



Ulrich Harten

# Physik für Mediziner

Eine Einführung

11., völlig neu bearbeitete Auflage

Mit 385 teilweise zweifarbigen Abbildungen, 4 Farabbildungen  
und 15 Tabellen

**Prof. Dr. Ulrich Harten**

Fachhochschule Mannheim

Windeckstr. 110

68163 Mannheim

e-mail: u.harten@fh-mannheim.de

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;  
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

ISBN-10 3-540-25510-9

ISBN-13 978-3-540-25510-9

**Springer Medizin Verlag Heidelberg**

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

**Springer Medizin Verlag.**

**Ein Unternehmen von Springer Science+Business Media**

[springer.de](http://springer.de)

© Springer Medizin Verlag Heidelberg 1974, 1975, 1977, 1980, 1987, 1993, 1997, 1999, 2002, 2006

Printed in Germany

Produkthaftung: Für Angaben über Dosierungsanweisungen und Applikationsformen kann vom Verlag keine Gewähr übernommen werden. Derartige Angaben müssen vom jeweiligen Anwender im Einzelfall anhand anderer Literaturstellen auf ihre Richtigkeit überprüft werden.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Planung: Martina Siedler, Heidelberg

Projektmanagement: Rose-Marie Doyon, Heidelberg

Umschlaggestaltung & Design: deblik Berlin

SPIN 10857190

Satz: medionet AG, Berlin

Druck- und Bindearbeiten: Stürtz, Würzburg

Gedruckt auf säurefreiem Papier 15/2117rd – 5 4 3 2 1 0

# Vorwort

---

Die Physik handelt von den Naturgesetzen, und die galten schon, als die Erde noch wüst und leer war. Verstöße gegen die Naturgesetze werden nicht bestraft, sie sind gar nicht erst möglich. Das gilt auch für organisches Leben und ärztliche Kunst. Herz und Lunge, Magen und Darm, Auge, Ohr und das ganze Nervensystem, ob gesund, ob krank, agieren im Rahmen der Naturgesetze. Ärzte ebenso.

Deshalb muss sich ein Medizinstudent, auch wenn es nicht seine Leidenschaft ist, mit Physik befassen. Dieses Buch versucht, das Notwendige verständlich zu präsentieren, Hilfen für das Physikpraktikum zu geben und die medizinischen Anwendungen aufzuzeigen.

In Vorbereitung dieser Auflage wurden mit freundlicher Unterstützung des Verlages viele Medizinstudenten detailliert zum Nutzen des Buches befragt und die Anleitungen zum Physikpraktikum von rund 20 Medizinischen Fakultäten ausgewertet. Daraus ergab sich eine größere Zahl von Ergänzungen: Lerntabellen am Kapitelende, Rechenbeispiele im Text, neue Übungsaufgaben, Praktikums-Boxen und Klinische Boxen erläutern den Stoff. Auf der schon bewährten, aber neu gestalteten Website zum Buch ► [www.lehrbuch-medizin.de/physik](http://www.lehrbuch-medizin.de/physik) finden Sie weitere interessante und vor allem auch prüfungsrelevante Inhalte.

Das Buch erläutert weiterhin **alle** im Gegenstandskatalog (GK1) aufgeführten Lerninhalte. Welche Sie davon in der Prüfung an Ihrer Universität tatsächlich brauchen, müssen Sie selbst herausfinden. Im zentralen Physikum wird keineswegs alles gebraucht. Im Inhaltsverzeichnis habe ich die besonders physikumsrelevanten Kapitel für Sie markiert. Die Lerntabellen und die leichteren Übungsaufgaben orientieren sich ebenfalls am Physikum. Weitere Hinweise zur Prüfungsrelevanz finden sich auf der Internetseite.

Die Betreuung dieses Buches beim Verlag lag in den Händen von Rose-Marie Doyon und Martina Siedler. Ihnen gilt mein besonderer Dank für die vielfältigen Hilfen.

Juli 2005

Ulrich Harten

# Biographie

---



Ulrich Harten

Diplom-Physiker, Dr. rer. nat., geboren 1955, Studium der Physik in Göttingen und Stuttgart, ab 1987 Industrietätigkeit (BASF), 1993 Professor an der Fachhochschule Mannheim, u.a. Vorlesungen und Praktika „Physik für Biotechnologen“.

# Physik für Mediziner: das neue Layout

Einleitung: thematischer Einstieg ins Kapitel

Rechenbeispiele: schrittweise physikalische Zusammenhänge und Rechnungen nachvollziehen

68 Kapitel 3 · Mechanik deformierbarer Körper

## ➤ ➤ Einleitung

Der „starre Körper“ ist eine Fiktion: Auch der härteste „feste Körper“ lässt sich noch verbiegen und mit der nötigen Gewalt auch zerbrechen. Demgegenüber passt eine Flüssigkeit ihre Form dem Gefäß an, in dem sie sich befindet; sie behält aber ihr Volumen bei und bestimmt danach ihre Oberfläche. Ein Gas schließlich füllt (unter Laborbedingungen, nicht in astronomischem Maßstab) sein Gefäß vollständig und gleichmäßig aus. Eben weil Flüssigkeiten und Gase keine eigene Form besitzen, lassen sie sich etwa durch Strömung in Röhren relativ leicht transportieren. Blutkreislauf und Atmung nutzen dies aus.

Leitsystem: Orientierung über die Kapitel 1-9 und Anhang

3

Inhaltliche Struktur: klare Gliederung durch alle Kapitel

## 3.2 Festkörper

### 3.2.1 Struktur der Festkörper

Kennzeichen des Festkörpers ist seine kristalline Struktur. Sie verleiht ihm Formstabilität, macht ihn aber nicht starr. Der feste Körper lässt sich elastisch (vorübergehend) oder plastisch (dauerhaft) verformen.

Im **Kristallgitter** herrscht Ordnung; jedem Gitterbaustein wird ein fester Platz zugewiesen. Kochsalz beispielsweise besteht aus elektrisch positiv geladenen Ionen des Natriums und aus den negativen Ionen des Chlors. Im NaCl-Gitter sind sie so angeordnet, dass jedes Na<sup>+</sup>-Ion sechs Cl<sup>-</sup>-Ionen als nächste Nachbarn hat und umgekehrt. Das führt zu einer würfelförmigen **Elementarzelle** des Gitters, wie sie in Abb. 3.1 schematisch dargestellt. Sehen kann man einen solchen Würfel nicht; dazu ist er zu klein. Seine Kantenlänge beträgt gerade ein halbes Nanometer.

Schlüsselbegriffe sind fett hervorgehoben

Verweise auf Abbildungen und Tabellen: deutlich herausgestellt und leicht zu finden

Merke: das Wichtigste auf den Punkt gebracht, zum Repetieren

#### Merke

Aggregatzustände:

- fest: formstabil bis zur Festigkeitsgrenze
- flüssig: nicht form-, wohl aber volumenstabil
- gasförmig: weder form- noch volumenstabil

## Rechenbeispiel 3.1: Mensch am Draht

► **Aufgabe.** Welchen Durchmesser muss ein Kupferdraht mindestens haben, wenn er ohne plastische Verformung einen Menschen tragen soll? Beachte Abb. 3.4.

► **Lösung.** Das Ende der Hooke'schen Geraden befindet sich etwa bei der Grenzspannung  $\sigma_g = 13 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ . Wenn der Mensch ein Gewicht von 690 N hat (entspricht 70 kg), so ergibt sich für die minimal erforderliche Querschnittsfläche:

$$A_{\min} = \frac{F_G}{\sigma_g} = 5,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = \frac{1}{4} d_{\min}^2$$

Also ist der minimale Durchmesser

$$d_{\min} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,6 \text{ mm}.$$

Die inkompressible Flüssigkeit und das hochkompressible ideale Gas markieren zwei mathematisch einfache Grenzfälle, zwischen denen sich die realen Substanzen herumtreiben. Bei ihnen muss man empirisch bestimmen, um welchen Betrag  $\Delta V$  das Ausgangsvolumen  $V$  abnimmt, wenn man den äußeren Druck um  $\Delta p$  erhöht. Eine Proportionalität zu  $V$  darf man erwarten, eine zu  $\Delta p$  nicht unbedingt. Es ist deshalb vernünftig, die

$$\text{Kompressibilität} \quad k = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}$$

differentiell zu definieren (negatives Vorzeichen, weil  $V$  mit  $p$  abnimmt). Der Kehrwert wird **Kompressionsmodul**  $Q$  genannt. Für den Grenzfall des inkompressiblen Fluides gilt  $k = 0$ .

## Klinik

**Der Patient am „Tropf“.** Bei Patienten, die „ihre Tropfen nehmen“, dient die Oberflächenspannung zur **Dosierung** von Medikamenten. Dabei verlässt man sich darauf, dass alle vom Schnabel der Flasche fallenden Tropfen zumindest so ungefähr die gleiche Größe haben. In manchem Mediziner-Praktikum wird so die Oberflächenspannung bestimmt (siehe Kasten). Die Tropfengröße hängt auch entscheidend vom Durchmesser des Rohres ab, aus dem die Flüssigkeit tropft. Eine Tropfflasche mit beschädigtem Schnabel dosiert falsch.

**Klinik-Box:** der Aeskulapstab schärft den Blick für die Klinik

**Navigation:** Seitenzahl und Kapitelnummer für die schnelle Orientierung

69

3

3.2 · Festkörper

## Praktikum

### Viskosität und Strömung

Es wird üblicherweise die Viskosität von Wasser und einer höher viskosen Flüssigkeit auf zwei Arten bestimmt:

1) Strömung durch ein Rohr und Anwenden des **Hagen-Poiseulle Gesetzes**:

$$\eta = \frac{\pi r^4}{8 l} \frac{\Delta p}{I}$$

Der Radius  $r$  des durchströmten Rohrs muss sehr genau gemessen werden, den treibenden Druck  $\Delta p$  besorgt man sich als Schweredruck und den Volumenstrom  $I$  misst man mit Messbecher und Stoppuhr.

2) Fall einer Kugel. Kleine Kugeln (Radius  $r$ ), sinken, wenn sie sich gegenseitig nicht stören, mit der Geschwindigkeit

$$v_0 = \frac{F}{6\pi \cdot \eta \cdot r} = \frac{2r^2}{9 \cdot \eta} g \cdot \Delta \rho$$

(**Stokes-Gesetz**) – hier ist  $F$  der Anteil der Gewichtskraft, den das archimedische Prinzip (► Kap. 3.3.3) den Kugeln wegen ihres Dichteüberschusses gegenüber der Flüssigkeit noch lässt. Zusammen mit der Formel für die Auftriebskraft ergibt sich dann:

$$\eta = \frac{2 \cdot r^2}{9 \cdot g} \frac{\rho_K - \rho_{fl}}{v_0}$$

wobei  $\rho_K$  die Dichte der Kugel und  $\rho_{fl}$  die Dichte der Flüssigkeit ist.

Rote Blutkörperchen haben Scheibchenform und sinken darum nach einem komplizierteren Gesetz zu Boden. Man braucht es zum Glück nicht zu kennen, um aus erhöhter **Blutsenkungsgeschwindigkeit** eine Infektion zu diagnostizieren.

**Praktikum:** wichtige Versuche aus dem Kurs anschaulich dargestellt

## In Kürze

### Formel

### Größen [Einheit]

#### Elastische Verformung eines Festkörpers

Mechanische Dehnung

$$\frac{\Delta l}{l_0}$$

$\Delta l$ : Längenänderung [m]  
 $l_0$ : Anfangslänge [m]

Mechanische Spannung

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$\sigma$ : mechanische Spannung  $\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$   
 $F$ : Kraft auf  $A$  [N]  
 $A$ : Querschnittsfläche [m<sup>2</sup>]

**In Kürze:** fasst in Lern-tabellen die Quintessenz zusammen

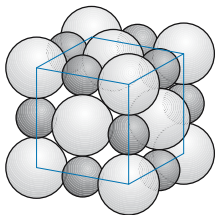


Abb. 3.1. Kristallgitter des NaCl (Kochsalz). Die dicken Cl<sup>-</sup>-Ionen und die kleineren Na<sup>+</sup>-Ionen liegen dicht an dicht

## Übungsfragen

• leicht; •• mittel; ••• schwer

### Zur Strömung

- 10. Wie schnell strömt die Luft in Rechenbeispiel 3.7?
- 13. Die mechanische Leistung  $P$ , die benötigt wird, um einen Volumenstrom  $I$  durch ein Rohr zu drücken, ist  $P = I \cdot \Delta p$ , wobei  $\Delta p$  die Druckdifferenz zwischen Rohranfang und Rohrende ist. Begründen Sie das.
- 14. Welche mittlere mechanische Leistung muss das Herz eines Menschen liefern, wenn es bei einem Druck am Auslauf (Aorta) von 174 hPa eine mittlere Blutstromstärke von 6 l/min

**Übungsfragen:** nach Schwierigkeitsgrad geordnete Fragen. Ausführliche Lösungen finden Sie im Anhang

Über 450 Abbildungen veranschaulichen komplizierte und komplexe Sachverhalte

**Interaktiv lernen im Web**  
[www.lehrbuch-medizin.de/physik](http://www.lehrbuch-medizin.de/physik)

## Wichtige Zahlenwerte

$\pi$	$\pi = 3,141592 \dots$
e	$e = 2,718281 \dots$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2} = 1,4142 \dots$
$\ln 2$	$\ln 2 = 0,6931 \dots$
Fallbeschleunigung	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$
Lichtgeschwindigkeit (Vakuum)	$c = 2,99792458 \text{ m/s}$ $\approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Avogadro-Konstante	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Gaskonstante	$R = 8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$
Volumen eines Mol Gas (Normalbedingungen)	$22,4 \text{ l/mol}$
Dichte von Wasser	$\rho_W = 1,0 \text{ kg/l}$
Spez. Wärmekapazität von Wasser	$4,18 \text{ J/(g} \cdot \text{K)}$
Schallgeschwindigkeit in Wasser	$1480 \text{ m/s}$
Schallgeschwindigkeit in Luft	$330 \text{ m/s}$
Elementarladung	$e_0 = 1,602 \cdot 10^{19} \text{ As}$
Faraday-Konstante	$F = 96484 \text{ As/mol}$

## Energieeinheiten

<b>1 Joule = 1 Newtonmeter = 1 Wattsekunde = 1 J = 1 N · m = 1 W · s</b>
Kilowattstunde = 1 kWh = $3,600 \cdot 10^6 \text{ J}$
Elektronvolt = 1 eV = $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
Kalorie = 1 cal = 4,184 J

## Druckeinheiten

<b>Pascal = 1 Pa = 1 N/m<sup>2</sup>; Luftdruck: <math>1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg} \approx 10 \text{ Meter H}_2\text{O}</math></b>
Bar = 1 bar = $1,000 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
mm-Quecksilber = 1 mmHg = 133,3 Pa
mm-Wasser = 1 mmH <sub>2</sub> O = 9,81 Pa
Atmosphäre = 1 atm = $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$



# Inhaltsverzeichnis

! Besonders wichtige Kapitel zur Vorbereitung auf die IMPP-Fragen

<b>1</b>	<b>Grundbegriffe</b> .....	<b>1</b>	2.3.5	Drehbewegungen ! .....	59
1.1	Physikalische Größen und ihre Einheiten ....	2	2.3.6	Trägheitsmoment und Drehimpuls .....	62
1.1.1	Physikalische Größen .....	2			
1.1.2	Zeit .....	3	<b>3</b>	<b>Mechanik deformierbarer Körper</b> .....	<b>67</b>
1.1.3	Länge, Fläche, Volumen ! .....	4	3.1	Die Aggregatzustände .....	68
1.1.4	SI-Einheiten .....	8	3.2	Festkörper .....	69
1.2	Mengenangaben .....	8	3.2.1	Struktur der Festkörper .....	69
1.2.1	Masse und Stoffmenge .....	8	3.2.2	Verformung von Festkörpern ! .....	70
1.2.2	Dichten und Gehalte ! .....	9	3.2.3	Viskoelastizität .....	73
1.3	Statistik und Messunsicherheit .....	11	3.3	Druck .....	73
1.3.1	Messfehler ! .....	11	3.3.1	Stempeldruck ! .....	73
1.3.2	Mittelwert und Streumaß ! .....	11	3.3.2	Schweredruck ! .....	75
1.3.3	Messunsicherheit ! .....	13	3.3.3	Auftrieb ! .....	77
1.3.4	Fehlerfortpflanzung ! .....	14	3.3.4	Manometer .....	79
1.4	Vektoren und Skalare ! .....	15	3.3.5	Pumpen .....	80
1.5	Wichtige Funktionen .....	18	3.3.6	Kompressibilität .....	81
1.5.1	Winkelfunktionen ! .....	18	3.3.7	Blutdruckmessung .....	82
1.5.2	Exponentialfunktion und Logarithmus ! ...	19	3.4	Grenzflächen .....	83
1.5.3	Potenzfunktionen .....	22	3.4.1	Kohäsion .....	83
1.5.4	Algebraische Gleichungen .....	22	3.4.2	Adhäsion .....	86
<b>2</b>	<b>Mechanik starrer Körper</b> .....	<b>27</b>	3.5	Strömung .....	88
2.1	Bewegung .....	28	3.5.1	Zähigkeit (Viskosität) ! .....	88
2.1.1	Fahrstrecke und Geschwindigkeit ! .....	28	3.5.2	Laminare Strömung ! .....	89
2.1.2	Überlagerung von Geschwindigkeiten ....	30	3.5.3	Turbulente Strömung .....	93
2.1.3	Beschleunigung ! .....	31	3.5.4	Staudruck .....	95
2.1.4	Drehbewegungen ! .....	35	<b>4</b>	<b>Mechanische Schwingungen und Wellen</b> .....	<b>99</b>
2.1.5	Bewegung von Gelenken .....	36	4.1	Mechanische Schwingungen .....	100
2.2	Kraft, Drehmoment, Energie .....	37	4.1.1	Oszillatoren .....	100
2.2.1	Kräfte ! .....	37	4.1.2	Harmonische Schwingungen ! .....	100
2.2.2	Gewichtskraft und Gravitation ! .....	40	4.1.3	Gedämpfte Schwingungen .....	103
2.2.3	Arbeit und Energie ! .....	40	4.1.4	Erzwungene Schwingungen .....	104
2.2.4	Kinetische Energie ! .....	44	4.1.5	Überlagerung von Schwingungen .....	105
2.2.5	Hebel und Drehmoment ! .....	46	4.2	Seilwellen ! .....	107
2.2.6	Die Grundgleichungen des Gleichgewichts ! .....	48	4.3	Schallwellen .....	110
2.2.7	Gleichgewichte .....	49	4.3.1	Schallerzeugung .....	110
2.3	Kraft und Bewegung .....	51	4.3.2	Schallnachweis .....	111
2.3.1	Die Newton'schen Gesetze ! .....	51	4.3.3	Schallintensität und Lautstärke ! .....	112
2.3.2	Reibung .....	54	4.3.4	Schallausbreitung ! .....	115
2.3.3	Impuls ! .....	55			
2.3.4	Trägheitskräfte ! .....	57			

<b>5</b>	<b>Wärmelehre</b> .....	<b>121</b>	6.4.4	Innenwiderstände .....	176
5.1	Temperatur .....	122	6.4.5	Hoch- und Tiefpass .....	177
5.1.1	Temperaturmessung ! .....	122	6.4.6	Kondensatorentladung und e-Funktion ! ..	178
5.1.2	Ausdehnungskoeffizienten .....	124	6.5	Elektrisches Feld. ....	180
5.1.3	Das ideale Gas ! .....	125	6.5.1	Der Feldbegriff ! .....	180
5.1.4	Partialdruck .....	127	6.5.2	Elektrisches Potential ! .....	181
5.2	Thermische Bewegung .....	127	6.5.3	Das Potentialfeld ! .....	183
5.2.1	Wärme ! .....	127	6.5.4	Kräfte zwischen Ladungen ! .....	186
5.2.2	Molekularbewegung ! .....	130	6.5.5	Feld im Kondensator .....	188
5.2.3	Wärmeleitung ! .....	132	6.5.6	Energie des elektrischen Feldes .....	189
5.2.4	Diffusion .....	133	6.6	Materie im elektrischen Feld .....	190
5.2.5	Osmose ! .....	135	6.6.1	Influenz und elektrische Abschirmung ....	190
5.3	Phasenumwandlungen .....	137	6.6.2	Der elektrische Strom ! .....	191
5.3.1	Umwandlungswärmen ! .....	137	6.6.3	Dielektrizitätskonstante (Permittivität) ! ..	192
5.3.2	Schmelzwärme ! .....	138	6.6.4	Das freie Elektron. ....	194
5.3.3	Lösungs- und Solvatationswärme .....	139	6.6.5	Ruhemasse und relativistische Masse ....	197
5.3.4	Verdampfung ! .....	140	6.6.6	Gasentladung .....	198
5.3.5	Dampfdruck und Dampfdichte ! .....	141	6.7	Elektrochemie. ....	199
5.3.6	Luftfeuchtigkeit .....	142	6.7.1	Dissoziation .....	199
5.3.7	Verdampfungsenthalpie .....	143	6.7.2	Elektrolyte ! .....	201
5.3.8	Zustandsdiagramme ! .....	144	6.8	Grenzflächen .....	203
5.3.9	Absorption und Adsorption .....	146	6.8.1	Membranspannung .....	203
5.4	Wärmehaushalt des Menschen. ....	147	6.8.2	Galvani-Spannung. ....	205
5.4.1	Konvektion .....	147	6.8.3	Thermospannung .....	206
5.4.2	Temperaturstrahlung .....	149	6.9	Elektrophysiologie .....	207
5.4.3	Transpiration .....	151	6.9.1	Die Auswertung des EKG nach Einthoven ..	207
5.5	Wärmenutzung .....	151	6.9.2	Elektrische Unfälle .....	209
5.5.1	Die Sonderstellung der Energieform „Wärme“ .....	151	6.9.3	Schutzmaßnahmen .....	210
5.5.2	Zum Wärmehaushalt der Erde .....	153	6.10	Magnetische Felder. ....	212
<b>6</b>	<b>Elektrizitätslehre</b> .....	<b>157</b>	6.10.1	Einführung ! .....	212
6.1	Die wichtigsten Messgrößen .....	159	6.10.2	Kräfte im Magnetfeld ! .....	215
6.1.1	Strom, Spannung, Ladung ! .....	159	6.10.3	Erzeugung von Magnetfeldern ! .....	217
6.1.2	Leistung und Energie ! .....	162	6.11	Induktion .....	219
6.2	Die wichtigsten Zusammenhänge .....	163	6.11.1	Einführung ! .....	219
6.2.1	Elektrischer Widerstand ! .....	163	6.11.2	Transformatoren ! .....	222
6.2.2	Das Ohm'sche Gesetz ! .....	164	6.11.3	Selbstinduktion .....	223
6.2.3	Stromwärme ! .....	165	6.11.4	Induktiver Widerstand .....	225
6.2.4	Kapazität ! .....	166	6.12	Elektrische Schwingungen .....	226
6.2.5	Energie des geladenen Kondensators ....	167	6.12.1	Der Schwingkreis ! .....	226
6.3	Wechselspannung .....	168	6.12.2	Überlagerung von Schwingungen .....	229
6.3.1	Effektivwerte .....	168	6.12.3	Geschlossene elektrische Feldlinien .....	230
6.3.2	Kapazitiver Widerstand .....	170	6.12.4	Der schwingende elektrische Dipol. ....	230
6.4	Elektrische Netzwerke .....	171	<b>7</b>	<b>Optik</b> .....	<b>237</b>
6.4.1	Widerstände in Reihe und parallel ! .....	171	7.1	Elektromagnetische Wellen .....	238
6.4.2	Spezifischer Widerstand (Resistivität). ....	173	7.1.1	Der strahlende Dipol .....	238
6.4.3	Spannungsteiler ! .....	174	7.1.2	Spektralbereiche ! .....	240
			7.1.3	Wellenausbreitung ! .....	241

