 \text{ min.}$$

1.2

$$r = d/2 = 10 \text{ cm};$$

$$\text{Halbkugel: } V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \approx 2000 \text{ cm}^3 = 21$$

1.3

$$\text{Maßstab: } 80 \text{ Skt.} = 1,00 \text{ mm}$$

$$\text{Mit Wimpern: } 81 \text{ Skt.} = 1,01 \text{ mm}$$

$$\text{Körper: } 72 \text{ Skt.} = 0,90 \text{ mm}$$

1.4

Oberfläche eines Zylindermantels:

$$A_M = 2\pi \cdot r \cdot h;$$

$$\text{Oberfläche einer Endscheibe: } A_k = \pi r^2;$$

Gesamte Oberfläche:

$$A_g = A_M + 2 \cdot A_k = 2\pi \cdot r \cdot (h + r)$$

Messunsicherheit

1.5

Die an den Rüben haftende Erde verursacht einen Fehler, der näherungsweise proportional zum Gesamtgewicht sein dürfte und darum am besten als relativer Fehler angegeben wird. Bei einer Messwiederholung verrät er sich nicht: systematischer Fehler.

1.6

Multiplikation der Messwerte: hier wird bei der Addition der relativen Fehler deren Produkt vernachlässigt.

Vektoren

1.7

Der Vektor \vec{a} hat den Betrag $\sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50}$. Zu den Koordinaten des Punktes P müssen die Koordinaten von \vec{a} hinzugezählt werden, aber multipliziert mit

$\frac{20}{\sqrt{50}}$: der Ortsvektor von Q ist

$$\vec{r}(Q) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{20}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11,49 \\ -13,14 \\ 6,31 \end{pmatrix}.$$

1.8

Vektorprodukt: Vektoren parallel: $\sin 0^\circ = 0$
Skalarprodukt: Vektoren senkrecht: $\cos 90^\circ = 0$

1.9

Aus den Formeln für das Skalarprodukt ergibt sich:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 3 - 2 + 8 = \sqrt{9+1+4} \cdot \sqrt{1+4+16} \cdot \cos \varphi \\ \Rightarrow \cos \varphi &= \frac{9}{3,74 \cdot 4,58} = 0,53 \Rightarrow \varphi = 58,3^\circ\end{aligned}$$

1.10

$$\vec{a} \times \vec{c}$$

Exponentialfunktion

1.11

Exponentielles Wachstum bringt in gleichen Zeitspannen gleiche Faktoren. Die Weltbevölkerung wuchs in den ersten 50 Jahren um den Faktor $1,61/1,17 = 1,38$, in den zweiten 50 Jahren um $2,50/1,61 = 1,55$, also schneller als nur exponentiell.

2. Mechanik des starren Körpers

Antworten auf Verständnisfragen

1.

Momentane und mittlere Geschwindigkeit sind gleich für eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit, in Weg-Zeit-Diagramm eine Gerade.

2.

Nein. Wenn ein Auto um die Kurve fährt, ändert es ständig die Richtung seiner Geschwindigkeit und ist deshalb beschleunigt. Ohne Reibungskraft kommt es nicht um die Kurve.

3.

Die Geschwindigkeit ist Null, die Beschleunigung gleich der Fallbeschleunigung.

4.

Die senkrechte Geschwindigkeitskomponente ist bei Stein und Ball gleich, aber der Ball hat noch eine horizontale Geschwindigkeit, ist also in der Vektorsumme schneller.

5.

Ein Körper ist dann in Ruhe, wenn die Vektorsumme aller Kräfte und Drehmomente auf ihn Null ist. Es müssen nicht alle Kräfte Null sein.

6.

Nein, denn der Stiel hat den längeren Hebelarm. Das Bürstenteil hat den kürzeren und muss schwerer sein.

7.

Um das Gleichgewicht halten zu können, muss der Schwerpunkt in etwa über den Füßen sein.

8.

Die Abbremsung kann nicht stärker sein, als es die Reibungskraft zulässt. Versucht man mehr, blockieren die Räder und rutschen. Dann kann man nicht mehr steuern, denn dazu muss die Reibung in senkrecht zur Fahrtrichtung größer sein als in Fahrtrichtung.

9.

Beim Anfahren braucht man die Kraft zum Beschleunigen, bei konstanter Geschwindigkeit muss nur noch die Reibung kompensiert werden.

10.

Beide üben gleiche Kräfte aufeinander aus und rotieren um den gemeinsamen Schwerpunkt. Dabei ist der Mond fast hundertmal stärker beschleunigt, da die Masse der Erde fast hundertmal größer ist.

- 11.**
Halbe Kraft bedeutet halbe Beschleunigung, die doppelt so lang wirken muss, um die gleiche Geschwindigkeit zu erreichen.
- 12.**
Da die Person nach oben beschleunigt ist, muss eine resultierende Kraft nach oben wirken. Die Kraft vom Boden muss also größer sein als die entgegen gesetzte Gewichtskraft.
- 13.**
Weil die Masse der Rakete (zu 80% Sauerstoff für die Verbrennung) schnell abnimmt.
- 14.**
Die Strecke ist zwar länger, aber es wird weniger Kraft gebraucht. Kraft mal Strecke gleich Arbeit ist in beiden Fällen gleich.
- 15.**
Doppelte Geschwindigkeit bedeutet vierfache kinetische Energie. Die Rampe muss viermal so hoch sein.
- 16.**
Doppelte Geschwindigkeit bedeutet auch hier vierfache kinetische Energie, also vierfache Leistung.
- 17.**
Auf dem Bremsweg wandelt die Reibungskraft die kinetische Energie in Wärme um. Da die Reibungskraft in etwa unabhängig von der Geschwindigkeit ist, muss der Bremsweg bei vierfacher kinetischer Energie auch viermal so lang sein.
- 18.**
Die Geschwindigkeit wird kleiner, da die Masse steigt und der Impuls konstant bleibt.
- 19.**
Der zurückprallende Ball überträgt bei gleicher Stoßgeschwindigkeit etwa den doppelten Impuls, wirkt also etwa mit der doppelten Kraft und wird den Kegel eher umwerfen.
- 20.**
Wenn sich ein Körper bewegt, hat er auf jeden Fall kinetische Energie. Er könnte auch um den Schwerpunkt rotieren. Dann hat er kinetische Energie, einen Drehimpuls, aber keinen linearen Impuls.
- 21.**
Ja: der frontale Zusammenstoß gleicher Massen mit gleicher Geschwindigkeit.
- 22.**
Der Impuls wird auf die Erde übertragen. Insofern gilt der Impulserhaltungssatz. die Erde hat aber eine so gewaltige Masse, dass es praktisch so scheint, als wäre der Impuls verschwunden.
- 23.**
Zwei Mal Pi durch 60 Sekunden macht etwa $0,105 \text{ s}^{-1}$.
- 24.**
Nein, nicht bei konstanter Winkelgeschwindigkeit.
- 25.**
Sie sollten ein möglichst kleines Trägheitsmoment haben, da sie dann schneller rollen; also möglichst klein und leicht.
- 26.**
Die kinetische Energie steigt. Die Tänzerin liefert die zusätzliche Energie, da sie die Arme gegen die Zentrifugalkraft anzieht.

Lösungen der Aufgaben

Beschleunigung

2.1

$$a = \frac{27,8 \text{ m/s}}{6 \text{ s}} = 4,63 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ also knapp halb so groß wie die Fallbeschleunigung.}$$

2.2

$$s = \frac{g}{2} t^2 = 19,62 \text{ m.}$$

2.3

$50 \text{ km/h} = 13,89 \text{ m/s} = g \cdot t \Rightarrow \text{Fallzeit } t = 1,42 \text{ s};$

$$\text{Höhe } h = \frac{g}{2} t^2 = 9,83 \text{ m.}$$

Das entspricht etwa einem Fall aus dem dritten Stock.

2.4

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{13 \text{ m/s}}{6 \text{ s}} = 2,17 \text{ m/s}^2,$$

$$\begin{aligned} \text{Strecke } s &= v_0 \cdot t + \frac{g}{2} t^2 \\ &= 12 \text{ m/s} \cdot 6 \text{ s} + \frac{2,17 \text{ m/s}^2}{2} \cdot (6 \text{ s})^2 = 111,1 \text{ m} \end{aligned}$$

2.5

Geschwindigkeit des Autos $v_A = 30,56 \text{ m/s}$. Für 700 m braucht es 22,91 s. Beschleunigung des Polizeiautos:

$$700 \text{ m} = \frac{a_p}{2} (22,91 \text{ s})^2 \Rightarrow a_p = 2,67 \text{ m/s}^2.$$

Geschwindigkeit des Polizeiautos beim Überholen: $v_p = a_p \cdot t = 61,1 \text{ m/s}$.

2.6

Fallhöhe $\Delta h = 1,5 \text{ m}$; Bremsweg $\Delta s = 0,005 \text{ m}$. Fallzeit sei Δt . maximale Geschwindigkeit bei konstanter Beschleunigung:

$$\begin{aligned} v^2 &= g^2 \cdot \Delta t^2 = g^2 \cdot 2 \cdot \Delta h / g = 2g \cdot \Delta h \\ &= 2a \cdot \Delta s \quad \Rightarrow \frac{a}{g} = \frac{\Delta h}{\Delta s} = 300; \end{aligned}$$

Beschleunigung des Schädelns $a = 300 \cdot g!$

2.7

Fallhöhe über der Fensteroberkante:

$$h = \frac{g}{2} t_1^2;$$

Fallzeit bis zur Unterkante:

$$t_2 = t_1 + 0,3 \text{ s};$$

$$h + 2 \text{ m} = \frac{g}{2} t_2^2 = \frac{g}{2} (t_1 + 0,3 \text{ s})^2 \Rightarrow$$

$$\frac{g}{2} t_1^2 + 2 \text{ m} = \frac{g}{2} (t_1^2 + 2 \cdot 0,3 \text{ s} \cdot t_1 + (0,3 \text{ s})^2);$$

$$2 \text{ m} = \frac{g}{2} (t_1 \cdot 0,6 \text{ s} + 0,09 \text{ s}^2) \Rightarrow t_1 = 0,53 \text{ s.}$$

$$h = \frac{g}{2} t_1^2 = 1,38 \text{ m.}$$

Zusammengesetzte Bewegung

2.8

Er muss senkrecht herübersteuern und sich abtreiben lassen. Dann ist die Geschwindigkeitskomponente quer zum Fluss maximal.

2.9

Für die Zuggeschwindigkeit v gilt:

$$\tan 60^\circ = \frac{v}{8 \text{ m/s}},$$

also $v = 13,9 = 50 \text{ km/h}$.

2.10

Die Sprungweite ist proportional zur Dauer t des Sprungs. Für diese gilt:

$$v_{0z} = g \cdot \frac{t}{2}.$$

Ist auf dem Mond die Fallbeschleunigung g ein Sechstel wie auf der Erde, so ist also die Sprungzeit sechs mal so lang, und damit auch die Sprungweite.

2.11

Wurfweite:

$$s = \frac{2 \cdot v_{0x} \cdot v_{0z}}{g} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot v_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{g};$$

Startgeschwindigkeit:

$$v_0 = \sqrt{s \cdot g} = 26,6 \text{ m/s} = 96 \text{ km/h.}$$

2.12

Für die halbe Sprungzeit t_1 gilt:

$$1,5 \text{ m} = \frac{g}{2} t_1^2 \Rightarrow t_1 = 0,55 \text{ s.}$$

Damit ist die Horizontalgeschwindigkeit:

$$v_{0x} = \frac{6 \text{ m}}{2 \cdot t_1} = 5,45 \text{ m/s.}$$

Kraft

2.13

„70 Kilo“ bedeutet:

$$m = 70 \text{ kg}; F_G = m \cdot g = 686,7 \text{ N.}$$

2.14

Im Buchdruck beträgt die Höhe h der Stufe etwa 1,1 mm (Gegenkathete) und der Abstand s zwischen den Auflagepunkten der Bohle 43 mm (Hypotenuse).

$$\frac{F_1}{F_G} = \sin \alpha = \frac{h}{s} = 0,26.$$

Die Krafteinsparung beträgt also 74%.

2.15

a) $F = 1\frac{1}{4} F_1 = 1,25 \cdot F_1$

b) weniger stark, denn wenn zwei Vektoren nicht parallel liegen, ist der Betrag des Summenvektors kleiner als die Summe der Beträge der einzelnen Vektoren.

2.16

Hebelarme verlängern, b) Masse des Waagbalkens verringern, c) Schwerpunkt dichter an den Unterstützungspunkt heranbringen.

2.17

Warum nicht? Wenn man zwei Blatt Schmirgelpapier mit den rauen Seiten aufeinanderlegt ist die Verzahnung so groß, dass die Reibungskraft größer als die Normalkraft wird.

2.18

Halbe Beschleunigung bedeutet halbe Kraft. Die Hangabtriebskraft wird also durch die Reibungskraft halbiert:

$$F_R = \frac{1}{2} F_H = \frac{1}{2} F_G \cdot \sin 28^\circ = \mu \cdot F_G \cdot \cos 28^\circ$$

$$\Rightarrow \mu = 0,27.$$

2.19

Die Masse des Seils sei m . Die Zugkraft des überhängen Teils entspricht gerade der Reibungskraft: $F_R = 0,2 \cdot m \cdot g = \mu \cdot 0,8 \cdot m \cdot g$. Die Normalkraft ist 0,8 mal Gewichtskraft des Seils. Also $\mu = 0,25$.

2.20

Die Hangabtriebskraft auf das Fahrrad ist: $F_H = m \cdot g \cdot \sin 5^\circ = 68,4 \text{ N}$. Bei konstanter Geschwindigkeit muss die Reibungskraft genau so groß sein: $k \cdot v = 68,4 \text{ N} \Rightarrow k = 41,04 \text{ kg/s}$.

Energie und Leistung

2.21

Arbeit: $\Delta W = m \cdot g \cdot 16 \cdot 0,17 \text{ m} = 1,87 \text{ kJ}$;
Leistung $P = 500 \text{ W} = 0,5 \text{ kJ/s}$;

$$\Delta t = \frac{\Delta W}{P} = 3,8 \text{ s.}$$

2.22

Verlangte mittlere Leistung:
200 kWh/Monat

$$= \frac{200 \cdot 3,6 \cdot 10^6 \text{ Ws}}{30 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} = 280 \text{ W.}$$

Ein Sklave liefert: $100 \text{ W} \cdot 12/24 = 50 \text{ W}$;
 $280 \text{ W}/50 \text{ W} \approx 6$ Sklaven.

2.23

$$W_{\text{kin}} = \frac{2 \cdot 10^8 \text{ kg}}{2} \left(15 \cdot \frac{1852 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \right)^2 = 5,95 \cdot 10^9 \text{ J}$$
$$= 1650 \text{ kWh;}$$

bei 12 Cent pro Kilowattstunde ca. 200 Euro.

2.24

$$\text{Beschleunigung: } a = \frac{60 \text{ N}}{2 \text{ kg}} = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Zurückgelegte Strecke:

$$s = \frac{a}{2}((10 \text{ s})^2 - (4 \text{ s})^2) = 1260 \text{ m}.$$

Arbeit: $W = 60 \text{ N} \cdot 1260 \text{ m} = 75,6 \text{ kJ}$.

2.25

Die kinetische Energie von Jane wird vollständig in potentielle Energie umgewandelt:

$$\frac{m}{2}v^2 = m \cdot g \cdot h \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = 1,6 \text{ m}.$$

Das funktioniert immer, solange die Liane nicht kürzer als 0,8 m ist.

2.26

Das Kind verliert potentielle Energie:

$$W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot 3,5 \text{ m} = 584 \text{ J}$$

und gewinnt kinetische Energie:

$$W_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2 = 53,1 \text{ J}.$$

Die Differenz von 531 J ist in Wärme gewandelt worden.

2.27

Die Federkonstante der Waage:

$$D = \frac{700 \text{ N}}{0,0005 \text{ m}} = 1,4 \cdot 10^6 \text{ N/m}.$$

Der Verlust an potentieller Energie beim Fall über 1 m wird in potentielle Energie der Federkompression umgewandelt:

$$W_{\text{pot}} = 700 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = \frac{D}{2} \Delta l^2$$

$$\Rightarrow \Delta l = 3,16 \text{ cm}.$$

Das entspräche einer Gewichtskraft von etwa 44000 N und einer Masse von 4,4 Tonnen. Das gilt aber nur, wenn Sie absolut steif auf die Waage springen. Sie werden wohl schon zum eigenen Schutz in die Knie gehen und damit einige Kraft und Energie wegschlucken. So hat auch die Waage eine Überlebenschance.

Impulssatz

2.28

Es ist egal, denn in beiden Fällen bleibt das Auto stehen und die ganze kinetische Energie muß umgesetzt werden.

2.29

a) Unmittelbar nach dem Stoß bewegen sich beide Autos mit halber Geschwindigkeit weiter (doppelte Masse), also mit der halben kinetischen Energie. Nur die Hälfte der kinetischen Energie des auffahrenden Autos wird umgewandelt.

b) Da beide Autos stehen bleiben, geht die ganze Energie ins Blech.

2.30

Der Mercedes leistet beim Rutschen auf der Straße die Arbeit $W = 2,8 \text{ m} \cdot F_R = 2,5 \text{ m} \cdot 2200 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,7 = 37,8 \text{ kJ}$. Dies entspricht der kinetischen Energie von Polo und Mercedes direkt nach dem Stoß (unelastischer Stoß). Damit ist die Geschwindigkeit unmittelbar nach dem Stoß:

$$v^2 = \frac{2 \cdot W}{3200 \text{ kg}} = 23,6 \text{ m}^2/\text{s}^2 \Rightarrow v = 4,85 \text{ m/s}$$

Also ist die Geschwindigkeit des Polo vor dem Stoß:

$$v_1 = \frac{3200 \text{ kg}}{1000 \text{ kg}} \cdot 4,85 \text{ m/s} = 15,5 \text{ m/s}$$

$$= 56 \text{ km/h}.$$

2.31

Eine Explosion ist sozusagen ein unelastischer Stoß rückwärts. Vorher ist der Impuls Null, nachher auch:

$$\frac{|v_1|}{|v_2|} = \frac{m_2}{m_1} = 2$$

Die kinetische Energie des einen Teils ist doppelt so groß wie die des anderen, also 4000 J zu 2000 J.

2.32

Absprung: Schlittengeschwindigkeit

$$v_1 = \frac{5 \text{ kg}}{20 \text{ kg}} \cdot 6 \text{ m/s} = 1,5 \text{ m/s.}$$

Landung: Schlittengeschwindigkeit

$$v_2 = \frac{5 \text{ kg}}{25 \text{ kg}} \cdot 6 \text{ m/s} = 1,2 \text{ m/s.}$$

Trägheitskräfte

2.33

Ist die Beschleunigung linear, so reagiert die Balkenwaage gar nicht, da die Trägheitskräfte gleicher Massen immer gleich sind. Rotiert das Bezugssystem, so hängen die Trägheitskräfte auch von der Lage ab und Waage wird wahrscheinlich reagieren.

2.34

Die Armbanduhr schwenkt immer in Richtung der Resultierenden aus Fallbeschleunigung und Flugzeugbeschleunigung a_F , also

$$\tan 25^\circ = \frac{a_F}{g} \Rightarrow a_F = 4,57 \text{ m/s}^2$$

Startgeschwindigkeit $v = a_F \cdot 18 \text{ s} = 82,3 \text{ m/s} = 300 \text{ km/h.}$

Drehbewegung

2.35

Umlaufzeit $T = 1 \text{ a} = 3,154 \cdot 10^7 \text{ s};$
Bahnradius $r = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m.}$
Umlauffrequenz $f = 1/T = 3,17 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1};$
Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot f = 1,99 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1};$
Bahngeschwindigkeit $v = 2\pi \cdot r \cdot f = 29,7 \text{ km/s} = 107000 \text{ km/h.}$

2.36

Die maximale Kraft, die Tarzan halten muss, ist die Zentripetalkraft plus Gewichtskraft:

$$F_{\max} = m \cdot \frac{v^2}{r} + m \cdot g. \quad \text{Also } v^2 = \frac{r}{m} (1400 \text{ N} - 784 \text{ N}) \Rightarrow v = 6,1 \text{ m/s.}$$

2.37

Das Drehmoment jedes Rades ergibt sich als Radradius mal ein viertel der Gesamtkraft: $T = 33 \text{ cm} \cdot 687,5 \text{ N} = 226,9 \text{ Nm.}$

2.38

Nach Abb. 2.51 ist das Trägheitsmoment einer dünnen Stange, die um ein Ende rotiert wird: $J = \frac{1}{3} m \cdot l^2$, hat der Rotor: $J = 160 \text{ kg} \cdot (3,75 \text{ m})^2 = 2250 \text{ kgm}^2$. Drehmoment:

$$T = J \cdot \alpha = J \cdot \frac{2\pi \cdot 5 \text{ s}^{-1}}{8 \text{ s}} = 8836 \text{ Nm.}$$

2.39

$$W_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 + \frac{J}{2} \omega^2 = \frac{m}{2} v^2 + \frac{1}{4} m \cdot r^2 \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{3}{4} m \cdot v^2 = 1,5 \text{ J.}$$

2.40

Das Trägheitsmoment erhöht sich um $J' = 4 \cdot 65 \text{ kg} \cdot (2,1 \text{ m})^2 = 1147 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Also vermindert sich die Winkelgeschwindigkeit auf

$$\omega = \frac{J}{J + J'} 0,8 \text{ s}^{-1} = 0,48 \text{ s}^{-1}.$$

3. Mechanik deformierbarer Körper

Antworten auf Verständnisfragen

1.

