266–277) Untersuchen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums, ob die folgenden Reihen konvergieren:

276) $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

konvergent $\Leftrightarrow \int_1^\infty \ln(1+\frac{1}{x})\,dx$ konvergent

Part. Integration $\int f'g = fg - \int fg'$

$f = x \qquad g = \ln(1+\frac{1}{x})$

$f' = 1 \qquad g' = -\frac{1}{(1+\frac{1}{x})x^2}$

$= \ln(1+\frac{1}{x})\cdot x - \int -\frac{1}{(1+\frac{1}{x})x^2}\cdot x\,dx$

$= \ln(1+\frac{1}{x})\cdot x + \int \frac{1}{x+1}\,dx$

$= \ln(1+\frac{1}{x})\cdot x + \ln(x+1)$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{\ln(1+\frac{1}{n})\cdot n}_{\xrightarrow{\text{De L'Hospital}} 1} + \underbrace{\ln(n+1)}_{\to\infty} \underbrace{- \ln(2) - \ln(2)}_{\text{konstant}}$

$\Rightarrow$ divergent

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n^{-1}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{-1}{n^2}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1$

Fettucine Mario