7.2	Geometrische Optik .....	243	8.2.7	Kernspaltung und künstliche Radioaktivität .....	316
7.2.1	Lichtbündel .....	243	8.2.8	Antimaterie ! .....	317
7.2.2	Spiegelung ! .....	245	<b>9</b>	<b>Ionisierende Strahlung .....</b>	<b>321</b>
7.2.3	Brechung ! .....	247	9.1	Dosimetrie .....	322
7.2.4	Dispersion .....	250	9.1.1	Energie- und Äquivalentdosis ! .....	322
7.2.5	Linsen ! .....	251	9.1.2	Ionendosis .....	323
7.2.6	Abbildung durch Linsen ! .....	254	9.1.3	Aktivität und Dosis ! .....	324
7.2.7	Abbildungsgleichungen ! .....	255	9.2	Strahlennutzen, Strahlenschaden .....	324
7.2.8	Abbildung durch einfache Brechung .....	258	9.2.1	Radioaktive Tracer .....	324
7.2.9	Das Auge .....	258	9.2.2	Strahlentherapie .....	325
7.2.10	Fehlsichtigkeit und Brillen .....	260	9.2.3	Natürliche Exposition .....	326
7.2.11	Optische Instrumente ! .....	262	9.2.4	Zivilisationsbedingte Exposition .....	327
7.3	Intensität und Farbe .....	265	9.2.5	Strahlenschutz .....	328
7.3.1	Strahlungs- und Lichtmessgrößen .....	265	<b>A</b>	<b>Anhang .....</b>	<b>331</b>
7.3.2	Optische Absorption ! .....	267	A1	Antworten .....	332
7.3.3	Temperaturstrahlung .....	270	A2	Physikalische Formelsammlung .....	345
7.3.4	Farbsehen .....	271	A3	Sachverzeichnis .....	353
7.4	Wellenoptik .....	275			
7.4.1	Polarisiertes Licht .....	275			
7.4.2	Interferenz ! .....	276			
7.4.3	Kohärenz .....	278			
7.4.4	Dünne Schichten und Beugungsgitter ! ..	279			
7.4.5	Beugungsfiguren ! .....	281			
7.5	Quantenoptik .....	283			
7.5.1	Das Lichtquant .....	283			
7.5.2	Energiezustände und Spektren ! .....	285			
7.5.3	Laser .....	287			
7.5.4	Röntgenstrahlen ! .....	289			
7.5.5	Der Compton-Effekt .....	292			
7.5.6	Röntgendiagnose .....	293			
7.6	Elektronenoptik .....	295			
7.6.1	Elektronenbeugung .....	295			
7.6.2	Elektronenmikroskope .....	295			
7.6.3	Die Unschärferelation .....	297			
<b>8</b>	<b>Atom- und Kernphysik .....</b>	<b>301</b>			
8.1	Aufbau des Atoms .....	302			
8.1.1	Das Bohr'sche Atommodell ! .....	302			
8.1.2	Elektronenwolken .....	303			
8.1.3	Das Pauli-Prinzip .....	304			
8.1.4	Charakteristische Röntgenstrahlung .....	305			
8.2	Aufbau des Atomkerns .....	305			
8.2.1	Kernspinresonanztomographie .....	305			
8.2.2	Nukleonen und Nuklide ! .....	307			
8.2.3	Der Massendefekt .....	308			
8.2.4	Radioaktivität ! .....	309			
8.2.5	Nachweis radioaktiver Strahlung .....	311			
8.2.6	Zerfallsgesetz ! .....	314			

„Physik lernen“ im Web unter:  
[www.lehrbuch-medizin.de/physik](http://www.lehrbuch-medizin.de/physik)

# Grundbegriffe

## 1.1 Physikalische Größen und ihre Einheiten – 2

- 1.1.1 Physikalische Größen – 2
- 1.1.2 Zeit – 3
- 1.1.3 Länge, Fläche, Volumen – 4
- 1.1.4 SI-Einheiten – 8

## 1.2 Mengenangaben – 8

- 1.2.1 Masse und Stoffmenge – 8
- 1.2.2 Dichten und Gehalte – 9

## 1.3 Statistik und Messunsicherheit – 11

- 1.3.1 Messfehler – 11
- 1.3.2 Mittelwert und Streumaß – 11
- 1.3.3 Messunsicherheit – 13
- 1.3.4 Fehlerfortpflanzung – 14

## 1.4 Vektoren und Skalare – 15

## 1.5 Wichtige Funktionen – 18

- 1.5.1 Winkelfunktionen – 18
- 1.5.2 Exponentialfunktion und Logarithmus – 19
- 1.5.3 Potenzfunktionen – 22
- 1.5.4 Algebraische Gleichungen – 22

## ➤ ➤ Einleitung

Die Physik ist eine empirische und quantitative Wissenschaft; sie beruht auf Messung und Experiment. Daraus folgt eine intensive Nutzung mathematischer Überlegungen, denn Messungen ergeben Zahlenwerte, und die Mathematik ist primär für den Umgang mit Zahlen erfunden worden. Die Natur ist damit einverstanden. Selbst rechnet sie zwar nicht, aber wenn der Mensch ihre Gesetzmäßigkeiten einfach und korrekt beschreiben will, dann tut er dies am besten mit Hilfe mathematischer Formeln und Kalküle.

## 1.1 Physikalische Größen und ihre Einheiten

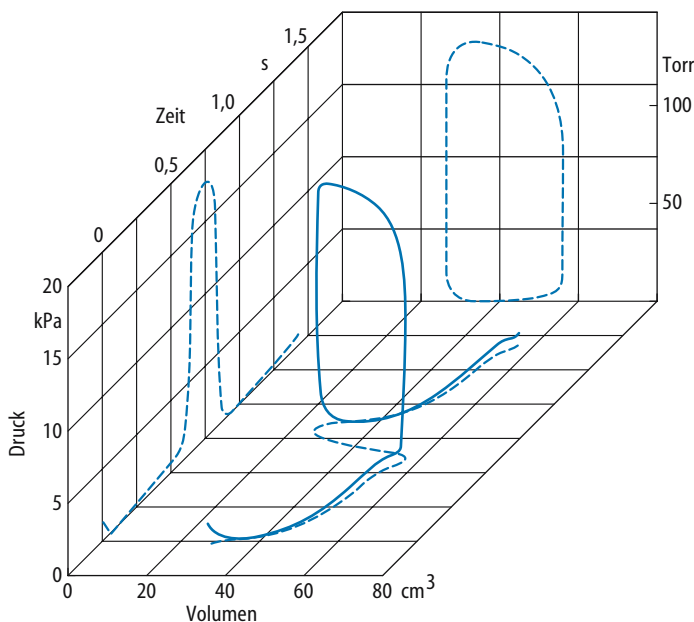
### 1.1.1 Physikalische Größen

Des Menschen liebster Muskel ist das Herz; kein anderes Organ wird ähnlich mit Gefühlswerten befrachtet. Anatomisch handelt es sich um einen Hohlmuskel, der ganz nach Art einer Kolbenpumpe durch periodische Änderung seines Kammervolumens den Blutkreislauf aufrechterhält. Vom Herzen eines erwachsenen Menschen wird verlangt, dass es in der Minute etwa sechs Liter Blut umpumpt – bei körperlicher Belastung auch noch

mehr – und dazu in der Aorta eben jenen Druck aufrechterhält, der gebraucht wird, um den Blutstrom durch die Adern und Kapillaren des Gefäßsystems hindurchzubekommen. Nach diesen Forderungen müssen sich Konstruktion und Betriebsbedingungen des Herzens richten, also Schlagvolumen, Muskelkraft und Schlagfrequenz.

Präziser und anschaulicher als mit Worten lässt sich der **Herzzyklus** durch eine Raumkurve beschreiben, und zwar in einem dreidimensionalen Diagramm, das z. B. den Druck der Herzkammer nach oben, das Kammervolumen nach rechts und die Zeit nach hinten aufrägt. Dem geschulten Betrachter braucht ein solches Diagramm nicht einmal als räumliches Modell präsentiert zu werden, ihm genügt eine perspektivische Zeichnung nach Art der ■ Abb. 1.1. Man muss freilich schon sorgfältig und genau hinsehen, wenn man eine solche Darstellung richtig interpretieren will.

Die Abbildung ist einem Lehrbuch der Physiologie entnommen. Sein Verfasser setzt als selbstverständlich voraus, dass jeder, der zu diesem Buch greift, ein solches ja nicht mehr ganz einfaches Diagramm auch „lesen“ kann. Dazu gehören räumliches Vorstellungsvermögen und einige Kenntnisse der elementaren Geometrie. Vor al-



■ **Abb. 1.1. Druck-Volumen-Zeit-Diagramm eines Herzzyklus (linker Ventrikel eines Hundes).** Die blaue Kurve beginnt mit der Füllungszeit: Zunahme des Volumens bei geringem Druck. Es folgt die Anspannungszeit: rascher Druckanstieg bei konstantem Volumen (Herzklappen geschlossen). Sobald der diastolische Aortendruck überschritten wird, beginnt die Austreibungszeit: Volumenabnahme der Herzkammer bei weiter steigendem Druck. Die Austreibung endet, wenn der Maximaldruck erreicht ist und die Klappe zur Aorta schließt. Es folgt die Entspannungszeit: Druckabnahme bei konstantem Volumen. Das Diagramm enthält noch die nächste Füllungszeit. (Nach R. Jacob)

lem aber muss man wissen, was mit den Worten Druck, Volumen und Zeit gemeint ist.

Die drei Vokabeln werden hier genau im Sinne der Physik benutzt; sie bezeichnen **physikalische Größen**. Gemeinsames Kennzeichen aller physikalischen Größen ist ihre Messbarkeit; eine jede von ihnen ist, letztlich unabhängig von Worten und Sprache, durch ihr spezielles Messverfahren definiert. So unterschiedlich diese Verfahren im Einzelnen auch sein mögen, grundsätzlich geht es bei jeder Messung um das gleiche Prinzip: um einen quantitativen Vergleich zwischen der Messgröße und ihrer Maßeinheit. Welchen Bruchteil oder welches Vielfache der Einheit stellt die zu messende Größe dar? Daraus folgt: Jede physikalische Größe ist das Produkt aus einer Zahl und einer Einheit – das Wort **Produkt** hier genau im Sinn der Mathematik verstanden. Deshalb darf man auch mit den Symbolen der Mathematik schreiben:

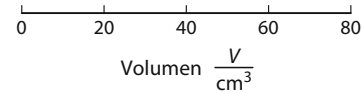
#### Merke

Physikalische Größe = Zahl · Einheit.

Rechenoperationen wie Malnehmen und Teilen sind ursprünglich nur für den Umgang mit Zahlen erfunden worden. Dass man sie auch auf Maßeinheiten anwenden kann und, einschließlich der Differentiation und der Integration, sogar auf die physikalischen Größen selbst, mag überraschen, doch es ist so.

Wollte man physikalische Größen mit ihrem vollen Namen in Formeln einsetzen, so würden die Formeln unhandlich. Deshalb verwendet man einzelne Buchstaben als Symbole, etwa  $p$  für den Druck,  $V$  für das Volumen und  $t$  für die Zeit. Leider gibt es aber weit mehr physikalische Größen als Buchstaben, selbst wenn man das griechische Alphabet dazunimmt. Eine in jeder Beziehung eindeutige Zuordnung ist darum nicht möglich. Internationale Empfehlungen helfen, sind aber nicht zwingend. Internationale Konvention empfiehlt auch, Buchstaben, die für Größen stehen, *kursiv* zu schreiben und Buchstaben, die für Einheiten stehen, gerade.

Wenn man eine physikalische Größe durch ihre Einheit teilt, bleibt eine reine Zahl übrig. Das erlaubt, die Achsen von Diagrammen zu **Zahlengeraden**



■ Abb. 1.2. Beschriftung der Volumenachse der ■ Abb. 1.1 nach internationaler Empfehlung; die Achse wird dadurch zur Zahlengeraden

den zu machen. Die Volumenachse der ■ Abb. 1.1 wäre dann so zu beschriften, wie die ■ Abb. 1.2 zeigt. So vorzugehen hat einige Vorteile und das vorliegende Buch verfährt so. In anderen Büchern findet man es aber auch anders.

Zahlen ohne Einheiten bezeichnet man als „**dimensionslos**“. Physikalische Größen sind deshalb durchweg „dimensioniert“; die Flughöhe des Düsenclippers hat ebenso die Dimension einer Länge wie der Durchmesser eines Haares.

Die mittlere Volumenstromstärke  $I$  des Blutes in der Aorta ist der Quotient aus dem durchgeflossenen Volumen  $\Delta V$  und der dazu benötigten Zeitspanne  $\Delta t$ ; als Formel:

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Hier stehen die Buchstaben für physikalische Größen. Darum bezeichnet man eine solche Formel als **Größengleichung**. Sie beschreibt einen physikalischen Zusammenhang und macht keine Vorschriften über die Einheiten, die bei einer konkreten Rechnung benutzt werden. Ob man die Zeit in Sekunden, Minuten oder Stunden misst, spielt für die Größengleichung keine Rolle. Zuweilen werden aber auch sog. **Zahlenwertgleichungen** aufgeschrieben. Bei ihnen stehen die Buchstaben nur für Zahlenwerte, weshalb eine Zahlenwertgleichung ohne Angabe der Einheiten, für die sie gilt, sinnlos ist.

### 1.1.2 Zeit

Alles, was geschieht, geschieht im Laufe der Zeit. Das gilt auch für den Herzzyklus. Deshalb sind in seinem Diagramm (■ Abb. 1.1) Druck und Volumen gegen die Zeit aufgetragen. Was ist das: Zeit?

Wenn Goethe vom „sausenden Webstuhl der Zeit“ spricht und Schiller von der „schönen Zeit der jungen Liebe“, dann meinen beide gewiss

nicht dasselbe und schon gar nicht die physikalische Größe **Zeit**. Es gibt eben mehr Begriffe in der Welt als Worte in der Sprache. Einigkeit darüber, was mit benutzten Worten gemeint sein soll, ist Voraussetzung einer Verständigung. Die Methode der Physik ist es, Größen in der Regel durch Messverfahren zu definieren.

### Merke

Zeit misst man mit **Uhren**, und Uhren zählen periodische Vorgänge ab.

Das können die Schwingungen eines Schwerependels sein, wie bei Urgroßvaters Standuhr, oder die eines Drehpendels, wie bei Großvaters Taschenuhr, oder die eines sorgfältig geschliffenen Kristalls aus Quarz, wie bei der modernen Armbanduhr, oder auch die bestimmter Moleküle, wie bei der sog. „Atomuhr“. Die „biologische Uhr“ hingegen ist keine Uhr im physikalischen Sinne. Das Leben auf der Erde hat sich lediglich und notwendigerweise auf den Tagesrhythmus eingestellt, wie er von der Rotation der Erde seit Jahrmillionen praktisch unverändert vorgegeben wird.

Das Bedürfnis, Zeiten zu messen, ist weit älter als das Dezimalsystem; darum hat es sich nur noch bei den kurzen Zeiteinheiten unter der Sekunde durchsetzen können:

- Jahr  $a \approx 365,24$  Tage
- Tag  $d = 24$  Stunden
- Stunde  $h = 60$  Minuten
- Minute  $\text{min} = 60$  Sekunden
- Sekunde  $s = \text{SI-Einheit der Zeit}$

Derzeit dauert ein Jahr 31.556.926,6 s. Definiert wird die Sekunde über die Schwingungsdauer des Lichtes einer bestimmten Spektrallinie.

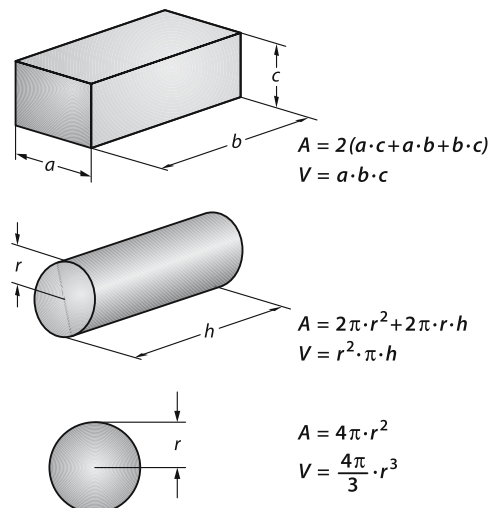
Uhren gibt es genug auf der Welt. Bahnhof- und Armbanduhren zeigen einen **Zeitpunkt** an, die Tageszeit nämlich. Für physikalische Zusammenhänge hat sie wenig Bedeutung – Naturgesetze gelten auch um Mitternacht. Wichtiger sind darum **Zeitspannen**, also die Differenzen von Zeitpunkten. Man misst sie z. B. mit Stoppuhren. Der Zeitnehmer beim 100-Meter-Lauf setzt die seine beim Startschuss in Gang und hält sie wieder an, wenn der Sprinter die Ziellinie erreicht. Die-

ser Satz ist nicht ganz korrekt, denn die Nervenleitung des Zeitnehmers braucht selbst ein wenig Zeit, um das optische Signal vom Pulverdampf der Startpistole, auf der Netzhaut entstanden, in eine Kontraktion des Daumenmuskels umzusetzen. Dieser sog. **persönliche Fehler** beträgt, individuell unterschiedlich, einige Zehntelsekunden; durch Alkohol im Blut lässt er sich beträchtlich verlängern. Träte er am Ziel in exakt der gleichen Größe wieder auf, so würde die Laufzeit des Sprinters schon richtig gemessen, wenn auch insgesamt ein wenig zu spät. Darauf ist aber kein Verlass. Wenn es um Rekorde geht, wird darum heutzutage automatisch, d. h. elektronisch gemessen, auf die Hundertstelsekunde genau. Diese Präzision erreicht kein Mensch.

### 1.1.3 Länge, Fläche, Volumen

Die Volumina und Oberflächen von Körpern und Hohlräumen werden von ihren linearen Abmessungen bestimmt. Für geometrisch einfache Körper hält die Mathematik entsprechend einfache Formeln bereit, wie ■ Abb. 1.3 zeigt.

Wo immer Kreise und Kugeln auftauchen, erscheint die Zahl  $\pi$ , das Verhältnis von Kreisum-



■ **Abb. 1.3. Geometrisch einfache Körper.** Oberfläche  $A$  und Volumen  $V$  von: Quader mit den Kantenlängen  $a$ ,  $b$  und  $c$ ; Kreiszylinder mit dem Radius  $r$  und der Höhe  $h$ ; Kugel mit dem Radius  $r$

fang und Kreisdurchmesser. Computer haben  $\pi$  auf tausend Stellen hinter dem Komma ausgerechnet; physikalisch gibt das keinen Sinn, weil sich eine entsprechende Messgenauigkeit ja doch nicht erreichen lässt. Auswendigzulernen braucht man nur  $\pi \approx 3,14$ ; für Abschätzungen genügt es oft,  $\pi \approx 3$  zu setzen.

In jeder Formel zur Berechnung eines Volumens erscheint das Produkt dreier Längen, sei es nun als  $a \cdot b \cdot c$ , als  $r^2 \cdot h$  oder als  $r^3$  – allenfalls ist noch ein Zahlenfaktor dabei. Demnach steht die physikalische Größe **Volumen** in engem Zusammenhang mit der physikalischen Größe **Länge**; das Volumen hat die **Dimension** Länge hoch drei. Für die physikalische Größe **Fläche** ergibt sich ganz analog die Dimension Länge hoch zwei. Daraus folgen wiederum feste Beziehungen zwischen den Einheiten. Bei der Länge hat man sich international auf die Einheit **Meter** geeinigt, abgekürzt m. Folglich ist die Einheit der Fläche Meterquadrat, das man lieber Quadratmeter nennt und  $\text{m}^2$  abkürzt, und die des Volumens „Meter hoch drei“, also  $\text{m}^3$ , durchweg Kubikmeter genannt.

Die Festlegung von Einheiten ist reine Willkür; das beweisen all die vielen Meilen, Ellen und Füße, die Kaufleuten noch im vorigen Jahrhundert große und unnötige Mühe beim Umrechnen gemacht haben. Internationale Einigung bedeutet hier schon für sich allein einen Fortschritt – welche Einheit es dann trifft, ist im Grunde nicht mehr so wichtig.

Das Verfahren der Längenmessung ist bekannt; jedermann weiß, wie man mit einem Zollstock umgeht: Man trägt ihn wiederholt längs der zu messenden Strecke ab und zählt, wie oft das geht. Im Allgemeinen wird freilich ein Bruchteil vom Meter übrig bleiben; um auch ihn zu messen, ist der Zollstock unterteilt, in 100 größere Abschnitte, die **Zentimeter** (cm), und 1000 kleinere, die **Millimeter** (mm).

#### Merke

Messen heißt, die Messgröße mit ihrer Einheit vergleichen.

Wenn ein Mensch 1 m, 76 cm und 5 mm groß ist, dann darf man für seine Länge  $h$  schreiben:

- $h = 1,765 \text{ m}$
- $h = 176,5 \text{ cm}$
- $h = 1765 \text{ mm}$
- $h = 1,765 \cdot 10^3 \text{ mm}$

Alle vier Schreibweisen besagen dasselbe.

