55. Man bestimme die Lösung des Gleichungssystems aus Aufgabe 54 mit Hilfe des Einzelschrittverfahrens von Gauß-Seidel.

Ausgangspunkt ist wieder die Zerlegung $A = U + D + O$

also ergibt sich aus $A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = \underbrace{-(U+D)^{-1}O\vec{x} + (U+D)^{-1}\vec{b}}_{\varphi(\vec{x})}$

eine Iteration ist dann: $\overrightarrow{x_{n+1}} = \varphi\left(\overrightarrow{x_k}\right) = -(U+D)^{-1}O\overrightarrow{x_k} + (U+D)^{-1}\vec{b}$

in der Praxis wird meistens folgende Formel benutzt: $\overrightarrow{x_{n+1}} = -D^{-1}U\overrightarrow{x_{n+1}} - D^{-1}O\overrightarrow{x_k} + D^{-1}\vec{b}$

in Summenschreibweise: $x_{k+1}^{[i]} = \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j<i} a_{ij}x_{k+1}^{[j]} - \sum_{j>i} a_{ij}x_k^{[j]} + b_i\right)$ für $i = 1,\dots,n,\ k = 0,1,2,\dots$

Die Konvergenz ist gesichert, falls das Zeilen- oder Spaltenkriterium erfüllt ist

Zeilensummenkriterium: $\sum_{j\neq i}\left|a_{ij}\right| < \left|a_{ii}\right| \quad \forall i$

Spaltensummenkriterium: $\sum_{i\neq j}\left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \quad \forall j$

Also hier ist unser lineares Gleichungssystem, wir überprüfen gleich das Zeilensummenkriterium:

$$\begin{array}{rrrcrcl} -x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = & 3 & & 5+2=7<1 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & = & -9 & \Rightarrow & 1+4=5<1 \\ 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 8 & & 4+1=5<2 \end{array}$$

also wird das Zeilensummenkriterium nicht erfüllt, wir müssen schauen, dass in der Hauptdiagonale große Zahlen stehen. Also reihen wir das ganze System um, indem wir die Zeilen so verändernd: Zeile 3, Zeile 1, Zeile 2

$$\begin{array}{rrrcrcl} 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 8 & & 1+2=3<4 \\ -x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = & 3 & \Rightarrow & 1+2=3<5 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & = & -9 & & 1+1=2<4 \end{array}$$

jetzt stimmt das Zeilensummenkriterium und wir können den Algorithmus von Gauß-Seidl anwenden. (ich habe hier nicht die Notation vom Skriptum übernommen, sondern direkt in die Formel eingesetzt, also es gilt $x_k^{[1]} = x_k$, $x_{k+1}^{[1]} = x_{k+1}$, $x_k^{[2]} = y_k$, $x_{k+1}^{[2]} = y_{k+1}$, $x_k^{[3]} = z_k$, $x_{k+1}^{[3]} = z_{k+1}$)

$$x_{k+1}^{[1]} = \frac{1}{a_{11}}\left(-\sum_{j<1} a_{1j}x_{k+1}^{[j]} - \sum_{j>1} a_{1j}x_k^{[j]} + b_1\right) = \frac{1}{4}\cdot(+1)\,x_k^{[2]} + \frac{1}{4}\cdot(-2)\,x_k^{[3]} + \frac{1}{4}\cdot 8$$

$$x_{k+1}^{[2]} = \frac{1}{a_{22}}\left(-\sum_{j<2} a_{2j}x_{k+1}^{[j]} - \sum_{j>2} a_{2j}x_k^{[j]} + b_2\right) = \frac{1}{5}\cdot(+1)\,x_{k+1}^{[1]} + \frac{1}{5}\cdot(+2)\,x_k^{[3]} + \frac{1}{5}\cdot 3$$

$$x_{k+1}^{[3]} = \frac{1}{a_{33}}\left(-\sum_{j<3} a_{3j}x_{k+1}^{[j]} - \sum_{j>3} a_{3j}x_k^{[j]} + b_3\right) = \frac{1}{(-4)}\cdot(-1)\,x_{k+1}^{[1]} + \frac{1}{(-4)}\cdot(-1)\,x_{k+1}^{[2]} + \frac{1}{(-4)}\cdot(-9)$$