Das ist wie beim T-Träger: dort wo beim Balkenbiegen die neutrale Faser ist, braucht kein Material zu sein. Röhren sind sehr stabil bei geringem Materialaufkommen.

2.

Das Gewicht der Luft ist Druck mal Fläche: 100 000 N pro Quadratmeter entspricht 1000 N pro 100 cm².

3.

Ja, denn die Dichte des Wassers steigt fast nicht mit der Tiefe.

4.

Tatsächlich ist in beiden Gläsern gleich viel Wasser. Das Eis schaut nur über die Oberfläche, weil seine Dichte kleiner als die vom Wasser ist.

5.

Der Wasserspiegel des Sees sinkt. Ist der Felsbrocken im Boot, so entspricht das Gewicht des verdrängten Wassers dem Gewicht von Boot plus Felsbrocken. Liegt der Felsbrocken am Grund, verdrängt er aber weniger Wasser als es seinem Gewicht entspricht. Es wird dann also weniger Wasser verdrängt.

6.

Nein. Scheinbare Gewichtskraft und Auftriebskraft nehmen in gleicher Weise zu, beide sind proportional zur Fallbeschleunigung g.

7.

Kleine Seifenblasen haben einen höheren Innendruck aufgrund der Oberflächenspannung. Deshalb reagieren sie weniger auf variierende Druckkräfte von außen.

8.

Dann ist der Behälter schwerelos und es kommt kein Wasser mehr aus dem Loch.

9.

Wegen der Kontinuitätsgleichung: Das Wasser fällt mit zunehmender Tiefe schneller, also muss der Strömungsquerschnitt abnehmen.

10.

Bernoulli-Effekt: in bewegter Luft herrscht Unterdruck, also entsteht eine Druckdifferenz längs des Schornsteins.

Lösungen der Aufgaben

Elastizität

3.1

$E = \text{Steigung der Hooke'schen Geraden}$

$$= \frac{7,5 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2}{1 \cdot 10^{-3}} = 7,5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2,$$

denn die Gerade geht z. B. durch den Punkt mit $\sigma = 7,5 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ und $\Delta l/l = 10^{-3}$.

3.2

Zugkraft

$$F: \frac{F}{\pi \cdot (0,01 \text{ m})^2} = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \cdot \frac{0,003 \text{ m}}{1,6 \text{ m}}$$

$$\Rightarrow F = 1,18 \cdot 10^5 \text{ N}$$

Hydrodynamik

3.3

Druck $p = \frac{F}{A}; F = 15 \text{ N}$.

$$\text{Fläche } A = \frac{\Delta V}{\Delta s} = \frac{1 \text{ ml}}{15 \text{ mm}} = 6,67 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2.$$

$$p = 2,25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

3.4

Schweredruck $\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h$
 $= 1 \text{ g/cm}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1,8 \text{ m} = 177 \text{ hPa}$. Das liegt in der Großenordnung des durchschnittlichen Blutdrucks. Wir haben eine Größe von 1,8 m angenommen und dass die Dichte von Blut gleich der Dichte von Wasser ist.

3.5

Die Differenz von wahrer und scheinbarer Masse ergibt die Auftriebskraft:

$$F_A = 2,02 \text{ kg} \cdot g = 19,8 \text{ N.}$$

Damit ergibt sich sein Volumen:

$$V = \frac{F_A}{\rho_{\text{Wasser}} \cdot g} = \frac{2,02 \text{ kg}}{0,001 \text{ kg/cm}^3} = 2020 \text{ cm}^3$$

und die Dichte zu $\rho = \frac{m}{V} = 4,06 \text{ g/cm}^3$.

3.6

Auftriebskraft = Schwerkraft:

$V_{\text{unten}} \cdot 1025 \text{ kg/m}^3 \cdot g = V_{\text{gesamt}} \cdot 917 \text{ kg/m}^3 \cdot g$.
Also verhält sich der Volumanteil unter Wasser zum Gesamtvolumen wie die Dichte des Eises zur Dichte des Wassers:

$$\frac{V_{\text{unten}}}{V_{\text{gesamt}}} = 0,895.$$

Also ist ein Anteil von 0,105 oder 10,5% über Wasser.

3.7

Die normale Gewichtskraft auf den Granitstein ist: $F_G = V \cdot 2700 \text{ kg/m}^3 \cdot g = 3 \text{ kg} \cdot g = 29,4 \text{ N} \Rightarrow V = 1111 \text{ cm}^3$. Die Auftriebskraft für den Granitstein im beschleunigten Eimer ist: $F_A = V \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot (1+3,5) \cdot g = 49 \text{ N}$. Sie ist also höher als die normale Gewichtskraft. Schwimmen wird der Stein trotzdem nicht, denn er muss ja auch nach oben beschleunigt werden und hat eine entsprechend größere scheinbare Gewichtskraft.

3.8

Ja. In einfach logarithmischer Darstellung fällt die Zahl der Tropfen längs einer Geraden ab, und zwar um den Faktor $Z = 100$ in $t = 50 \text{ s}$.

$$\text{Halbwertszeit } T_{1/2} = t \cdot \frac{\lg 2}{\lg Z} = 7,5 \text{ s.}$$

3.9

Oberflächenspannung

$$\sigma = \frac{F_\sigma}{2 \cdot 2\pi \cdot r} = \frac{F - m \cdot g}{2\pi \cdot d} = \frac{(53-30) \text{ mN}}{2\pi \cdot 0,05 \text{ m}} \\ = 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m.}$$

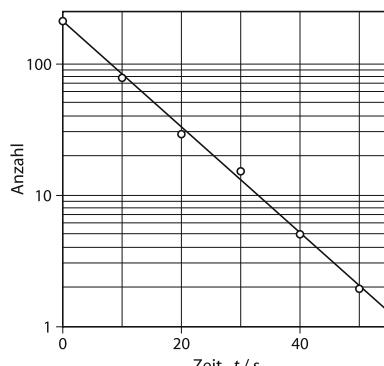
Da dieser berechnete Wert dem Tabellenwert für destilliertes Wasser entspricht, ist eher Zufall. Eigentlich muss noch berücksichtigt werden, dass auch noch ein Wassermeniskus gehoben wird, dessen Gewichtskraft herauszukorrigieren wäre. Andererseits wurde die Messung mit normalem Leitungswasser gemacht, das aufgrund von Verunreinigungen eine deutlich verminderte Oberflächenspannung hat. Beide Effekte haben sich in Abb. 3.28 in etwa kompensiert.

3.10

Sechs mal der Fußumfang ist

$s = 6 \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Diese Zahl multipliziert mit der Oberflächenspannung ergibt die Tragfähigkeit:

$F = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 70 \text{ mN/m} = 7,7 \cdot 10^{-5} \text{ N}$. Das reicht nicht annähernd, um die Gewichtskraft von etwa 0,16 N zu tragen. Das Insekt ist zu fett.



3.11

Die Oberfläche des Tropfen ist $A = 4\pi \cdot r^2$. Die gesamte Kraft auf diese Oberfläche erhalten wir, wenn wir die Oberflächenergie $W = \sigma \cdot A$ nach dem Radius ableiten (Kraft gleich Arbeit durch Weg):

$$F = \frac{dW}{dr} = \frac{d(\sigma \cdot 4\pi \cdot r^2)}{dr} = 8\pi \cdot r \cdot \sigma.$$

$$\text{Druck: } p = \frac{F}{A} = 2\sigma/r.$$

3.12

Die vom Herzen zu erbringende Leistung ist:

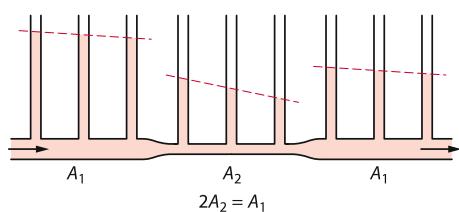
$$P = \frac{\text{Volumenarbeit}}{\text{Zeit}} = \frac{p \cdot dV}{dt}$$

$$= p \cdot \text{Volumenstrom } I.$$

Der Volumenstrom ist $I = 6 \text{ l/min} = 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$. Einsetzen liefert:

$P = 1,73 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3/\text{s} = 1,73 \text{ Watt}$. Das ist so viel wie ein Taschenlampenbirnchen braucht.

3.13



3.14

Der Volumenstrom $I = A \cdot v$ muss in der Düse der gleiche sein wie im Rohr. Deshalb verhalten sich die Geschwindigkeiten zueinander umgekehrt wie die Querschnittsflächen, hier wie 100:1. Die Geschwindigkeit in der Düse ist also 65 m/s. Da wir Reibungsfreiheit angenommen haben, muss die Pumpe nur die Beschleunigungsarbeit liefern:

$$I \cdot \Delta p = I \cdot \left(\frac{1}{2} \rho \cdot (65 \text{ m/s})^2 - \frac{1}{2} \rho \cdot (0,65 \text{ m/s})^2 \right)$$

Anders gesagt: die Pumpe muss den Atmosphärendruck plus die Differenz im Staudruck liefern:

$$p = 10^5 \text{ Pa} + \frac{1}{2} \rho ((65 \text{ m/s})^2 - (0,65 \text{ m/s})^2)$$

$$\approx 10^5 \text{ Pa} + \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot (65 \text{ m/s})^2$$

$$= 2,2 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Das ist etwa der 20-fache Atmosphärendruck.

3.15

Stokes-Gesetz:

$$v_0 = \frac{2r^2}{9 \cdot \eta} g \cdot \Delta \rho$$

$$= \frac{1,25 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2}{9 \cdot 10^{-3} \text{ kg/ms}} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$= 0,136 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dabei wurde die Dichte der Luft gegen die des Wassers vernachlässigt.

3.16

a) Im Bad hat die Leitung nur ein Viertel der Querschnittsfläche, also ist die Strömungsgeschwindigkeit viermal so groß: 8 m/s.

b) $I = A \cdot v_m = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 8 \text{ m/s} = 2,5 \text{ l/s}$

c) Druckverminderung durch die Schwerkraft: $\Delta p = \rho \cdot g \cdot 5 \text{ m} = 4,9 \cdot 10^4 \text{ Pa}$

Druckverminderung durch Bernoulli-Effekt:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \left(\left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 - \left(2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right) = 3,0 \cdot 10^4 \text{ Pa}$$

Druckverminderung durch Reibung:

$$\Delta p = \lambda \cdot \frac{l}{4 \cdot r} \cdot \rho \cdot v_m^2$$

$$= 0,02 \cdot \frac{5 \text{ m}}{0,04 \text{ m}} \cdot 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2$$

$$= 1,6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

Druck im Badezimmer:

$$p = (4 - 0,49 - 0,3 - 1,6) \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$= 1,61 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

4. Mechanische Schwingungen und Wellen

Antworten auf Verständnisfragen

1.

Bei maximaler Auslenkung ruht die Masse und ist maximal beschleunigt. Geschwindigkeit und Beschleunigung sind nur bei stehendem Pendel gleichzeitig Null.

2.

Auslenkung und Beschleunigung haben immer entgegen gesetzte Richtung, denn das gilt auch für Auslenkung und Federkraft. Alles andere ist möglich.

3.

Die Summe steigt: die potentielle Energie der Schwerkraft sinkt linear mit der Auslenkung, die potentielle Energie der Feder steigt aber quadratisch mit der Auslenkung. Deshalb muss ich Arbeit leisten, um die Feder nach unten zu ziehen.

4.

Die Feder selbst und ihre Masse schwingen mit, also sinkt die Frequenz.

5.

Näherungsweise nicht, den beim Fadenpendel hängt die Eigenfrequenz nicht von der Masse ab.

6.

Ja, denn die Eigenfrequenz hängt von der Fallbeschleunigung ab. Im beschleunigten Fahrstuhl ändert sich die effektive Fallbeschleunigung.

7.

Hinge die Schallgeschwindigkeit von der Tonhöhe ab, so würde die Stimme eines entfernten Rufers verzerrt klingen. Das ist nicht der Fall. Allerdings werden hohe Frequenzen stärker gedämpft, sodass ferne Geräusche etwas tiefer klingen.

8.

Für eine Schwingung braucht es immer eine Rückstellkraft. Gas entwickelt bei Scherung aber keine.

9.

Weil die Intensität abnimmt. Die Leistung der Quelle verteilt sich auf eine immer größere Linie. In diesem zweidimensionalen Fall nimmt die Intensität mit $1/r$ ab und die Amplitude mit $1/\sqrt{r}$.

10.

Auch für die Schwingung des Kaffees im Becher gibt es Resonanzfrequenzen. Man müsste die Schwingung stärker dämpfen. Wie wär's mit einem Schwamm im Becher?

Lösungen der Aufgaben

Schwingungen

4.1

- a) Die Kraft muss der Auslenkung entgegenwirken.
- b) Der Betrag der Kraft muss proportional zur Auslenkung sein.

4.2:

Die Auslenkung bei $t = 0$: $x(t=0) = A_0 \cdot \sin(\pi/4) = 5 \text{ cm} \cdot 0,707 = 3,54 \text{ cm}$.

Die Geschwindigkeit:

$$v(t=0) = A_0 \cdot \omega \cdot \cos(\pi/4)$$

$$= A_0 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos(\pi/4) = 5,55 \text{ cm/s}.$$

Maximale Beschleunigung:

$$a_{\max} = A_0 \cdot \omega^2 = 12,3 \text{ cm/s}^2.$$

4.3

$$T = 2 \text{ s} (!); l = g \cdot \frac{T^2}{(2\pi)^2} = 0,99 \text{ m}.$$

4.4

$$2\pi \cdot 4 \text{ Hz} = \sqrt{\frac{D}{1,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg}}}$$

$$\Rightarrow D = 0,095 \text{ N/m}.$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{0,5 \text{ g}}} = 2,2 \text{ Hz.}$$

4.5

Die maximal auftretende Geschwindigkeit ist $v = A_0 \cdot \omega$. Die Schwingungsenergie ist gleich der maximalen kinetischen Energie beim Durchgang durch die Ruhelage und also proportional zu A_0^2 . Zehnfache Energie bedeutet also $\sqrt{10}$ -fache Amplitude. Man kann genauso auch mit der maximalen potentiellen Energie bei maximaler Dehnung der Feder argumentieren.

4.6

Der Stein hüpfst, wenn die maximale Beschleunigung in Punkten maximaler Auslenkung die Fallbeschleunigung übersteigt.

$$a_{\max} = A_0 \cdot \omega^2 \geq g \Rightarrow A_0 \geq \frac{g}{(2\pi \cdot 3,5 \text{ Hz})^2} = 2,0 \text{ cm.}$$

4.7

Nein; bei hoher Dämpfung im Kriechfall nicht (☞ Abb. 4.7, gestrichelte Kurve).

Wellen

4.8

$c \approx 1,5 \text{ km/s}$ (siehe Anhang).

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1500 \text{ m/s}}{10^6 \text{ s}^{-1}} = 1,5 \text{ mm.}$$

4.9

Es bildet sich eine stehende Welle in Grundschwingung. Das heißt, dass der Durchmesser der Tasse in etwa die halbe Wellenlänge ist. Also: $\lambda = 0,16 \text{ m}$, $f = 1 \text{ Hz}$, daraus folgt $c = \lambda \cdot f = 0,16 \text{ m/s}$.

4.10

0 dB bedeutet, dass der Pegel gleich irgendeinem Referenzpegel ist. Addiere ich den gleichen Pegel noch mal dazu, bekomme ich den doppelten Pegel, und das ergibt $10 \cdot \lg 2 = 3 \text{ dB}$: $0 \text{ dB} + 0 \text{ dB} = 3 \text{ dB}$

4.11

Er hört die 65-fache Intensität; zu den 65 Phon addieren sich $10 \cdot \lg 65 = 18,1 \text{ dB}$; gibt zusammen $83,1 \text{ dB}$

4.12

Sie wollen die Tonhöhen jeweils um 2 Hz herauf bzw. herabsetzen:

$$2 \text{ Hz} = 442 \text{ Hz} \cdot \frac{v}{330 \text{ m/s}} \Rightarrow v = 1,5 \text{ m/s.}$$

Sie müssen in Richtung des tieferen Tons gehen.

4.13

Nein, denn die Relativgeschwindigkeit in Richtung der Schallausbreitung ist Null.

4.14

$v = 2 \cdot c$; $c/v = 0,5$; $\sin \alpha = c/v \Rightarrow \alpha = 30^\circ$; Öffnungswinkel = $2 \cdot \alpha = 60^\circ$

5. Wärmelehre

Antworten auf Verständnisfragen

1.

Nach dem Gasgesetz ist das Volumen umgekehrt proportional zum Druck. Ein weiteres Gewicht wird das Volumen also nicht mehr so stark reduzieren.

2.

Der Druck sinkt, da weniger Kraft nach außen wirkt.

3.

Da der Außendruck sinkt, dehnt sich der Ballon aus. Mit dem Druck sinkt die Dichte der Atmosphäre. Wenn die Dichte innen und außen in etwa gleich ist, steigt der Ballon nicht mehr weiter.

4.

Da nach dem Gasgesetz die Zahl der Teilchen in einem Volumen nur vom Druck und der Temperatur abhängt, verdrängen die Wassermoleküle (Molmasse: 18 g) in

feuchter Luft die sonst mehr vorhandenen Stickstoff- (Molmasse: 28 g) und Sauerstoffmoleküle (Molmasse 32 g). Da die Wasserstoffmoleküle kleinere Masse haben, sinkt die Luftdichte mit steigender Feuchtigkeit.

5.

Zahl der Freiheitsgrade: zwei für Translation, einer für Rotation, einer für Schwingung. Die mittlere kinetische Energie ist also: $4/2 \cdot k_B \cdot T$.

6.

Das Meer hat eine hohe Wärmekapazität und ändert deshalb seine Temperatur nur langsam.

7.

Besonders schnelle Wassermoleküle werden die Wasseroberfläche verlassen und in die Luft gehen. Von dort können sie auch wieder zurückkehren. Es stellt sich ein Fließgleichgewicht mit dem für die Temperatur geltenden Dampfdruck in der Luft ein (100 % Luftfeuchte).

8.

Ja. Man muss mit dem Luftdruck unter den Dampfdruck von Wasser bei Zimmertemperatur (2400 Pa).

9.

Nein. Wenn Wasser kocht, hat es bei Normaldruck 100 °C, egal wie stark es kocht.

10.

Die Bindungskräfte zwischen den Molekülen sind schwächer.

11.

An heißen Tagen gibt der Mensch überschüssige Wärme ab, indem er Schweiß verdampft. Bei 100 % Luftfeuchte geht das nicht mehr.

12.

Besser bei konstantem Volumen. Dann müssen Sie nur die innere Energie liefern, bei konstantem Druck auch noch die Volumenarbeit der Auslenkung.

13.

Der Behälter mit weniger Wasser wird heißer. Da der Wärmeverlust proportional mit der Temperaturdifferenz geht, verliert er die Wärme auch schneller.

14.

Besser gleich, denn dann sinkt die Temperatur gleich ein Stück und der Kaffee verliert die Wärme danach langsamer.

15.

Weil das Fell die Konvektion direkt am Körper verhindert und auch die Abstrahlung reduziert, da die Felloberfläche nahe der Umgebungstemperatur bleibt. Unsere Kleidung wirkt genauso.

16.

Weil sofort kräftige Konvektion einsetzt.

17.

Weil die Strahlung von der Sonne das Thermometer sonst viel zu stark erwärmt.

18.

Nein, im Gegenteil, der Kühlschrank heizt, da dann der Kompressor dauernd läuft und Wärme abgibt.

Lösungen der Aufgaben

5.1

$\Delta T = 55 \text{ K}$; linearer Ausdehnungskoeffizient von Stahl: $\alpha_{\text{Fe}} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.
 $\Delta l = \alpha_{\text{Fe}} \cdot \Delta T \cdot 135 \text{ m} = 89 \text{ mm}$.

5.2

Umfang der Erde: $2\pi \cdot 6,38 \cdot 10^6 \text{ m} = 4,0 \cdot 10^7 \text{ m}$. Verlängerung des Stahlbandes bei $\Delta T = 10 \text{ K}$: $\Delta l = \alpha_{\text{Fe}} \cdot \Delta T \cdot 4,0 \cdot 10^7 \text{ m} = 4800 \text{ m}$. Das gibt eine Radiusänderung von

$$\Delta r = \frac{4800 \text{ m}}{2\pi} = 764 \text{ m}.$$

So hoch würde das Stahlband schweben.