Wollte man die Wellenlänge  $\lambda$  derjenigen Spektrallinie des Edelgases Krypton, die früher zur Definition des Meters diente, auch in Metern angeben, so hätte man zu schreiben:

$$\lambda = 0,0000006056 \text{ m.}$$

Die vielen Nullen sind weder handlich noch übersichtlich. Darum weicht man gern in die Schreibweise mit Zehnerpotenzen aus:  $\lambda = 6,056 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ . Üblich ist aber auch, Einheiten um ganze Dezimalfaktoren zu reduzieren oder zu erweitern und dies durch vereinbarte Vorsilben und deren Abkürzungen anzuzeigen. Zentimeter und Millimeter wurden schon genannt, Kilometer sind geläufig. Für die Wellenlängen sichtbaren Lichtes ist das **Nanometer** (nm) angemessen; es entspricht  $10^{-9} \text{ m}$ :

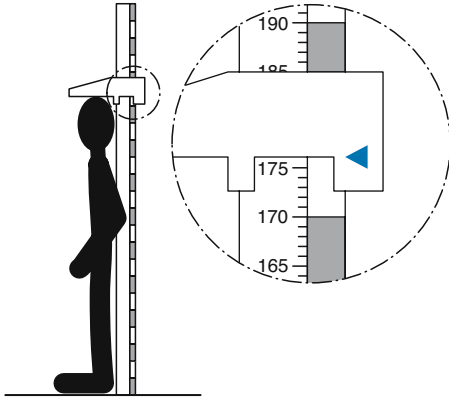
$$\lambda = 605,6 \text{ nm.}$$

Die international festgelegten Bezeichnungen enthält die ■ Tabelle 1.1.

■ **Tabelle 1.1** Erweiterung von Einheiten

Vorsilbe	Kennbuchstabe	Zehnerpotenz
Pico	p	$10^{-12}$
Nano	n	$10^{-9}$
Mikro	$\mu$	$10^{-6}$
Milli	m	$10^{-3}$
Zenti	c	$10^{-2}$
Dezi	d	$10^{-1}$
Hekto	h	$10^2$
Kilo	k	$10^3$
Mega	M	$10^6$
Giga	G	$10^9$
Tera	T	$10^{12}$



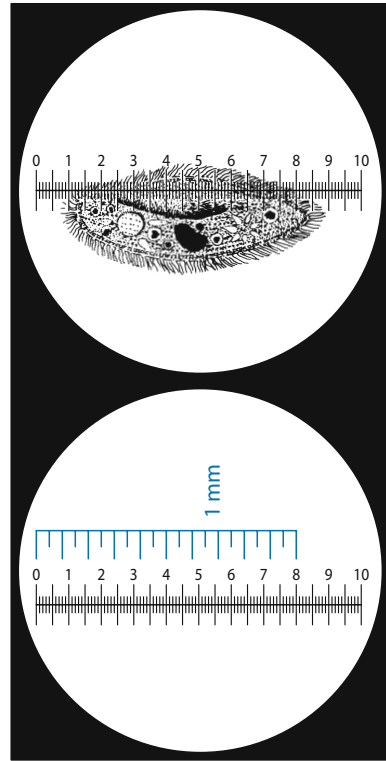


■ Abb. 1.4. Messung der Körpergröße eines Menschen

Hier erweist sich wieder einmal die Kürze des Alphabets als lästig: Der Buchstabe „m“ muss in Formeln die physikalische Größe Masse vertreten, als Einheit das Meter und als Präfix den Faktor  $10^{-3}$ , „milli“ genannt.

„Eine Länge misst man durch Abtragen eines Maßstabes.“ Wie aber misst man den Durchmesser eines Fußballes? An die Länge, die gemessen werden soll, kommt man ja mit dem Zollstock nicht heran. Deshalb klemmt man den Fußball zwischen zwei parallele Latten und misst deren Abstand. Nach dem gleichen Schema geht der Arzt vor, wenn er die Körpergröße eines Patienten bestimmt (■ Abb. 1.4); hier sorgt eine Mechanik für die Parallelführung des Messfühlers.

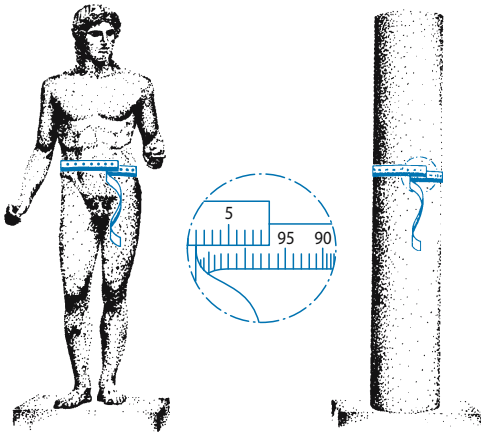
Ein Pantoffeltierchen kann man nicht zwischen die Backen einer Schublehre klemmen; seine Länge wird unter dem Mikroskop bestimmt. Dessen Okular besitzt hierfür ein **Okularmikrometer**, eine Skala, die der Beobachter zugleich mit dem Objekt scharf sieht (■ Abb. 1.5, oberes Teilbild – wie das möglich ist– wird im ► Kap. 7.2.11 besprochen). Damit kennt man die Länge des Pantoffeltierchens zunächst einmal in Skalenteilen des Okularmikrometers (hier ca. 8 Skalenteile). Welche Länge das Pantoffeltierchen nun hat, lässt sich bestimmen, wenn man das Pantoffeltierchen gegen ein **Objektmikrometer** vertauscht, einen kleinen Maßstab, der in unserem Bild blau gezeichnet ist und 20 Teilstriche auf einem Millimeter enthält. Nun sieht man, dass 8 Skalenteile gerade einem Millimeter entsprechen.



■ Abb. 1.5. Objektmikrometer. Pantoffeltierchen unter einem Mikroskop mit Skala im Okular

Kennt man von einem Gegenstand alle linearen Abmessungen, so kennt man auch seine Oberfläche, sagt die Mathematik, und im Prinzip hat sie Recht. Handliche Formeln bietet sie freilich wieder nur für wenige, geometrisch einfache Fälle an, wie sie die ■ Abb. 1.3 wiedergibt.

Eine unregelmäßig begrenzte, aber ebene Fläche bestimmt man am einfachsten dadurch, dass man sie vergrößert, verkleinert oder auch naturgetreu auf Millimeterpapier überträgt und dann ganz stumpfsinnig die Quadratmillimeter auszählt. Nahezu hoffnungslos wird es aber bei unregelmäßig gewölbten Flächen. Man bestimmt sie nicht mehr, man schätzt sie ab. Lungenbläschen z. B. sind nahezu Kugeln mit leidlich einheitlichem Radius (ca. 0,14 mm beim Menschen, abhängig natürlich davon, ob er gerade ein- oder ausgeatmet hat). Kennt man ihre Anzahl  $n$  (beim Menschen ca.  $3 \cdot 10^8$ ) und unterschlägt man all die Röhrchen, die sie miteinander verbinden, so darf



■ **Abb. 1.6. Ersatzzylinder.** Er dient zur Abschätzung der Körperoberfläche eines Menschen. Es ist nicht wesentlich, ob man den Umfang zu 97 cm oder zu 95 cm ansetzt

man für die gesamte Lungenoberfläche  $A_L$  näherungsweise setzen:

$$A_L \approx 4 \pi r^2 \cdot n.$$

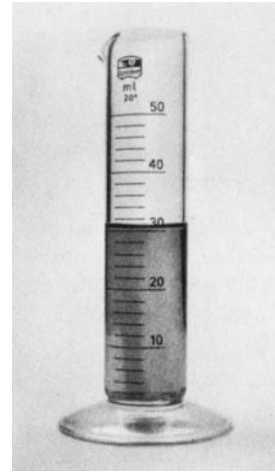
Beim Menschen gibt das rund  $70 \text{ m}^2$ ; mit hinreichend feiner Unterteilung lässt sich auf wenig Raum viel Fläche unterbringen.

Riskanter ist schon die folgende Abschätzung: Ein erwachsener Mensch ist etwa  $1,75 \text{ m}$  groß ( $h_M$ ) und hat einen Brust- und Hüftumfang  $U_M$  von ungefähr  $95 \text{ cm}$ . Die Oberfläche seines Körpers wird dann wohl nicht wesentlich von der eines entsprechenden Kreiszylinders abweichen (■ Abb. 1.6). Dessen Oberfläche lässt sich nach den Regeln der Mathematik ausrechnen.

#### Merke

Zum Umgang mit quantitativen Größen gehört zuweilen auch der Mut zur groben Schätzung, nicht immer muss präzise gemessen werden.

Das Volumen eines unregelmäßig geformten Körpers lässt sich meist einfacher und genauer bestimmen als seine Oberfläche. Taucht man ihn nämlich in Wasser oder eine andere Flüssigkeit, in der er sich nicht löst, so verdrängt er dort genau sein eigenes Volumen. Eine vorgegebene Wassermenge behält aber ihr Volumen bei, unabhängig



■ **Abb. 1.7. Messzylinder.** Gefüllt mit  $31 \text{ ml}$  Flüssigkeit, die Messgenauigkeit ist bescheiden

von der Form des Gefäßes, in das man sie gießt – unter normalen Umständen jedenfalls. Ist das Gefäß ein Hohlzylinder, so ist das Wasservolumen der Höhe des Wasserspiegels proportional, mit der Grundfläche des Zylinders als Proportionalitätskonstante. Folglich kann man eine Skala längs seines Mantels statt in  $\text{cm}$  gleich in  $\text{cm}^3$  teilen und so einen **Messzylinder** herstellen (■ Abb. 1.7). Füllt man in ihn eine bestimmte Menge Wasser (Volumen  $V_0$ ) und taucht man den Probekörper (Volumen  $V_K$ ) hinein, so steigt der Wasserspiegel auf die Marke  $V_1$ . Dann gilt

$$V_K = V_1 - V_0$$

– auch trivialen Zusammenhängen kann man mit einer Formel einen Hauch von Wissenschaftlichkeit geben. Zuweilen macht das Ablesen eines Messzylinders etwas Schwierigkeiten: Die Oberflächenspannung (► Kap. 3.4.1) kann das Wasser an der Wand ein wenig hochziehen. Man muss dann mit dem Auge mitteln. Nach dem gleichen Prinzip wie die Messzylinder arbeiten **Pipetten** und **Büretten**, die recht genau abgemessene Flüssigkeitsmengen abgeben können. Oft findet man auf solchen Geräten die Einheit Milliliter ( $\text{ml}$ ) statt des  $\text{cm}^3$ . Der Kubikmeter  $\text{m}^3$  ist im Labor eine zu große Einheit: Er enthält  $1000$  Liter und  $10^6 \text{ cm}^3$ .

### 1.1.4 SI-Einheiten

■ ■ ■ Die Festlegung von Einheiten ist reine Willkür. Es empfiehlt sich aber, System in diese Willkür zu bringen. Vor nicht langer Zeit waren Meter und Sekunde unabhängig voneinander definiert; das machte sie zu **Grundeinheiten** des internationalen Maßsystems und die zugehörigen Größen Länge und Zeit zu **Grundgrößen**. Der Präzisionsmesstechnik zuliebe hat man inzwischen das Meter über die Lichtgeschwindigkeit an die Sekunde angehängt; es ist der 299.792.458te Teil der Strecke, die das Licht im Vakuum in einer Sekunde zurücklegt. Trotzdem behandelt man das Meter aus alter Gewohnheit als Grundeinheit. Im Maßsystem kann man sich leichte Inkonsistenzen leisten. Es geht um Zweckmäßigkeit, nicht um Physik. Am zweckmäßigsten ist aber dasjenige System, das von den meisten Staaten akzeptiert wird. Es heißt **Système International d'Unités**, abgekürzt SI; seine Einheiten sind die SI-Einheiten. Es besitzt die sieben Grundgrößen Länge, Zeit, Masse, elektrische Stromstärke, Temperatur, Stoffmenge und Lichtstärke.

#### Merke

Die Grundgrößen und -einheiten des „Système International d'Unités“:

- die **Länge** mit der Einheit **Meter** (m)
- die **Zeit** mit der Einheit **Sekunde** (s)
- die **Masse** mit der Einheit **Kilogramm** (kg)
- die **elektrische Stromstärke** mit der Einheit **Ampère** (A)
- die **Temperatur** mit der Einheit **Kelvin** (K)
- die **Stoffmenge** mit der Einheit **Mol** (mol)
- die **Lichtstärke** mit der Einheit **Candela** (cd)

Alle anderen physikalischen Größen sind vom Gesetzgeber zu **abgeleiteten Größen** erklärt worden. Einer abgeleiteten Größe wird entsprechend ihrer Definition eine abgeleitete SI-Einheit zugeordnet, z. B.

Abgeleitete Größe	Definition	SI-Einheit
Fläche	Länge <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>
Volumen	Länge <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>
Volumenstromstärke	Volumen/Zeit	m <sup>3</sup> /s
Dichte	Masse/Volumen	kg/m <sup>3</sup>

Einige häufiger gebrauchte SI-Einheiten bekommen eigene Namen, wie beispielsweise die Kraft-einheit **Newton** = N = kg · m/s<sup>2</sup> oder die Druck-einheit **Pascal** = Pa = kg/(m · s<sup>2</sup>). Auch durch Vor-silbe erweiterte SI-Einheiten wie Mikrogramm (µg) und Kilometer (km) gehören zu den SI-Einheiten.

Die internationale Einigung auf das SI schließt die Empfehlung ein, tunlichst nur noch SI-Einheiten zu verwenden. Trotzdem wird man auch weiterhin 86.400 Sekunden einen Tag nennen und in 24 Stunden unterteilen. Der Wetterbericht hat seine Angaben zum Luftdruck längst vom alten ehrwürdigen Torr und mmHg auf Hektopascal umgestellt; die Medizin bleibt da konservativer. Einen Druck kümmert das nicht. Er ist wie jede physikalische Größe unabhängig von der Einheit, in der er gemessen wird. Ob 110 mmHg oder 146 hPa, der Blutdruck ist der gleiche.

#### Merke

Der Wert einer physikalischen Größe ist unabhängig von der Wahl der Einheit.

## 1.2 Mengenangaben

### 1.2.1 Masse und Stoffmenge

Kein Backrezept kann auf Mengenangaben verzichten: ¼ Ltr. Milch, 250 g Weizenmehl, 3 Eier. „Ltr.“ steht hier für Liter. Bei Flüssigkeiten lässt sich das Volumen am leichtesten messen. Größere Objekte wie die Eier kann man einfach abzählen. Beim Mehl bevorzugt man aber das Gewicht, gemessen mit einer Waage. Jeder Kaufmann, jedes Postamt benutzt Waagen. Wie sie funktionieren, wird in ► Kap. 2.2.7 beschrieben werden. Dabei wird sich herausstellen, dass die Umgangssprache mit dem Wort „Gewicht“ die physikalische Größe **Masse** meint. Deren Eigenschaften werden in ► Kap. 2.3.1 genauer behandelt. Jedenfalls ist die Masse eine Grundgröße im SI und bekommt die Einheit **Kilogramm** (kg). Für den Hausgebrauch wird das Kilogramm hinreichend genau repräsentiert durch die Masse von 1000 ml Wasser.

**Merke**

Die Umgangssprache meint mit „Gewicht“ die physikalische Größe Masse.

Im Gegensatz zum Wasser bringt es ein Kilobarren Gold nur auf etwa  $50 \text{ cm}^3$ . Sind die beiden Substanzmengen nun gleich, weil ihre Massen gleich sind, oder sind sie verschieden, weil ihre Volumina verschieden sind? Die Frage lässt sich nicht beantworten, weil der Gebrauch der Vokabel „Substanzmenge“ nicht eindeutig definiert ist. Die beiden „Stoffmengen“ sind jedenfalls verschieden.

Alle Materie besteht aus Atomen, die sich, von wenigen Ausnahmen abgesehen, zu Molekülen zusammensetzen. Ein natürliches Maß für die Menge einer Substanz wäre die Anzahl  $N$  ihrer Moleküle. Freilich, Moleküle sind klein und entsprechend zahlreich; zu handlichen Mengen gehören unhandlich große Anzahlen, weit über  $10^{20}$ . Um sie zu vermeiden, hat man in das System International d'Unités eine spezielle, zu  $N$  proportionale Grundgröße eingefügt: die **Stoffmenge**  $n$  mit der Einheit **Mol** („abgekürzt“ mol). Die Proportionalitätskonstante heißt

**Avogadro-Konstante**  $N_A = 6,0220 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

**Merke**

Die Stoffmenge  $n$  ist ein Maß für die Anzahl der Teilchen in einer Probe. Ihre Einheit Mol entspricht  $6,0220 \cdot 10^{23}$  Teilchen.

Damit ist das Problem aber zunächst nur verschoben, denn niemand kann die Moleküle auch nur eines Sandkorns abzählen und durch  $N_A$  dividieren, um die Stoffmenge zu bestimmen. Man legt weiterhin seine Substanzproben auf die Waage, misst also ihre Masse  $m$ , und rechnet um mit der sog.

$$\text{molare Masse} \quad M = \frac{\text{Masse } m}{\text{Stoffmenge } n}$$

der beteiligten Moleküle ( $M$  wird auch **Molmasse** genannt – die Einheit ist  $\text{g/mol}$ ). Dafür darf die Probe allerdings aus nur einer einzigen Molekülsorte bestehen, deren Molmasse man kennt. Woher? In Natur und Technik gibt es viel zu viele Mo-

lekülarten, als dass man alle ihre Molmassen in einem dicken Tabellenbuch zusammenfassen könnte. Das ist aber auch nicht nötig, denn Moleküle setzen sich aus Atomen zusammen, von denen es nicht allzu viele verschiedene Arten gibt – die der rund hundert chemischen Elemente nämlich. Deren molare Massen lassen sich auflisten. Dann braucht man nur noch die chemische Formel eines Moleküls zu kennen, um seine molare Masse auszurechnen:

- Wasserstoffatom:  $M(\text{H}) = 1 \text{ g/mol}$
- Sauerstoffatom:  $M(\text{O}) = 16 \text{ g/mol}$
- Wassermolekül:  $M(\text{H}_2\text{O}) = 18 \text{ g/mol}$

**Merke**

Die molare Masse  $M = m/n$  mit der Einheit  $\text{g/mol}$  einer Molekülsorte ist die Summe der molaren Massen der das Molekül bildenden Atome.

## 1.2.2 Dichten und Gehalte

Volumen, Masse und Stoffmenge sind Kenngrößen einzelner Substanzproben, eines silbernen Löffels etwa, eines Stücks Würfelzucker, einer Aspirin-Tablette; sie sind keine Kenngrößen von Substanzen wie Silber, Saccharose oder Acetylsalicylsäure. Zu solchen Kenngrößen gelangt man, wenn man die Masse oder Stoffmenge auf das Volumen bezieht. Man spricht dann von einer **Dichte**. Den Kehrwert einer Dichte nennt man **spezifisches Volumen**, auch wenn die Einheit natürlich Volumen durch Masse oder Mol ist. Die gängigsten Größen sind in der ■ Tabelle 1.2 aufgelistet.

Für die Verkehrstüchtigkeit eines Autofahrers spielt es eine erhebliche Rolle, ob er gerade eine halbe Flasche Bier oder eine halbe Flasche Schnaps getrunken hat. Jeder Doppelkorn enthält mehr Alkohol als das stärkste Bockbier. Was ist damit gemeint? Spirituosen sind Mischungen, im Wesentlichen aus Alkohol und Wasser; die wichtigen Geschmacksstoffe, die z. B. Kirschwasser von Himbeergeist unterscheiden, spielen mengenmäßig kaum eine Rolle. Zur Kennzeichnung eines Gemisches dient der

Tabelle 1.2 Dichten und spezifische Volumen

Name	Formelzeichen	Einheit
Dichte = $\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$	$\rho = \frac{m}{V}$	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Molarität = $\frac{\text{Stoffmenge}}{\text{Volumen}}$	$\rho_n = \frac{n}{V}$	$\frac{\text{mol}}{\text{m}^3}$
Teilchenanzahldichte = $\frac{\text{Teilchenanzahl}}{\text{Volumen}}$	$\rho_N = \frac{N}{V}$	$\frac{1}{\text{m}^3}$
spezifisches Volumen <sub>s</sub> = $\frac{\text{Volumen}}{\text{Masse}} = \frac{1}{\text{Dichte}}$	$V_s = \frac{V}{m}$	$\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$
Molvolumen = $\frac{\text{Volumen}}{\text{Stoffmenge}}$	$V_n = \frac{V}{n}$	$\frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$
Molalität = $\frac{\text{Stoffmenge}}{\text{Masse}}$	$c_m = \frac{n}{m}$	$\frac{\text{mol}}{\text{kg}}$

$$\text{Gehalt} = \frac{\text{Teilmenge}}{\text{Gesamtmenge}}$$

Klar vom Gehalt zu unterscheiden ist die **Konzentration**, die üblicherweise dieselbe Einheit wie die Dichte hat. Als Quotient zweier Mengen ist der Gehalt eine reine Zahl und lässt sich darum auch in Prozent angeben. Beim Blutalkohol bevorzugt man das um einen Faktor 10 kleinere Promille, bei Spuren von Beimengungen das ppm; die drei Buchstaben stehen für „parts per million“, also  $10^{-6}$ . Hochentwickelte Spurenanalyse dringt bereits in den Bereich ppb ein, „parts per billion“, gemeint ist  $10^{-9}$ , denn im Angelsächsischen entspricht „billion“ der deutschen Milliarde ( $=10^9$ ) und nicht der Billion ( $=10^{12}$ ). Die Summe aller Gehalte einer Mischung muss notwendigerweise 1 ergeben.

Auf welche Mengenangabe sich ein Gehalt bezieht, ist zunächst noch offen; man muss es dazu sagen. Der

$$\text{Massengehalt} = \frac{\text{Masse des gelösten Stoffes}}{\text{Masse der Lösung}}$$

wird zuweilen als „Gew.%“ bezeichnet, als „Gewichtsprozent“, und der

$$\text{Volumengehalt} = \frac{\text{Volumen des gelösten Stoffes}}{\text{Volumen der Lösung}}$$

als „Vol.%“, als „Volumenprozent“ also. Wenn man es ganz genau nimmt, muss man ein wenig auf-

### Rechenbeispiel 1.1: Schnaps

► **Aufgabe.** Wie groß ist die Stoffmengendichte des Alkohols in einem Schnaps mit 40 Vol.%? Die Dichte des Äthylalkohols ( $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ ) ist 0,79 g/ml.

► **Lösung.** Die Stoffmengendichte des reinen Alkohols kann zum Beispiel als Anzahl der Alkoholmoleküle in Mol pro Liter Alkohol angegeben werden. Dazu muss die Massendichte durch die Molmasse  $M$  des Äthylalkohols geteilt werden. Laut Anhang ergibt sich die Molmasse zu:

$$\begin{aligned} M(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}) &= 2 \cdot M(\text{C}) + 6 \cdot M(\text{H}) + M(\text{O}) \\ &\approx 24 \text{ g/mol} + 6 \text{ g/mol} + 16 \text{ g/mol} = 46 \text{ g/mol} \end{aligned}$$

Die Stoffmengendichte des reinen Alkohols ist dann

$$\frac{n}{V} = \frac{790 \frac{\text{g}}{\text{l}}}{46 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 17,18 \frac{\text{mol}}{\text{l}}.$$

Im Schnaps ist aber nur 40% des Volumens Alkohol, also ist hier die Stoffmengendichte um den Faktor 0,4 kleiner:

$$\frac{n}{V} = 0,4 \cdot \frac{790 \frac{\text{g}}{\text{l}}}{46 \frac{\text{g}}{\text{mol}}} = 6,87 \frac{\text{mol}}{\text{l}}.$$

passen: Die Teilmassen einer Mischung addieren sich präzise zur Gesamtmasse; die Volumina tun dies nicht unbedingt. Allerdings ist die Volumenkontraktion oder -dilatation beim Mischen meist gering. Der

#### Stoffmengengehalt

$$= \frac{\text{Stoffmenge des gelösten Stoffes}}{\text{Stoffmenge der Lösung}}$$

ist dem Teilchenanzahlgehalt gleich, denn die Avogadro-Konstante steht im Zähler wie im Nenner, kürzt sich also weg. Einen Stoffmengengehalt bezeichnet man auch als **Molenbruch** oder als „At.%“ (**Atomprozent**). ppm und ppb werden üblicherweise nur bei Stoffmengengehalten verwendet (und nach neuester Empfehlung am besten gar nicht).