jetzt noch zusammenfassen und kürzen:

$$x_{k+1}^{[1]} = \frac{1}{4}x_k^{[2]} - \frac{1}{2}x_k^{[3]} + 2$$

$$x_{k+1}^{[2]} = \frac{1}{5}x_{k+1}^{[1]} + \frac{2}{5}x_k^{[3]} + \frac{3}{5}$$

$$x_{k+1}^{[3]} = \frac{1}{4}x_{k+1}^{[1]} + \frac{1}{4}x_{k+1}^{[2]} + \frac{9}{4}$$

die roten Elemente sind Werte aus alter Näherung
die blau Elemente sind Werte aus neuer Näherung

Wir wählen $(x_0, y_0, z_0) = \left(x_0^{[1]}, x_0^{[2]}, x_0^{[3]}\right) = (0,0,0)$ als Startwert:

1. Iteration mit $k = 0$:

$$x_1^{[1]} = \frac{1}{4}x_0^{[2]} - \frac{1}{2}x_0^{[3]} + 2 = \frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot 0 + 2 = 2$$

$$x_1^{[2]} = \frac{1}{5}x_1^{[1]} + \frac{2}{5}x_0^{[3]} + \frac{3}{5} = \frac{1}{5}\cdot 2 + \frac{2}{5}\cdot 0 + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

$$x_1^{[3]} = \frac{1}{4}x_1^{[1]} + \frac{1}{4}x_1^{[2]} + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{9}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

also ist der erste Iterations-Vektor: $\overrightarrow{x_1} = (2;1;3)$

2. Iteration mit $k = 1$

$$x_2^{[1]} = \frac{1}{4}x_1^{[2]} - \frac{1}{2}x_1^{[3]} + 2 = \frac{1}{4}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 3 + 2 = \frac{1-6+8}{4} = \frac{3}{4}$$

$$x_2^{[2]} = \frac{1}{5}x_2^{[1]} + \frac{2}{5}x_1^{[3]} + \frac{3}{5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4} + \frac{2}{5}\cdot 3 + \frac{3}{5} = \frac{3+6\cdot 5+3\cdot 4}{20} = \frac{3+24+12}{20} = \frac{39}{20}$$

$$x_2^{[3]} = \frac{1}{4}x_2^{[1]} + \frac{1}{4}x_2^{[2]} + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{39}{20} + \frac{9}{4} = \frac{3}{16} + \frac{39}{80} + \frac{9}{4} = \frac{3\cdot 5+39+9\cdot 20}{80} = \frac{234}{80} = \frac{117}{40}$$

also ist der zweite Iterations-Vektor: $\overrightarrow{x_1} = \left(\frac{3}{4};\frac{39}{20};\frac{117}{40}\right) = (0{,}75;1{,}95;2{,}925)$

die restlichen Berechnungen sind hier in der Tabelle zu sehen:

	$x=x^{[1]}$	$y=x^{[2]}$	$z=x^{[3]}$
k=0	0,00000000	0,00000000	0,00000000
k=1	2,00000000	1,00000000	3,00000000
k=2	0,75000000	1,95000000	2,92500000
k=3	1,02500000	1,97500000	3,00000000
k=4	0,99375000	1,99875000	2,99812500
k=5	1,00062500	1,99937500	3,00000000
k=6	0,99984375	1,99996875	2,99995313
k=7	1,00001563	1,99998438	3,00000000
k=8	0,99999609	1,99999922	2,99999883
k=9	1,00000039	1,99999961	3,00000000
k=10	0,99999990	1,99999998	2,99999997
k=11	1,00000001	1,99999999	3,00000000
k=12	1,00000000	2,00000000	3,00000000
k=13	1,00000000	2,00000000	3,00000000
k=14	1,00000000	2,00000000	3,00000000
k=15	1,00000000	2,00000000	3,00000000