5.3

Das Molvolumen ist 22,4 l. Ein Mol sind $6,02 \cdot 10^{23}$ Moleküle. Mittlere Molekülmasse:

$$m = \frac{1,293 \text{ g} \cdot 22,4}{6,02 \cdot 10^{23}} = 4,81 \cdot 10^{-23} \text{ g.}$$

5.4

Schokolade: 2300 kJ = 0,64 kWh kosten 70 Cent. Steckdose: 1 kWh kostet 12 Cent. Die Schokolade ist neunmal teurer.

5.5

Die Temperatur ist proportional zur kinetischen Energie der Moleküle, also proportional zum Geschwindigkeitsquadrat. Doppelte Geschwindigkeit heißt 4 mal höhere Temperatur (absolut). 0 °C entspricht 273 K. $4 \cdot 273 \text{ K} = 1092 \text{ K}$ entspricht 819 °C.

Dampfdruck

5.6

Aus Abb. 5.18 kann man ablesen $p \approx 0,7 \cdot 10^5 \text{ hPa}$. Das ist in etwa der Luftdruck auf einem 3000 m hohen Berg.

5.7

Sättigungsdampfdruck bei 20 °C: 23,4 hPa; 52 % davon: 12,2 hPa. An der Fensteroberfläche ist dies die Sättigungsdampfdichte, also ist ihre Temperatur höchstens 10 °C.

5.8

Sättigungsdampfdichte bei 20 °C:
 $17,3 \mu\text{g}/\text{ml} = 17,3 \text{ g}/\text{m}^3$. In die Luft des Raumes gehen also maximal
 $17,3 \text{ g}/\text{m}^3 \cdot 680 \text{ m}^3 = 11,8 \text{ kg}$ Wasser hinein.
 80 % davon sind schon drin, 20 %, entsprechend 2,4 kg, gehen noch hinein.

Gasgesetz

5.9

Gasgesetz:

$$p \cdot V = p \cdot \sqrt{V} \cdot \sqrt{V} = n \cdot R \cdot T.$$

Da $p \cdot \sqrt{V}$ konstant bleibt, gilt:

$$\frac{n \cdot R \cdot T}{\sqrt{V}}$$

Also $T \sim \sqrt{V}$.

5.10

$p \cdot V$ ist bei konstanter Temperatur proportional zur Gasmenge, also sind noch 100% · 5 bar / 28 bar = 18 % in der Flasche. Das entnommene Gas füllt ein Volumen von $50 \text{ l} \cdot 23 = 1150 \text{ l}$. Ein Ballon hat ein Volumen von

$$\frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = 14,1 \text{ l} \text{ Macht etwa 80 Ballons.}$$

5.11

Der Druck sinkt auf

$$p_2 = \frac{280 \text{ K}}{293 \text{ K}} \cdot 1 \text{ bar} = 0,9556 \text{ bar.}$$

Der Differenzdruck zwischen Innen und außen ist dann: $\Delta p = 4,4 \cdot 10^3 \text{ Pa}$. Kraft auf die Tür $F = \Delta p \cdot 0,32 \text{ m}^2 = 1420 \text{ N}$. Da muss man sich schon heftig stemmen. Bei konstantem Druck passt bei

$$7 \text{ °C} \frac{293 \text{ K}}{280 \text{ K}} = 1,0464 \text{ mal mehr Luft in den Schrank als bei } 20 \text{ °C. Die Volumendifferenz ist } \Delta V = 0,0464 \cdot 1551 = 7,21 \text{ l.}$$

5.12

Bei 10^5 Pa gehen in 22,4 l ein Mol Gas. In einen Kubikzentimeter gehen dann

$$\frac{0,001 \text{ l}}{22,4 \text{ l}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 2,7 \cdot 10^{19} \text{ Moleküle.}$$

Ist der Druck 14 Größenordnungen kleiner, so ist es auch die Zahl der Moleküle: N pro $\text{cm}^3 = 270000$. Immer noch ganz schön viele.

5.13

Bei konstanter Temperatur bleibt auch die innere Energie, also die kinetische Energie der Moleküle konstant. Die gesamte geleistete Arbeit muss also als Wärme zugeführt werden.

Wärmekapazität

5.14

$$c(\text{H}_2\text{O}) = \frac{U_0 \cdot I_0 \Delta t}{m(T_2 - T_1)} = \frac{47 \text{ W} \cdot 50 \text{ s}}{200 \text{ g} \cdot 2,8 \text{ K}} \\ = 4,2 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}}$$

5.15

$$\Delta t = \frac{c(\text{H}_2\text{O}) \cdot 250 \text{ g} \cdot 30 \text{ K}}{350 \text{ W}} = 90 \text{ s.}$$

5.16

Die innere Energie jeder Komponente ist $m \cdot c \cdot T$. Die gesamte innere Energie bleibt beim mischen erhalten: $m_1 \cdot c_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot T_2 = (m_1 + m_2) \cdot c_{\text{ges}} \cdot T$. Die Wärmekapazität der Mischung ergibt sich aus dem Mischungsverhältnis:

$$c_{\text{ges}} = \frac{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2}{m_1 + m_2};$$

$$\text{Also: } T = \frac{m_1 \cdot c_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot T_1}{m_1 c_1 + m_2 \cdot c_2}.$$

5.17

$$m(\text{Cu}) \cdot c(\text{Cu}) \cdot (T_3 - T_1) \\ = m(\text{H}_2\text{O}) \cdot c(\text{H}_2\text{O}) \cdot (T_2 - T_1); \\ \text{nach } c(\text{Cu}) \text{ auflösen.}$$

5.18

Das Bier muss auf 37 °C. Pro Gramm benötigte Energie $W = c(\text{H}_2\text{O}) \cdot 29 \text{ K} \cdot 1 \text{ g} = 122 \text{ J}$. Das sind etwa 6,5 % von 1880 J.

5.19

a) Erwärmungsgeschwindigkeit, wenn der Mensch im wesentlichen aus Wasser ist:

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{P}{m \cdot c(\text{H}_2\text{O})} = \frac{80 \text{ W}}{70 \text{ kg} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} \\ = 2,7 \cdot 10^{-4} \frac{\text{K}}{\text{s}} \approx 1 \frac{\text{K}}{\text{h}}.$$

b) Spez. Verdampfungsentalpie von Wasser (siehe Anhang): $c_s = 2,4 \text{ kJ/g}$. Wasserstrom:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{80 \text{ J/s}}{2400 \text{ J/g}} = 0,033 \frac{\text{g}}{\text{s}} = 120 \frac{\text{g}}{\text{h}}.$$

5.20

Leistung $P_0 = 1,6 \text{ W}$; Nutzeffekt $\eta = 0,25$; benötigte Energiezufuhr: $P = P_0 / \eta = 6,4 \text{ W}$. Heizwert Glukose $H_G = 17 \text{ kJ/g}$; benötigter Massenstrom der Glukose:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{P}{H_G} = 0,38 \text{ mg/s.}$$

Konzentration der Glukose im Blut:

$c = 1 \text{ mg/ml} = 1 \text{ mg/cm}^3$; erforderlicher Blutstrom: $I = 0,38 \text{ cm}^3/\text{s}$.

Dicke der Membran: $\Delta x = 0,01 \text{ cm}$; Konzentrationsgradient der Glukose:

$$c' = \frac{c}{\Delta x} = 100 \text{ mg/cm}^4.$$

Diffusionskonstante der Glukose:

$$D \approx 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s};$$

$$\text{Diffusionsstromdichte } j = D \cdot c' = 10^{-4} \frac{\text{mg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}},$$

$$A = \frac{\Delta m / \Delta t}{j} = 4000 \text{ cm}^2 = 0,4 \text{ m}^2.$$

Wärmeaustausch

5.21

Für die eingestrahlte Leistung ist die Querschnittsfläche der Erde maßgeblich:

$$P_{\text{ein}} = 1000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \pi \cdot r_E^2.$$

Für die abgestrahlte Leistung ist mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz die gesamte Erdoberfläche maßgeblich:

$$P_{\text{aus}} = \sigma \cdot 4\pi r_E^2 \cdot T^4.$$

Das ergibt:

$$T^4 = \frac{1000 \text{ W/m}^2 \cdot \pi r_E^2}{\sigma \cdot 4\pi r_E^2} = \frac{1000 \text{ W/m}^2}{4 \cdot \sigma} \\ = 4,41 \cdot 10^9 \text{ K}^4$$

Die Temperatur der strahlenden Oberfläche ergibt sich daraus zu $T = 258 \text{ K} = -15^\circ\text{C}$. Die mittlere Temperatur der Erdoberfläche wird mit derzeit 5°C angegeben (Tendenz steigend). Das ist aber die Temperatur in der Biosphäre. Die abstrahlende Oberfläche wird aber nicht unweesentlich durch die viel kälteren Wolken gebildet, sodass das Rechenergebnis erstaunlich präzise erscheint.

Wärmekraftmaschinen

5.22

Anfangsvolumen:

$$V_0 = \frac{0,5 \text{ mol} \cdot R \cdot T_0}{p_0} = 4,11 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

nach der Expansion:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot V_1^\kappa &= p_0 \cdot V_0^\kappa \Rightarrow T_1 = 2,62 \cdot V_0 \\ \text{a)} \quad p_1 \cdot V_1 &= 0,5 \text{ mol} \cdot R \cdot T_1 \Rightarrow T_1 = 262 \text{ K} \\ \text{b)} \quad V_1 &= 2,62 \cdot V_0 = 1,07 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

c) Die geleistete Arbeit ist gleich der Abnahme der inneren Energie!

$$\begin{aligned} W = \Delta U &= \frac{3}{2} R \cdot 0,5 \text{ mol} \cdot (500 \text{ K} - 262 \text{ K}) \\ &= 1480 \text{ J} \end{aligned}$$

5.23

Anfangstemperatur:

$$T_0 = \frac{p_0 \cdot V_0}{2 \text{ mol} \cdot R} = 24,3 \text{ K}, \quad T_1 = T_0$$

Schritt 1:

$$W = 2 \text{ mol} \cdot R \cdot T_0 \cdot \ln \frac{V_1}{V_0} = 280 \text{ J}$$

$Q = W$, da die innere Energie konstant bleibt.

Schritt 2:

$$T_2 = \frac{p_0 \cdot V_1}{2 \text{ mol} \cdot R} = 48,6 \text{ K}$$

$W = 0$, da keine Volumenänderung.

$$Q = \frac{3}{2} R \cdot 2 \text{ mol} \cdot (T_2 - T_0) = 606 \text{ J}$$

Schritt 3:

$$W = p_0 \cdot \Delta V = -400 \text{ J}$$

$$Q = \Delta U + W = -606 \text{ J} - 400 \text{ J} = -1006 \text{ J}$$

Entropie

5.24

Die gesamte kinetische Energie wird in Wärme umgewandelt. Dies geschieht zwar nicht reversibel, aber wenn die Entropie ansteigt, spielt das keine Rolle.

$$\Delta S = \frac{W_{\text{kin}}}{T} = \frac{8,5 \cdot 10^5 \text{ J}}{293 \text{ K}} = 2900 \text{ J/K}$$

6. Elektrizitätslehre

Antworten auf Verständnisfragen

1.

Die Gravitationskraft ist zu schwach und die meisten Objekte sind elektrisch neutral, sodass auch keine elektrostatischen Kräfte wirken.

2.

Im Feld der Ladung werden die Papierschnitzel polarisiert und dann, weil es inhomogen ist, auch angezogen. Springt beim Berühren mit dem Kamm Ladung auf den Papierschnitzel über, wird er gleich wieder abgestoßen.

3.

Elektrische Feldlinien beschreiben die resultierende Kraftwirkung auf eine Ladung. Die hat nur eine eindeutige Richtung.

4.

Das Feld ist dort Null, sonst kann das Potential nicht konstant sein.

5.

Die Ladungsmengen sind immer gleich, denn die Gesamtneutralität muss gewahrt bleiben. Batterien können keine Überschussladung herbeizaubern.

6.

Ja, sie wird größer, denn es muss Arbeit geleistet werden und der Feldgefüllte Raum nimmt zu.

- 7.**
Nein, denn nur hoher Strom ist gefährlich. Zur Rettung müssen Sie auch wieder ab-springen und dürfen nicht gleichzeitig Leistung und etwas Geerdetes berühren.
- 8.**
Weil sonst die Isolierung der Luft nicht mehr zuverlässig ist. An ungünstigen stellen kann die Durchbruchfeldstärke (ca. 10^6 V/m) erreicht werden.
- 9.**
Weil die Leitungselektronen nicht nur Strom, sondern auch Wärme transportieren.
- 10.**
Weil bei gleicher Potentialdifferenz zwischen den Drahtenden das den Strom antreibende Feld im längeren Draht kleiner ist.
- 11.**
Bei Parallelschaltung wird es heller, da dann an beiden Glühbirnen eine höhere Spannung anliegt. Es sei denn, die Birnen brennen dann schon durch.
- 12.**
An einer Stelle des Glühdrahtes, die zufällig etwas dünner ist, wird es besonders heiß, da dort der Widerstand etwas höher ist, mehr Spannung abfällt und mehr Leistung umgesetzt wird. Durch die höhere Temperatur steigt der Widerstand an dieser Stelle und ein Teufelskreis beginnt, der den Draht dort zum Schmelzen bringt.
- 13.**
Es geht genauso viel Strom rein wie raus: Strom verbraucht er nicht. Er setzt elektrische Energie in Wärme um, eine Energieform mit niedrigerer Entropie in eine Energieform mit höherer Entropie um, die schlechter genutzt werden kann.
- 14.**
Da die Batterie ja außerdem noch eine Nennspannung hat, gibt die Multiplikation dieser mit den Ampèrestunden eine Energie an, den Energiegehalt der Batterie.
- 15.**
Eine Lorenzkraft wirkt ja nicht. Aber wenn sich das Magnetfeld ändert, entsteht durch Induktion ein elektrisches Feld, das das Elektron in Bewegung setzt.
- 16.**
Die Oberfläche wird aus magnetisch hartem Material gemacht, da die Magnetisierung ja stabil erhalten bleiben soll bis zur nächsten Beschriftung.
- 17.**
Eisen wird im Magnetfeld des Magneten magnetisiert, also selbst zu einem Magneten, automatisch mit der zur Anziehung passenden Polarität. Nur Magnete ziehen sich an. Schwächer geht es auch mit Kobalt.

Lösungen der Aufgaben

Strom, Spannung, Leistung

6.1

Alle gleiche Richtung: 18 V; eine in Gegenrichtung: 9 V; zwei in Gegenrichtung: 0 V.

6.2

$$\text{Fernsehempfänger: } I = \frac{P}{U} = \frac{125 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 0,54 \text{ A.}$$

$$\text{Röntgenröhre: } P = 8 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 400 \text{ W}$$

6.3

$$\text{Ein Jahr brennen lassen: } W = 365 \cdot 24 \text{ h} \cdot 40 \text{ W} = 350 \text{ kWh, macht 42 Euro.}$$

6.4

Eine 100 W-Birne zieht 0,43 A. Also kann man mit 16 A 36 solche Glühbirnen betreiben.

6.5

Der Akku kann bei 12 V eine Stunde lang 45 A abgeben:

$$W = 540 \text{ Wh} = 0,54 \text{ kWh} = 1,94 \cdot 10^6 \text{ J.}$$

6.6

Leistungsaufnahme des Motors: $P = F \cdot v = 240 \text{ N} \cdot 11,1 \text{ m/s} = 2,66 \text{ kW}$. Energie in den Batterien: $W = 26 \cdot 0,54 \text{ kWh} = 14,4 \text{ kWh}$. Das Auto könnte 5,4 h fahren.

6.7

$$U_S = \sqrt{2} \cdot 230 \text{ V} = 325 \text{ V}; \omega = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \\ = 314 \text{ s}^{-1}.$$

Widerstand

6.8

Das Ohm'sche Gesetz besagt: $R = \text{const.}$ (unabhängig von U), folglich ist auch der Leitwert G konstant und auch die Leitfähigkeit $\sigma = e_0 \cdot n \cdot \mu$. e_0 ist eine Naturkonstante, n eine Materialkonstante, also muss auch μ konstant sein.

6.9

An jeder Birne liegt ein Achtel der Spannung: 28,75 V. Der Widerstand ist

$$R = \frac{28,75 \text{ V}}{0,4 \text{ A}} = 72 \Omega$$

und die Leistungsaufnahme

$$P = 28,75 \text{ V} \cdot 0,4 \text{ A} = 11,5 \text{ W}.$$

6.10

In der Reihenfolge der Schwierigkeit:

Schal-tung	Leit-wert	Wider-stand	Rang-platz
a)		$4 R$	8
g)	$4 G$	$\frac{1}{4} R$	1
b)		$2\frac{1}{2} R$	7
c)		R	4
h)	$2\frac{1}{2} G$	$0,4 R$	2
e)	$(1 + \frac{1}{3}) G$	$0,75 R$	3
f)		$(1 + \frac{1}{3}) R$	5
d)		$(1 + \frac{2}{3}) R$	6

6.11

a) Der Spannungsteiler ist genau in der Mitte geteilt, liefert also 30 V.

b) Eine Parallelschaltung von zwei $3 \text{ k}\Omega$ Widerständen liefert den halben Widerstandswert: $1,5 \text{ k}\Omega$. Dieser ist mit $3 \text{ k}\Omega$ in Reihe geschaltet. Das liefert eine Spannung von:

$$U = \frac{1,5 \text{ k}\Omega}{3 \text{ k}\Omega + 1,5 \text{ k}\Omega} \cdot 60 \text{ V} = 20 \text{ V}.$$

6.12

$$R_4 = R_3 \cdot \frac{R_2}{R_1} = 4249 \Omega.$$

6.13

(1): -6 V; (2): 0 V; (3): +3 V; (4): +4 V.

6.14

Bei konstanter Spannung kann die Leistung angegeben werden:

$$P = \frac{U^2}{R}.$$

Wenn die Leistung bei Reihenschaltung ein Viertel jener bei Parallelschaltung ist, so muss bei Reihenschaltung der Widerstand viermal so hoch sein. Das ist er gerade, wenn beide Widerstände gleich sind.

6.15

$$R_i = \frac{12 \text{ V} - 10 \text{ V}}{60 \text{ A}} = 0,033 \Omega;$$

$$\text{Anlasser: } R_A = \frac{10 \text{ V}}{60 \text{ A}} = 0,166 \Omega.$$

6.16

Widerstand der Glühbirne:

$$R_G = \frac{U^2}{P} = \frac{144 \text{ V}^2}{50 \text{ W}} = 2,9 \Omega.$$

Vorwiderstand R_V :

$$\frac{R_G}{R_V} = \frac{12 \text{ V}}{110 \text{ V} - 12 \text{ V}} \Rightarrow R_V = 23,7 \Omega.$$

Damit ergibt sich ein Strom von

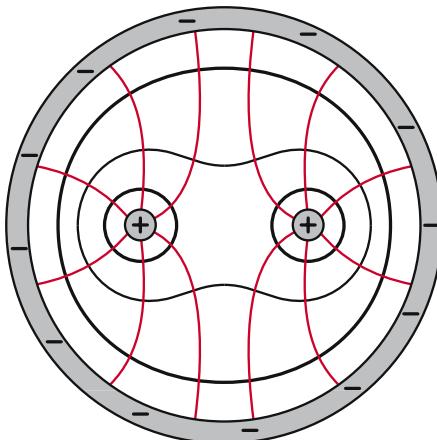
$$I = \frac{110 \text{ V}}{26,6 \Omega} = 4,1 \text{ A}$$

und eine Leistung im Vorwiderstand von $P = U \cdot I = 98 \text{ V} \cdot 4,1 \text{ A} = 401 \text{ W}$. Im Vorwiderstand wurde 8mal so viel Leistung verbraucht

wie in der Glühbirne; eine beachtliche Energieverschwendungen.

Feld und Potential

6.17



6.18

$$E = \frac{7 \cdot 10^{-2} \text{ V}}{5 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 1,4 \cdot 10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Das ist größer als die Durchschlagfeldstärke in Luft!

6.19

Ein Dipol richtet sich in einem Feld so aus, dass seine Ladungsschwerpunkte auseinandergezogen werden. Im inhomogenen Feld begibt sich deshalb diejenige Ladung in das Gebiet höherer Feldstärke, die in Richtung der noch höheren Feldstärke gezogen wird.