### 1.3 Statistik und Messunsicherheit

#### 1.3.1 Messfehler

Kein Messergebnis kann absolute Genauigkeit für sich in Anspruch nehmen. Oftmals ist schon die Messgröße selbst gar nicht präzise definiert. Wenn ein Straßenschild in Nikolausberg behauptet, bis Göttingen seien es 4 km, dann genügt das für die Zwecke des Straßenverkehrs vollauf. Gemeint ist so etwas wie „Fahrstrecke von Ortsmitte bis Stadtzentrum“. Wollte man die Entfernung auf 1 mm genau angeben, müsste man zunächst die beiden Ortsangaben präzisieren, z. B. „Luftlinie von der Spitze der Wetterfahne auf der Klosterkirche von Nikolausberg bis zur Nasenspitze des Gänseliesels auf dem Brunnen vor dem alten Rathaus in Göttingen“. Der messtechnische Aufwand stiege beträchtlich und niemand hätte etwas davon. Bei allen Messungen muss man Aufwand und Nutzen gegeneinander abwägen.

##### Merke

Messfehler: Differenz zwischen Messwert und grundsätzlich unbekanntem wahren Wert der Messgröße.

Messfehler lassen sich in zwei große Gruppen einteilen: die **systematischen** und die **zufälligen Fehler**. Wenn man sein Lineal auf ein Blatt Millimeterpapier legt, sieht man zumeist eine deutliche Diskrepanz zwischen den beiden Skalen; Papier ist kein gutes Material für Längenmaßstäbe. Wer sich trotzdem auf sein Blatt Millimeterpapier verlässt, macht einen systematischen Fehler, weil die Skala nicht genau stimmt. Grundsätzlich gilt das für jede Längenmessung, für jede Messung überhaupt. Auch Präzisionsmessinstrumente können **Eichfehler** ihrer Skalen nicht vollständig vermeiden. Um sie in Grenzen zu halten, müssen z. B. Händler ihre Waagen von Zeit zu Zeit nacheichen lassen. Aber auch in Messverfahren können systematische Fehler implizit eingebaut sein. Hohe Temperaturen wird man oft etwas zu niedrig messen, da der Messfühler seine Temperatur erst angleichen muss und der Benutzer vielleicht nicht die Geduld aufbringt, lange genug zu warten.

##### Merke

Systematischer Fehler: prinzipieller Fehler des Messverfahrens oder Messinstruments, z. B. Eichfehler – reproduzierbar.

Systematische Fehler sind schwer zu erkennen; man muss sich sein Messverfahren sehr genau und kritisch ansehen.

Der zufällige Fehler meldet sich selbst, wenn man eine Messung wiederholt: Die Ergebnisse weichen voneinander ab. Letzten Endes rührt diese **Streuung** von Störeffekten her, die man nicht beherrscht und zum großen Teil nicht einmal kennt.

##### Merke

Zufällige Fehler verraten sich durch Streuung der Messwerte.

#### 1.3.2 Mittelwert und Streumaß

Wie groß ist eine Erbse? Diese Frage zielt auf die „Erbse an sich“, nicht auf ein ganz bestimmtes Einzelexemplar. Dabei spielt die Sorte eine Rolle, der Boden, die Düngung, das Wetter. Aber auch in-



nerhalb einer Ernte von einem ganz bestimmten Feld streuen die Durchmesser verschiedener Erbsen deutlich. Deshalb kann nur nach einer mittleren Größe gefragt werden.

Nach alter Regel bestimmt man den **Mittelwert**  $\langle x \rangle$  einer Reihe von Messwerten  $x_j$  dadurch, dass man sie alle zusammenzählt und das Resultat durch ihre Anzahl  $n$  dividiert:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

Der Index  $j$  läuft von 1 bis  $n$ , er kennzeichnet den einzelnen Messwert. Nun wird niemand alle zigtausend Erbsen einer Ernte einzeln ausmessen, um den wahren Mittelwert  $\langle d_w \rangle$  des Durchmessers zu bestimmen. Man begnügt sich mit einer **Stichprobe**. Zum Beispiel wurden bei  $n = 12$  willkürlich aus einer Tüte herausgegriffenen Erbsen die Quotienten  $x_j = d_j/\text{mm}$  gemessen und in der folgenden **Wertetabelle** zusammengestellt:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$x_{10}$	$x_{11}$	$x_{12}$
7,5	7,9	7,6	8,2	7,4	8,0	8,0	7,9	7,6	7,7	7,2	7,5

Daraus errechnet sich der Mittelwert der Stichprobe zu  $\langle x \rangle = 92,5/12 = 7,71$ .

#### Merke

Mittelwert = Quotient aus Summe und Anzahl der Messwerte:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j;$$

bester Schätzwert des unbekannten wahren Wertes.

Wie zuverlässig ist ein Mittelwert? Genau lässt sich das nicht sagen, aber die Wahrscheinlichkeitsrechnung hilft weiter. So viel leuchtet ein: Der Mittelwert der Stichprobe wird umso zuverlässiger sein, je größer man den Umfang  $n$  der Stichprobe macht, und je weniger die einzelnen Messwerte streuen.  $n$  hat man selbst in der Hand, seine Größe ist eine Frage des Aufwandes, den man treiben will. Benötigt wird aber noch eine Größe, die sagt, wie stark die Messwerte streuen, ein so genanntes **Streumaß**. Die Differenzen  $x_j - \langle x \rangle$  zwischen den einzelnen Messwerten und dem Mittelwert können dieses Maß nicht unmittelbar liefern,

weil sie positive wie negative Vorzeichen haben und sich zu Null aufaddieren; so ist letzten Endes der Mittelwert definiert. Die Quadrate  $(x_j - \langle x \rangle)^2$  sind aber wie alle Quadratzahlen grundsätzlich positiv. Wenn man sie addiert und durch  $n-1$  teilt, bekommt man die sog.

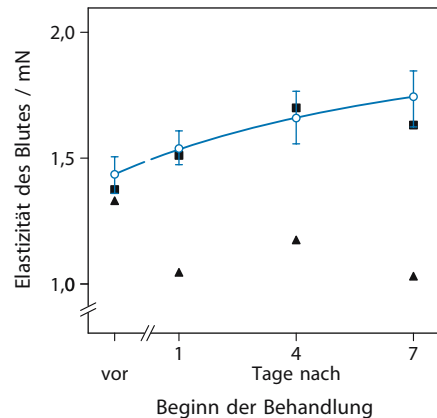
$$\text{Varianz} \quad s^2 = \frac{\sum (x_j - \langle x \rangle)^2}{n-1},$$

der Einfachheit halber sind hier die Grenzen der Summe nicht mitgeschrieben worden. Dass durch  $n-1$  und nicht durch  $n$  dividiert wird, liegt daran, dass man mindestens zwei Messwerte braucht, um einen Mittelwert ausrechnen zu können. Ein eigenes Buchstabensymbol bekommt die Varianz nicht; sie ist das Quadrat der

**Standardabweichung**  $s = \sqrt{\text{Varianz}}$ .

Manche Taschenrechner erlauben,  $s$  mit einem einzigen Tastendruck auszurechnen.

$s^2$  und  $s$  lassen sich grundsätzlich für jede Messreihe angeben. In Diagrammen wie der **Abb. 1.8** wird man zunächst die Mittelwerte



**Abb. 1.8. Diagramm mit Streubalken.** Trombelastogramm während einer Behandlung mit Heparin als Beispiel für ein Diagramm mit Streubalken (in diesem Zusammenhang spielen das Messverfahren und die medizinische Bedeutung der Messwerte keine Rolle). **Blaue Kreise und Fehlerbalken:** Mittelwerte aus einer Beobachtungsgruppe von 28 Patienten mit Standardabweichung; die Quadrate und Dreiecke gehören zu zwei Mitgliedern der Beobachtungsgruppe: Einzelne Messwerte können durchaus weit außerhalb des Standardabweichung liegen. Die Dreiecke demonstrieren ein häufiges Dilemma medizinischer Messungen: manche Patienten halten sich nicht an die Norm

auftragen (blaue Kreise). Weiterhin kann man zu jedem Messpunkt einen **Streubalken** zeichnen, der die Standardabweichung angibt.

Bei Untersuchungen wie der in ■ Abb. 1.8 erwartet man, dass sich die Messwerte entsprechend der sog. **Normalverteilung** (auch **Gauß-Verteilung** genannt) um ihren Mittelwert scharen. Dann können die Ergebnisse vielleicht noch mit anderen Untersuchungen korreliert werden, um weitere Aussagen zu gewinnen. Dies führt in das weite Feld der **Biometrie**, für die es eigene dicke Lehrbücher gibt.

### 1.3.3 Messunsicherheit

Wurde zum Beispiel im Physikpraktikum für Mediziner ein bestimmter Messwert  $x$  gemessen, so ist die Frage zu stellen: Wie zuverlässig ist der nun? Beantwortet wird diese Frage mit der Angabe einer **Messunsicherheit**  $u(x)$ . Damit sagt man Folgendes: Der unbekannte wahre Wert der Größe liegt mit hoher Wahrscheinlichkeit zwischen  $x - u(x)$  und  $x + u(x)$ . Deshalb schreibt man z. B. für eine Längenmessung hin: Der Abstand  $d$  beträgt

$$d = (10,4 \pm 0,2) \text{ cm.}$$

12,4 cm ist der Messwert und 0,2 cm ist die **absolute** Messunsicherheit. Man kann die Messunsicherheit auch auf den Messwert beziehen und bekommt dann die **relative** Messunsicherheit:

$$\frac{u(d)}{d} = \frac{0,2}{10,4} = 0,019.$$

Diese wiederum kann man in Prozent ausdrücken und dann schreiben:

$$d = 10,4(1 \pm 1,9\%) \text{ cm.}$$

Sehr oft wird man die Messunsicherheit einfach schätzen: Diesen Längenmaßstab kann ich auf etwa plus/minus einen Millimeter genau ablesen. Besser ist es natürlich, wenn der Hersteller des Messgerätes etwas über die Genauigkeit sagt, wie dies bei Präzisionsmessgeräten immer der Fall ist.

Ist man einigermaßen sicher, dass die Messunsicherheit im Wesentlichen auf zufälligen Messfehlern beruht, helfen Mittelwert und Streumaß sehr viel weiter. Man kann dann die Messunsicherheit durch mehrfaches Wiederholen der Messung beträchtlich reduzieren und sie mit Hilfe des Streumaßes sehr genau abschätzen.

Der beste Schätzwert für den wahren Wert der Messgröße ist natürlich der Mittelwert, der umso zuverlässiger wird, aus je mehr Einzelmessungen er gebildet wird. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung sagt nämlich Folgendes:

Sind die Messwerte tatsächlich zufällig verteilt, so liegt der Mittelwert  $\langle x \rangle$  mit einer Wahrscheinlichkeit von 68% nicht weiter als eine **Standardabweichung des Mittelwerts** von dem unbekannten wahren Mittelwert entfernt. Diese Standardabweichung des Mittelwertes erhält man dadurch, dass man die Standardabweichung  $s$  durch die Wurzel der Zahl der Messungen  $\sqrt{n}$  dividiert:

$$s(\langle x \rangle) = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Im Allgemeinen ändern sich Varianz und Standardabweichung nicht, wenn man die Zahl  $n$  der Messungen erhöht. Das heißt aber, dass die Standardabweichung des Mittelwertes umgekehrt proportional zu  $\sqrt{n}$  kleiner wird. Durch Erhöhung der Zahl der Messungen kann also die Messunsicherheit grundsätzlich beliebig klein gemacht werden. Nur wächst der Aufwand leider quadratisch mit dem Gewinn an Genauigkeit.

#### Merke

Standardabweichung des Mittelwertes: Schätzwert der sich aus zufälligen Messfehlern ergebenden Messunsicherheit.

#### Merke

Messunsicherheit: Abschätzung des Intervalls, in dem der unbekannte wahre Wert wahrscheinlich liegt.

Absolute Messunsicherheit  $u(x)$ ,

relative Messunsicherheit: absolute Messunsicherheit durch Messwert:  $u(x)/x$ .

Reicht einem eine Wahrscheinlichkeit von 68%, dass der wahre Wert im angegebenen Unsicherheitsintervall liegt, nicht, so kann man für die



Messunsicherheit zweimal die Standardabweichung des Mittelwertes ansetzen. Dadurch wird die Wahrscheinlichkeit auf immerhin 95% erhöht.

In der Physik und im täglichen Leben macht man sich meist nicht die Mühe, die Standardabweichung des Mittelwertes tatsächlich auszurechnen. Die meisten Messverfahren sind für ihren Zweck präzise genug, sodass sich Messwiederholungen nicht lohnen. Trotzdem sollte man die Messunsicherheit abschätzen und Zahlenwerte grundsätzlich nicht genauer hinschreiben, als man sie hat: Die letzte angegebene Dezimalstelle sollte noch stimmen. Wenn das Schild in Nikolausberg behauptet, bis Göttingen seien es 4 km, dann sollte die tatsächliche Entfernung näher bei diesem Wert liegen als bei 3 km oder bei 5 km. Darum sollte auch der mittlere Radius der Erdbahn zu  $149,5 \cdot 10^6$  km angegeben werden und nicht zu 149.500.000 km, denn für die fünf Nullen kann niemand garantieren. Umgekehrt sollte die Länge des 50-m-Beckens in einem wettkampfgerechten Schwimmstadion durchaus 50,0 m, wenn nicht gar 50,00 m betragen.

#### Merke

Man sollte alle Dezimalstellen angeben, die man zuverlässig gemessen hat, nicht weniger, aber auch nicht mehr.

### 1.3.4 Fehlerfortpflanzung

Oftmals werden Messergebnisse verschiedener Größen kombiniert, um eine abgeleitete Größe auszurechnen; dabei reichen sie ihre Messunsicherheiten an diese abgeleitete Größe weiter. Im unten folgenden Rechenbeispiel wird die Dichte aus der Messung einer Kantenlänge eines Würfels und seiner Masse gewonnen. Für die Berechnung der Messunsicherheit der abgeleiteten Größe (im Beispiel der Dichte) hat sich die Bezeichnung „Fehlerfortpflanzung“ eingebürgert, obwohl es sich eben eigentlich um eine Messunsicherheitsfortpflanzung handelt.

Es gibt zwei wichtige Regeln, mit denen sich die meisten Situationen meistern lassen:

#### Merke

Bei der Addition/Subtraktion von Messwerten addieren sich die absoluten Unsicherheiten.

Gewiss darf man darauf hoffen, dass sich bei einer Addition von Messgrößen die absoluten Messfehler z. T. kompensieren, aber verlassen darf man sich darauf nicht. Deshalb muss man immer mit der Addition die absoluten Unsicherheiten abschätzen. Dieser Zusammenhang kann zu hohen relativen Unsicherheiten führen, wenn sich die gesuchte Größe nur als (kleine) Differenz zweier (großer) Messwerte bestimmen lässt. Wie viel Nahrung ein Säugling beim Stillen aufgenommen hat, stellt man üblicherweise dadurch fest, dass man ihn vorher und hinterher wiegt, mitsamt den Windeln. Grundsätzlich könnte man auch die Mutter wiegen, aber dann wäre das Resultat weniger genau.

#### Merke

Bei der Multiplikation/Division von Messwerten addieren sich die relativen Unsicherheiten.

Die Ableitung dieser nicht sofort offensichtlichen Regel soll hier ausgelassen werden. Sie gilt näherungsweise, wenn die Unsicherheiten klein gegen die Messwerte sind. In dem Rechenbeispiel mit der Dichte wird diese Regel zur Anwendung kommen.

Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass der funktionale Zusammenhang für die abgeleitete Größe natürlich auch komplizierter sein kann als nur eine Kombination von Addition und Multiplikation und zum Beispiel einen Sinus oder einen Logarithmus enthalten kann. Auch dann gibt es eine Formel für die Fehlerfortpflanzung. Diese enthält die partiellen Ableitungen des funktionalen Zusammenhangs.

**Rechenbeispiel 1.2: Schwimmt der Bauklotz?**

► **Aufgabe.** Es soll die Massendichte eines würfelförmigen Spielzeugbauklotzes aus Holz bestimmt werden. Dazu wird die Kantenlänge mit einem Lineal zu  $a = (34,5 \pm 0,25)$  mm gemessen. Dabei wurde die Ablesegenauigkeit zu  $\pm 0,25$  mm geschätzt. Die Masse wurde mit einer einfachen digitalen Laborwaage zu  $m = (30,0 \pm 0,1)$  g gemessen. Welchen Wert hat die Dichte und mit welcher Messunsicherheit ist dieser Wert behaftet?

► **Lösung.** Das Volumen des Bauklotzes berechnet sich zu  $V = a^3 = 41063,625 \text{ mm}^3$ . Hier wurden aber sicher unsinnig viele Stellen angegeben. Die relative Messunsicherheit für die Kantenlänge ist:

$$\frac{u(a)}{a} = \frac{0,25 \text{ mm}}{34,5 \text{ mm}} = 0,0072.$$

Da zur Berechnung des Volumens  $a$  zweimal mit sich selbst multipliziert wird, ist die relative Unsicherheit des Volumens nach der zweiten Regel zur Fehlerfortpflanzung dreimal so groß:

$$\frac{u(V)}{V} = 3 \cdot \frac{u(a)}{a} = 0,022.$$

Die absolute Unsicherheit des Volumens ist also  $u(V) = 893 \text{ mm}^3$ . Eine vernünftige Angabe des Volumens lautet also  $V = (41 \pm 0,9) \text{ cm}^3$ .

Die Dichte ist

$$\rho = \frac{m}{V} = 0,7306 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Die relative Unsicherheit ergibt sich wieder aus einer Addition:

$$\frac{u(\rho)}{\rho} = \frac{u(m)}{m} + \frac{u(V)}{V} = 0,0033 + 0,022 = 0,0253.$$

Die Unsicherheit der Dichte wird also im Wesentlichen durch die Unsicherheit des Volumens bestimmt. Die absolute Unsicherheit der Dichte ist nun:

$$u(\rho) = 0,0253 \cdot 0,73 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 0,019 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

So erhalten wir das Endergebnis:

$$\rho = (0,73 \pm 0,02) \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}.$$

Die Dichte ist also kleiner als die von Wasser.

**1.4 Vektoren und Skalare**

Wenn man zu einem Liter Wasser einen zweiten hinzugießt, dann hat man zwei Liter Wasser. Wenn man aber in New York vom Time Square aus die 42. Straße 450 m weit nach Osten geht und dann die 5th Avenue 900 m weit downtown Manhattan, dann hat man zwar 1350 m zurückgelegt, sich aber nur 1 km von seinem Ausgangspunkt entfernt, man hätte auch gleich den Broadway hinuntergehen können (Abb. 1.9). Wege haben Richtungen und das ermöglicht Umwege.

Die Mathematik bezeichnet Größen, die eine Richtung im Raum haben, als **Vektoren**, im Gegensatz zu den ungerichteten **Skalaren**. Sie hat unter dem Stichwort Vektorrechnung besondere Rechenregeln entwickelt, die von der Physik dankbar übernommen werden.

**Merke**

Vektor: physikalische Größe, die eine Richtung im Raum hat; Skalar: ungerichtete physikalische Größe.

Vektoren lassen sich durch Pfeile symbolisieren, in der Länge dem (skalaren) **Betrag** der Grö-

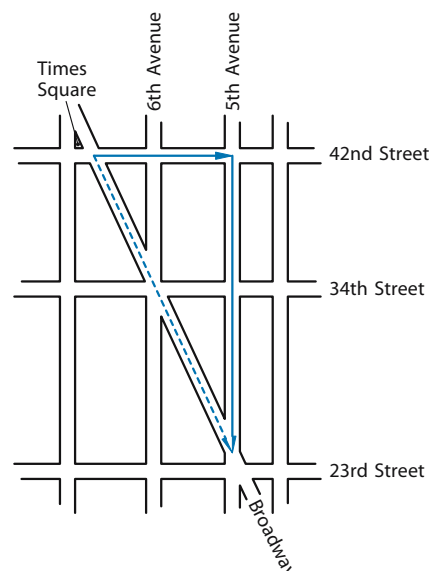


Abb. 1.9. Stadtplan von Manhattan

ße proportional, in der Richtung ihr parallel. Formal darf man deshalb einen jeden Vektor  $\vec{a}$  als das Produkt seines Betrages  $a$  und seines **Einheitsvektors**  $\vec{e}_a$  ansehen (in Formeln werden Vektorsymbole durch einen übergesetzten Pfeil gekennzeichnet). Einheitsvektoren sind Vektoren mit dem Betrag eins.

**Merke**

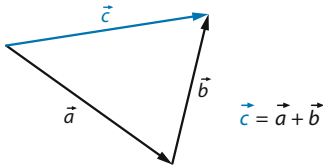
Ein Vektor  $\vec{a}$  ist das Produkt aus (skalarem) Betrag  $a$  und dem Einheitsvektor  $\vec{e}_a$

$$\vec{a} = a \cdot \vec{e}_a$$

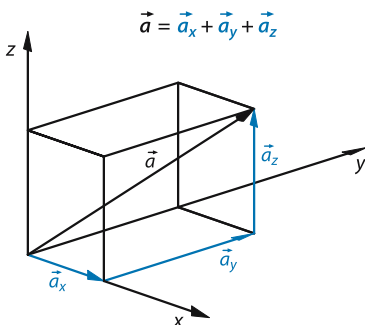
Addiert werden Vektoren durch Aneinanderhängen ihrer Pfeile: ■ Abbildung 1.10 entspricht also der Gleichung

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

Diese Regel erlaubt, jeden Vektor in **Komponenten** zu zerlegen, deren Summe er darstellt – zwei Komponenten in der Ebene, drei im Raum (■ Abb. 1.11). Stellt man sie senkrecht aufeinander, so bilden zusammengehörige Vektorpfeile rechtwinklige Dreiecke; das vereinfacht quan-



■ Abb. 1.10. Vektoraddition. Vektoren werden zumeist durch einen übergesetzten Vektorpfeil gekennzeichnet



■ Abb. 1.11. Vektorzerlegung. Zerlegung des räumlichen Vektors  $\vec{a}$  in die drei senkrecht aufeinander stehenden Komponenten  $\vec{a}_x$ ,  $\vec{a}_y$  und  $\vec{a}_z$

titative Rechnungen: Man kann sowohl den **Lehrsatz des Pythagoras** als auch die **Winkelfunktionen** Sinus und Kosinus leicht anwenden. Dabei ist eines zu beachten: Einfache Vektoren haben wirklich nur eine Richtung im Raum, sie haben keine Lage. Die sie symbolisierenden Pfeile dürfen beliebig auf dem Papier herumgeschoben werden, allerdings nur parallel zu sich selbst.