6.20

Einheit Ladung: As; Einheit Feld: V/m; Kraft: $F = Q \cdot E$, also Einheit:

$$\frac{\text{As} \cdot \text{V}}{\text{m}} = \frac{\text{Ws}}{\text{m}} = \frac{\text{J}}{\text{m}} = \frac{\text{Nm}}{\text{m}} = \text{N}.$$

6.21

$$\begin{aligned} F_C &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{26 \cdot e_0^2}{r^2} \\ &= 9,0 \cdot 10^9 \frac{\text{Vm}}{\text{As}} \cdot \frac{26 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As})^2}{(1,5 \cdot 10^{-12} \text{ m})^2} \\ &= 2,66 \cdot 10^{-3} \text{ N}. \end{aligned}$$

6.22

Aus der Kraft ergibt sich für das Produkt der beiden Ladungen:

$$Q_1 \cdot Q_2 = \frac{12 \text{ N} \cdot (1 \text{ m})^2}{9 \cdot 10^9 \frac{\text{Vm}}{\text{As}}} = 1,33 \cdot 10^{-9} (\text{As})^2.$$

Außerdem ist $Q_1 + Q_2 = 80 \cdot 10^{-6} \text{ As}$. Kombinieren führt auf die quadratische Gleichung: $Q_1^2 - 80 \mu\text{As} \cdot Q_1 + 1,33 \cdot 10^{-9} (\text{As})^2 = 0$.

Lösung: $Q_1 = 40 \mu\text{As} \pm 16,4 \mu\text{As}$. Für Q_2 gilt entsprechendes.

6.23

Zwischen zwei Ladungen wirkt jeweils eine Kraft mit dem Betrag:

$$F_1 = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Vm}}{\text{As}} \frac{(11 \cdot 10^{-6} \text{ As})^2}{(0,1 \text{ m})^2} = 109 \text{ N}.$$

Auf jede Ladung wirken zwei Kräfte dieses Betrags, die einen Winkel von 60° zueinander haben. Vektoraddition gibt eine resultierende Kraft von: $F_{\text{res}} = 2 \cdot F_1 \cdot \cos 30^\circ = 189 \text{ N}$.

6.24

Das Potential in 5,5 cm Abstand von einer punktförmigen Ladung mit $7,5 \mu\text{As}$ Ladung beträgt:

$$U = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Vm}}{\text{As}} \frac{7,5 \cdot 10^{-6} \text{ As}}{0,055 \text{ m}} = 1,23 \cdot 10^6 \text{ V}.$$

Die beiden Ladungen starten also mit der potentiellen Energie: $W_{\text{pot}} = Q \cdot U = 9,2 \text{ J}$, die sie vollständig in kinetische Energie umwandeln:

$$W_{\text{pot}} = 2 \cdot \frac{m}{2} v^2 \Rightarrow v = 96 \text{ m/s}.$$

6.25

Am besten stellt man es sich schrittweise vor: Wir sind bei einer der drei Ladungen

und führen zunächst eine weitere an diese Ladung heran. Das Potential 10 cm von einer Ladung ist

$$U = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Vm}}{\text{As}} \frac{11\mu\text{As}}{0,1 \text{ m}} = 9,9 \cdot 10^5 \text{ V}.$$

Es muss die Arbeit $W = W_{\text{pot}} = Q \cdot U = 11 \mu\text{As} \cdot U = 10,9 \text{ J}$ geleistet werden. Die dritte Ladung muss dann gegen die abstößende Kraft der ersten und der zweiten Ladung an ihren Platz gebracht werden. Das Potential dort ist jetzt doppelt so groß wie eben und es muss die doppelte Arbeit geleistet werden. Insgesamt ist die Arbeit also $W = 3 \cdot 10,9 \text{ J} = 32,7 \text{ J}$.

6.26

$$\frac{m_e}{2} v^2 = e_0 \cdot 2000 \text{ V} \Rightarrow v = 2,6 \cdot 10^7 \text{ m/s.}$$

Das ist immerhin ein Zehntel der Lichtgeschwindigkeit. Wir konnten noch gerade ohne relativistische Korrektur (Kapitel 6.6.8) rechnen.

6.27

Zwei Meter Höhenunterschied bedeuten eine Potentialdifferenz von 300 V. Der Verlust an potentieller Energie für die geladenen Bälle ist:

$\Delta W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot 2 \text{ m} + Q \cdot 300 \text{ V} = 10,59 \text{ J} + 0,16 \text{ J} = 10,75 \text{ J}$ für den positiv geladenen Ball und $10,44 \text{ J}$ für den negativ geladenen Ball. Die potentielle Energie wird in kinetische umgewandelt:

Geschwindigkeiten: $v_+ = 6,31 \text{ m/s}$ und $v_- = 6,22 \text{ m/s}$.

Differenz: $0,09 \text{ m/s.}$

Kondensator

$$6.28 \quad \text{Da } C = \frac{Q}{U}$$

für beliebige Ladungen und Spannungen gilt, gilt auch

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta U} = \frac{15 \mu\text{C}}{24 \text{ V}} = 0,62 \mu\text{F.}$$

6.29

Feld im Kondensator:

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A}$$

$$\Rightarrow Q = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 0,005 \text{ m}^2 \\ = 1,33 \cdot 10^{-7} \text{ As.}$$

6.30

- a) Die Ladung auf den Platten bleibt gleich. Deshalb geht das Feld um einen Faktor 2 herunter und damit auch die Spannung. Die Kapazität geht um einen Faktor 2 hinauf.
- b) Die Spannung bleibt konstant und also auch das Feld. Damit das Feld konstant bleiben kann, muss die Ladung einen Faktor 2 hinaufgehen. Für die Kapazität gilt natürlich das Gleiche wie unter a).

6.31

Die Ausgangskapazität ist:

$$C_0 = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{d_0} = 1,1 \cdot 10^{-13} \text{ F} = 0,11 \text{ pF.}$$

Wir müssen die Taste nun soweit zusammendrücken, dass sich $0,36 \text{ pF}$ ergeben:

$$d_1 = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{0,36 \text{ pF}} = 1,2 \text{ mm.}$$

Die Taste muss also 2,8 mm heruntergedrückt werden.

6.32

Die Ladung $Q = C \cdot U$ bleibt konstant. Die Kapazität C_2 addiert sich zu der Kapazität $C_1 = 7,7 \mu\text{F}$ dazu. Dadurch sinkt die Spannung von 125 V auf 110 V. Also:

$$C_1 \cdot 125 \text{ V} = (C_1 + C_2) \cdot 110 \text{ V} \Rightarrow C_2 = \frac{C_1 \cdot 15 \text{ V}}{110 \text{ V}} \\ = 1,05 \mu\text{F}$$

6.33

- a) Doppelte Spannung bedeutet doppelte Ladung und Feldstärke: doppelte Energie
- b) Doppelte Energie
- c) Doppelter Plattenabstand bedeutet halbe Kapazität und bei gleicher Spannung halbe Ladung: Energie halbiert.

6.34

Um das Wasser zu erhitzten brauchen wir
 $W = m \cdot c(H_2O) \cdot \Delta T$

$$= 2,5 \text{ kg} \cdot 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 75 \text{ K} = 787 \text{ kJ.}$$

Energie im Kondensator:

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \Rightarrow U = \sqrt{\frac{2W}{C}} = 627 \text{ V.}$$

6.35

$f^* = 50 \text{ Hz}; \omega^* = 2\pi \cdot 50 \text{ s}^{-1} = 314 \text{ s}^{-1};$
 $R_C = R_R = 10^4 \text{ V/A};$

$$C = \frac{1}{\omega^* \cdot R_C} = 0,318 \mu\text{F.}$$

Stromleitung, Elektrochemie

6.36

Die Stromdichte ist

$$j = \frac{I}{A} = e_0 \cdot n_e \cdot v_d.$$

Um daraus die Driftgeschwindigkeit v_d zu gewinnen, müssen wir die Leitungselektronendichte n_e wissen. Jedes Kupferatom spaltet etwa ein Leitungselektron ab:

$$\begin{aligned} n_e &= \frac{\rho(\text{Cu})}{M(\text{Cu})} \cdot N_A \\ &= \frac{8,93 \text{ g/cm}^3}{63,54 \text{ g/mol}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\ &= 8,41 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3} \end{aligned}$$

Der Strom ist

$$I = \frac{60 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 0,26 \text{ A} \text{ und die Stromdichte}$$

$$j = \frac{I}{A} = 0,35 \text{ A/mm}^2 = 35 \text{ A/cm}^2.$$

$$\text{Also } v_d = \frac{j}{e_0 \cdot n_e} = 0,0026 \text{ cm/s.}$$

Das ist ganz schön langsam.

6.37

Die Austrittsarbeit der Oxidkathode muss kleiner sein als die eines üblichen Metalls.

6.38

$M(H_2O) = 18 \text{ g/mol}; \rho(H_2O) = 1000 \text{ g/l. Stoffmengendichte:}$

$$c_n(H_2O) = \frac{\rho}{M} = 55,6 \text{ mol/l.}$$

$c_n(H^+) = x_D \cdot c_n(H_2O) = 1,06 \cdot 10^{-7} \text{ mol/l, was pH 7 entspricht.}$

6.39

Nur dimensionslose Zahlen können logarithmiert werden; $c_n(H^+)$ zunächst durch die Einheit teilen. Dann bedeutet pH 2,5: $\lg(c_n \cdot \text{l/mol}) = -2,5; c_n \cdot \text{l/mol} = 10^{-2,5} = 3,16 \cdot 10^{-3}$, also $c_n(H^+) = 3,16 \text{ mmol/l.}$

6.40

$$\begin{aligned} m_M(\text{Ag}) &= F \cdot \Delta m / \Delta Q = 107,87 \text{ g/mol} \\ M(\text{Ag}) &= e_0 \cdot \Delta m / \Delta Q = 1,7911 \cdot 10^{-25} \text{ kg} \end{aligned}$$

Magnetfeld

6.41

Das Magnetfeld verschwindet längs einer Linie parallel zum Draht, wo das vom Draht erzeugte Magnetfeld mit gerade der gleichen Magnetfeldstärke dem äußeren Feld entgegensteht. Die Linie hat den Abstand r :

$$B = 10^{-4} \text{ T} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r} \Rightarrow$$

$$r = \frac{1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 5 \text{ A}}{2\pi \cdot 10^{-4} \text{ T}} = 1 \text{ cm.}$$

6.42

Der Punkt genau zwischen den Drähten hat von beiden den Abstand 10 cm. Der größere Strom erzeugt dort eine Feldstärke

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot 20 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,1 \text{ m}} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

und der kleine Strom:

$B_2 = 1 \cdot 10^{-5} \text{ T}$. Da die von den Drähten erzeugten Felder senkrecht aufeinander ste-

hen, muss vektoriell addiert werden, was auf den Pythagoras hinausläuft:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = 4,1 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

6.43

Feld am Ort des zweiten Drahtes:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot 12 \text{ A}}{2\pi \cdot (0,07 \text{ m})^2} = 3,44 \cdot 10^{-5} \text{ T}.$$

Kraft auf den zweiten Draht:

$$F_L = 8,8 \cdot 10^{-4} \text{ N} = 1 \text{ m} \cdot I_2 \cdot B \Rightarrow I_2 = 25,6 \text{ A}.$$

Der Strom im zweiten Draht fließt in gleicher Richtung wie im ersten.

6.44

$$F_L = Q \cdot v \cdot B \\ = 155 \text{ As} \cdot 120 \text{ m/s} \cdot 5 \cdot 10^{-5} \text{ T} = 0,93 \text{ N}.$$

6.45

a) Die Lorentzkräfte liegen in der Ebene des Draht-Quadrates und ziehen das Quadrat auseinander. Sie üben kein Drehmoment aus.

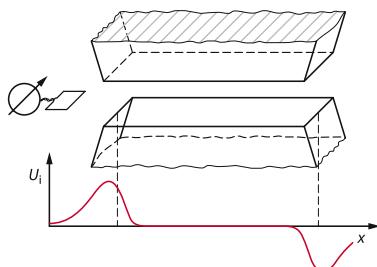
b) Kraft auf 6 cm Drahlänge: $F_L = 0,15 \text{ N}$. Die Kräfte, die auf die senkrecht zu den Feldlinien laufenden Quadratseiten wirken, bilden ein Kräftepaar und üben ein Drehmoment $T = 6 \text{ cm} \cdot F_L = 0,009 \text{ Nm}$ aus.

Induktion

6.46

$$I_{\text{ind}} = \frac{U_{\text{ind}}}{R} = \frac{1}{25 \Omega} \cdot 100 \cdot A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = 5 \text{ mA}.$$

6.47



6.48

Für den magnetischen Fluss durch die Spule gilt: $\Phi(t) = (0,1 \text{ m})^2 \cdot 0,65 \text{ T} \cdot \sin \omega \cdot t$. Die induzierte Spannung ist dann:

$$U_{\text{ind}} = 720 \cdot \frac{d\Phi}{dt} \\ = 720 \cdot 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ Tm}^2 \cdot \omega \cdot \cos \omega \cdot t.$$

Wenn der Effektivwert 50 V sein soll, ist der Spitzenwert $\sqrt{2} \cdot 50 \text{ V} = 70,7 \text{ V}$. Also:

$$\omega = \frac{70,7 \text{ V}}{4,68 \text{ Tm}^2} = 15 \text{ s}^{-1}.$$

Das sind 2,4 Umdrehungen pro Sekunde.

6.49

$$U_S = \frac{n_S}{n_p} \cdot 230 \text{ V};$$

- a) $n_p = 500$; $n_S = 25000$; $U_S = 11,5 \text{ kV}$;
b) $n_p = 1000$; $n_S = 24$; $U_S = 5,52 \text{ V}$.

Schwingkreis

6.50

Federpendel

Schwingkreis

$m \cdot \ddot{x} + D \cdot x = 0$	$L \cdot \ddot{Q} + Q/C = 0$
x	Q
$\dot{x} = v$	$\dot{Q} = I$
potentielle Energie der gespannten Feder	elektrische Energie des geladenen Kondensators
$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D \cdot x^2$	$W_{\text{el}} = \frac{1}{2} Q^2/C$
kinetische Energie der Pendelmasse	magnetische Energie der stromdurch- flossenen Spule
$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$	$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2$

7. Optik

Antworten auf Verständnisfragen

1.

Schwarz wie auf dem Mond, da kein Sonnenlicht von Molekülen gestreut wird.

2.

Es ändert sich die Lichtgeschwindigkeit und damit die Wellenlänge, da die Frequenz gleich bleibt. Außerdem ändern sich die elektrische und magnetische Feldstärke, also die Amplituden, da ein Teil des Lichtes an der Oberfläche reflektiert wird.

3.

Weil das Wasser an seiner Oberfläche Licht reflektiert.

4.

Ja das ginge. Das Eis würde gar nicht so schnell schmelzen, da das Sonnenlicht an der Linse nicht so eine hohe Intensität hat wie im Brennpunkt und weil das Eis nur wenig vom Licht absorbiert. Um ein Feuer zu bekommen, fokussiert man am besten auf dünnes schwarzes Papier.

5.

Das reelle Bild auf der Netzhaut wird vor allem durch die vordere gekrümmte Hornhautoberfläche erzeugt. Ist dort Wasser statt Luft, wird die Brennweite viel länger als der Augendurchmesser und man kann nicht mehr scharf sehen.

6.

Dann wird die Bildweite kürzer und die Gegenstandsweite muss länger werden. die Linse muss also von der Folie wegbewegt werden.

7.

Horizontal.

8.

Wegen der langen Kohärenzlage. Bei Licht von der Glühlampe darf der Gangunter-

schied der interferierenden Strahlen nur zwei bis drei Wellenlängen sein.

9.

Schall und Licht werden an der Hausecke gebeugt. Da die Wellenlänge des Schalls aber Größenordnungen länger ist, wird der Schall stärker gebeugt und kann deshalb gut um die Ecke gehört werden.

10.

Licht mit der kürzesten Wellenlänge, also blaues Licht.

11.

Für eine hohe Auflösung muss die Linse oder der Spiegel möglichst großen Durchmesser haben. Modere Teleskope haben 8 bis 10 m Spiegeldurchmesser. So große Linsen kann man nicht bauen.

12.

Man muss den Spalt doppelt so breit machen, denn für die Winkel der Interferenzordnungen kommt es auf das Verhältnis λ/a an.

Lösungen der Aufgaben

Geometrische Optik

7.1

Öffnungswinkel: $\omega = \frac{d}{r}$ mit Bündeldurchmesser $d = 4 \text{ km}$ und Abstand $r = 3,84 \cdot 10^5 \text{ km}$ (Radius der Mondbahn, siehe Anhang) $\omega \approx 10^{-5} \text{ rad}$.

7.2

Antwort erhält man durch Zeichnung (Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel):

a) $h = H/2$

b) von d unabhängig

7.3

$$\sin \beta_{\text{grenz}} = \frac{1}{1,34} = 0,75 \Rightarrow \beta_{\text{grenz}} = 48,3^\circ$$

7.4

Für die Reflexion gilt: Einfallswinkel gleich Ausfallwinkel. Also bedeutet die Forderung, dass der Einfallswinkel α_{ein} doppelt so groß ist wie der Winkel des gebrochenen Strahls α_{brech} .

Brechungsgesetz:

$$\begin{aligned}\frac{\sin \alpha_{\text{ein}}}{\sin \alpha_{\text{brech}}} &= \frac{\sin 2\alpha_{\text{brech}}}{\sin \alpha_{\text{brech}}} \\ &= \frac{2 \cdot \sin \alpha_{\text{brech}} \cdot \cos \alpha_{\text{brech}}}{\sin \alpha_{\text{brech}}} \\ &= 2 \cdot \cos \alpha_{\text{brech}} = n = 1,52\end{aligned}$$

Also: $\alpha_{\text{brech}} = \arccos 0,76 = 41,4^\circ$ und $\alpha_{\text{ein}} = 82,8^\circ$.

7.5

Symmetrischer Strahlengang heißt: Bündel im Prisma parallel zu dessen Grundfläche, d.h. Winkel gegen brechende Fläche ist 60° und gegen deren Lot 30° . Folglich ist der Ausfallswinkel $\beta = 30^\circ$. Brechzahl im Flintglas bei 633 nm (☞ Abb. 7.30): $n = 1,646$. Einfallswinkel α in Luft aus Brechungsgesetz: $\sin \alpha = n \cdot \sin \beta = 0,823 \Rightarrow \alpha = 55,4^\circ$. Ablenkwinkel $\delta = 2 \cdot \alpha - 60^\circ = 50,8^\circ$.

7.6

Sie sehen ein verkleinertes virtuelles Bild (☞ Abb. 7.22).

Abbildung mit Linsen

7.7

Sie müssen auf drei Meter fokussieren. Der Spiegel liefert ein virtuelles Bild in diesem Abstand (☞ Abb. 7.21).

7.8

Für die große Gegenstandsweite a ist

$$\frac{z'}{z} = \frac{a-f}{f} = \frac{a}{f} - 1 \approx \frac{a}{f}.$$

Das gilt auch für den Kehrwert: $\frac{z'}{z} \approx \frac{f}{a} \sim f$ für konstantes a .

7.9

$$\frac{z'}{z} = \frac{0,24 \text{ m}}{22 \text{ m}} = \frac{f}{50 \text{ m} - f} \Rightarrow f = 54,4 \text{ mm}.$$

7.10

Bildweite für $a = \infty : b = f = 135 \text{ mm}$

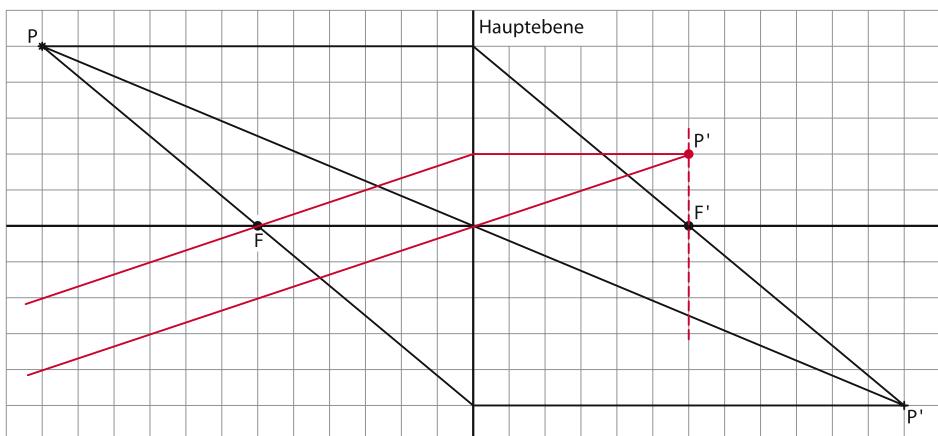
Bildweite für $a = 1,5 \text{ m}$:

$$b = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{a} \right)^{-1} = 152 \text{ mm}$$

Differenz: 17 mm

7.11

siehe Abbildung (s.u.)



7.12

$$\frac{z'}{z} = 2,75 = \frac{0,75 \text{ m}}{a - 0,75 \text{ m}} \Rightarrow a = 1,02 \text{ m};$$

$$\frac{b}{a} = 2,75 \Rightarrow b = 2,81 \text{ m}; a + b = 3,83 \text{ m}$$

7.13

Laut Anhang gilt: Sonnendurchmesser durch Erdradius $= 9,33 \cdot 10^{-3}$. Das kann in sehr guter Näherung als Sehwinkel in Radian ge-deutet werden und entspricht $0,535^\circ$.

Monddurchmesser/Mondbahnradius
 $= 9,06 \cdot 10^{-3}$ entspricht $0,519^\circ$.

Erd und Mondbahn sind keine genauen Kreise, die Abstände Erde – Sonne und Erde – Mond und die dazugehörigen Sehwinkel nicht genau konstant. Dadurch werden neben „ringförmigen“ Sonnenfinsternissen auch „totale“ Sonnenfinsternisse möglich, bei denen der relativ nahe Mond die Sonnenscheibe vollständig verdeckt.

7.14

Der Vergrößerungsfaktor $\Gamma = 8$ bedeutet die Reduktion der Sehweite (= Brennweite f der Lupe) auf ein Achtel der Bezugssehweite von 25 cm: $F = 250/8 \text{ mm} = 31,25 \text{ mm}$.

Strahlungsmessgrößen

7.15

Die Sonne strahlt nach allen Seiten, also in den größtmöglichen Raumwinkel $\omega_{\max} = 4\pi$.

7.16

Die Solarkonstante ist eine Strahlungsfluss-dichte und keine Bestrahlungsstärke, die den Einfallswinkel auf eine schräg gestellte Empfängerfläche berücksichtigen müsste.

7.17

Strahlungsleistung der Sonne:

$$P_S = \varphi_S \cdot A_R$$

φ_S = extraterestische Solarkonstante im Ab-stand Erde – Sonne

A_R = Oberfläche einer Kugel mit dem Radi-us R der Erdbahn.

Anhang:

$$\varphi_S = 1,36 \text{ kW/m}^2$$

$$R = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$A_R = 4\pi R^2 = 2,79 \cdot 10^{23} \text{ m}^2$$

$$P_S = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W.}$$

26 Zehnerpotenzen werden von den Vorsilben zu den SI – Einheiten nicht mehr erfasst. Sie übersteigen menschliches Vorstellung-vermögen.

Wellenoptik

7.18

Brewster'sches Gesetz: Das von der im we-sentlichen horizontalen Wasseroberfläche reflektierte Licht ist unvollständig polari-siert und bevorzugt horizontale elektrische Vektoren. Folglich muss eine reflexunter-drückende Sonnenbrille vertikale elektri-sche Vektoren bevorzugen.

7.19

Der Winkelabstand der Maxima beträgt etwa $\Delta\alpha = 5,5 \text{ cm}/5 \text{ m} = 0,011 \text{ rad}$ entspricht $0,63^\circ$. Wellenlänge: $\lambda = 4 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \sin \Delta\alpha = 0,44 \mu\text{m}$. Das ist tiefes Blau.

7.20

Erstes Minimum bei Beugung an einem Spalt:

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{d} .$$

Die Spaltbreite ist hier $d = 0,8 \text{ m}$. Die Wel-lenlänge ergibt sich mit der Schallgeschwin-digkeit von $c = 330 \text{ m/s}$ zu

$$\lambda = \frac{c}{f} = 0,44 \text{ m.}$$

Damit ergibt sich für den Winkel des 1. Mi-nimums $\alpha = 33^\circ$.

7.21

Gangunterschied des Maximums n . Ordnung:

$x = n \cdot \lambda$. Forderung: $x = 9 \cdot 500 \text{ nm} = 10 \cdot \lambda_2$. Daraus folgt: $\lambda_2 = 450 \text{ nm}$.

7.22

Das Beugungsmaximum erster Ordnung liegt bei:

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{g}.$$

Blaues Licht hat eine Wellenlänge von etwa 480 nm.

$$\text{Also } g = \frac{4,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{\sin 50^\circ} = 0,63 \mu\text{m}.$$

Die Struktur auf dem Flügel ist also selbst in der Größenordnung der Lichtwellenlänge.

Quantenoptik

7.23

$$W_Q \cdot f = h \cdot f \cdot \lambda = h \cdot c \cdot \lambda / \lambda = h \cdot c$$

$$= 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} \cdot 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$= 1,24 \cdot 10^{-6} \text{ eV} \cdot \text{m} = 1,24 \text{ eV} \cdot \mu\text{m}.$$

„Ein Mirkometer Wellenlänge entsprechen 1,24 eV“ – das kann man sich leichter merken als das Planck'sche Wirkungsquantum.

7.24

$$\lambda \approx 0,6 \mu\text{m}; W_Q = 1,24/0,6 \text{ eV} \approx 2 \text{ eV}$$

7.25

$$\text{Quantenstrom } \frac{N}{\Delta t} = \frac{P}{W_Q};$$

$$P = 5 \text{ mW}; \lambda = 632,8 \text{ nm};$$

$$W_Q = 1,24/0,633 \text{ eV} = 1,96 \text{ eV}.$$

$$\frac{N}{\Delta t} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \text{ W}}{1,96 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Ws}}$$

$$= 1,59 \cdot 10^{16} \text{ Quanten/s.}$$

7.26

Die Quanten des infraroten Lichtes besitzen weniger Energie als die des sichtbaren Lichtes, können also keinen sichtbares Licht emittierenden Übergang anregen.

7.27

$$(1) W_{\max} = 150 \text{ keV}$$

$$(2) P = I \cdot U = 20 \text{ mA} \cdot 150 \text{ kV} = 3 \text{ kW}$$

$$(3) \phi \approx 0,01 \cdot P = 30 \text{ W}$$

8. Atom- und Kernphysik

Antworten auf Verständnisfragen

1.

Weil viele Elemente in der Natur mit verschiedenen Isotopen vorkommen und die Massenzahl als Mittelwert angegeben wird.

2.

Nach zwei Monaten bleibt der $e^{-2} = 0,135$ -te Teil übrig.

3.

Nein, da die Bestimmung nur für Tiere und Pflanzen geeignet ist, die einmal Kohlenstoff aus der Luft aufgenommen haben, bevor sie starben.

Lösungen der Aufgaben

8.1

Mit dem, was wir wissen ist nur eine sehr grobe Abschätzung möglich: Radius eines Kerns in der Größenordnung 10^{-15} m , Masse in der Größenordnung 10^{-25} kg . Das Volumen ist dann in der Größenordnung 10^{-45} m^3 und die Dichte $10^{20} \text{ kg/m}^3 = 10^{11} \text{ kg/mm}^3$.

8.2

Die Absorption eines K_α -Quants erfordert einen Elektronenübergang aus der K-Schale in die L-Schale; dort ist aber in einem Cu-Kern kein Platz frei.

8.3

☞ Abb. 8.7:

Lithium-6 (${}_3^6\text{Li}$): $Z = 3, N = 3, A = 6$;

Lithium-7 (${}_3^7\text{Li}$): $Z = 3, N = 4, A = 7$.

8.4

Strahlungsleistung der Sonne

$$P_S = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W} \text{ (Frage 7.17);}$$

Geschwindigkeit des Massenverlustes

$$\frac{dm}{dt} = \frac{P_S}{c^2} = 4,2 \cdot 10^9 \text{ kg/s.}$$

Die Sonne verliert allein durch elektromagnetische Strahlung in der Sekunde etwa

4 Millionen Tonnen; ein Massenverlust durch Teilchenstrahlung kommt noch hinzu. Allerdings beträgt die Sonnenmasse etwa $3 \cdot 10^{30}$ kg. Sie wird uns nicht so schnell abhanden kommen.

8.5

Nach Abb. 8.7 sind dem Bi-214 ($A = 214$, $Z = 83$, $N = 131$) folgende Zerfälle möglich:
 α -Zerfall in Tallium-210: $A = 210$, $Z = 81$, $N = 129$;
 β -Zerfall in Polonium-214: $A = 214$, $Z = 84$, $N = 130$.

8.6

$$\frac{N(t)}{N_0} = e^{\frac{-t}{\tau}}; \frac{1}{2} = \exp\left(-\frac{T_{\frac{1}{2}}}{\tau}\right); \\ 2 = \exp\left(\frac{T_{\frac{1}{2}}}{\tau}\right) \ln 2 = \frac{T_{\frac{1}{2}}}{\tau}.$$

8.7

$$\exp\left(-\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{\frac{1}{2}}}\right) = 0,01 \\ \Rightarrow -\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{\frac{1}{2}}} = \ln 0,01 = -4,6 \\ \Rightarrow t = \frac{4,6}{\ln 2} \cdot T_{\frac{1}{2}} = 6,64 \cdot T_{\frac{1}{2}}.$$

8.8

Neutroneneinfang bedeutet:
 $\Delta A = +1$, $\Delta Z = 0$, $\Delta N = +1$, führt also von Ag-107 zu Ag-108 und von Ag-109 zu Ag-110 (beide sind β -Strahler mit 2,44 min und 24,17 s Halbwertszeit.).

8.9

$$\text{Masse des Elektrons} = \text{Masse des Positrons} \\ = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}. W_Q = m \cdot c^2 \\ = 18,22 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 \\ = 1,64 \cdot 10^{-13} \text{ J} \approx 1 \text{ MeV}.$$

Système International d'Unités

Die Grundgrößen und ihre Einheiten

Größe	Einheit	Größe	Einheit
Länge	m = Meter	Temperatur	K = Kelvin
Masse	kg = Kilogramm	Stoffmenge	mol = Mol
Zeit	s = Sekunde	Lichtstärke	cd = Candela
el. Strom	A = Ampère		

Erweiterung von Einheiten

Vorsilbe	Buchstabe	Faktor	Vorsilbe	Buchstabe	Faktor
Atto-	a	10^{-18}	Exa-	E	10^{18}
Femto-	f	10^{-15}	Peta-	P	10^{15}
Pico-	p	10^{-12}	Tera-	T	10^{12}
Nano-	n	10^{-9}	Giga-	G	10^9
Mikro-	μ	10^{-6}	Mega-	M	10^6
Milli-	m	10^{-3}	Kilo-	k	10^3
Zenti-	c	10^{-2}	Hekto-	h	10^2
Dezi-	d	10^{-1}	Deka-	da	10

Abgeleitete Einheiten mit eigenem Namen

Größe		Einheit	
Volumen	l	= Liter	$= 10^{-3} \text{ m}^3$
Zeit	min	= Minute	$= 60 \text{ s}$
	h	= Stunde	$= 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$
	d	= Tag	$= 24 \text{ h} = 86400 \text{ s}$
	a	= Jahr	$= 365,24 \text{ d} = 3,156 \cdot 10^7 \text{ s}$
Frequenz	Hz	= Hertz	$= 1/\text{s}$
Kraft	N	= Newton	$= 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$
Leistung	W	= Watt	$= 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3 = 1 \text{ J/s}$
Energie	J	= Joule	$= 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$

Abgeleitete Einheiten mit eigenem Namen (Fortsetzung)

Größe		Einheit	
Druck	Pa	= Pascal	= 1 N/m ²
Winkel	rad	= Radian	= 1
Raumwinkel	sr	= Steradian	= 1
el. Spannung	V	= Volt	= 1 W/A
el. Widerstand	Ω	= Ohm	= 1 V/A
el. Leitwert	S	= Siemens	= 1 A/V = 1/ Ω
el. Ladung	C	= Coulomb	= 1 A · s
Kapazität	F	= Farad	= 1 C/V
magn. Fluss	Wb	= Weber	= 1 V · s
magn. Flussdichte	T	= Tesla	= 1 Wb/m ²
Induktivität	H	= Henry	= 1 Wb/A
Aktivität	Bq	= Becquerel	= 1/s
Energiedosis	Gy	= Gray	= 1 J/kg
Äquivalentdosis	Sv	= Sievert	= 1 J/kg
Lichtstrom	lm	= Lumen	= 1 cd · sr
Beleuchtungsstärke	lx	= Lux	= 1 lm/m ²

Einige ältere Einheiten außerhalb des Système International

Größe		Einheit	
Energie	cal	= Kalorie	= 4,18400 J
Kraft	kp	= Kilopond	= 9,80665 N
Druck	bar	= Bar	= 1,000 · 10 ⁵ Pa
	Torr	= Torr	= 133,3 Pa
	mmHg	= mm-Quecksilber	~ 1 Torr
	mmH ₂ O	= mm-Wasser	= 9,81 mPa
magn. Flussdichte	G	= Gauß	= 10 ⁻⁴ T
Aktivität	Ci	= Curie	= 3,77 · 10 ¹⁰ Bq
Ionendosis	R	= Röntgen	= 2,58 · 10 ⁻⁴ As/kg
Energiedosis	rd	= Rad	= 0,01 Gy
Äquivalendosis	rem	= Rem	= 0,01 Sv

Energieeinheiten

Joule = Newtonmeter = Wattsekunde = J = N · m = W · s

Kilowattstunde	= kWh	= 3,600 · 10 ⁶ J
Elektronvolt	= eV	= 1,602 · 10 ⁻¹⁹ J

Einige Naturkonstanten

Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum)	$c = 2,99792458 \text{ m/s}$ $\sim 300000 \text{ km/s}$
Elementarladung	$e_0 = 1,60219 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8,8541878 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$
magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 1,2566371 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/(Am)}$
Planck-Konstante	$h = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $= 4,1357 \cdot 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$
Avogadro-Konstante	$N_A = 6,0220 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	$k = 1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Gaskonstante	$R = 8,3144 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$
Faraday-Konstante	$F = 96484 \text{ C/mol}$
atomare Masseneinheit	$u = 1,66057 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenmasse	$m_e = 9,10956 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Gravitationskonstante	$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$

Sonnensystem

Himmelskörper	Radius	Bahnradius	Fallbeschleunigung
Erde	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	$1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$	$9,81 \text{ m/s}^2$
Mond	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	$1,67 \text{ m/s}^2$
Sonne	$6,95 \cdot 10^8 \text{ m}$		
extraterrestrische Solarkonstante = $1,36 \text{ kW/m}^2$			

Kernladungszahlen Z und molare Massen M einiger natürlicher Isotopengemische

Symbol	Element	Z	M g/mol	Symbol	Element	Z	M g/mol
H	Wasserstoff	1	1,0079	Na	Natrium	11	22,997
He	Helium	2	4,0026	Al	Aluminium	13	26,8915
Li	Lithium	3	6,939	Cl	Chlor	17	35,475
C	Kohlenstoff	6	12,0112	Ca	Kalzium	20	40,08
N	Stickstoff	7	14,0067	Ag	Silber	47	107,868
O	Sauerstoff	8	15,9994	Pb	Blei	82	207,19

Einige Eigenschaften des Wassers

Dichte ρ , Dampfdichte ρ_D , Dampfdruck p_D , spez. Verdampfungsenthalpie W_D , spez. Wärmekapazität c , Dielektrizitätszahl ϵ_r , Resistivität ρ_{el} , Oberflächenspannung σ gegen Luft, Viskosität η

T °C	ρ g/ml	ρ_D μg/ml	p_D hPa	W_D kJ/g	c J/(g · K)	ϵ_r	ρ_{el} kW · m	σ mN/m	η mN · s/m²
0	0,9998	4,85	6,10	2,50	4,218	87,90	633	75,63	1,87
4	1,0000	6,40	8,13	2,49	4,205	85,90	472	75,01	1,57
10	0,9998	9,40	12,27	2,48	4,192	83,95	351	74,11	1,31
20	0,9983	17,3	23,4	2,46	4,182	80,18	202	72,75	1,002
37	0,9914	45,4	62,7	2,42	4,178	74,51	87	69,97	0,692
50	0,9881	83,0	123,2	2,38	4,181	69,88	53	67,91	0,547
100	0,9583	600	1013	2,26	4,216	55,58		58,90	0,282
130		1122	2699	2,17					

Tripelpunkt: 0,0075 °C 610 Pa

kritischer Punkt: 374,2 °C 22,11 MPa

bei 0 °C

molare Schmelzwärme: $6,02 \cdot 103 \text{ J/mol}$

Wärmeleitfähigkeit: $0,54 \text{ J/(m} \cdot \text{s} \cdot \text{K)}$

bei 20 °C

Ausdehnungskoeffizient: $1,8 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$

Schallgeschwindigkeit: 1,48 km/s

bei 25 °C

Wellenlänge:	λ/nm	320,3	402,6	601,5	667,8
--------------	---------------------	-------	-------	-------	-------

Brechzahl:	$n(\lambda)$	1,54	1,42	1,36	1,33
------------	--------------	------	------	------	------

Einige Materialkenngrößen

	Dichte g/ml	spez. Widerstand $10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$	spez. Wärmekapazität J/(g · K)
Aluminium	2,70	2,8	0,90
Eisen	7,86	9,8	0,42
Kupfer	8,93	1,7	0,39
Silber	10,50	1,6	0,23
Blei	11,34	22	0,13
Quecksilber	13,60	96	0,14
Gold	19,23	2,4	0,13
Platin	21,46	4,8	0,13
Konstantan	8,8	50	

Linearer Ausdehnungskoeffizient (bei 100 °C)		Wärmeleitfähigkeit	
Quarzglas	$0,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	Quarzglas	1,38 J/(m · s · K)
Jenaer Glas	$8,1 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	Seide	0,04 J/(m · s · K)
Eisen	$12,0 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	Luft	0,025 J/(m · s · K)
Kupfer	$16,7 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$	Aluminium	230 J/(m · s · K)
Aluminium	$23,8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$		

Schallgeschwindigkeit		Permittivität (Dielektrizitätszahl)	
Luft	334 m/s	Luft	1,000576
Wasserstoff	1306 m/s	Quarzglas	3,7
Aluminium	6420 m/s	Glas	5–10

Physiologischer Brennwert		Farben des sichtbaren Spektrum	
Kohlehydrate	17,2 kJ/g	violett	400–440 nm
Fett	38,9 kJ/g	blau	440–495 nm
Eiweiß	17,2 kJ/g	grün	495–580 nm
Schokolade	~23 kJ/g	gelb	580–600 nm
Bier	1,9 kJ/g	orange	600–640 nm
		rot	640–750 nm

Griechische Buchstaben

(Die in diesem Buch häufig verwendeten Buchstaben sind fett gedruckt)

A	α	Alpha	I	ι	Iota	P	ρ	Rho
B	β	Beta	K	κ	Kappa	Σ	σ	Sigma
Γ	γ	Gamma	Λ	λ	Lambda	T	τ	Tau
Δ	δ	Delta	M	μ	My	Y	υ	Ypsilon
E	ε	Epsilon	N	ν	Ny	Φ	φ	Phi
Z	ζ	Zeta	Ξ	ξ	Xi	X	χ	Chi
H	η	Eta	O	ο	Omikron	Ψ	ψ	Psi
Θ	θ	Theta	Π	π	Pi	Ω	ω	Omega

Formelzeichen

a	Jahr
<i>a</i>	Gegenstandsweite (Optik)
<i>a'</i>	Bildweite (Optik)
A	Ampère (Stromeinheit)
A	Fläche(-inhalt)
<i>A</i> ₀	Amplitude (einer Schwingung)
<i>a</i> , <i>b</i> , <i>c</i>	Vektoren
<i>a</i> , (<i>a</i>)	Beschleunigung, (Betrag)
<i>a</i> _z , (<i>a</i> _z)	Zentralbeschleunigung (bei einer Kreisbewegung)
<i>B</i> , (<i>B</i>)	magnetische Flussdichte, (Betrag)
<i>c</i>	Phasengeschwindigkeit (einer Welle)
<i>c</i>	Stoffmengendichte, spezifische Wärmekapazität (pro Masse)
<i>c</i> _m	Molalität (Einheit: mol/kg)
<i>c</i> _n	molare Wärmekapazität
<i>c</i> _p	molare Wärmekapazität bei konstantem Druck
<i>c</i> _v	molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen
C	elektrische Kapazität, Wärmekapazität
C	Coulomb (Ladungseinheit; entspricht A · s)
d	Tag
<i>d</i>	Abstand, Durchmesser (einer Kugel)
D	Dioptrien (Optik)
D	Federkonstante
dB	Dezibel
e	Euler'sche Zahl
<i>e</i> ₀	Elementarladung
<i>E</i>	Elastizitätsmodul
<i>E</i> , (<i>E</i>)	elektrische Feldstärke, (Betrag)
<i>f</i>	Brennweite (einer Linse), Frequenz
<i>f</i> [*]	Grenzfrequenz (eines Hoch- oder Tiefpasses)