**Merke**

Vektoraddition: Aneinanderlegen der Vektorpfeile;

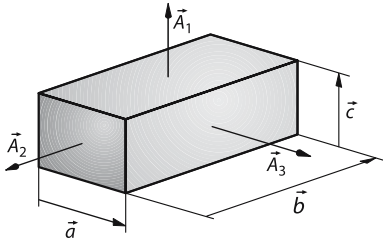
Komponentenzerlegung: Vektor als Summe seiner Komponenten (z. B. parallel zu den Achsen des Koordinatenkreuzes).

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar ändert nur seinen Betrag, nicht seine Richtung. Bei diesem Satz muss man aufpassen: Multiplikation mit dem Skalar  $-1$  kehrt das Vorzeichen des Betrages um und insofern auch das, was man landläufig „Richtung“ nennt. Im Sinn der Vektorrechnung haben aber zwei antiparallele Vektoren gleiche Richtung. Das mag an dieser Stelle etwas abstrakt klingen; später im Buch werden physikalische Beispiele für mehr Anschaulichkeit sorgen, insbesondere auch für die jetzt noch zu besprechenden **Vektorprodukte**.

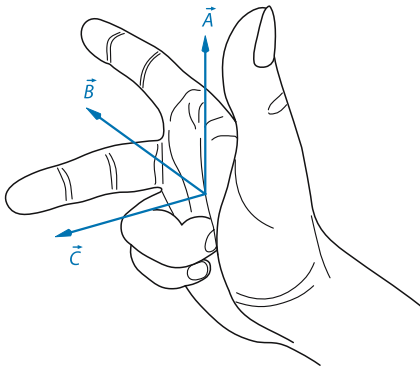
Vektoren darf man miteinander multiplizieren, beispielsweise die beiden Seiten  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  eines Rechtecks. Sie haben Richtungen, sind also Vektoren, auch wenn davon in ► Kap. 1.1.3 noch nicht die Rede war. Und wie ist es mit der Fläche selbst? Die vier Wände eines Zimmers stehen senkrecht, Boden und Decke liegen horizontal; alle sechs haben paarweise unterschiedliche Richtungen im Raum. Insofern kann man Flächen als Vektoren auffassen. Fragt sich nur, in welcher Richtung ihre Vektorpfeile gezeichnet werden müssen. Dazu sagt die Mathematik: senkrecht zur Ebene, also in Richtung der **Flächennormalen** (■ Abb. 1.12). Die Fläche  $\vec{A}_1$  des Rechtecks ist demnach das **vektorielle Produkt** der beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ :

$$\vec{A}_1 = \vec{a} \times \vec{b},$$

es wird in Formeln mit einem Malkreuz gekennzeichnet und darum auch **Kreuzprodukt** genannt.



■ Abb. 1.12. Vektoriell Produkt. Der Produktvektor (Flächen  $A$ ) steht senkrecht auf jedem der beiden Ausgangsvektoren (den Kanten der Rechtecke). Zum Beispiel:  $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{A}_2$



■ Abb. 1.13. Zur Rechten-Hand-Regel: Vektorprodukt  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ ;  $\vec{A}$  (Daumen) weist nach oben,  $\vec{B}$  (Zeigefinger) weist nach hinten,  $\vec{C}$  (abgewinkelter Mittelfinger) steht senkrecht auf  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$

Beim Quader hat es wenig Bedeutung, ob die Pfeile der Flächen aus ihm hinaus oder in ihn hinein zeigen. Allgemein darf man aber nicht so lässig sein. Dann gilt die sog. **Rechten-Hand-Regel** (■ Abb. 1.13): Man denkt sich  $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ ; den Daumen der rechten Hand legt man dann in Richtung von  $\vec{A}$ , den Zeigefinger in Richtung von  $\vec{B}$ . Der abgewinkelte Mittelfinger hat dann die Richtung des Produktvektors  $\vec{C}$ . Dies hat eine auf den ersten Blick überraschende Konsequenz. Für das Produkt  $\vec{B} \times \vec{A}$  ergibt sich die entgegen gesetzte Richtung zu  $\vec{A} \times \vec{B}$ , da nun der Daumen in Richtung von  $\vec{B}$  und der Zeigefinger in Richtung von  $\vec{A}$  gelegt werden muss (probieren Sie es aus). Die beiden Produktvektoren liegen antiparallel, sie haben entgegengesetzte Vorzeichen:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A}).$$

Beim vektoriellen Produkt dürfen die beiden Vektoren nicht vertauscht werden, das gewohnte Kommutativgesetz gilt *nicht*.

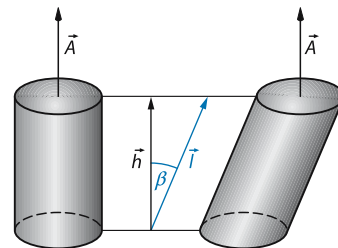
Wenn zwei Vektoren  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$  vektoriell multipliziert werden sollen, müssen sie nicht senkrecht aufeinander stehen; der Winkel  $\alpha$  darf von  $90^\circ$  abweichen. Das hat keinen Einfluss auf die Richtung des Produktvektors  $\vec{C}$ , wohl aber auf seinen Betrag  $C$ . Beim Vektorprodukt gilt

$$C = A \cdot B \cdot \sin \alpha.$$

Bei Quadern und Zylindern berechnet man das Volumen nach dem Schema „Grundfläche mal Höhe“. Ein Volumen hat keine Richtung im Raum; bei dieser Multiplikation zweier Vektoren muss ein Skalar herauskommen:  $V = \vec{A} \cdot \vec{h}$ . Man spricht von einem **Skalarprodukt** und kennzeichnet es durch einen Malpunkt. Üblicherweise definiert man die „Höhe“ eines Zylinders durch den senkrechten Abstand seiner beiden Grundflächen; das skalare Produkt gibt sich auch mit der Länge  $\vec{l}$  des Zylinders zufrieden, bezieht dann aber den Winkel  $\beta$  zwischen den beiden Vektoren  $\vec{A}$  und  $\vec{l}$  mit ein:

$$V = \vec{A} \cdot \vec{l} = A \cdot l \cdot \cos \beta.$$

Hier muss die Winkelfunktion **Kosinus** stehen, denn das Volumen ist beim senkrechten Zylinder am größten, dann also, wenn  $\vec{A}$  und  $\vec{l}$  parallel liegen (■ Abb. 1.14).



$$\vec{V} = \vec{A} \cdot \vec{h} = \vec{A} \cdot \vec{l} = A l \cos \beta$$

■ Abb. 1.14. Skalares Produkt zweier Vektoren am Beispiel des Volumens eines Kreiszylinders

**Merke**

Vektormultiplikation:  
skalares Produkt:

$$C = \vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \alpha,$$

vекtoriелles Produkt:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}; C = A \cdot B \cdot \sin \alpha,$$

$\vec{C}$  senkrecht auf  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$ .

## 1.5 Wichtige Funktionen

### 1.5.1 Winkelfunktionen

Bei den Multiplikationen der Vektoren spielen die beiden **Winkelfunktionen** Sinus und Kosinus eine Rolle. Der Vollständigkeit halber sei hier an ihre Definitionen im rechtwinkligen Dreieck erinnert:

- Sinus = Gegenkathete/Hypotenuse
- Kosinus = Ankathete/Hypotenuse
- Tangens = Gegenkathete/Ankathete
- Kotangens = Ankathete/Gegenkathete

Die Umkehrfunktionen zu den Winkelfunktionen werden **Arkusfunktionen** genannt. Beispielsweise gilt: wenn  $\sin \alpha = a$ , dann gilt  $\alpha = \arcsin a$ .

Winkel misst man üblicherweise fernab von Dezimalsystem und SI in **Winkelgrad**:  $90^\circ$  für den rechten,  $180^\circ$  für den gestreckten und  $360^\circ$  für den Vollwinkel „einmal herum“. Mathematik und Physik bevorzugen aber das **Bogenmaß**. Man bekommt es, indem man um den Scheitel des Winkels  $\alpha$  einen Kreis mit dem Radius  $r$  schlägt. Die Schenkel schneiden aus ihm einen Kreisbogen der Länge  $s$  heraus (Abb. 1.15), der sowohl zu  $\alpha$  wie zu  $r$  proportional ist. Dementsprechend definiert man

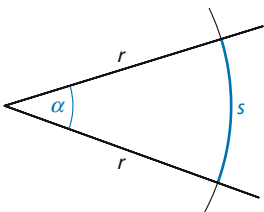


Abb. 1.15. Winkel im Bogenmaß:  $\alpha = s/r$

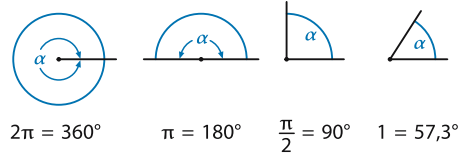


Abb. 1.16. Umrechnung von Winkelgrad in Bogenmaß

$$\text{Winkel } \alpha = \frac{\text{Länge } s \text{ des Kreisbogens}}{\text{Radius } r \text{ des Kreises}}.$$

Als Quotient zweier Längen ist der Winkel eine dimensionslose Zahl. Trotzdem wird ihm zuweilen die Einheit **Radian** (rad) zugeordnet, um daran zu erinnern, dass diese Zahl einen Winkel repräsentieren soll. Die Umrechnung von Winkelgrad in Bogenmaß ist leicht zu merken:  $360^\circ$  entsprechen  $2\pi$ , d. h.  $1^\circ = 0,01745$  (Abb. 1.16).

Die Funktionen Sinus und Kosinus erlauben, Schwingungen mathematisch zu beschreiben. Lässt man einen Punkt auf einer Kreisbahn umlaufen (Abb. 1.17), so kann man den **Fahrstrahl**, d. h. die Punkt und Zentrum verbindende Gerade, als Hypotenuse der Länge  $A_0$  eines rechtwinkligen Dreiecks mit dem Winkel  $\alpha$  am Zentrum, der Ankathete  $x_2$  und einer Gegenkathete mit der Länge  $x_1$  auffassen:

$$x_1(\alpha) = A_0 \sin \alpha \quad \text{und} \quad x_2(\alpha) = A_0 \cos \alpha.$$

Läuft der Punkt mit konstanter Geschwindigkeit um, so wächst  $\alpha$  proportional zur Zeit  $t$ :

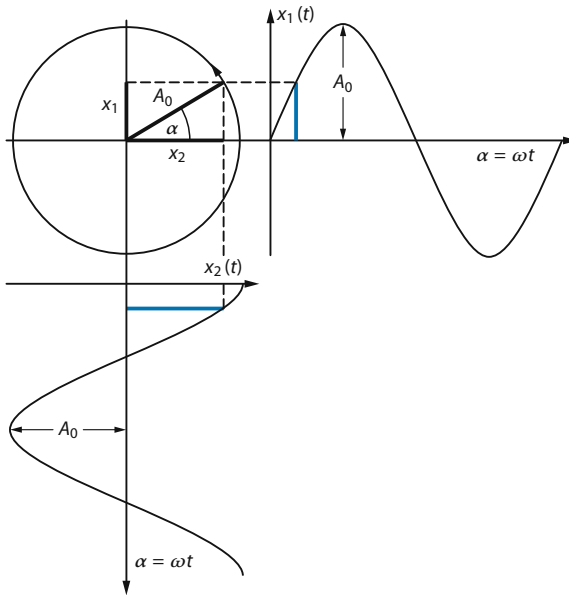
$$\alpha(t) = \omega \cdot t$$

mit der Folge

$$x_1(t) = A_0 \sin(\omega \cdot t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = A_0 \cos(\omega \cdot t).$$

Die Proportionalitätskonstante  $\omega$  bekommt den Namen **Winkelgeschwindigkeit**.

Anschaulich entstehen  $x_1$  durch horizontale und  $x_2$  durch vertikale Projektion des umlaufenden Punktes in Abb. 1.17. Zeichnet man die Projektionen auf, so erhält man in beiden Fällen fast identische Graphen einer einfachen Schwingung; sie unterscheiden sich lediglich durch den Startwert bei  $t = 0$ , also  $\alpha = 0$ : Der Sinus hat dort einen Nulldurchgang, der Kosinus einen Maximalwert. Einen Viertelumlauf später ( $\alpha = \pi/2$ ) ist



■ **Abb. 1.17. Drehbewegung und Winkelfunktion.** Zusammenhang zwischen den Winkelfunktionen Sinus (rechts) und Kosinus (unten) und der Drehbewegung eines auf einer Kreisbahn umlaufenden Punktes. Der Radius des Kreises bestimmt die Amplitude  $A_0$  der Auslenkung, die Zeit für einen Umlauf bestimmt die Schwingungsdauer  $T = 2\pi/\omega$

es umgekehrt. Nach einem vollen Umlauf ( $\alpha = 2\pi$ ) wiederholt sich das Spiel von neuem. Gegen beliebig große Winkel hat die Mathematik ebenso wenig einzuwenden wie gegen negative. Eine Schwingung wiederholt sich nach Ablauf einer **Schwingungsdauer**  $T$ . Daraus folgt für die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = 2\pi/T.$$

Den Kehrwert der Schwingungsdauer bezeichnet man als

$$\text{Frequenz } f = 1/T.$$

Die Konsequenz

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

macht verständlich, dass  $\omega$  auch **Kreisfrequenz** genannt wird.

rührten Sparguthabens mit Zins und Zinseszins; sie ist aber auch die Funktion (ungestörten) Abbaus, etwa eines Medikaments im Organismus des Patienten oder von Atomen durch radioaktiven Zerfall. Bei diesen Beispielen handelt es sich um Funktionen der Zeit. Mathematische Allgemeingültigkeit verlangt aber, der e-Funktion zunächst einmal die Zahl  $x$  als unabhängige Variable zuzuordnen. Zwei Schreibweisen sind üblich:

$$y(x) = e^x = \exp(x).$$

Die zweite empfiehlt sich vor allem dann, wenn der physikalische Zusammenhang die Zahl  $x$  zu einem komplizierten Ausdruck werden lässt; die erste Schreibweise lässt leichter erkennen, worum es sich eigentlich handelt. Der Buchstabe  $e$  steht für eine ganz bestimmte Irrationalzahl, die **Euler-Zahl**:

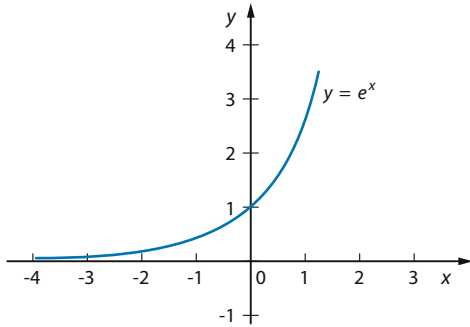
$$e = 2,718281828 \dots$$

(auch wenn es auf den ersten Blick anders aussieht:  $e$  ist ein nichtperiodischer unendlicher Dezimalbruch).

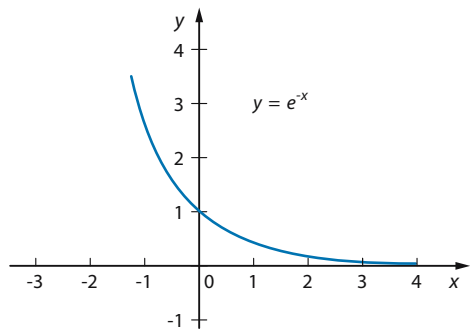
Auf Millimeterpapier aufgetragen, liefert  $e^x$  eine zunächst flach und dann immer steiler ansteigende Kurve (■ Abb. 1.18). Sie ist überall positiv, liegt also stets oberhalb der Abszisse ( $e^x > 0$ ), und

## 1.5.2 Exponentialfunktion und Logarithmus

Wer die **Exponentialfunktion** kennt, begegnet ihr in der Natur immer wieder. Sie ist die Funktion des (ungestörten) Wachstums, etwa eines Embryos vor der Zelldifferenzierung oder eines unbe-



■ Abb. 1.18. Die Exponentialfunktion



■ Abb. 1.19. Exponentialfunktion mit negativem Exponenten

schneidet die Ordinate bei  $e^0 = 1$  (jede Zahl, also auch  $e$ , gibt in nullter Potenz die eins). Nach den Regeln des Potenzrechnens gilt  $e^{-x} = 1/e^x$ . Weil  $e^x$  mit wachsendem  $x$  ansteigt, fällt  $e^{-x}$  mit wachsendem  $x$  ab; der Graph läuft asymptotisch auf die Abszisse zu, ohne sie je zu erreichen. Auch  $e^{-x}$  bleibt stets positiv und schneidet die Ordinate bei der eins (■ Abb. 1.19). Mit positivem Exponenten beschreibt die  $e$ -Funktion ungestörtes Wachstum, mit negativem ungestörtem Abbau.

#### Merke

Exponentialfunktion

$$e^x = \exp(x),$$

positiver Exponent: Wachstumsfunktion,  
negativer Exponent: Abbaufunktion.

Eine der beiden Umkehrungen der Potenz ist der **Logarithmus** (die andere ist die Wurzel). Ganz allgemein gilt:

$$\text{wenn } a = b^c, \text{ dann } c = \log_b a$$

(gelesen: „ $c$  gleich Logarithmus  $a$  zur Basis  $b$ “). Zur  $e$ -Funktion gehört der Logarithmus zur Basis  $e$ ; er wird **natürlicher Logarithmus** genannt und  $\ln$  geschrieben:

$$\text{wenn } y = e^x, \text{ dann } x = \ln y = \log_e y.$$

Auch diese Zahlenwerte müssen mit dem Taschenrechner ausgerechnet werden. Dort findet man neben der Taste für den natürlichen Logarithmus meist auch noch eine für den Logarithmus zur Basis 10, den **dekadischen Logarithmus**,  $\lg$  oder  $\log$  geschrieben:

$$\text{wenn } y = 10^w, \text{ dann } w = \lg y = \log_{10} y.$$

Dieser Logarithmus findet in der Messtechnik beim Pegelmaß Anwendung (► Kap. 4.3.2).

■ ■ ■ Der Logarithmus zu irgendeiner anderen Basis  $a$  kann wie folgt berechnet werden: Definitionsgemäß gilt ja  $a = \exp(\ln a)$ , also auch

$$y = a^w = [\exp(\ln a)]^w.$$

Nun potenziert man eine Potenz durch Multiplikation der beiden Exponenten:

$$y = \exp(w \cdot \ln a).$$

Daraus folgt aber

$$\ln y = w \cdot \ln a = \log_a(y) \cdot \ln a$$

und

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

Die beiden Logarithmen unterscheiden sich also nur um einen Zahlenfaktor

#### Merke

Der natürliche Logarithmus ist Umkehrfunktion zur  $e$ -Funktion.

Aus mathematischen Gründen können Exponenten nur reine Zahlen ohne physikalische Einheit sein; analog lassen sich auch nur dimensionslose Zahlen logarithmieren. Wenn eine Exponenti-



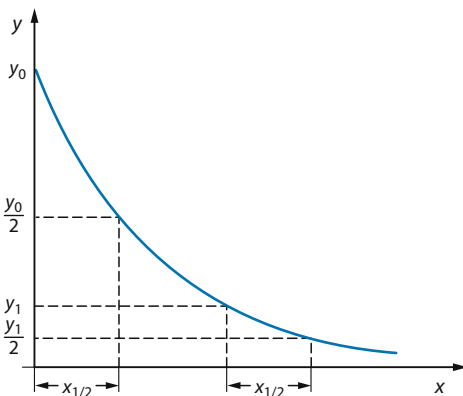
alfunktion nun aber Wachstum oder Abbau beschreiben soll, dann muss die Zeit  $t$  mit einer entsprechenden Einheit im Exponenten erscheinen. Sie kann dies nur zusammen mit einem Divisor  $\tau$ , der ebenfalls in einer Zeiteinheit zu messen sein muss. Je nach den Umständen werden ihm Namen wie Relaxationszeit, **Zeitkonstante**, Eliminationszeit oder Lebensdauer gegeben. Selbstverständlich darf er durch einen Faktor  $\lambda=1/\tau$  ersetzt werden:

$$y(t) = \exp(t/\tau) = \exp(\lambda \cdot t) = e^{t/\tau}.$$

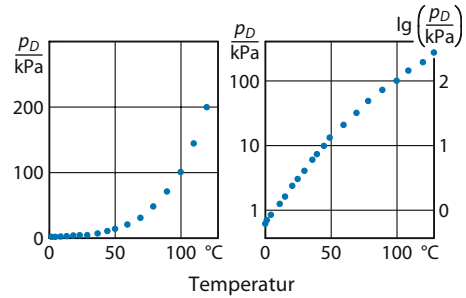
Nach Ablauf einer Zeitkonstanten, also nach einer Zeitspanne  $\Delta t = \tau$ , hat sich der Exponent  $x$  gerade um 1 vergrößert. Die Wachstumsfunktion  $\exp(x)$  ist dann auf das  $e$ -fache ihres Ausgangswertes angestiegen, die Abklingfunktion  $\exp(-x)$  auf den  $e$ -ten Teil abgefallen. Dieses Verhalten ist nicht auf die Faktoren  $e$  und  $1/e$  beschränkt. Die Schrittweite  $x_{1/2} = \ln 2$  halbiert den Wert der abfallenden  $e$ -Funktion, gleichgültig, von welchem  $x$  aus dieser Schritt getan wird (■ Abb. 1.20). Entsprechend lässt sich die Lebensdauer  $\tau$  eines radioaktiven Präparates leicht in die gebräuchlichere

$$\text{Halbwertszeit } T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2 = 0,693\tau$$

umrechnen (davon wird in ► Kap. 8.2.6 noch genauer die Rede sein). Die Eigenschaft, bei vorgegebener Schrittweite unabhängig vom Ausgangs-



■ **Abb. 1.20. Charakteristik der  $e$ -Funktion.** Die Schrittweite  $x_{1/2}$  ist eine für den Abfall der  $e$ -Funktion charakteristische Größe: sie halbiert die Ordinate unabhängig von dem Punkt, von dem aus der Schritt getan wird



■ **Abb. 1.21. Logarithmischer Maßstab.** Dampfdruckkurve des Wassers in linearem und in logarithmischem Maßstab (Einzelheiten im Text)

punkt um einen festen Faktor abzufallen oder anzusteigen, ist Kennzeichen der  $e$ -Funktion.