F	Farad (Einheit der elektrischen Kapazität)
\vec{F} , (F)	Kraft, (Betrag)
\vec{F}_C	Coulomb-Kraft
\vec{F}_G	Schwerkraft
\vec{F}_L	Lorentzkraft
\vec{F}_N	Normalkraft (senkrecht zur Ebene)
\vec{F}_R	Reibungskraft
\vec{F}_z	Zentripetalkraft (bei einer Kreisbewegung)
g	Fallbeschleunigung
G	Gravitationskonstante, elektrischer Leitwert
\vec{v} , (v)	Geschwindigkeit, (Betrag)
h	Stunde
h	Höhe, Planck'sches Wirkungsquantum
h_{cv}	Wärmeübergangskoeffizient (Konvektion)
Δh	Höhenunterschied
\vec{H} , (H)	magnetische Feldstärke
I	elektrischer Strom, Wärmestrom, Volumenstromstärke
I	Schallstärke, Intensität
J	Trägheitsmoment
j	Teilchenstromdichte
j_Q	Wärmestromdichte
J	Joule (Energieeinheit)
k	Kompressibilität
k, k_B	Boltzmannkonstante
$k(\lambda)$	Extinktionskonstante (Optik)
K	Kelvin (Temperatureinheit)
kg	Kilogramm (Masseneinheit)
$l, \Delta l$	Länge, Längenänderung
l_{eff}	effektiver Hebelarm
\vec{L} , (L)	Drehimpuls, (Betrag)
L	Induktivität
m	Masse
\vec{m}	magnetisches Moment
m	Meter (Längeneinheit)
min	Minute
M	molare Masse
n	Brechungsindex (Optik)
n	Anzahldichte, Anzahl der Mole
N	Anzahl
N	Newton (Krafteinheit)
N_A	Avogadro-Konstante, Logschmidt-Zahl
p	Druck
p_D	Dampfdruck
$\vec{p}, (p)$	Impuls, Dipolmoment, (Betrag)
P	Leistung

Pa	Pascal (Druckeinheit)
Q, q	Ladungsmenge
Q	Wärmemenge, Kompressionsmodul
r	Abstand, Radius
R	elektrischer Widerstand, Strömungswiderstand
R_C	kapazitiver Widerstand
R_i	Innenwiderstand
R_L	induktiver Widerstand
R	Gaskonstante, Reflexionsvermögen (Optik)
R_e	Reynold-Zahl
s	Sekunde (Zeiteinheit)
s	Standartabweichung
s	Strecke
s	Teilchenstrom
s_0	Anfangsort
t	Zeit
$T_{1/2}$	Halbwertszeit
T	Schwingungsdauer, Periode
T	Temperatur
$\bar{T}, (T)$	Drehmoment, (Betrag)
u	atomare Masseneinheit
$u(X)$	Messunsicherheit der Größe X
U	elektrische Spannung, innere Energie
$U_{\text{eff}}, I_{\text{eff}}$	Effektivwerte von Spannung und Strom
v_0	Anfangsgeschwindigkeit
V	Volt (Spannungseinheit)
V	Volumen
V_n	Molvolumen
V_S	spezifisches Volumen (Kehrwert der Dichte)
w	Energiedichte
W	Watt (Leistungseinheit)
W	Arbeit
W_{el}	elektrische Energie
W_{kin}	kinetische Energie
W_{pot}	potentielle Energie
Z	Kernladungszahl
α	linearer Ausdehnungskoeffizient
α	Absorptionsvermögen
α, β, γ	Winkel
β	Volumenausdehnungskoeffizient
β_{grenz}	Grenzwinkel der Totalreflexion
Γ	Vergrößerung (Optik)
δ	Dämpfungskonstante (Schwingungen)
ε	Energiedichte
ε_0	elektrische Feldkonstante

ϵ_r	relative Permittivität (Dielektrizitätskonstante)
η	Nutzeffekt, Wirkungsgrad, Viskosität
λ	Wellenlänge, Wärmeleitfähigkeit, Widerstandsbeiwert (Strömung)
μ	elektrische Beweglichkeit
μ_0	magnetische Feldkonstante
μ_{Gl}	Gleitreibungskoeffizient
μ_H	Haftriebungskoeffizient
μ_m	Massenschwächungskoeffizient (Röntgenstrahlen)
μ_r	relative Permeabilität
ρ	Massendichte
ρ	Reflexionsvermögen (Optik)
ρ	spezifischer elektrischer Widerstand
ρ_D	Dampfdichte
σ	elektrische Leitfähigkeit
σ	mechanische Spannung, Oberflächenspannung
σ	Strahlungskonstante (Optik)
τ	Zeit, Zeitkonstante
Φ	magnetischer Fluss, Strahlungsfluss (Optik)
φ_0	Phasenwinkel (gesprochen: fi)
$\omega = 2\pi \cdot f$	Kreisfrequenz
ω	Öffnungswinkel (Optik)
Ω	Ohm (Einheit des elektrischen Widerstandes)

Sachverzeichnis

A

- α-Teilchen 364
- α-Zerfall 364
- Abbaufunktion 24
- Abbildungsfehler 313
 - chromatische Aberration 313
 - sphärische Aberration 313
 - Astigmatismus 313
- Abbildung
 - Optik 312–324, 352
 - durch Spiegel 306
 - durch Brechung 312–324, 352
 - optische 314–352
- Abbildungsgleichung 316, 352
- Abbildungsmäßigstab 316
- Abgeleitete Einheit 9
- abgleichen (Brücke) 222
- abgleiten (Kristall) 98
- Abklingverhalten
 - gedämpfte Schwingung 133
 - Kondensatorenentladung 225
- Ableitung 35
- Ablenkwinkel (Optik) 308
- Abschirmung, elektrische 239
- absolute Luftfeuchtigkeit 179
- absoluter Messunsicherheit 16
- absoluter Temperatur-
 - nullpunkt 156
- absolute Temperatur 156
- Absorptionsvermögen 168
- Absorption
 - Gas 183–184
 - Optik 326–329, 352
 - Resonanz- 322
- Absorptionkonstante 327
- Absorptionskante 361
- Absorptionsspekralanalyse 342
- Absorptionsspektrum 327
- Abstandsgesetz, quadratisches 146, 150, 325
- Achse
 - freie 79
 - optische 315
- achsenparalleler Strahl 315
- actio = reactio 64
- Addition (Vektoren) 19
- Adhäsion 110–112
- Adiabatenexponent 187
- Adiabaten-Gleichung 188
- Adiabatisch 188
- Adiabatische Zustandsänderung 188
- Adsorption (Gas) 184
- Aggregatzustand 94
- Aktivierung, thermische 180
- Aktivität
 - Radio- 369
 - optische 331
 - spezifische 369
- Aktivkohle 184
- Akustik 142–148
- algebraische Gleichung 27
- Alkalimetall 360
- alkalisch 252
- allgemeine Gaskonstante 159
- Alpha-Strahl 364
- Alpha-Teilchen 364
- Alpha-Zerfall 364
- Altersbestimmung (C-14) 370
- Ampère 207
- Ampèremeter (Strommesser) 207
- Amplitude 130
- Analog-Digital-Wandler 247
- Analysator 331

- Anfahrwirbel 120
 Anfangsbedingung 40
 Anfangsgeschwindigkeit 40
 Anfangswinkel beim schießen
 Wurf 40
 anharmonische Schwingung 138
 Anion 252
 Ankopplung (Schall) 146
 Anode 245
 Anodenstrom 245
 Anomalie des Wassers 158
 Anregung(-senergie) 342
 Antimaterie 365, 372
 Antiteilchen 372
 Anzahldichte 11
 aperiodischer Grenzfall 134, 280
 Apertur, numerische 339
 Äquipotentialfläche 231
 Äquipotentiallinie 231
 Aquivalenzdosis 374
 Aräometer 104
 Arbeit
 – Hub- 50
 – mechanisch 52
 – Volumen 101
 archimedisches Prinzip 103
 Arkusfunktion 22
 Arrhenius-Diagramm 180
 arithmetischer Mittelwert 14
 Astigmatismus 313
 Atmosphäre (Druck) 105
 Atom 358–374
 atomare Masseneinheit 362
 Atomkern 358
 Atommasse, relative 362
 Atommodell, Bohr'sches 359
 Atomorbitale (Elektronen-
 wolke) 360
 Atomprozent 12
 Atomspektrum 342
 Atomuhr 4
 Aufenthaltswahrscheinlichkeit
 (Materiewelle) 351, 360
 Atomzahl 362
 Aufladen (Kondensator) 212
 Auflicht (Mikr.) 323
 auflösen (Salz) 176
 Auflösungsvermögen
 (Mikroskop) 324, 338
 Auftragung, doppelt-logarith-
 mische 26–27
 Auftragung, einfach-logarith-
 mische 26
 Auftrieb 103, 121
 Auftriebskraft 103, 121
 Auge 319
 Augenlinse 320
 Ausbreitung, Wellen- 302
 Ausbreitungsgeschwindigkeit 140
 Ausbreitungsgeschwindigkeit
 (Welle) 299
 Ausdehnung, thermische 154, 198
 Ausdehnungskoeffizient 157
 Ausfallswinkel 306
 Ausgleichskurve 17
 Auslenkung
 – Federpendel 140
 – Fadenpendel 54
 – Welle 109
 Ausdehnung, thermische 141
 Ausgleichskurve 15
 Ausstrahlung, spezifische 325
 Austrittsarbeit 244
 Auswahlregel 342
 Avogadro-Konstante 11
 azeotropisches Gemisch 178
 Axiom (Newton'sche Gesetze) 62
-
- B**
- β-Teilchen 364
 β-Zerfall 364
 Bahnbeschleunigung 42
 Bahngeschwindigkeit 43
 Balkenwaage 60
 Balmer-Serie 343
 Bar IX, 406
 Bahn, Bohr'sche 359
 Barometer 105
 Basis (Logarithmus) 24
 Basiseinheit siehe Grundeinheit 8
 Batterie 255

- Bauch (Welle) 141
 Becquerel 369
 Beer-Gesetz 327
 Belastbarkeit
 (Spannungsquelle) 223
 Beleuchtungsstärke 325
 Benetzung 111
 Beobachtersystem
 (Bezugssystem) 80
 Bereich, Koexistenz- 181
 Bernoulli'sche Gleichung 114
 Beschleunigung 36
 - Erd- 37
 - Bahn- 42
 - Fall- 37
 - Tangential- 42
 - Winkel- 43
 - Zentral- 44
 - Zentripetal- 44
 Beschleunigungsspannung
 (Röntgenröhre) 347
 bestimmtes Integral 33
 Bestrahlungsstärke 325
 Beta-Teilchen 364
 Beta-Zerfall 364
 Betrag eines Vektors 19
 Beugung 302,335
 Beugung, Elektronen- 348
 Beugungsfigur 337-339
 Beugungsgitter 336
 Beweglichkeit (Elektron) 242
 Beweglichkeit (Ion) 252
 Bewegung
 - Dreh- 42
 - gleichförmig beschleu-
 igte 37
 - Molekular- 163-165
 - thermische 163-165
 Bewertungsfaktor 374
 Bezugssehweite 322
 Bezugssystem 80
 Biegung 98
 Bikonvexlinse 312
 Bild
 - Optik 307
 - reelles 307,315
 - virtuelles 316
 Bildkonstruktion 315
 Bildkraft,-ladung 244
 Bildpunkt 315
 Bildweite 316
 Bimetallstreifen 157
 Bindungsenergie 251
 Bindungsenergie (Atomkern) 363
 Binnendruck (Tropfen) 110
 Blendung 326
 Blindleistung 217
 Blindstrom 216
 Blitz 209
 Blitzableiter 240
 Blutdruck 102
 Bogenmaß 22
 Bohr'sche Bahn 359
 Bohr'sches Atommodell 359
 Boltzmann-Konstante 158
 Boyle-Mariotte 107,158
 brechender Winkel 311,313
 brechendes Medium 309
 Brechkraft 313
 Brechung 308
 Brechungsgesetz 309,352
 Brechungsindex (Brechwert) 309
 Brechwert (Brechzahl) 309
 Brechzahl 309
 Bremsspektrum 347
 Brennebene 312
 Brennen (Schnaps) 178
 Brennfleck 347
 Brennpunkt 312
 Brennweite 312
 Brennwert 163
 Brewster-Gesetz 331
 Brewster-Winkel 331
 Brille 320
 Brown'sche Molekular-
 bewegung 163
 Brücke, Wheatstone'sche 222
 Brückenbedingungen 222
 Bündel, Licht- 304

C

^{14}C -Methode 370
Candela 325
Carnot-Wirkungsgrad 194
Celsius 154
charakteristische Länge 118
charakteristische Röntgenstrahlung 361
chemische Energie 51
chromatische Abberation 313
Computertomographie siehe Röntgentomographie
Cosinus 22
Cotangens 22
Coulomb 207
Coulomb-Gesetz 233, 286
Coulomb-Kraft 228, 233
Curie 369
Curie-Temperatur 269

D

Dampfdichte 178
Dampfdruck 177
Dampfdruck, Sättigungs- 179
Dampfdruckerniedrigung 178
Dampfdruckkurve 178, 182–184
Dampfmaschine 194
Dampftopf 178
Dämpfung 133, 280
Dämpfungskonstante 133
Defektelektronen 257
deformierbar 94
Dehnung 97
dekadischer Logarithmus 24
Destillation 178
destructive Interferenz 137
Deuteron, Deuterium 362
Dewar-Gefäß 161
Dezibel 145
Diagramm 2
– Arrhenius- 180
– Zustands- 181
diamagnetisch 268
Diamant 96
dichroitisch 330
Dichte 11
Dichte, Dampf- 178
dicke Linse 318
Dielektrizitätskonstante 236, 243
– relative 243
Dielektrikum 212
Dieselmotor 189
Differentialgleichung 131
– Schwingungs- 281
Differentialquotient 35
Differenzenquotient 35
Differenzfrequenz 137
Diffraction (Beugung) 336
Diffusion 169–171
Diffusionsgesetz 170
Diffusionskoeffizient 170
digitale Multimeter 224
Dimension 5
Dimensionsanalyse 300
Dimensionskontrolle 9
dimensionslos 3, 9
Diode 245, 258
Dioptrie 313
Dipol (el.) 234, 284
Dipol, strahlender 298
Dipolmoment (el.) 236
Dipolstrahlung 298
Dispersion 141, 311
Dissoziation 230
Dissoziationsenergie 251
Dissoziationsgrad 251
divergent 304
Doppelpalt 335
doppelt-logarithmische Auftragung 26–27
Doppler-Effekt 147
Dopplerverschiebung 148
Dotierung 257
Dosimetrie 373
Dosis
– Äquivalent- 374
– Energie- 373
dpt siehe Dioptrie 313
Drehachse, momentane 77
Drehbewegung 42–45, 73–80
Drehfrequenz (Kreisfrequenz) 43

Drehimpuls 73, 78–80
 Drehimpulserhaltungssatz 78–80
 Drehmoment 55–58
 Drehspule 266
 Drehsulinstrument 266
 Driftgeschwindigkeit 242
 Driftgeschwindigkeit (Ion) 252
 Drillung 98
 drittes Newton'sches Gesetz (actio = reactio) 64
 Druck 100

- Blut- 103
- Dampf- 177
- hydrostatischer (statischer-) 102
- kritischer (kritischer Punkt) 183
- osmotischer 172
- Partial- 160
- Sättigungsdampf- 177
- Schall- 144
- statischer 102
- Stau- 114

 Dualismus (Welle, Korpuskel) 341
 dünne Linse 314
 Dunkelfeld 323
 Durchbruchsfeldstärke 250
 Durchflutungsgesetz 270
 Durchlässigkeit (Optik) 326
 Dynamik (Newton'sche Gesetze) 61–80
 Dynamik, Hydro- 112–121

E

ebene Welle 302
 Ebene, schiefe 66
 ebener Spiegel

- (Bildkonstruktion) 306

 Edelgas 360
 Effekt

- Doppler- 147
- lichtelektrische 340
- Photo- 340

 effektive

- Spannung 214

 – Stromstärke 214
 effektiver Hebelarm 57
 Effektivwert 214
 e-Funktion 225
 Eichfehler 13
 Eigenfrequenz

- Pendel 131
- Schwingkreis 281

 Eigenleitung 259
 Eigenvolumen 181
 Eindringtiefe (Optik) 326
 einfache-logarithmische Auftragung 26
 Einfallslot 306
 Einfallswinkel 306
 Eingangsspalte 326
 Eingangswiderstand 224
 Einheit 3, 8–9, 28
 Einheit, abgeleitete 9
 Einheitsmembran 171
 Einheitsvektor 19
 Einstein, Albert 248
 Einzelpalt Abb. 7.11
 Eisen 269
 Eisenkern 269
 elastisch 97
 elastische

- Grenze 97
- Verformung 97

 elastischer Stoß 70
 Elastizitätsgrenze 97
 Elastizitätsmodul 97
 elektrische

- Abschirmung 240
- Feldkonstante 233
- Feldstärke 228
- Feldlinien 232–235
- Coulomb-Kraft 233
- Ladung 206, 233
- Leistung, Watt 208
- Leitfähigkeit 220
- Schaltung 205
- Schwingung 278–285
- Spannung 205–208, 286
- Leitwert 210

elektrischer	Elementarladung 240–242, 286
– Leiter 210	Elementarteilchen 206
– Leitwert 210	Elementarwelle (Huygens) 338, 339
– Strom 205, 286	Elementarzelle 95
– Unfall 259	Emission, stimulierte 345
– Widerstand 209–211, 286	Emission-Spektral-Analyse 342
elektrisches	E-Modul (Elastizitätsmodul) 97
– Dipolmoment 235	emu 362
– Feld 227–238, 287	Energie 40
– Pendel 279	– Bindungs- 251
– Potential 229–233	– Bindungs- (Atomkern) 363
Elektrizitätslehre 205–296	– Dissoziations- 251
Elektrochemie 250–254	– Gasteilchen 164
Elektrode	– Gitter- 176
– Glas- 255	– elektrische 208, 237
– Kalomel- 255	– innere 190
– unpolarisierbare 256	– Kern- 371
Elektrolumineszenz 246	– kinetische 54
Elektrolyt 252	– Kondensator 213, 237
Elektrolyte, Beweglichkeit 252	– mechanische 54
elektrolytische Leitfähigkeit 252	– potentielle 50
elektrolytische Zersetzung 253	– Quanten- 340
elektrolytischer Trog 230	– Schwingungs- 103
elektromagn. Welle 285, 298–303	– thermische 161
Elektromotor 266	– Wärme- 161
Elektron 206, 241–242	Energiedichte (el. Feld) 237
– freies 244	Energiedichte (magn. Feld) 275
– Leucht- 360	Energiedosis 373
– quasifreies 241	Energieerzeugung 52
Elektronen	Energieerhaltungssatz 52
– beugung 348	Energieniveau (Atom) 342, 359
– blitz 249	Energiestromdichte 144
– Dichte 242	Energieverbrauch 52
– hülle 358	Energiezustand 342
– kanone 245	Enthalpie, Verdampfungs- 179– 180
– lawine 249	Entladen (Kondensator) 212
– masse 247	Entspiegelung (Reflexvermindern) 336
– mikroskop 350	Entropie 193
– optik 350	Erdbeschleunigung 32
– schale 360	Erde
– wolke 360	– Daten 407
– volt 247	– Erwärmung 195
Elektrophorese 254	– Magnetfeld 262
Elektrostatik (elektrisches	Erdpotential 229
Feld) 227–237	
Element, chemisches 359	
Element, galvanisches 254	

- Erdung 229
 Ergänzung, quadratische 27
 Ersatzschaltbild 223
 erstarren 174
 Erstarrungswärme 174
 erster Hauptsatz der Thermo-dynamik 187
 erstes Newton'sches Gesetz 62
 Erwärmung (Erde) 195
 erzwungene Schwingung 134–136
 Euler-Zahl 24
 Exponent 24
 Exponentialfunktion 219
 Exponentialfunktion 23–26, 28,
 225
 exponentieller Abfall 20, 225
 Exposition
 – natürliche 374
 – zivilisationsbedingte 374
 Extinktionskonstante 327
 extraterrestrische
 Solarkonstante 194
-
- F**
- Fadenpendel 131
 Fahrenheit 154
 Fahrstrahl 22
 Fall, freier 37
 Fangpendel 54
 Farad 213
 Faraday-Gesetz 253
 Faraday-Käfig 239
 Faraday-Konstante 253
 Farbe 326
 Farbeindruck 300
 Farbfehler (chromatische
 Aberration) 313
 Farbfilter 326
 Faser, neutrale 98
 Faseroptik 310
 Federkonstante 46
 Federpendel 131
 Fehler
 – absoluter 16
 – Eich- 13
 – Mess- 13
 – relativ 16
 – systematischer 13
 – zufälliger 14
 Fehlerbalken 15
 Fehlerfortpflanzung 16, 28
 Fehlerstrom 261
 Fehlsichtigkeit 320
 Feld
 – elektrisches 227–238, 287
 – homogenes 236
 – magnetisches 261–270, 289
 – Potential- 230–233
 Feldkonstante, elektrische 233
 Feldkonstante, magnetische 267
 Feldlinie 231
 Feldlinien, geschlossene (el.) 283
 Feldlinien, magnetische 262
 Feldstärke, elektrische 228
 Feldstärke, magnetische 265, 270
 Fernkraft 227
 Fernrohr 323
 Fernsehempfänger 247
 Ferromagnetikum
 – hartes 268
 – weiches 268
 ferromagnetisch 267
 fester Körper 96
 Festkörper 94, 120
 Feuchte, relative 179
 Filter (Optik) 326
 Filter, Interferenz- 336
 Fischaugeneffekt 314
 FI-Schutzschalter 261
 Fixpunkt 155
 Fläche 5–7
 Flächennormale 22
 Flammenfärbung 342
 Flaschenzug 50
 Fliegen 121
 Fliehkraft (Zentrifugalkraft) 83
 fließen (Festkörper) 97
 Fließgleichgewicht 195
 Fluid (Flüssigkeit) 68
 Flugzeit, freie 163
 Fluoreszenz 344

- Fluss
 - magnetischer 272
 - Strahlungs- 324
- Flussdichte
 - magnetische 265
 - Strahlungs- (Intensität) 146, 324
- Flüssigkeit 94
- Flüssigkeitsmanometer 105
- Flüssigkeitsthermometer 155
- Flüssigkristalle 247
- Fotokopierer 228
- Fourier 138
- Fourieranalyse, -synthese 283
- freie
 - Achse 79
 - Flugzeit 163
 - Wegstrecke 163
- freies Elektron 244
- Freiheitsgrad 164
- Frequenz 103
 - Kreis- 19
 - Grund- 137, 143, 282
- Frequenz 23, 130
- Frequenz, Grund- 137, 143, 282
- Frequenzanalyse 137, 283

G

- galvanisches Element 254
- Galvanisieren 254
- Galvani-Spannung 254
- γ -Quant 365
- Gammaquant 365
- Gamma-Strahlung 365
- Gangunterschied 333
- Gas 94
 - ideales 158
 - reales 158, 181
 - van der Waals 181
- Gasentladung 249
 - selbständige 249
 - unselbständige 249
- Gasgesetz 158
- Gaskonstante 159
- Gasthermometer 155
- Gate 259
- Gauß-Verteilung 14
- gedämpfte Schwingung 132–134, 149
- Gefälle (Gradient)
 - Geschwindigkeits- 115
 - Konzentrations- 170
 - Potential 231
 - Temperatur- 166
- Gefrierpunktterniedrigung 176
- Gegenkraft 46, 65
- Gegenphase 136
- Gegenstandspunkt 315
- Gegenstandsweite 316
- Gehalt 12
- Geiger-Müller-Zählrohr 366
- gekoppelte Pendel 141
- Gemisch, azeotropisches 178
- geometrische Optik 303–324, 352
- geostationär 73
- Genauigkeit (Messunsicherheit) 13–17
- Generator 272
- Gesamtleitwert 219
- Gesamtwiderstand 219
- geschlossene Feldlinien (el.) 283
- Geschwindigkeit 32–36
 - Anfangs- 32
 - Ausbreitungs- 140
 - Bahn- 45
 - momentane 35
 - Phasen- (Ausbreitungs-) 140
 - Winkel- 43
- Geschwindigkeitsgefälle 115
- Geschwindigkeitsverteilung (Maxwellsche) 165
- Gesetz
 - des radioaktiven Zerfalls 370
 - von Boyle-Mariotte 107, 158
 - von Hagen-Poiseuille 115
 - Beer- 327
 - Brechungs- 309, 352
 - Brewster- 341
 - Coulomb- 233, 286
 - Diffusions- 170

- Faraday- 253
- Gravitations- 49
- Hagen-Poiseuille 117
- Hebel- 55
- Henry-Daltonsches 102, 184
- Hookesches 97, 121
- ideale Gase 158
- Induktions- 273
- Kirchhoff 218
- Lambert- 327
- Lambert-Beer- 327
- Massenwirkungs- 251
- Newton 62
- Ohm'sches (el.) 210, 287
- Ohm'sches (hydr.) 118
- Reflexions- 306, 352
- Stefan-Boltzmann- 329
- Stoke'sches 121
- Verschiebungs- 329
- Weber-Fechnersches 145
- Wien'sches
Verschiebungs- 329, 167
- Kirchhoff'sche 214
- Zerfalls- 369–371
- Geschwindigkeitsgefälle 115
- Gewichtskraft 48
- Gitter (Kristall) 95
- Gitter, Beugungs- 335
- Gitterenergie 176
- Gitterspektrometer 336
- Glaselektrode 256
- Glasfaser (Lichtleiter) 310
- Glaskörper 319
- gleichförmig beschleunigte
Bewegung 37
- Gleichgewicht 59
 - Fließ- 195
 - indifferentes 61
 - labiles 61
 - stabiles 61
 - thermodynamisches 186, 192
- Gleichrichter 245
- Gleichstromkreis 217–224
- Gleichung
 - Abbildungs- 316
 - algebraische 27
- Bernoulli 114
- Differential- 131
- Größen- 3
- Kontinuitäts- 113
- quadratische 27
- Schwingungsdifferential- 131
- van-t'Hoff 173
- Wärmeleitung- 166
- Zahlenwert- 3
- Zustands- 180
- Gleichverteilung 164
- Gleichverteilungssatz 164
- Gleitebene 97
- Gleitreibung 65
- Gleitreibungscoefficient 66
- Glied, *RC*- 224
- Gleukometer 104
- Glied, *RL*- 377
- Glimmlampe 249
- Glühemission 245
- Glühkathode 245
- Grad (Winkel) 22
- Grad Celsius 154
- Gradient
 - Geschwindigkeits- 115
 - Konzentrations- 170
 - Potential 231
 - Temperatur- 166
- Graphit 96
- Graufilter 327
- Gravitation 48
- Gravitationsgesetz 49
- Gravitationskonstante 49
- Gray (Einheit) 373
- Grenze, kurzwellige 347
- Grenzfall, aperiodischer 134, 280
- Grenzflächen 254
- Grenzflächenspannung 254
- Grenzwinkel der Total-
reflexion 310
- Größe, physikalische 3–4
- Größengleichung 3
- Grundeinheit 8
- Grundfrequenz 143
- Grundgleichung der Mechanik 62
- Grundschwingung 137

Grundumsatz 162
Grundzustand 342
Gruppengeschwindigkeit 141

H

Haarhygrometer 179
Haftriebung 66
Hagen-Poiseuille, Gesetz von 117
Halbleiter 257
Halbleiterzähler 366
Halbraum 325
Halbschatten 304
Halbwertszeit 25, 370
Halogen 360
Haltepunkt 174
Hämoglobin 327
Harmonische 138
harmonische Schwingung 128–
132, 149
harmonischer Oszillator 128
hart (Strahlung) 347
harter Ferromagnet 268
Häufigkeitsverteilung 164
Hauptebene 315
Hauptsatz (Thermodynamik)
– erster 187
– zweiter 185, 193
Hebel 55
Hebelarm, effektiver 57
Hebelgesetz 55
Hellfeld 323
Henry (Einheit) 276
Henry-Daltonsches
Gesetz 102, 184
Hertz 120
Herzflimmern 259
Histogramm 164
Hochpass 224
Hochpolymere 99
Höhenschichtlinie 230
Hohlspiegel 307
Holographie 345
homogenes Feld 236
Hookesches Gesetz 97
Hörgrenze 142

Hornhaut 320
Hörschall 141
Hörschwelle 145
Hubarbeit 50
Hülle (Atom) 358
Huygens (Elementarwelle) 338,
339

Hydrathülle 176
hydraulische Presse 100
Hydrodynamik 112–121
hydrodynamisches
Paradoxon 114
hydrophil, -phob 110
Hydrostatik 100–111
hydrostatischer Druck 100
Hysteresekurve 268

I

ideales Gas 107, 159
Impedanz 278
Impuls 68–72
– Dreh- 73, 78
– Photon 340
– -unschärfe 341
Impulssatz 69
indifferentes Gleichgewicht 61
Induktion (magn.) 270–278
Induktion, Selbst- 274–277
Induktionsgesetz 273
Induktionsschleife 272
induktiver Widerstand 277
Induktivität 276
Influenz 238
Infrarot 303
Infraschall 142
inkohärent 334
Innenwiderstand 222–224
innere Energie 187
innere Reibung 112
innere Verdampfungswärme 147
Instrument, optisches 320–324
Integral
– bestimmtes 33
– unbestimmtes 34
– Linien- 52, 283

Integration 33
Integrationsgrenze 33
Intensität 324
Intensität (Welle) 146
Interferenz 136, 303, 332–334, 341
– destruktive 137
– konstruktive 137
Interferenzfilter 335
Inzidenz 306
Ion 252
ionisierende Strahlen 250
Ionisierungsarbeit 249
Ionophorese 254
Irreversibel 186, 192
Isobare 187
Isobare Zustandsänderung 187
Isochore 187
Isochore Zustandsänderung 187
Isolator 242
Isotherme Zustandsänderung 188
Isotherme 188
Isotop 253, 362
isotrop 98

J

Joule 50
Joule'sche Wärme 211

K

K α -Linie 361
Kalomel-Elektrode 255
Kalorie 162
Kapazität (el.) 213, 288
Kapazität, Wärme- 161
kapazitiver Strom 215
kapazitiver Widerstand 216
Kapillare 111
Kapillarwirkung 111
Karussell 83
Katastrophe, Resonanz- 136
Kathode 245
Kathode, Photo- 330
Kathodenstrahl-Oszilloskopograph 246
Kation 252

Katzenauge 306
Kehlkopf 143
Keimbildung 175
K-Einfang 365
Kelvin 154
Kennlinie, Strom-Spannungs- 210
Kerbwirkung 98
Kern, Atom- 358
Kernkraft 362
Kernreaktor 371
Kernschatten 305
Kernladungszahl 358
Kernspaltung 371
Kernumwandlung 364
Kettenreaktion 371
Kettenregel 131, 216
Kilogramm 9
Kilopont 46
Kilowattstunde 209
Kinematik (Bewegung) 32
kinetische Energie 54
– Rotation 73
kinetische Gastheorie 163
Kirchoff'sche Gesetze 218
Klangfarbe 143
Klemmenspannung 223
K-Linie 361
Knoten (Welle) 141
Knotenregel 218
Koeffizient, Permeabilitäts- 171
Koeffizient

– Ausdehnungs- 157
– Absorptions-
 (Extiktions-) 327
– Diffusions- 170
– Permeabilitäts- 171
– Schwächungs- 327
– Reibungs- 66
– Streu- 330
– Volumenausdehnungs- 157

Koexistenzbereich 181
Kohärenz 334
Kohärenzlänge 334
Kohäsion 107–110
Kohle, Aktiv- 184
Kohlenstoff-14 370

- Kolbenpumpe 106
- Kollimator 326
- kommunizierende Röhren 103
- Kompassnadel 262
- Kompensationsmessung 222
- Komponente (Vektor) 19
- Komponentendarstellung 20
- Kompressibilität 106
- Kompressionsmodul 107
- Kondensator
 - Aufladen 225
 - Entladung 225
 - Feld im 237, 243
 - gespeicherte Energie 213
 - Kapazität 212
 - kapazitiver Widerstand 216
 - Platten- 212
 - Schaltzeichen 213
- kondensieren 174, 177
- Kondensor 273
- konkav – konvex 312
- Konstante
 - Avogadro- 11
 - Boltzmann- 154
 - Extinktions- 321
 - Faraday- 247
 - Gas- 155
 - magn. Feld- 261
 - Massenwirkungs- 245
- Konstante
 - Avogardo 11
 - Boltzmann 158
 - Dämpfungs- 133
 - Extinktions- 327
 - Faraday 253
 - Feder- 46
 - Feld- (el.) 233
 - Feld- (mag.) 267
 - Gas- 159
 - Gravitations- 49
 - Massenwirkungs- 251
 - Strahlungs- 329
 - Solarkonstante 194
 - Stefan-Boltzmann- (Strahlungskonstante) 329
 - Planck 341
- Zeit- 25
- konstruktive Interferenz 137
- Kontaktpotential 254
- Kontaktspannung 254
- Kontinuitätsgleichung 113
- Konvektion 166
- konventionelle
 - Stromrichtung 207
- konvex 312
- Konzentrationsgefälle 170
- Konzentrationsgradient 170
- Koordinatenystem 18
- Koordinaten 18
- Kopfwelle 148
- Körper
 - deformierbarer 94
 - fester 96
 - schwarzer 328
 - starrer 94, 96
- Körperschall 146
- Kraft 45–49
 - Auftriebs- 105
 - Coulomb 228
 - Definition 46
 - elektrische 228
 - elektromagnetische 226
 - Flieh- 83
 - Lager- 56
 - Lorentz- 265
 - magnetische 265
 - Normal- 66
 - resultierende 47, 63
 - Rückstell- (rücktreibende) 129
 - Thermo- 256
 - Trägheits- 80–85
 - Zentrifugal- 83
 - Zentripetal- 83
- Kraftarm 56
- Kräftepaar (Lagerkraft) 56
- Kräftepolygon 48
- Kraftfeld 231
- Kraftgesetz, lineares 46
- Kraftschluss 48
- Kraftstoß (Stoß) 69
- Kraftwirkungslinie 57

- Kreisfrequenz 23, 130
 Kreisprozess 190
 Kriechfall 134, 280
 Kristall 95
 kritischer Punkt 183
 Kreuzprodukt 16
 K-Schale 333
 Kugel 5
 künstliche Radioaktivität 371
 Kurzschluss 223
 Kurzschlussstrom 223
 kurzsichtig 320
 Kurzwellenbestrahlung 260
 kurzsichtig 320
 kurzwellige Grenze 347
-
- L
- λ (Wellenlänge) 140, 300
 labiles Gleichgewicht 61
 Ladung
 – elektrische 206–207, 286
 – Elementar- 240–242, 286
 – spezifische 247
 Ladungsträger 206
 Ladungstrennung 238
 Ladungszahl (Kern-) 362
 Lagerkraft 58
 Laktometer 104
 Lambert-Beer-Gesetz 327
 Lambert-Gesetz 327
 laminar 116
 Länge 5–7
 Langwelle 302
 Laser 345
 Lastarm 56
 latente Wärme
 (Umwandlungswärme) 173
 Lautstärke 145
 LCD-Display 247
 Lebendauer (Radioaktivität) 343,
 369
 Leckstrom 260
 Leerlauf 223
 Leerlaufspannung 223
 Leerstelle 97
- Leistung 43
 – elektrische 208–211
 – Definition 43
 – Dosis 328
 – Blind- 217
 – Wirk- 217
 Leiter (el.) 242
 Leiterschleife 265
 Leitfähigkeit
 – elektrische 220
 – elektrolytische 252
 – Wärme- 165
 Leitsalz 253
 Leitungselektronen 242
 Leitwert (el.) 210
 Leitwert, Gesamt- 219
 Lenz'sche Regel 275
 Letaldosis 374
 Leuchstoffröhre 249
 Leuchtelektron 360
 Leuchtstoff(röhre) 344
 Licht,
 – Ausbreitung 304
 – Emission 328, 342
 – Farben 300, 324–329
 – natürliches 330
 – polarisiertes 330
 – Quant 340
 – Spektren 342
 – Teilchenatur 340
 – Wellenlängen 300
 Lichtbogen 250
 Lichtbündel 304
 Lichtdruck 349
 lichtelektrischer Effekt 340
 Lichtgeschwindigkeit 301
 Lichtleiter 310
 Lichtmessung 324
 Lichtquant 340
 Lichtquelle 304
 Lichtstrahl (Lichtbündel) 303
 Lichtstärke 325
 Lichtstrom 324
 Lichtweg 310
 linearer Maßstab 25
 Linienintegral 232, 281

- linearer Zusammenhang 47
 Linienspektrum 343
 Linse 312
 - Bildkonstruktion 315
 - Brennpunkt 312
 - dicke 318
 - Kombination 313
 - optische Achse 315
 - Sammel- 312
 - sphärische 312
 - Vergrößerung 321
 - Zerstreuungs- 313, 316
 - Zylinder 314
 Linsenfehler 313
 Löcher (Defektelektronen) 257
 logarithmische Skala 26
 Logarithmus 23–26, 28
 - dekadischer 24
 - natürlicher 24
 longitudinale Welle 141, 149
 Loschmidt'sche Zahl (Avogadro-Zahl) 11
 Lorentz-Kraft 265
 Lösung, übersättigte 176
 Lösungswärme 176
 Lot, Einfalls- 306
 L-Schale 333
 Luftdruck 105
 Luftfeuchtigkeit 178–181
 Lumen 325
 Lumineszenz 344
 Lungenbläschen 7
 Lupe 321
 Lux 325
 Lyman-Serie 343
-
- M
- Magnet 262, 268
 Magnetfeld 261–270
 - Berechnung 267
 - Dipol 263, 266
 - eines Leiters 263
 - Einheit 265
 magnetische
 - Feldkonstante 267
 - Feldlinien (Rechte-Hand-Regel) 263
 - Feldstärke 270
 - Flussdichte 265, 270
 - Fluss 272
 - Kraft (Lorentz-) 265
 - Moment 266
- magnetisch hart, weich 268
 Magnetisierung 268
 Manometer 104
 Maschenregel 218
 Masse 9
 - Elektron 247
 - molare 11
 - relativistische 248
 - Ruhe- 248
 Maßeinheit 3, 8–9
 Massendefekt 363
 Massendichte 11
 Masseneinheit, atomare 362
 Massengehalt 12
 Medium, brechendes 309
 Membranpumpe 106
 Menge 11–12, 29
 Messfehler 13–17
 Messunsicherheit 15, 28
 - absolute 16
 - relative 16
 Messzylinder 8
 metastabil 345
 Meter 5–8
 Mikrometer, Okular- 323
 Mikroskop (Licht) 322
 Mikroskop, Elektronen- 349
 Millikan 241
 Milliliter 8
 Mischen 176
 Mittelpunktstrahl (Zentralstrahl) 316
 Mittelwert 14
 mittlere freie Flugzeit 163
 mittlere freie Wegstrecke 163
 mmHg (Druckeinheit) IX, 406
 Modul, Elastizitäts- 97
 Modul, Kompressions- 107
 Mol 11, 28

Malalität 12
molare Masse 11
molare Wärmekapazität 161, 164
Molarität 11
Molekularbewegung 163–165
Molenbruch 12
Molmasse 11
Molvolumen 12
Moment

- Dipol- (el.) 235
- Dipol- (mag.) 266
- Dreh- 58
- Trägheits- 75

momentane Drehachse 76
momentane Geschwindigkeit 35
Mond (Daten) 407
monochromatisch 312
Monochromator 326
Mosfet-Transistor 259
Motor

- Diesel 189
- Otto 190

Multimeter, digitale 224

N
natürliche Exposition 374
natürlicher Logathmus 24
natürliches Licht 330
Nebelkammer 366
negative Ladung 207
negative Linse

- (Zerstreuungs-) 313, 316

Netzhaut 320
Netzwerk (el.) 217–227
neutral (Lösung) 252
neutrale Faser 98
Neutron 362
Neutronenmasse 362
Newton 62
Newton (Einheit) 46
Newton-Flüssigkeit 117
Newtonmeter (Joule) 50
newtonsch 117
Newton'sches Gesetz 62
Nichtleiter 257
nichtohm'sches Verhalten 210

Niveauschema 342
n-Leitung 257
Normalbedingung 15
Normalelektrode 255
Normalität (Lösung) 252
Normalspannung (mech.) 99
Normalverteilung 14
Nukleon 362
Nukleonenanzahl 362
Nuklid 362
Nuklidtafel 363
Nulleiter 260
Nullinstrument 222
Nullpunkt, absoluter (Temperatur) 156
numerische Apertur 339
Nutzeffekt (Wirkungsgrad) 190

0

Oberfläche

- hydrophile 110
- hydrophobe 110

Oberflächenenergie 108
Oberflächenspannung 108
Oberschwingung 138
Oberton 143
Objektiv (Mikroskop) 322
Objektmikrometer 6
Öffnungsfehler (sphärische Aberration) 313
Öffnungswinkel 304
Ohm 210
Ohm'sches Gesetz (el.) 210
ohmsch (hydr.) 117
ohmscher Widerstand 210
Ohmsches Gesetz (hydr.) 117
Ohr 144
Okular 322
Okularmikrometer 6
Öltröpfchenversuch 240
Opernglas 323
Optik 298–351

- Elektronen- 350
- geometrische 303–324
- Quanten- 339–348
- Wellen- 329–339

- optische
 - Abbildung 314–324
 - Absorbtion 326
 - Achse 315
 - Aktivität 331
 - optisches Instrument 320–324
 - Orbitale (Elektronenwolke) 359
 - Ordnung 192
 - Ordnungszahl
 - (Kernladungszahl) 358
 - Orientierungspolarisation 244
 - Ortsunschärfe 341
 - Ortsvektor 18
 - Osmose 171–173
 - osmotischer Druck 172
 - Oszillator 128
 - Oszillator, harmonischer 128
 - Oszillograph 246
 - Ottomotor 190
-
- P**
- Paarbildung 378
 - Paradoxon, hydrodynamisches 114
 - Parallellichtbündel 305, 313
 - Parallelogramm der Kräfte 48
 - Parallelorschaltung 206, 219
 - paramagnetisch 268
 - Parameterdarstellung 181
 - Partialdruck 160
 - Partialvolumen 160
 - Pascal 100
 - Pass (el.) 224
 - Pauli-Prinzip 360
 - Pegelmaß 145
 - Pendel 129
 - elektrisches 279
 - Faden- 131
 - Fang- 54
 - Feder- 129
 - gekoppelte 139
 - mathematisches 131
 - Periode (Schwingungsdauer) 130
 - Periodensystem 360
 - periodisch 129
- Permeabilität (Diffusion) 171
 - Permeabilität (magn.) 269
 - Permittivität 236, 243
 - perpetuum mobile 52
 - persönlicher Fehler 5
 - PET 373
 - Phase
 - Schwingung 137
 - Wärmelehre 174
 - Phasen
 - beziehung 137
 - diagramm
 - (Zustandsdiagramm) 183
 - geschwindigkeit 141
 - kontrast (Mikr.) 323
 - leiter 260
 - übergang 174
 - umwandlung 173–183
 - verschiebung (el.) 217
 - winkel 124
 - Phon 145
 - Phosphoreszenz 343
 - Photo
 - effekt 340
 - kathode 340
 - leiter 340
 - Photon 341
 - Photo
 - strom 340
 - synthese 195
 - widerstand 259
 - zelle 340
 - pH-Wert 252
 - physikalische Größe 3–4
 - Piezoelektrizität 244
 - pigmentum 326
 - Pirouette 78
 - Pitot-Rohr (Staurohr) 144
 - Planck'sches
 - Wirkungsquantum 341
 - Plankonvexlinse 312
 - plastisch 97
 - Plattenkondensator 236
 - p-Leitung 258
 - pn-Übergang 258
 - Poise 115