Eine wichtige Rolle spielt der Logarithmus in manchen Diagrammen. Im Anhang findet sich eine Tabelle für den Dampfdruck  $p_D$  des Wassers in Abhängigkeit von der Temperatur. Zeichnet man diesen Zusammenhang in gewohnter Weise, d. h. in **linearem Maßstab**, auf Millimeterpapier, so bekommt man das linke Teilbild der ■ Abb. 1.21.  $p_D$  steigt ab 50 °C rasch an, löst sich aber bei tieferen Temperaturen kaum von der Abszisse. In solchen Fällen empfiehlt es sich, längs der Ordinate nicht die Dampfdrücke  $p_D$  selbst aufzutragen, sondern die (z. B. dekadischen) Logarithmen ihrer Maßzahlen  $\{p_D\}$  (■ Abb. 1.21, rechtes Teilbild, rechte Skala).

Nun kann man nicht verlangen, dass jedermann die Werte des dekadischen Logarithmus im Kopf hat. Deshalb ist es üblich, nicht sie an die Ordinate zu schreiben, sondern die Messwerte selbst (■ Abb. 1.21, rechtes Teilbild, linke Skala). Man spricht dann von einer **logarithmischen Skala** und von einem Diagramm in einfach-logarithmischer Darstellung, im Gegensatz zur doppelt-logarithmischen, bei der beide Achsen logarithmisch geteilt sind.

#### Merke

Kennzeichen der Exponentialfunktion: Änderungsgeschwindigkeit proportional zum Momentanwert.



In einfach-logarithmischer Darstellung wird die Dampfdruckkurve des Wassers fast zur Geraden. Damit signalisiert sie, dass der Dampfdruck fast exponentiell mit der Temperatur ansteigt. Wieso? Der dekadische Logarithmus einer Exponentialfunktion entspricht bis auf einen konstanten Faktor ihrem Exponenten und damit auch dessen unabhängiger Variablen:

$$\lg e^{ax} = a \cdot x \cdot \lg e = a \cdot x \cdot 0,434.$$

Trägt man aber  $z = x \cdot \text{const.}$  linear gegen  $x$  auf, so erhält man eine Gerade. Folglich ergibt eine Exponentialfunktion in einfach-logarithmischer Darstellung ebenfalls eine Gerade.

Wie in einschlägigen Schulbüchern nachzulesen, gilt ganz allgemein für alle Logarithmen, also auch für die natürlichen zur Basis  $e$ :

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b;$$

einer Multiplikation zweier Zahlen entspricht die Addition ihrer Logarithmen.

#### Merke

Wichtige Rechenregeln für den Logarithmus:

$$\ln(e^a) = a$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

$$\ln(a^b) = b \cdot \ln(a)$$

### 1.5.3 Potenzfunktionen

Ein Quadrat der Kantenlänge  $a$  besitzt die Fläche  $A_Q = a^2$ , der entsprechende Würfel das Volumen  $V_W = a^3$ . Bei den **Potenzfunktionen** steht die unabhängige Variable in der Basis und nicht im Exponenten wie bei den Exponentialfunktionen. Für die Potenzen selbst gelten aber die gleichen Rechenregeln.

Generell gibt es zur Potenz zwei Umkehrfunktionen: den bereits besprochenen Logarithmus und die Wurzel. Die Kantenlänge  $a$  ist die zweite, die Quadratwurzel, der Fläche  $A_Q$  des Quadrats und die dritte, die Kubikwurzel, des Würfelvolumens  $V_W$ :

$$a = \sqrt{A_Q} = A_Q^{1/2} = \sqrt[3]{V_W} = V_W^{1/3}.$$

Kehrwerte ganzer Zahlen im Exponenten entsprechen Wurzeln. In der Näherungsformel für die Körperoberfläche eines Menschen von ▶ Kap. 1.1.3 erschien die Masse  $m$  mit dem Exponenten  $0,425 = 17/40$ . Das bedeutet die 40. Wurzel der 17. Potenz:

$$m^{0,425} = m^{17/40} = \sqrt[40]{m^{17}}.$$

Da muss man schon einen Taschenrechner zu Hilfe holen.

#### Merke

Wichtige Rechenregeln für Potenzen:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

### 1.5.4 Algebraische Gleichungen

Eine Gleichung bleibt als Gleichung erhalten, wenn man auf beiden Seiten das Gleiche tut, die gleichen Größen addiert oder subtrahiert, mit den gleichen Größen multipliziert oder potenziert usw. Nach diesem Schema lassen sich Gleichungen **umformen** und nach einer gewünschten Größe **aufösen**. Definitionsgemäß ist der elektrische Widerstand  $R$  der Quotient aus elektrischer Spannung  $U$  und elektrischem Strom  $I$ :

$$R = U/I.$$

Multiplikation mit  $I$  führt zu

$$U = I \cdot R$$

(Auflösung nach  $U$ ), anschließende Division durch  $R$  zu

$$I = U/R$$

(Auflösung nach  $I$ ). Etwas schwieriger wird es, wenn die Größe, nach der aufgelöst werden soll, nicht nur in der ersten, sondern auch in der zweiten Potenz vorkommt. Eine solche **quadratische**

**Gleichung** bringt man zunächst in ihre **Normalform**

$$x^2 + p \cdot x + q = 0.$$

Sodann subtrahiert man  $q$  :

$$x^2 + p \cdot x = -q$$

und addiert die sog. quadratische Ergänzung  $p^2/4$ :

$$x^2 + p \cdot x + p^2/4 = p^2/4 - q.$$

Jetzt kann man nämlich nach dem Schema

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

die Gleichung auf der linken Seite umschreiben zu

$$(x+p/2)^2 = p^2/4 - q$$

und anschließend die Wurzel ziehen

$$x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

(auch negative Größen liefern positive Quadrate; Quadratwurzeln sind deshalb beide Vorzeichen erlaubt). Jetzt lässt sich nach  $x$  auflösen:

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$



Eine quadratische Gleichung hat demnach

- zwei Lösungen, wenn  $p^2 > 4q$ ,
- eine Lösung, wenn  $p^2 = 4q$ ,
- keine Lösung, wenn  $p^2 < 4q$  (jedenfalls keine reelle).

In Kürze		
	Formel	Größen [Einheit]
Einheiten		
Basiseinheiten	Meter [m], Sekunde [s], Kilogramm [kg], Newton [N], Ampère [A], Kelvin[K], Mol [mol], Candela [cd]	
Abgeleitete Einheiten	zum Beispiel Kraft: $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$ (Newton)	
Messunsicherheiten		
Absolute Messunsicherheit	$u(x)$ ; $x$ : Messwert Bedeutet: der wahre Wert der Größe befindet sich sehr wahrscheinlich zwischen den Werten $x - u(x)$ und $x + u(x)$ .	
Relative Messunsicherheit	$\frac{u(x)}{x}$ absolute Messunsicherheit geteilt durch Messwert (dimensionslos)	
Fehlerfortpflanzung	<b>Regel 1:</b> bei Multiplikation oder Division von Messwerten addieren sich die relativen Messunsicherheiten. <b>Regel 2:</b> bei Addition oder Subtraktion von Messwerten addieren sich die absoluten Messunsicherheiten.	
Exponentialfunktion		
Exponentialfunktion	$y = e^{a \cdot x}$	$a$ größer Null: ansteigend $a$ kleiner Null: abfallend
Beispiel: radioaktiver Zerfall	$N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}$	$N$ : Teilchenzahl $t$ : Zeit [s] $\tau$ : Zeitkonstante [s] $N_0$ : Teilchenzahl bei $t = 0$
Halbwertszeit	$T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2$ [s] Nach jeweils der Halbwertszeit halbiert sich die Teilchenzahl	
Halblogarithmische Auftragung	$\ln N(t) = -\frac{1}{\tau} \cdot t$  In der halblogarithmischen Auftragung ergibt sich eine fallende Gerade mit der Steigung $-1/\tau$ .	

# Übungsfragen

(● leicht; ●● mittel; ●●● schwer)

- 1. Für wissenschaftliche Vorträge gilt eine beherzigenswerte Regel: Rede niemals länger als ein Mikrojahrhundert. Wie lange ist das?
- 2. Welches Volumen steht dem Gehirn eines Menschen ungefähr zur Verfügung? Zur Abschätzung sei angenommen, dass der Schädel eine hohle Halbkugel von etwa 20 cm Durchmesser bildet.
- 3. Wie lang ist das Pantoffeltierchen der  Abb. 1.5?
- 4. Wie groß ist schätzungsweise die Körperoberfläche des Griechen von  Abb. 1.6?

- 5. Welche Massen haben 3,5 Mol Wasserstoffgas ( $\text{H}_2$ ) und ein Molekül Äthylalkohol  $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ ? Sie müssen die Tabellen im Anhang zur Hilfe nehmen!
- 6. Wie groß ist das Molvolumen des Wassers?

## Messunsicherheit


- 7. Wenn der Zuckerfabrik ungewaschene Rüben angeliefert werden, zieht sie vom gemessenen Gewicht einen Anteil als Erfahrungswert ab. Systematischer oder zufälliger Fehler, relativer oder absoluter Fehler?
- 8. Der Radius eines Kreises ist mit einer relativen Messunsicherheit von 0,5% bekannt. Was ist dann die Unsicherheit für die Kreisfläche?

- 9. Durch einen elektrischen Widerstand fließt bei einem Spannungsabfall von  $2\text{ V} \pm 0,1\text{ V}$  ein Strom von  $1\text{ A} \pm 0,1\text{ A}$ . Wie groß ist die relative Unsicherheit für die im Widerstand umgesetzte Leistung?
- 10. Ein Vorgang dauert von  $t_1 = 10\text{ s}$  bis  $t_2 = 20\text{ s}$ . Beide Zeitpunkte sind nur auf eine Zehntelsekunde genau gemessen. Wie groß ist die absolute Unsicherheit für die Dauer des Vorgangs?

## Vektoren

- 11. Wann verschwindet das Vektorprodukt, wann das Skalarprodukt zweier Vektoren unabhängig von deren Beträgen?

## Exponentialfunktion

- 12. 1850 lebten auf der Erde 1,17 Milliarden Menschen, 1900 waren es bereits 1,61 Milliarden und 1950 2,50 Milliarden. Entsprechen diese Zahlen einer „Bevölkerungsexplosion“, wenn man das Wort „Explosion“ mit exponentiellem Wachstum gleichsetzt?
- 13. Nimmt die Anzahl der Quecksilbertropfen in  Abb. 3.27 exponentiell mit der Zeit ab? Wenn ja: welche Zeitkonstante?

# Mechanik starrer Körper

## 2.1 Bewegung – 28

- 2.1.1 Fahrstrecke und Geschwindigkeit – 28
- 2.1.2 Überlagerung von Geschwindigkeiten – 30
- 2.1.3 Beschleunigung – 31
- 2.1.4 Drehbewegungen – 35
- 2.1.5 Bewegung von Gelenken – 36

## 2.2 Kraft, Drehmoment, Energie – 37

- 2.2.1 Kräfte – 37
- 2.2.2 Gewichtskraft und Gravitation – 40
- 2.2.3 Arbeit und Energie – 40
- 2.2.4 Kinetische Energie – 44
- 2.2.5 Hebel und Drehmoment – 46
- 2.2.6 Die Grundgleichungen des Gleichgewichts – 48
- 2.2.7 Gleichgewichte – 49

## 2.3 Kraft und Bewegung – 51

- 2.3.1 Die Newton'schen Gesetze – 51
- 2.3.2 Reibung – 54
- 2.3.3 Impuls – 55
- 2.3.4 Trägheitskräfte – 57
- 2.3.5 Drehbewegungen – 59
- 2.3.6 Trägheitsmoment und Drehimpuls – 62

## 2 Einleitung

Seit eh und je bildet die Mechanik die Grundlage der Physik und gehört deshalb an den Anfang eines Lehrbuches. Sie handelt von den Bewegungen der Körper und den Kräften, die sie auslösen. Damit spielt sie in alle Gebiete der Naturwissenschaften hinein, über die Bindungskräfte der Moleküle in die Chemie, über die Muskelkräfte in die Medizin, über die von Benzin- und Elektromotoren entwickelten Kräfte in die Technik usw. Wenn Kräfte nicht durch Gegenkräfte kompensiert werden, haben sie Bewegungsänderungen zur Folge, Beschleunigungen genannt. Dabei wird Energie umgesetzt; sie ist eine der wichtigsten physikalischen Größen überhaupt.

## 2.1 Bewegung

### 2.1.1 Fahrstrecke und Geschwindigkeit

Dem motorisierten Menschen ist die Vokabel „**Geschwindigkeit**“ geläufig, vom Tachometer seines Autos nämlich; Lastwagen registrieren sogar mit einem Fahrtenschreiber. Wie solche Geräte im Einzelnen funktionieren, interessiert hier nicht. Im Grunde sind sie Drehzahlmesser: sie vermelden, wie oft sich die Hinterachse des Fahrzeugs in der Sekunde, in der Minute herumdrehet. Physikalisch korrekter: Drehzahlmesser messen die

Drehfrequenz  $f = \Delta N / \Delta t$   
Anzahl der Umdrehungen  $\Delta N$   
benötigte Zeitspanne  $\Delta t$

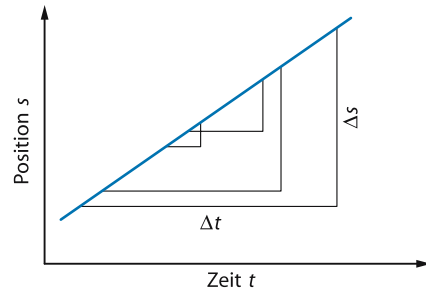
-Einheit 1/s oder 1/min, denn die „Umdrehung“ ist keine Einheit, sie wird nur gezählt. Bei jeder Umdrehung kommt das Fahrzeug einen Radumfang  $s_r$  weiter. Es fährt deshalb mit der

Geschwindigkeit  $v = f \cdot s_r$

-Einheit 1 m/s oder, im Straßenverkehr üblicher, 1 km/h. Die Umrechnung ist einfach: Ein Kilometer hat  $10^3$  m, eine Stunde  $3,6 \cdot 10^3$  s. Wer brav mit 90 km/h die Landstraße entlang fährt, hat zu rechnen:

$$v = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{90 \cdot 10^3 \text{ m}}{3,6 \cdot 10^3 \text{ s}} = 25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dieses Schema funktioniert auch bei anderen Umrechnungen.



■ **Abb. 2.1. Steigungsdreiecke.** Zur graphischen Ermittlung der Geschwindigkeit: Alle zu der gleichen Geraden gezeichneten Steigungsdreiecke sind einander ähnlich; die Quotienten ihrer Katheten sind gleich

Wer eisern die 90 km/h durchhält, kommt demnach in der Sekunde 25 m weit, in der Minute  $60 \cdot 25 \text{ m} = 1,5 \text{ km}$  und in der Stunde eben 90 km. Die Länge  $\Delta s$  des zurückgelegten Weges ist der Fahrzeit  $\Delta t$  proportional (■ Abb. 2.1):

$$\Delta s = v_0 \cdot \Delta t.$$

Die Position als Funktion der Zeit ist eine Gerade mit konstanter Steigung (■ Abb. 2.1). Die Steigung einer Geraden ist die Geschwindigkeit und man bestimmt sie mit Hilfe des **Steigungsdreiecks**, eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse ein Stück der Geraden ist und dessen Katheten parallel zu den Achsen des Diagramms liegen. Dabei spielt die Größe des Dreiecks keine Rolle, denn der Quotient der Katheten, eben die (mathematisch definierte) **Steigung**, ist davon unabhängig. Alle zu der gleichen Geraden gezeichneten Dreiecke sind einander „ähnlich“ im Sinn der Mathematik (■ Abb. 2.1). Diese Steigung ist immer die Geschwindigkeit:

$$v_0 = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

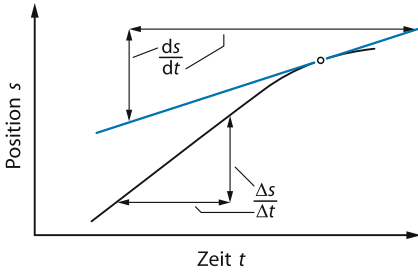
#### Merke

Konstante Geschwindigkeit

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t};$$

Fahrstrecke:  $\Delta s = v \cdot \Delta t$

Das gilt aber nur bei konstanter Geschwindigkeit, in der Gleichung durch den Index 0 gekennzeichnet.



■ **Abb. 2.2. Momentane Geschwindigkeit:** Die Steigung einer Kurve ist die Steigung ihrer Tangente (Einzelheiten im Text)

net. Im Verkehr kommt das nicht vor. Dort ändert sich die Geschwindigkeit ständig, sie wird eine Funktion der Zeit:  $v = v(t)$ . Das Weg-Zeit-Diagramm ergibt in diesem Fall eine gekrümmte Kurve (■ Abb. 2.2).

Bei einer gekrümmten Kurve muss man die Steigungsrechtecke so klein zeichnen, dass die Krümmung ihrer „Hypotenusen“ nicht mehr auffällt, streng genommen also unendlich klein. Lässt man  $\Delta t$  zum Differential  $dt$  schrumpfen, so schrumpft auch  $\Delta s$  zu  $ds$ . Das Verhältnis der beiden bleibt dabei als endlicher Wert erhalten: Der **Differenzenquotient**  $\Delta s / \Delta t$  einer zeitlich konstanten Geschwindigkeit  $v_0$  geht in den **Differentialquotienten**  $ds/dt$  über. Die momentane und zeitabhängige

$$\text{Geschwindigkeit } v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

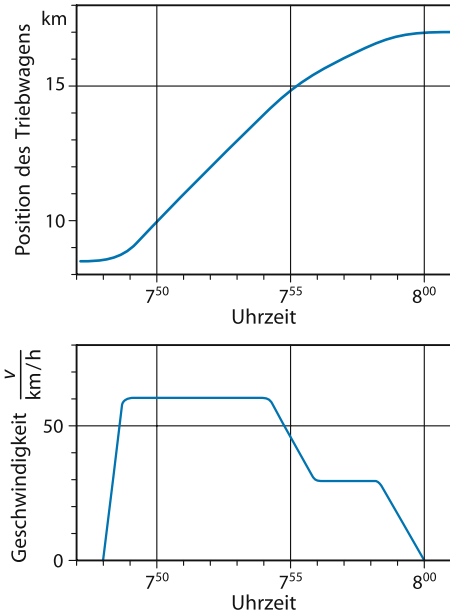
ist als Differentialquotient definiert. In der Mathematik werden Differentiationen oft durch einen nachgesetzten Strich ( $y' = dy/dx$ ) gekennzeichnet. In diesem Buch wird diese Kurzform aber nicht verwendet.

#### Merke

Ungleichförmige Bewegung  
momentane Geschwindigkeit:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

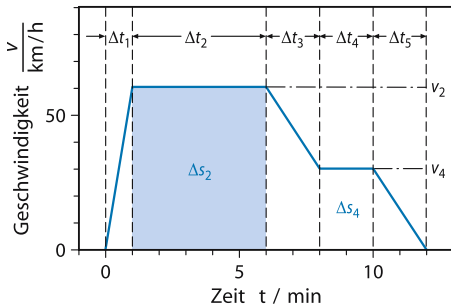
Differentiell kleine Dreiecke kann man weder zeichnen noch ausmessen. Die Richtung der differentiell kleinen Hypotenuse stimmt aber mit der Richtung einer Tangente überein, die am Ort



■ **Abb. 2.3. Vorortzug.** Weg-Zeit-Diagramm (oberes Teilbild) und Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm (unteres Teilbild) eines Vorortzuges; Einzelheiten im Text

des Dreiecks an der Kurve anliegt. Die Tangente ist eine Gerade, ihre Steigung kann also wie besprochen mit einem Steigungsrechteck bestimmt werden (■ Abb. 2.2). Auf diese Weise lässt sich das ganze  $s(t)$ -Diagramm grundsätzlich Punkt für Punkt in seine **Ableitung**, das  $v(t)$ -Diagramm überführen. Die ■ Abb. 2.3 gibt ein Beispiel hierfür: Ein Vorortzug startet um 7.48 Uhr und beschleunigt auf eine Geschwindigkeit von 60 km/h. Um 7.55 Uhr bremst er wegen einer Baustelle ab auf 30 km/h und bleibt um 8.00 Uhr am nächsten Bahnhof stehen. Das obere Teilbild zeigt die Position des Zuges als Funktion der Zeit, das untere Teilbild geometrisch betrachtet die Steigung des Graphen des oberen Teilbilds zu jedem Zeitpunkt. Den Verlauf der Geschwindigkeit kann man im Prinzip ungefähr mit Lineal und Bleistift aus dem oberen Teilbild ermitteln. Man nennt so etwas graphisches Ableiten und manchmal ist das ganz nützlich. Will man es genau wissen, muss man natürlich zur Mathematik und formalen Differentiation greifen.

Es muss natürlich auch umgekehrt möglich sein, aus dem Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm



■ **Abb. 2.4. Graphische Integration.** Bestimmung der Fahrstrecke durch graphische Integration im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm (Einzelheiten im Text)

auf die zurückgelegte Strecke zu schließen. Wie das geht, soll ■ Abb. 2.4 verdeutlichen. Besonders einfach liegt der Fall im Zeitintervall  $\Delta t_2$ , in dem die Geschwindigkeit konstant 60 km/h beträgt. Die in diesem Zeitintervall zurückgelegte Strecke beträgt:

$$\Delta s_2 = 60 \text{ km/h} \cdot \Delta t_2 = 60 \text{ km/h} \cdot 5 \text{ min} = 5 \text{ km}$$

Graphisch entspricht dies der blau schraffierten Fläche unter dem Geschwindigkeitsgraphen. Der gesamte Abstand zwischen den Bahnhöfen ergibt sich entsprechend aus der gesamten Fläche unter dem Geschwindigkeitsgraphen zwischen 7.48 Uhr und 8.00 Uhr. In dem etwas idealisierten Diagramm der ■ Abb. 2.4 ist sie nicht schwer zu bestimmen.

Im Allgemeinen bezeichnet man eine solche Flächenbestimmung als **Integration**, sein Ergebnis als **Integral**. Im Diagramm wird es repräsentiert durch die Fläche „unter der Kurve“, die Fläche zwischen Kurve und Abszisse. Ein konkreter Zahlenwert lässt sich freilich nur angeben, wenn die Fläche nicht nur oben und unten begrenzt ist, sondern auch links und rechts. Das **bestimmte Integral**

$$\Delta s = s(t_1) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

liefert die Länge  $\Delta s$  des Weges, der zwischen den Zeitpunkten  $t_0$  und  $t_1$  – zwischen den sog. **Integrationsgrenzen** – mit der Geschwindigkeit  $v(t)$  durchfahren wurde.

Ein wichtiger Satz in der Mathematik besagt, dass die Integration die Umkehroperation zur

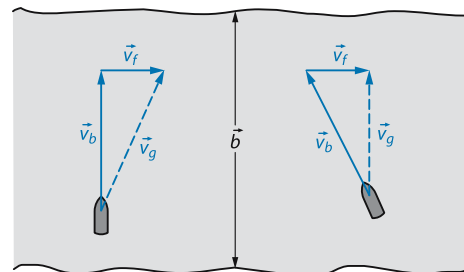
Differentiation ist. Man kann also von Differentiationsregeln auf Integrationsregeln schließen. Computer integrieren aber numerisch. Das funktioniert etwa so, wie wenn man den Funktionsgraphen auf Millimeterpapier malt und dann die Kästchen unter dem Graphen auszählt. Je genauer man die Fläche wissen will, umso kleiner muss man die Kästchen machen, umso mehr hat man auch zu zählen. Computer können sehr schnell zählen.

## 2.1.2 Überlagerung von Geschwindigkeiten

Wer im Boot einen breiten Fluss überqueren will, muss dessen Strömung berücksichtigen: Sie treibt ihn flussabwärts. Von den vielen Möglichkeiten, die der Steuermann wählen kann, fallen zwei Grenzfälle heraus:

- der Steuermann hält sein Boot ständig quer zum Strom und lässt es abtreiben (■ Abb. 2.5, linkes Teilbild);
- der Steuermann „hält gegen den Strom“, und zwar so, dass sein Boot das andere Ufer „auf gleicher Höhe“ erreicht (■ Abb. 2.5, rechtes Teilbild).


Welcher Weg ist der schnellere? Mit welcher Geschwindigkeit fährt das Boot in beiden Fällen „über Grund“? Um welchen Winkel muss das Boot im zweiten Fall „vorhalten“, um welchen wird es



■ **Abb. 2.5a,b. Vektorielle Addition von Geschwindigkeiten:** Ein Boot mit der Eigengeschwindigkeit  $\vec{v}_b$  überquert einen Fluss (Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}_g$ , Breite  $b$ ). **a** Der Bootsführer lässt sich abtreiben; **b** Der Bootsführer „hält vor“. Die Geschwindigkeit  $\vec{v}_g$  lässt sich mit Hilfe der Winkelfunktionen und mit dem Satz des Pythagoras berechnen



im ersten Fall abgetrieben? Die Antworten erhält man durch **Vektoraddition**. Aus eigener Kraft beschafft sich das Boot eine Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}_b$  gegenüber dem Wasser des Flusses. Dieses läuft mit oder ohne Boot mit der Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}_f$  des Flusses; sie soll der Einfachheit halber auf der ganzen Flussbreite als gleich angenommen werden. Für den Beobachter am ruhenden Ufer, und damit auch über Grund, addieren sich die beiden Geschwindigkeiten vektoriell.

Wie man am linken Teilbild der  Abb. 2.5 sieht, steht die Eigengeschwindigkeit  $\vec{v}_b$  des Bootes im ersten Fall senkrecht auf der Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{v}_f$  des Flusses. Ihre Vektorpfeile sind Katheten in einem rechtwinkligen Dreieck mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}_g$  über Grund als Hypotenuse. Nach dem Satz des Pythagoras hängen deshalb die drei Beträge folgendermaßen miteinander zusammen:

$$v_g^2 = v_f^2 + v_b^2.$$

Den Driftwinkel  $\alpha$  zwischen  $\vec{v}_f$  und  $\vec{v}_b$  liefert die Winkelfunktion Tangens:

$$\tan \alpha = \frac{v_f}{v_g}.$$

In diesem Fall hat die Strömung des Flusses keinen Einfluss auf die Zeit  $T$ , die das Boot zum Überqueren benötigt. Die Flussbreite  $b$  ist durchfahren in

$$T = b/v_b.$$

Damit folgt für den Betrag  $x$  der Strecke, um die das Boot abgetrieben wird,

$$x = T \cdot v_f.$$


Im rechten Teilbild hält der Bootsführer um einen Winkel  $\beta$  zwischen  $\vec{v}_b$  und der Gesamtgeschwindigkeit  $\vec{v}_g$  vor, um senkrecht über den Fluss zu kommen. Für diesen Winkel gilt:

$$\sin \beta = \frac{v_f}{v_b}$$

Wie man im Bild schon sieht, ist jetzt die Überquerungsgeschwindigkeit senkrecht zum Fluss  $v_g$  kleiner.

### Rechenbeispiel 2.1: Wie weit muss der Bootsführer vorhalten?

► **Aufgabe.** Der Fluss fließe mit  $v_f = 1 \text{ m/s}$ . Das Boot fährt mit  $v_b = 3 \text{ m/s}$  relativ zum Wasser. Es will genau senkrecht übersetzen. Wie weit muss der Bootsführer vorhalten und wie schnell fährt das Boot über den Fluss?

► **Lösung.** Wir schauen auf das rechte Teilbild der  Abb. 2.5. Der Winkel, um den relativ zur senkrechten Fahrtrichtung vorgehalten werden muss, berechnet sich zu:

$$\sin \alpha = \frac{v_f}{v_b} = 0,33 \Rightarrow \alpha = 19,5^\circ$$

Die Geschwindigkeit gegen Grund ergibt sich aus dem Satz des Pythagoras:

$$v_g = \sqrt{v_b^2 - v_f^2} = 2,83 \text{ m/s}.$$

### 2.1.3 Beschleunigung

Im Sprachgebrauch des Alltags wird das Wort „beschleunigt“ meist lediglich im Sinn von „schnell“ oder „schneller werdend“ verwendet; im Sprachgebrauch der Physik ist jede Bewegung „beschleunigt“, die ihre Geschwindigkeit ändert, ob sie nun schneller wird oder langsamer oder auch nur in eine andere Richtung schwenkt. Die physikalische Größe **Beschleunigung**  $\vec{a}$  ist die Änderungsgeschwindigkeit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Sie ist also der erste Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der Zeit  $t$  und folglich der zweite des Weges  $\vec{s}$ :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{s}(t)}{dt^2}.$$

Im Falle einer *konstanten* Beschleunigung bedeutet das dann:

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Damit liegt auch ihre Einheit fest:

$$1 \frac{\text{m/s}}{\text{s}} = 1 \text{ m/s}^2 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Jede Beschleunigung hat eine Richtung,  $\vec{a}$  ist also ein Vektor, der sich obendrein noch mit der Zeit zu ändern pflegt:  $\vec{a}(t)$ . Der allgemeine Fall ist immer denkbar kompliziert. Es gibt aber einfache Grenzfälle. Hat die Beschleunigung die glei-

che Richtung wie die Geschwindigkeit, so ändert sie nur deren Betrag, nicht deren Richtung; man nennt sie dann **Bahnbeschleunigung**. Im anderen Extrem steht  $\vec{a}$  senkrecht auf  $\vec{v}$  und ändert als **Radialbeschleunigung** nur deren Richtung, nicht den Betrag. Jede andere Beschleunigung lässt sich als Vektor in eine radiale und eine tangentielle Komponente zerlegen.

**Merke**

Beschleunigung: Änderungsgeschwindigkeit der Geschwindigkeit

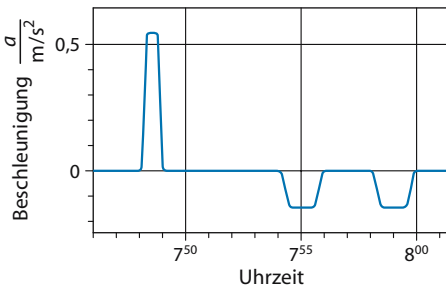
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{s}(t)}{dt^2},$$

SI-Einheit: 1 m/s<sup>2</sup>;

Bahnbeschleunigung:  $\vec{a}$  parallel zu  $\vec{v}$ ,

Radialbeschleunigung:  $\vec{a}$  senkrecht zu  $\vec{v}$ .

Das Weg-Zeit-Diagramm des Vorortzuges von **Abb. 2.3** sagt über Kurven im Bahndamm nichts aus, also auch nichts über etwaige Radialbeschleunigungen; ihr kann nur die Bahnbeschleunigung entnommen werden. Grundsätzlich muss man dazu  $s(t)$  zweimal nach der Zeit differenzieren oder das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm im unteren Teilbild der **Abb. 2.3** einmal. Das Ergebnis zeigt **Abb. 2.6**: in den Bahnhöfen, auf freier Strecke und in der Baustelle ist  $a = 0$ , überall dort nämlich, wo sich die Geschwindigkeit nicht ändert, ob der Zug nun steht oder nicht ( $v = \text{konstant}$ ). Positiv wird die Beschleunigung nur in der einen Minute des Anfahrens, negativ nur in den beiden Bremsperioden vor der Baustelle und vor dem Zielbahnhof, denn hier nimmt  $v$  ab.



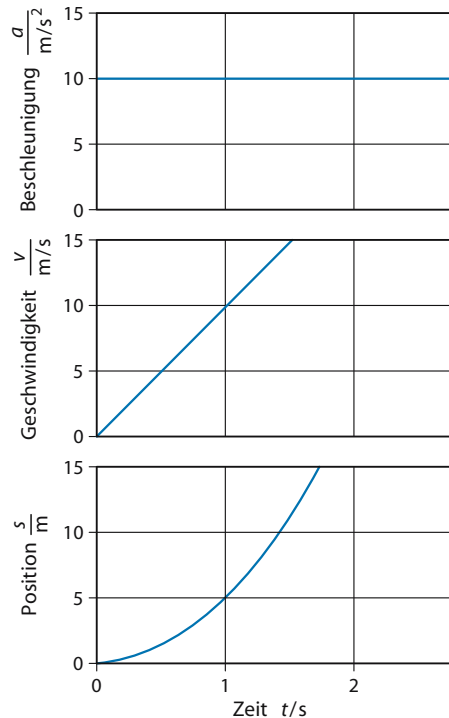
**Abb. 2.6.** Beschleunigungs-Zeit-Diagramm des Vorortzuges von **Abb. 2.1** (nur Bahnbeschleunigung)

Keine Bahnbeschleunigung kann längere Zeit unverändert anhalten; die Folge wären übergroße Geschwindigkeiten. Für ein paar Sekunden geht es aber schon, beim **freien Fall** zum Beispiel. Wenn man die Luftreibung vernachlässigen darf, fallen alle Körper auf Erden mit der gleichen **Erd-** oder auch **Fallbeschleunigung**  $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$  zu Boden; sie führen eine gleichförmig beschleunigte Bewegung aus.

Weil  $g$  konstant ist, wächst die Fallgeschwindigkeit  $v(t)$  linear mit der Zeit, sie wächst sogar proportional zur Zeitspanne  $t$  nach dem Loslassen, wenn der Stein wirklich nur losgelassen und nicht geworfen wird. Bei  $v = 0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  gilt

$$v(t) = g \cdot t$$

(**Abb. 2.7**, oberes und mittleres Teilbild). Alle im Nullpunkt des Koordinatenkreuzes beginnenden Flächen unter der Geraden im  $v(t)$ -Diagramm sind rechtwinklige Dreiecke mit den Ka-



**Abb. 2.7.** Freier Fall (Einzelheiten im Text)

theten  $t$  und  $g \cdot t$ . Sie liefern für die Fallstrecke  $s$  die Beziehung

$$s(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2.$$

Graphisch ist das eine Parabel mit dem Scheitel bei  $s = 0$  und  $t = 0$  (Abb. 2.7, unteres Teilbild): Die Messlatte für die Fallstrecke wird beim Startpunkt angelegt.

Selbstverständlich müssen die hier aufgestellten Behauptungen experimentell überprüft werden. Die heutigen technischen Mittel erlauben das mit guter Genauigkeit schon für den Schulunterricht. Galilei hatte es da schwerer; er besaß keine Stoppuhr, schon gar nicht eine elektrisch steuerbare. Ein Stein durchfällt die ersten 2 m in 0,64 s. Das war im Mittelalter nicht leicht zu messen.

Die bisher aufgestellten Gleichungen gelten nicht allgemein, denn der Stein könnte ja zur Zeit  $t = 0$  schon mit einer gewissen Geschwindigkeit  $v_0$  gestartet sein. Dann wäre diese natürlich noch dazu zu zählen:

$$v(t) = g \cdot t + v_0$$

Es könnte auch noch sein, dass der Stein zum Zeitpunkt  $t = 0$  nicht bei  $s = 0$  startet, sondern an einer Stelle  $s_0$ . Alles zusammen ergibt für die Position:

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2 + v_0 \cdot t + s_0.$$

Die drei Graphen der Abb. 2.8 stellen einen Wurf senkrecht nach oben dar, und zwar mit  $v_0 = 7,5 \text{ m/s}$ . Man darf sich nicht darüber wundern, dass  $v(t)$  unter der Nulllinie beginnt und  $s(t)$  über eine negative Gipfelhöhe läuft. Wer der Fallbeschleunigung  $g$  ein positives Vorzeichen gibt, muss die Richtung senkrecht nach oben negativ zählen.

#### Merke

Gleichförmig beschleunigte Bewegung:  $\vec{a}$  ist in Betrag und Richtung konstant  
In dieser Richtung gilt dann:

$$v(t) = a \cdot t + v_0$$

$$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

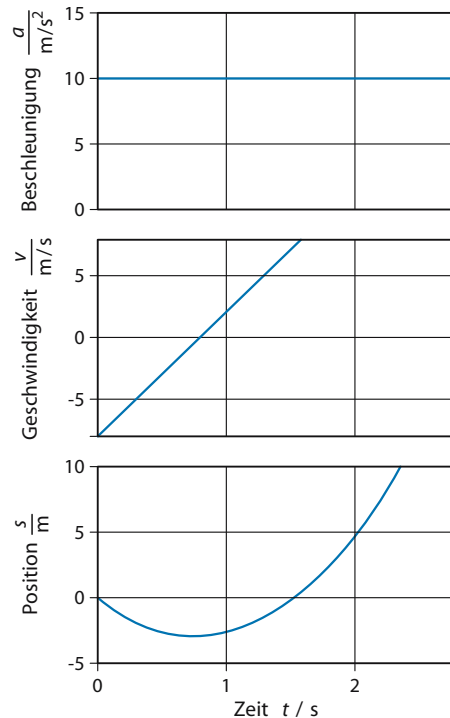


Abb. 2.8. Senkrechter Wurf (Einzelheiten im Text)

In den bisherigen Formeln erschienen immer nur die Beträge von Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Dass es sich tatsächlich um Vektoren handelt, wurde verschwiegen. Beim freien Fall aus der Ruhe und beim senkrechten Wurf ist das erlaubt, denn hier liegen alle drei Vektoren parallel. Aber wer wirft schon immer nur vertikal? Sportler wie Artilleristen geben ein  $\vec{v}_0$  vor, das mit einem Winkel  $\alpha$  gegenüber der Horizontalen schräg nach oben zeigt (**schiefer Wurf**). Dann addieren sich zwei Geschwindigkeiten vektoriell und unabhängig voneinander: eine konstante horizontale (Betrag  $v_x = v_0 \cdot \cos \alpha$ ; keine Beschleunigung, da keine Scherkraft in dieser Richtung) und eine vertikale, die mit  $v_{z0} = v_0 \cdot \sin \alpha$  beginnt und den Fallgesetzen unterliegt. Als Bahnkurve kommt eine **Wurfparabel** heraus (Abb. 2.9). Auch der schiefe Wurf gehört zu den gleichförmig beschleunigten Bewegungen; solange man die Luftreibung vernachlässigen darf, gilt  $\vec{a} = \vec{g} = \text{konstant}$ , unabhängig von den willkürlichen Anfangsbedingungen  $\vec{v}_0$  und  $\vec{s}_0$ .

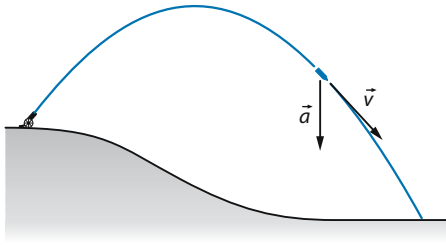


Abb. 2.9. Wurfparabel. Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und Beschleunigung  $\vec{a}$  haben verschiedene Richtung

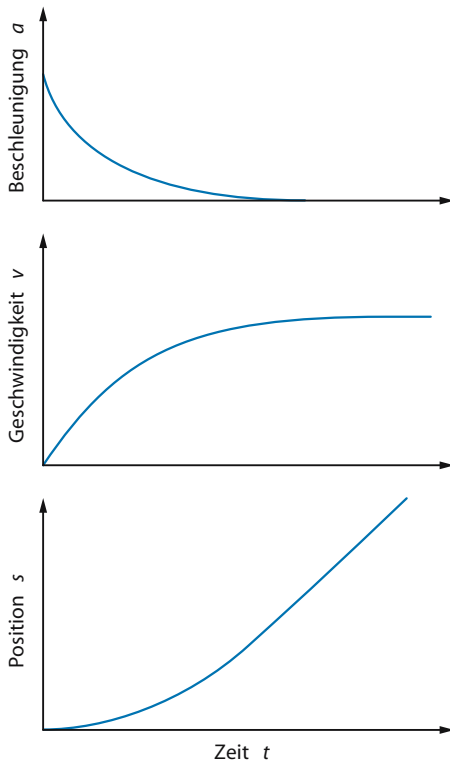


Abb. 2.10. Fall unter Reibung (Einzelheiten im Text)

Regentropfen fallen nicht frei. Sie werden durch die Reibung der Luft so stark gebremst, dass sie schließlich mit konstanter Geschwindigkeit am Boden ankommen. Schwere Tropfen fallen schneller als leichte (► Kap. 3.5.1). Unter idealisierenden Annahmen kann man das rechnen, aber es ist mühsam und lohnt hier nicht. So viel ist sicher: Die Wirkung der Reibung wächst mit der Geschwindigkeit und verschwindet in der Ruhe. Darum fällt der Tropfen zu Beginn so, als fälle

er frei. Weil  $v$  aber schließlich konstant wird, biegt sein Graph in eine Horizontale ein. Folglich geht die Beschleunigung  $a(t)$  gegen null, während  $s(t)$  nach anfänglicher Krümmung in eine ansteigende Gerade übergeht (► Abb. 2.10). Auch kompliziertere Situationen lassen sich graphisch relativ leicht und übersichtlich darstellen, solange eine qualitative Beschreibung genügt.

### Rechenbeispiel 2.2: Fall vom Turm

► **Aufgabe.** Mit welcher Geschwindigkeit trifft ein Stein, der von einem 10 m hohen Turm fallengelassen wird, am Boden auf? Die Luftreibung kann hier vernachlässigt werden.

► **Lösung.** Bei konstanter Beschleunigung und Startgeschwindigkeit Null ist  $v = g \cdot t$ . Zunächst muss also die Fallzeit berechnet werden. Dazu benutzen wir:

$$s = 10 \text{ m} = \frac{g}{2} t^2, \text{ also } t = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \text{ m}}{9,81 \text{ m/s}^2}} = 1,43 \text{ s}.$$

Die Geschwindigkeit ist dann:  $v = 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 1,43 \text{ s} = 14,0 \text{ m/s}$ .

### Rechenbeispiel 2.3: Noch ein Wurf vom Turm

► **Aufgabe.** Nun werde der Stein mit  $v_0 = 15 \text{ m/s}$  horizontal vom Turm weggeworfen. Wie weit vom Turm trifft er auf und mit welcher Geschwindigkeit trifft er auf den Boden? Die Luftreibung sei vernachlässigbar, die horizontale Geschwindigkeit also konstant.

► **Lösung.** Die senkrechte Fallbewegung läuft völlig unabhängig von der horizontalen Bewegung ab. Die Ergebnisse des vorherigen Rechenbeispiels können also übernommen werden. Der Stein ist wieder 1,43 s in der Luft. Wenn die Luftreibung vernachlässigt werden kann, ist die horizontale Geschwindigkeit konstant, die Wurfweite also einfach:

$$s = v_0 \cdot t = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1,43 \text{ s} = 21,45 \text{ m}$$

Auch die senkrechte Geschwindigkeitskomponente ist immer die gleiche wie im vorherigen Rechenbeispiel. Die gesamte Auftreffgeschwindigkeit ergibt sich aus dem Pythagoras:

$$v_{\text{ges}} = \sqrt{\left(14,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(15,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 20,52 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

### 2.1.4 Drehbewegungen

Die reine Bahnbeschleunigung ändert nur den Betrag der Geschwindigkeit, nicht ihre Richtung. Der freie Fall lieferte ein Beispiel. Die reine Radialbeschleunigung ändert nur die Richtung einer Geschwindigkeit, nicht den Betrag; sie muss sich, wenn sie Radialbeschleunigung bleiben will, exakt mit dem Vektor der Geschwindigkeit mitdrehen, um stets senkrecht auf ihm zu stehen. Für den Sonderfall einer Radialbeschleunigung mit konstantem Betrag lässt sich das leicht erreichen. Sie führt nämlich zu einer Bahn mit konstanter Krümmung, zu einer Kreisbahn also, Beispiel Kettenkarussell (■ Abb. 2.47). Wie dessen Fahrgäste zu der notwendigen Beschleunigung kommen, kann erst in ► Kap. 2.3.6 besprochen werden.

Läuft ein Körper mit konstantem Betrag  $v$  seiner Geschwindigkeit  $\vec{v}$  auf einer Kreisbahn mit dem Radius  $r$  um, so legt er in der Umlaufzeit  $T$  den Kreisumfang  $2\pi \cdot r$  zurück und durchläuft den Drehwinkel  $2\pi$  (in Bogenmaß, vgl. ► Kap. 1.5.1):

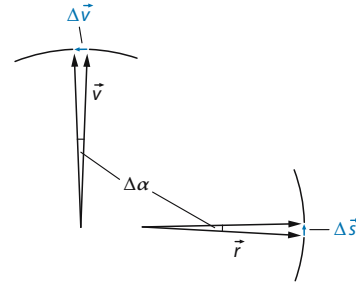
Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 2\pi/T = \text{const.}$

Betrag der Bahngeschwindigkeit

$$v = 2\pi r/T = \omega \cdot r = \text{const.}$$

$\omega$  wird auch **Kreisfrequenz** genannt, der Kehrwert der Umlaufzeit auch **Drehfrequenz**  $f$ ; das zuweilen benutzte Wort „Drehzahl“ ist insofern nicht korrekt, als es sich nicht um eine dimensionslose Zahl handelt, sondern eine reziproke Zeit, die mit der SI-Einheit 1/s gemessen werden kann, in der Technik aber auch gern in 1/min. Wenn der Zahnarzt bei seinem Turbinenbohrer auf den Knopf „60.000“ drückt, dreht sich der Bohrkopf nicht 60.000-mal in der Sekunde, sondern nur 1000-mal.