- Polarisation
– elektrische 243
– Elektrode 256
– optische 330
– unvollständige 331
– Verschiebungs- 243
- Polarisationsfolie 330
- Polarisator 331
- polarisiertes Licht 330
- Polschuhe 269
- Polung 207
- Polwender 265
- Polymerisation 99
- positive Ladung 207
- positive Linse (Sammellinse) 312
- Positron 365, 372
- Positronenemissionstomographie 373
- Positronenvernichtung 372
- Potential
– elektrisches 229–233
– Kontakt- 254
– feld 230–233
– gefälle 231
– sonde 230
– strömung 120
- potentielle Energie
– elektrisch 231
– mechanisch 50
- Potentiometer 221
- Potenzfunktion 26, 28
- Presse, hydraulische 100
- Primärlichtquelle 304
- Primärseite 274
- Prinzip, archimedisches 103
- Prisma 311
- Prismenwinkel (brechender Winkel) 311
- Produkt, skalares 20
- Produkt, vektorielles 21
- Proportionalität 46
- Proton 362
- Protonenmasse 362
- Pumpe 106
- Punkt, kritischer 183
- Punkt, Tripel- 183
- Punktladung (el.) 233
- p-T-Diagramm 183
- p-V-Diagramm 183
- Pythagoras 20
-
- Q**
- Quadratische Ergänzung 27
- quadratische Gleichung 27
- quadratisches
Abstandsgesetz 146, 152, 323
- Quadratwurzel 26
- Quant 340
- Quant, Gamma- 365
- Quantenenergie 340
- Quantenhypothese 340, 354
- Quantenoptik 339–348
- Quantensprung 342
- Quecksilber-Barometer 105
- Quotient, Differential- 35
-
- R**
- Radialbeschleunigung 45
- Radiant (Rad) 22
- radioaktiver Zerfall 364, 369
- Radioaktivität 364
– Aktivität 369
– α -Zerfall 364
– β -Zerfall 364
– γ -Zerfall 364
– Halbwertszeit 370
– künstliche 371
– Zerfallsgesetz 370
- Raster-Elektronenmikroskop 350
- Raumladungszone 258
- Raumwinkel 146
- RC-Glied 224
- Reaktionskraft (Gegenkraft) 64
- reale Gase 181
- Rechte-Hand-Regel 21, 263
- reelles Bild 307
- Reflexion 306
- Reflexion, Total- 310
- Reflexionsgesetz 306, 352
- Reflexionsvermögen 168, 308

- Reflexverminderung 336
Regel
– Kirchhoff 318
– Lenz'sche 275
Regelschwingung 103
Reibung 65–67
– Gleit- 66
– Haft- 66
– innere 65, 115
– rollende 65
Reihenschaltung 206, 219
Rekombination 258
relative Atommasse 362
relative Dielektrizitätskonstante (Permittivität) 243
relativer Fehler 16
relative Luftfeuchtigkeit 179
relative Längenänderung (Dehnung) 46, 97
relative Messunsicherheit 16
relative Permeabilität 269
relativistische Masse 248
Relativitätstheorie 248
Rem (Einheit) 274
Resistivität (spez. Widerstand)
Resonanz 134, 149
Resonanzkatastrophe 136
Resonanzkurve 136
resultierende Kraft 48
Retina 320
reversibel 188, 195
Reynoldsche Zahl 122
Ringtensiometer 109
Rinne, stabile 364
RL-Glied 277
Röhre, Leuchtstoff- 250
Röhren, kommunizierende 103
Röntgen 346
Röntgendiagnose 347
Röntgenröhre 346
Röntgenstrahlen 346–348
Röntgenstrahlung, charakteristische 361
Röntgenstrukturanalyse 348, 361
Röntgentomographie 347
Rotation 62
Rückstellkraft (rücktreibende Kraft) 130
Rückstoß (Rechenbeispiel) 71
Rückstrahler 306
Rücktreibende Kraft 129
Ruhelage (Pendel) 128
Ruhmasse 248
-
- S
Saite (Schwingung) 143
Saccharimetrie 331
Sammellinse 312
Sättigung (magn.) 268
Sättigung (Strom) 245
Sättigungsdampfdruck 179
sauer 258
Schale (Atom) 339
Schall, Körper- 150
Schalldruck 144
Schallgeschwindigkeit 147
schallhart, -weich 146
Schallintensität 144
Schallmauer 147
Schallpegel 145
Schallstärke 144
Schallwechseldruck 144
Schallwelle 141–148
Schallwellenwiderstand 146
Schaltkizze 205
Schaltung (el.) 205
Schaltzeichen
– Batterie 206
– Erdung 230
– Kondensator 213
– Spule 276
– Widerstand 221
Schatten 302
Schatten, Halb- 304
Schätzung 7
Schätzwert 14
Scheinkraft (Trägheitskraft) 81
Schichten, dünne
– (Interferenz) 335
Schiebewiderstand 221
schiefe Ebene 67

- schiefer Wurf 40
- schmelzen 174
- Schmelzpunkt 174
- Schmelzpunkt 115
- Schmelzwärme 174
- Schubspannung 101
- Schukodose 261
- Schutzkontakt 261
- Schutzschalter 261
- schwarze Strahlung 168, 329
- schwarzer Körper 328
- Schwebung 137
- Schweredruck 101–103
- schwerer Wasserstoff 362
- Schwerkraft 49
- Schwerpunkt 59
- schwingender Dipol 285, 298
- Schwingfall 280
- Schwingkreis 278
- Schwingung
 - elektrische 278–285
 - erzwungene 134
 - gedämpfte 132–134
 - harmonische 128–132
 - mechanische 128–136
- Schwingungsbauch 141
- Schwingungsdauer 23
- Schwingungsdifferentialgleichung 131, 281
- Schwingungsenergie 112
- schwingungsfähiges Gebilde 128
- Schwingungsknoten 141
- Schwingungsüberlagerung 136
- Sehen 300
- Sehpurpur 300
- Sehwinkel 321
- Seifenblase 112
- Seilwelle 138–141
- Sekundärlichtquelle 304
- Sekundärseite 274
- Sekunde 4
- selbständige Gasentladung 249
- Selbstinduktion 274–277
- Selbstinduktionskoeffizient 276
- Selbststeuerung 134, 280
- selektivpermeabel 172
- semipermeabel 172
- Serie (Optik) 343
- Serienschaltung 206, 219, 288
- sichtbares Licht 300
- Siedepunkt 177–178
- SI-Einheit 8
- Siemens 210
- Sievert (Einheit) 374
- signifikante Stellen
 - (Messwertangabe) 17
- Sinus 22
- Sinusschwingung 130
- SI-System 8, 28
- Skala, logarithmische 26
- Skalar 19
- skalares Produkt 20
- Snellius-Gesetz
 - (Brechungsgesetz) 309
- Solarkonstante 194
- Solar-Zelle 259
- Solvathülle 176
- Solvatationswärme 143
- Sonne (Radius) 353
- Sonographie 146
- Source 259
- Spannung
 - elektrische 205–208
 - Galvani- 254
 - Grenzflächen- 254
 - induzierte 271
 - Klemmen- 223
 - Kontakt- 254
 - Leerlauf- 223
 - mechanische 97
 - Oberflächen- 108
 - Thermo- 157, 256
- Spannungsabfall (Spannung) 210
- Spannungsquelle 206
- Spannungsreihe 255
- Spannungsteiler 221
- Spektralanalyse 342
- Spektralanalyse,
 - Absorptions- 328
- Spektralbereich 301
- Spektralfarben 300
- Spektrallinien 342

- Spektralphotometer 326
Spektrometer, Gitter- 336
Spektrum 327, 342
– Absorptionsspektral-analyse 327
– Anregungsenergie 342
– Atom- 343
– Brems- 347
– Niveauschema 343
spezifische Aktivität 369
spezifische Ausstrahlung 325
spezifische Ladung 247
spezifische Wärmekapazität 161
spezifischer Widerstand 220
spezifisches Volumen 11, 159
sphärische Abberation 313
Sphärische Linse 312
Spiegelung 306
Spitzenentladung 240
Spitzenzähler 366
Spule 264, 275
– Lenz'sche Regel 275
– Induktivität 276
– Primär- 274
– Sekundär- 274
– Selbstinduktion 274
Stäbchen (Auge) 300
stabile Rinne 364
stabiles Gleichgewicht 60
Stalagmomenter 113
Standardabweichung 14
Standardfehler 14
starrer Körper 96
Statik (Gleichgewicht) 59
Statik, Hydro- 100–107
Statistik 13
Staudruck 121
Staurohr 122
Stefan-Boltzmann-Gesetz 167, 329
stehende Welle 141
Steighöhe (Kapillare) 111
Steigung (math.) 35
Steigungsdreieck 35
Stellknorpel 144
Stempeldruck 100
Steradian 325
Stereoskop 321
Stichprobe 14
Stimmband 143
stimulierte Emission 345
stochastisch 369
Stoffmenge 11
Stoffmengendichte 11, 12
Stoffmengengehalt 12
Stoke'sches Gesetz 115
Stoß 70
– elastischer 70
– unelastischer 70
Stoßionisation 249
Strahl
– achsenparalleler 316
– Brenn- 316
– Licht 302
– Zentral- 316
Strahlen, Alpha- 367
Strahlen, ionisierende 250
Strahlen, Röntgen- 346–348, 353
Strahlengang 310
Strahlenschutz 373
Strahlenschutzverordnung 374
Strahlstärke 325
Strahlung
– charakteristische 361
– elektromagnetische 298
– ionisierende 250
– radioaktive 364
– schwarze 329
– Temperatur- 167, 328
– Wärme- 167, 328
Strahlung 301
Strahlung, charakteristische 361
Strahlung, radioaktive 366
Strahlung, schwarze 168, 329
Strahlung, Temperatur- 328–331
Strahlungsfluss 324
Strahlungsflussdichte
 (Intensität) 325
Strahlungsleistung 324
Strahlungskonstante 167, 329
Strahlungsmessgröße 324
Strahlungsmessung 324
Strahlungsthermoelement 325
Streubalken (Fehlerbalken) 15
Streumaß 14

- Streureflexion 168
 Streuung (Messwerte) 14
 Strom
 – elektrischer 205, 286
 – Anoden- 245
 – Blind- 217
 – kapazitiver 216
 – Licht- 324
 – Teilchen- 169
 Stromdichte (el.) 242
 Stromkreis 205–207, 217–224, 287
 Stromfaden 119
 Stromlinienform 120
 Strommesser 206
 Stromquelle 206
 Stromrichtung, konventionelle 207
 Strom-Spannungs-Kennlinie 210
 Stromstärke 206
 Stromstärke
 – elektrische 207
 – Teilchen 117
 – Volumen- 113
 Stromstoß 212
 Strömung, laminare 116–118
 Strömung, reale 116
 Strömung, Potential- 120
 Strömung, turbulente 119–121
 Strömungswiderstand 116
 Stromwärme 211
 Strukturanalyse, Röntgen- 361
 Stufenversetzung 97
 sublimieren 174
 Symmetriearchse 96
 systematischer Fehler 13
 Système International de
 Unités 8, 28
 System, Perioden- 358
 Szintillationszähler 366
-
- T
- Tangens 22
 Tangente 35
 Tangentialbeschleunigung
 (Bahnbeschleunigung) 44
- Teilchen
 – Alpha- 364
 – Beta- 364
 Teilchenanzahl dichte 11
 Teilchenstrom 169
 Teilchenstromdichte 169
 Teilchenstromstärke 117
 Teilchen-Welle Dualismus 341
 Teleobjektiv 317, 318
 Temperatur 156–158
 – absolute 156
 – absoluter Nullpunkt 156
 – kritische 183
 Temperaturgradient 168
 Temperaturskala 155
 Temperaturstrahlung 167, 328
 Termschema (Niveauschema) 343
 Tesla 265
 thermische Aktivierung 180
 thermische Ausdehnung 154, 157
 thermische Bewegung 160–173
 Thermodynamik,
 1. Hauptsatz 187
 Thermodynamik,
 2. Hauptsatz 185, 190
 thermodynamische
 Temperaturskala 156
 thermodynamisches
 Gleichgewicht 186
 Thermoelement 157, 256
 Thermoelement, Strahlungs- 325
 Thermokraft 256
 Thermometer 154
 – Gas- 156
 – Widerstands- 156
 Thermopaar 256
 Thermosflasche 161
 Thermospannung 157, 256
 Tiefpass 224
 Tomographie
 – Röntgen- 348
 – PET 317
 träge Masse 63
 Tragfläche 121
 Trägheit 62
 Trägheitskraft 80–85

Trägheitsmoment 75
Torr IX, 406
Torsion 100
Totalreflexion 310
Transformator 273
Transistor 259
Transpiration (Schwitzen) 177
transversale Welle 141, 149
Treibhauseffekt 195
triggern 246
trigonometrische Funktionen
 (Winkelfunktionen) 22
Tripelpunkt 183
Tritium, Triton 362
Trog, elektrolytischer 230
Trommelfell 144
Tropfen 111
Tropfflasche 111
Tubuslänge (Mikroskop) 323
Tunnelmikroskop 244
turbulent 116, 120

unpolarisierbare Elektrode 256
Unschärferelation 351
unselbständige Gasentladung 366
unterkühlen 175
unvollständige Polarisation 331
Urometer 106
Urspannung (Leerlaufspannung) 223

V

Vakuum-Diode 245
Vakuum-Lichtgeschwindigkeit 301
van-de-Graaff-Generator 240
van-der-Waals-Gleichung 181
van-t'Hoff-Gleichung 173
Varianz 14
Vektor 18–12, 28
Vektoraddition 20
vektorielles Produkt 21
Vektorprodukt 21
Vektorzerlegung 19
Verbrennungsmotor 2
verdampfen 174
Verdampfung 177
Verdampfungsenthalpie 179–180
Verdampfungswärme 180
Verformung 97
Verformung
 – elastische 97
 – plastische 97
Vergrößerung (Optik) 322
Vergrößerungsfaktor 322
Verlustleistung 212
Verschiebungsgesetz (Wien) 329
Verschiebungspolarisation 243
Versetzung 97
Vielfachinstrument 206
virtuelles Bild 307, 316
viskoelastisch 99
Viskosimeter 116
Viskosität 116
Volt 206
Volumen 5–7
 – Partial- 162

U

Überhöhung, Resonanz 136
Überlagerung
 (Schwingungen) 136, 282
Überlandleitung 212
übersättigt (Dampf) 179
übersättigt (Lösung) 178
Überschallknall 148
überschwerer Wasserstoff 362
Uhr 4
Ultrakurzwelle 302
Ultraschall 142
Ultraschall-Diagnose 146
Ultraviolett 301
Umkehrfunktion 25
Umlaufzeit 43
Umströmung 120
Umwandlungswärme 175–176
unelastischer Stoß 71
Unfall, elektrischer 259
Unschärfe
 – Impuls- 351
 – Ort- 351

- spezifisches 11
 - Volumenarbeit 101, 187
 - Volumenausdehnungskoeffizient 157
 - Volumengehalt 12
 - Volumenprozent 12
 - Volumenstromstärke 116
-
- W**
 - Wachstumsfunktion 24
 - Wahrscheinlichkeit 192
 - Wahrscheinlichkeitswelle 349
 - Wärme 161
 - Erstarrungs- 174
 - Joule'sche 211
 - latente (Umwandlungs-) 174–176, 180
 - Lösungs- (Solvatations-) 176
 - Schmelz 174
 - Umwandlungs- 173–176
 - Verdampfungs- 180
 - Wärmekapazität 161
 - molare 161
 - spezifische 161, 409
 - Wärmekraftmaschine 190–194
 - Wärmelehre 154–194
 - Wärmeleitfähigkeit 165
 - Wärmeleitung 165
 - Wärmeleitungsgleichung 166
 - Wärmemenge 165
 - Wärmenutzung 184–195
 - Wärmestrahlung 167
 - Wärmestrom 165
 - Wärmetübergangskoeffizient 166
 - Wasser
 - Daten 408
 - verdampfendes 177–180
 - Wassermolekül 235
 - Wasserstoff, schwerer 362
 - Wasserstoff, überschwerer 362
 - Wasserstoffelektrode 255
 - Wasserstoffionenkonzentration 252
 - Wattsekunde 209
 - Weber-Fechnersches Gesetz 145
 - Wechselschalter 212
 - Wechselspannung (el.) 214–217
 - Wechselstromwiderstand (Impedanz) 216, 277
 - Wegstrecke, freie 163
 - Weg-Zeit-Diagramm 34
 - weiches Ferromagnetikum 268
 - weich (Strahlung) 347
 - weitsichtig 320
 - Welle
 - Beugung 303, 336
 - ebene 302
 - elektromagn. 285, 298–303
 - Elementar- 338
 - Interferenz 332
 - longitudinale 141
 - Materie- 348
 - Schall- 141–147
 - Seil- 138–141
 - stehende 141
 - transversale 141
 - Wahrscheinlichkeits- 349
 - Wellenausbreitung 302
 - Wellenfront 302
 - Wellenfunktion 349
 - Wellenlänge 140, 299
 - Wellenoptik 329–339, 353
 - Wellenpaket 351
 - Wellenzentrum 302
 - Wertigkeit 252
 - Wheatstonesche Brücke 222
 - Widerstand
 - elektrisch 209–211, 287
 - Eingangs- 224
 - Gesamt- 219
 - induktiver 277
 - Innen- 222–224
 - kapazitiver 216
 - ohmscher 210
 - spezifischer 220
 - Strömungs- 117
 - Widerstandsbeiwert 118
 - Widerstandsthermometer 156
 - Wiensches Verschiebungsgesetz 167, 329
 - Wilson-Nebelkammer 318

- Winkel, brechender 311
 Winkel, Brewster- 331
 Winkel, Phasen- 136
 Winkel, Raum- 325
 Winkelbeschleunigung 44
 Winkelfunktion 22–23, 28
 Winkelgeschwindigkeit 23
 Winkelgrad 22
 Winkelspiegel 306
 Wirkleistung 217, 278
 Wirkungsgrad (Nutzeffekt) 190
 - Carnot- 194
 Wirkungsquantum,
 Planck'sches 341
 Wölbspiegel 307
 Wurf, schiefer 40, 64
 Wurfparabel 40
 Wurzel (math.) 26
-
- Z**
- Zähigkeit 114
 Zahl, Maßzahl 3, 28
 Zahl
 - Kernladungs- 358
 - Massen- 360
 - Reynoldsche 120
 Zahlengerade 3–4
 Zahlenwertgleichung 3
 Zählrohr 366
 Zapfen (Auge) 302
 Zeit 4–5
 Zeiteinheiten 4
 Zeitkonstante 25, 225, 277
 Zeitpunkt, Zeitspanne 4
- Zentralstrahl 305, 313
 Zentralbeschleunigung (Radialbeschleunigung) 44
 Zentrifugalkraft 83
 Zentrifuge 84
 Zentripetalbeschleunigung 44, 74
 Zentripetalkraft 73
 Zerfall, radioaktiver 364
 Zerfallsgesetz (Radioaktivität) 369–371
 Zerfallskonstante 370
 Zerfalls-Reihe 365
 Zersetzung, elektrolytische 253
 zerstrahlen 372
 Zerstreuungslinse 313
 Zoom-Objektiv 319
 zufälliger Fehler 13
 Zustand- Grund- 342
 Zustandsänderung
 - adiabatische 188
 - isobar 187
 - isochor 187
 - isotherm 188
 Zustandsdiagramm 181
 Zustandsgleichung 180
 Zustandsgleichung (ideales Gase) 158
 Zustandsgleichung, van der Waals 201
 Zustandsgröße 180
 zweiter Hauptsatz der Thermodynamik 193
 zweites Newton'sches Gesetz 63
 Zwischenbild (Mikroskop) 322
 Zylinderlinse 312