Radiusvektor  $\vec{r}$  und Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}$  eines kreisenden Massepunktes stehen stets senkrecht aufeinander und rotieren darum mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Beide drehen sich in der (kleinen) Zeitspanne  $\Delta t$  um den gleichen (kleinen) Winkel  $\Delta\alpha$  (■ Abb. 2.11). Um  $\vec{r}$  in seine neue Lage zu bringen, muss ihm das (kleine) Wegstück  $\Delta\vec{s}$  vektoriell addiert werden.  $\Delta\vec{s}$  steht im Wesentlichen senkrecht auf  $\vec{r}$ ; es tut dies sogar streng, wenn man es differentiell klein werden lässt. Dann fällt es auch mit dem ebenfalls dif-



■ **Abb. 2.11. Kreisbewegung.** Der Körper läuft gegen den Uhrzeiger und befindet sich auf seiner Bahn rechts („3 Uhr“). Der Vektor  $\vec{v}$  der Bahngeschwindigkeit zeigt nach oben und läuft dem Radiusvektor  $\vec{r}$  um  $90^\circ = \pi/2$  voraus. Beide drehen sich in der (kleinen) Zeitspanne  $\Delta t$  um den (kleinen) Winkel  $\Delta\alpha$ . Dazu müssen zu  $\vec{r}$  das (kleine) Wegstück  $\Delta\vec{s}$  mit  $\Delta s = r \cdot \Delta\alpha$  und zu  $\vec{v}$  die (kleine) Zusatzgeschwindigkeit  $\Delta\vec{v}$  mit  $\Delta v = v \cdot \Delta\alpha$  vektoriell addiert werden

ferentiell kleinen Kreisbogen zusammen, sodass man für den Betrag

$$ds = r \cdot d\alpha$$

schreiben darf. Ganz analog braucht der Geschwindigkeitsvektor  $\vec{v}$  eine zu ihm senkrecht zu addierende Zusatzgeschwindigkeit  $d\vec{v}$  mit dem Betrag

$$dv = v \cdot d\alpha.$$

Das entspricht einer radialen, stets auf den Mittelpunkt der Kreisbahn gerichteten Beschleunigung

$$\vec{a}_r = d\vec{v}/dt$$

mit dem Betrag

$$a_r = dv/dt = v \cdot d\alpha/dt = v \cdot \omega.$$

Wegen  $v = r \cdot \omega$  darf man dafür auch

$$a_r = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$$

schreiben. Wie sich die kreisende Masse diese ständig auf das Zentrum der Bahn zeigende **Zentralbeschleunigung** besorgt, bleibt zunächst offen. Jedenfalls ist eine Kreisbewegung auch dann eine ungleichförmig beschleunigte Bewegung (die Richtung der Beschleunigung ändert sich ständig), wenn sie mit „konstanter Geschwindigkeit“ erfolgt: Nur der Betrag der Geschwindigkeit ist konstant, nicht der Vektor.

## Merke

- Kreisbewegung: reine Radialbeschleunigung
- Bahnradius  $r$
- Umlaufzeit  $T$
- Drehfrequenz  $f = 1/T$
- Bahngeschwindigkeit
 
$$v = 2\pi \cdot r/T = 2\pi \cdot r \cdot f = \omega \cdot r$$
- Winkelgeschwindigkeit = Kreisfrequenz
 
$$\omega = d\alpha/dt = 2\pi \cdot f$$
- Radialbeschleunigung
 
$$a_r = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$$

### Rechenbeispiel 2.4: Kann es sein, dass sich die Erde dreht?

► **Aufgabe.** Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der Erde? Welche Radialbeschleunigung erfährt ein Mensch am Äquator? (Radius der Erde:  $6,38 \cdot 10^6$  m)

► **Lösung.** Die Erde dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit einmal am Tag um ihre Achse. Die Winkelgeschwindigkeit entspricht also der Kreisfrequenz:

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \text{ h}} = \frac{2\pi}{86400 \text{ s}} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

Daraus ergibt sich eine Bahngeschwindigkeit am Äquator von  $v = \omega \cdot r = 464 \text{ m/s} = 1670 \text{ km/h}$  (also ganz schön schnell). Die Radialbeschleunigung ist

$$a_r = \frac{v^2}{r} = 0,034 \text{ m/s}^2.$$

Sie ist zum Glück viel kleiner als die Fallbeschleunigung  $g$ . Wäre sie größer als  $g$ , so würde man davonfliegen (► Kap. 2.5.2). Bevor Newton seine Mechanik entwickelt hatte, galt es als schwerwiegendes Argument gegen eine Drehung der Erde, dass man bei so hohen Geschwindigkeiten doch wegfliegen müsste.

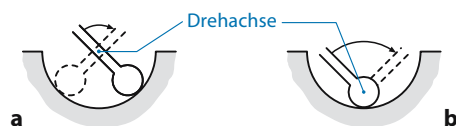
gegeben und leicht zu erkennen. Grundsätzlich kann sich ein Zahnrad so oft um seine Achse drehen, wie es will.

Auch bei den Scharnieren von Türen und Fenstern erkennt man die Drehachse leicht: ein fest mit der Tür verbundener zylindrischer **Zapfen** steckt in einer fest mit dem Rahmen verbundenen **Hülse**, einem Hohlzylinder mit praktisch gleichem Innendurchmesser. Drehachse ist die Zapfen- und Hülse gemeinsame Zylinderachse. Im Gegensatz zum Zahnrad wird hier aber der mögliche Drehwinkel mechanisch begrenzt.

Es liegt nahe, Gelenke des menschlichen Skeletts wie Ellbogen oder Knie als Scharniere anzusehen. Erlaubt ist das aber nur in grober Näherung. Die Anatomie zeigt nämlich, dass in solchen **Gelenken** die Oberfläche des „Zapfen“ stärker gekrümmt ist, einen kleineren Krümmungsradius besitzt, als die (meist nur unvollständig als Schale ausgebildete) „Hülse“. Die beiden Zylinderflächen haben weder gleichen Krümmungsradius noch gleichen Krümmungsmittelpunkt. Ein solches Gelenk kann weitaus flexibler reagieren als ein Scharnier, es muss aber durch Sehnen und Bänder, durch Muskel- und Gewichtskräfte zusammengehalten werden. Ohne diesen **Kraftschluss** fiel es auseinander. Dafür wird es aber bei Überbeanspruchung etwa durch einen Unfall nicht gleich zerstört, sondern meist nur ausgereckt.

Rein kinematisch und ohne Rücksicht auf Möglichkeiten der Realisierung kann man für die Bewegung eines solchen Gelenkes zwei Grenzfälle ausdenken (► Abb. 2.12):

der Zapfen gleitet *auf* der Schale, d. h. der Berührungspunkt wandert *nicht* auf dem Zapfen, sondern nur auf der Schale; deren Achse wird zur Drehachse des Gelenkes (► Abb. 2.12a); sie bildet den ruhenden *Pol* der Bewegung,



► **Abb. 2.12a,b.** Gelenkbewegung. Grenzfälle: **a** Ein fester Punkt des Zapfens gleitet auf der Fläche der Schale – Drehachse = Schalenachse. **b** Die Fläche des Zapfens gleitet auf einem festen Punkt der Schale – Drehachse = Zapfenachse

## 2.1.5 Bewegung von Gelenken

Jede Drehung erfolgt um eine Drehachse. In technisch einfachen Fällen wie etwa bei Zahnrädern ist diese als „Mechanikerachse“ konstruktiv vor-

der Zapfen gleitet *in* der Schale, d. h. der Berührungspunkt wandert *nicht* auf der Schale, sondern nur auf dem Zapfen; jetzt bildet dessen Achse die Drehachse des Gelenkes, den ruhenden Pol (■ Abb. 2.12b).

Die Natur entscheidet sich für Zwischenformen, mit überraschenden Konsequenzen: Die Drehachse bleibt während der Bewegung nicht als „ruhender Pol“ am Ort, sie verschiebt sich und durchläuft als **momentane Drehachse** eine **Polkurve**, die möglicherweise weit außerhalb des Gelenkes liegt.

Darüber hinaus stellt die Natur ihre Zapfen und Schalen nicht auf der Drehbank her und braucht darum, im Gegensatz zur Technik, Teilflächen rotationssymmetrischer Zylinder nicht zu bevorzugen. Dadurch schafft sie sich eine zusätzliche Möglichkeit, ihren Polkurven raffiniert zweckmäßige, leider aber oft nur schwer durchschaubare Formen zu geben. Nutzen lassen sich diese Möglichkeiten freilich nur mit einem ausgefeilten Regelsystem, das die Anspannung der beteiligten Muskeln nach den Meldungen von Sensoren in Muskeln, Sehnen und Gelenken sinnvoll steuert, ohne das Bewusstsein mit den Einzelheiten zu belästigen. Die Gelenke der Wirbeltiere sind weit mehr als einfache Scharniere.

## 2.2 Kraft, Drehmoment, Energie

### 2.2.1 Kräfte

Der Mensch weiß aus Erfahrung, ob er sich einen Kartoffelsack aufladen kann oder ob er dies besser lässt; er hat ein recht zuverlässiges Gefühl für **Kraft** seiner Muskeln. Hier verwendet der Sprachgebrauch des Alltags das Wort Kraft genau im Sinn der Physik.

An eine allgegenwärtige Kraft hat sich jedes irdische Leben anpassen müssen: an die Schwerkraft, die Kraft des Gewichtes, die jeden materiellen Gegenstand nach unten zieht. Wer ein Buch vor sich in der Schwebe hält, um darin zu lesen, setzt die Muskelkraft seiner Arme gegen die Gewichtskraft des Buches ein. Beide Kräfte müssen sich genau kompensieren, wenn das Buch in der Schwebe bleiben, wenn es zu keinen Bewegungen kommen soll.

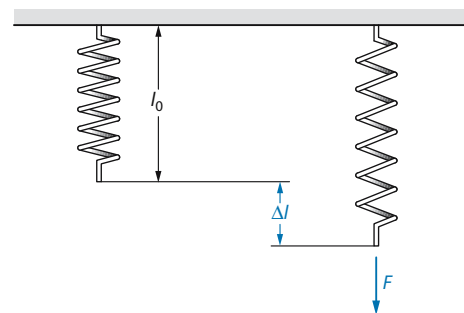
#### Merke

Statisches Gleichgewicht: Kraft + Gegenkraft = 0.

Jede Gewichtskraft zieht nach unten; eine sie kompensierende Gegenkraft muss mit gleichem Betrag nach oben gerichtet sein. Kräfte sind demnach Vektoren. Wie misst man ihre Beträge?

Wer sich ins Bett legt, braucht seine Gewichtskraft nicht mehr selbst zu tragen; er überlässt es den Stahlfedern der Matratze, die nötige Gegenkraft aufzubringen, irgendwie. Je nach Konstruktion tun sie dies durch Stauchung oder durch Dehnung, auf jeden Fall also durch **Verformung**. Solche Verformungen bleiben oft unerkannt. Wer sich auf eine Bank setzt, biegt sie nicht merklich durch, aber er biegt sie durch, und mit einigem messtechnischen Aufwand lässt sich das auch nachweisen. Wenn man aufsteht, federt die Bank wieder in ihre Ausgangslage zurück: Die Verformung war **elastisch**, im Gegensatz zu der bleibenden, der **plastischen** Verformung von Butter oder Kaugummi. Vater Franz biegt die Bank stärker durch als Töchterchen Claudia; elastische Verformungen liefern ein verwendbares Maß für angreifende Kräfte. Besonders bewährt haben sich Schraubenfedern (■ Abb. 2.13).

Wer einen Kraftmesser kalibrieren will, braucht ein Verfahren zur Erzeugung definierter Kräfte; wer ihn obendrein noch eichen will, braucht zusätzlich eine Krafteinheit. Es liegt nahe, für beides die allgegenwärtige Schwerkraft zu be-



■ **Abb. 2.13. Schraubenfeder.** Eine Kraft  $F$  dehnt eine Feder der Ausgangslänge  $l_0$  um  $\Delta l$ . Lineares Kraftgesetz herrscht, wenn  $\Delta l$  und  $F$  zueinander proportional sind:  $F = D \cdot \Delta l$  ( $D$  = Federkonstante)



nutzen. Vier Liter Wasser wiegen gewiss doppelt so viel wie zwei Liter Wasser, und die Gewichtskraft eines Liters Wasser ließe sich grundsätzlich als Einheit verwenden. Das hat man früher auch getan und ihr den Namen **Kilopond** (kp) gegeben. Den Anforderungen moderner Messtechnik genügt diese Einheit aber nicht mehr, denn leider erweisen sich Gewichtskräfte als ortsabhängig: In Äquaturnähe wiegt ein Liter Wasser etwas weniger als in Polnähe. Die SI-Einheit der Kraft heißt **Newton**, abgekürzt 1 N. Ihre Definition kann erst in ► Kap. 2.3.1 besprochen werden.

Eine Schraubenfeder der Länge  $l_0$  dehnt sich unter einer Zugkraft  $\vec{F}$  mit dem Betrag  $F$  um  $\Delta l$  auf  $l(F) = l_0 + \Delta l(F)$ . Geeichte Federwaagen folgen dabei dem **linearen Kraftgesetz**

$$F = D \cdot \Delta l$$

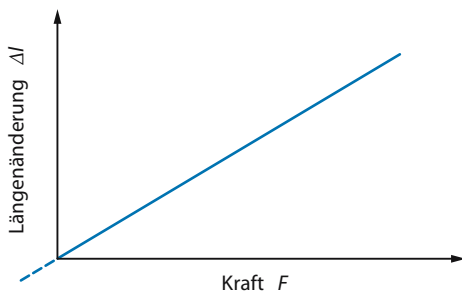
oder auch

$$l(F) = l_0 + F/D.$$

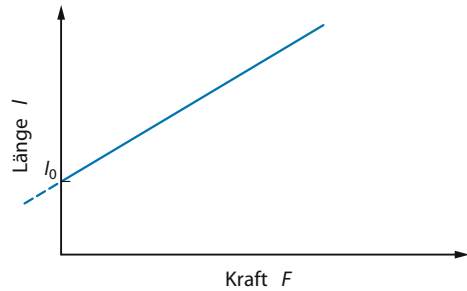
Hier bezeichnet  $D$  die **Federkonstante**, eine Kenngröße der jeweiligen Schraubenfeder.

Federkonstante  $D$ ; Einheit: 1 N/m

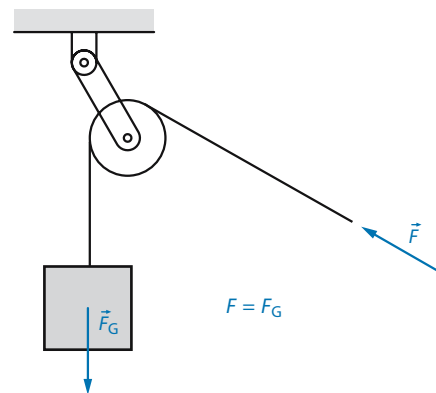
Längenänderung  $\Delta l$  und ihre **Dehnung**  $\Delta l/l_0$  der Feder sind also über die Federkonstante  $D$  der angreifenden Kraft  $F$  proportional; im Diagramm gibt jede **Proportionalität** eine Gerade durch den Nullpunkt des Achsenkreuzes (► Abb. 2.14). Zwischen  $F$  und der gesamten Länge  $l$  der Feder besteht hingegen keine Proportionalität, sondern nur ein **linearer Zusammenhang**. Er gibt im Diagramm ebenfalls eine Gerade; sie läuft aber nicht



■ Abb. 2.14. **Lineares Kraftgesetz**. Schraubenfeder: Proportionalität zwischen Längenänderung  $\Delta l$  und damit auch zwischen Dehnung  $\Delta l/l_0$  und Kraft  $F$ . Grundsätzlich kann eine Schraubenfeder auch gestaucht werden (gestrichelter Teil)



■ Abb. 2.15. **Lineares Kraftgesetz**. Linearer Zusammenhang zwischen Federlänge  $l$  und Kraft  $F$



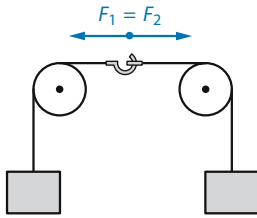
■ Abb. 2.16. **Umlenken der Gewichtskraft**  $F_G$ ; durch Seil und Rolle in eine beliebige Richtung. Der Betrag der Kraft bleibt unverändert

durch den Nullpunkt, besitzt vielmehr einen **Achsenabschnitt** (► Abb. 2.15).

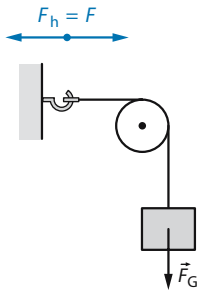
Die Schwerkraft (Gewichtskraft) zieht immer nach unten; so ist „unten“ definiert. Durch Seil und Rolle kann ihre Wirkung aber leicht in jede gewünschte Richtung umgelenkt werden, wie ► Abb. 2.16 zeigt. Kräfte sind eben Vektoren. Zwei entgegengesetzt gleiche horizontale Kräfte, nach ► Abb. 2.17, erzeugt durch zwei gleiche Gewichte an den Enden eines Seiles, heben sich auf; das System bleibt in Ruhe, es herrscht **Gleichgewicht**. Das System bleibt auch dann in Ruhe, wenn man das eine Gewicht durch einen Haken in der Wand ersetzt (► Abb. 2.18). Jetzt müssen Haken und Wand die zum Gleichgewicht nötige Gegenkraft aufbringen, durch elastische Verformung.

Seile lassen sich nur auf Dehnung beanspruchen, nicht auf Stauchung. Infolgedessen können

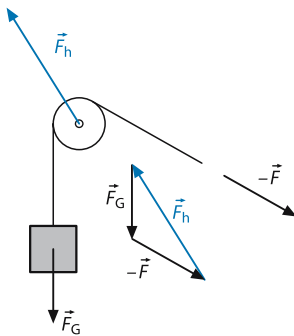




■ Abb. 2.17. Kraft = Gegenkraft

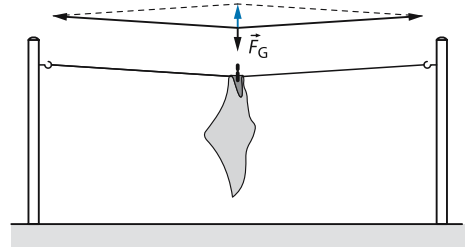


■ Abb. 2.18. Gleichgewicht. Erzeugung der zum Gleichgewicht notwendigen Gegenkraft  $F_h$  durch Verformung von Haken und Wand

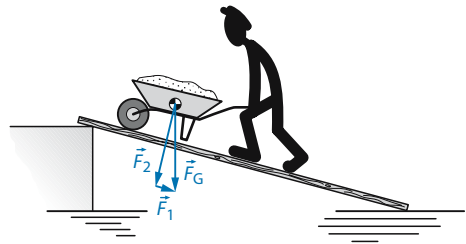


■ Abb. 2.19. Vektoraddition von Kräften. Beispiel der  
 ■ Abb. 2.15. Die Kräfte  $\vec{F}_G$  und  $-\vec{F}$  werden durch die Gegenkraft der Halterung der Rolle  $\vec{F}_h$  kompensiert

sie Kräfte nur in ihrer Längsrichtung übertragen. Werden sie wie in ■ Abb. 2.16 über eine Rolle geführt, so muss die Halterung der Rolle die Vektorsumme der beiden dem Betrag nach gleichen Kräfte  $\vec{F}_G$  und  $-\vec{F}$  aufnehmen und durch eine Gegenkraft  $\vec{F}_h$  kompensieren (■ Abb. 2.19). Die drei Kräfte  $\vec{F}_G$ ,  $-\vec{F}$  und  $\vec{F}_h$  bilden aneinandergesetzt ein geschlossenes Dreieck, sie summieren sich also zu Null, wie es im Gleichgewicht eben sein muss.



■ Abb. 2.20. Wäscheleine. Eine straffe Wäscheleine steht unter hoher Spannung, damit die Gewichtskraft  $\vec{F}_G$  von der Vektorsumme (blau) der Kräfte in der Leine kompensiert werden kann



■ Abb. 2.21. Schiefe Ebene. Nur die Komponente  $\vec{F}_1$  der Gewichtskraft  $\vec{F}_G$  parallel zur Latte muss beim Schieben überwunden werden; die Komponente  $\vec{F}_2$  wird von der Latte übernommen

Auch mehr als drei Kräfte können sich die Waage halten, dann nämlich, wenn sich ihr **Kräftepolygon** schließt: Zeichnet man die Kraftpfeile hintereinander, so muss die Spitze des letzten mit dem Anfang des ersten zusammenfallen. Die erste Bedingung dafür, dass sich nichts bewegt, lässt sich demnach kurz und allgemein schreiben als

$$\sum_i \vec{F}_i = 0$$

Bei unglücklicher Geometrie müssen auch geringe Kräfte nur durch relativ große Gegenkräfte gehalten werden. Musterbeispiel ist die Wäscheleine (■ Abb. 2.20): Je straffer man sie spannt, umso größer müssen die Kräfte in der Leine sein, damit ihre Vektorsumme (blau) die Gewichtskraft des Handtuchs noch kompensieren kann. Auf der anderen Seite spart eine **schiefe Ebene** Kraft: Über eine schräge Latte (■ Abb. 2.21) kann der Arbeiter eine Schubkarre auf das Baugerüst bugsieren, obwohl er sie nicht hochheben könnte. Er muss nur gegen die Komponente  $\vec{F}_1$  der Gewichtskraft  $\vec{F}_G$  parallel zur Latte anschieben. Die Komponente

$\vec{F}_2$  senkrecht zur Latte wird von den Verformungskräften der Latte kompensiert.

2

## 2.2.2 Gewichtskraft und Gravitation

Die Behauptung, eine Federwaage kompensiere mit der elastischen Kraft ihrer Schraubenfeder die **Gewichtskraft** der angehängten Last, sagt nur die halbe Wahrheit. Um eine Feder zu dehnen, muss man an beiden Enden ziehen. Die Federwaage funktioniert nur, wenn sie am oberen Ende festgehalten wird. Dort überträgt sie ihre Federkraft (plus eigene Gewichtskraft) auf die Halterung. Diese stützt sich ihrerseits über Gestell, Tischplatte, Fußboden und Mauerwerk auf den Baugrund, überträgt also mit all den zugehörigen Gewichtskräften auch die der Last an der Federwaage auf die Erde. Woher nimmt diese jetzt die Gegenkraft?

Ursache aller Gewichtskräfte ist die **Gravitation**, eine in ihren Details noch nicht völlig erforschte Eigenschaft der Materie, nur mit deren Masse verknüpft, also mit der in Kilogramm gemessenen physikalischen Größe, und nicht mit der chemischen Natur der Materie oder mit ihrem Aggregatzustand. Die Gravitation beherrscht die Himmelsmechanik, den Lauf der Planeten um die Sonne, den Lauf der Sonne um das Zentrum der Milchstraße, den Lauf der Wettersatelliten um die Erde. Ihre Wirkung sind durch nichts beeinflussbare Kräfte, mit denen sich alle materiellen Körper gegenseitig anziehen.

Das **Gravitationsgesetz** besagt: Zwei Massen  $m_1$  und  $m_2$  im Abstand  $r$  ziehen sich gegenseitig mit einer Kraft  $\vec{F}$  parallel zu der Verbindungslinie zwischen den Massen an, die zu beiden Massen proportional ist und umgekehrt proportional zu  $r^2$ :

$$F_G = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

Hier erscheint die

**Gravitationskonstante**  $G = 6,68 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ .

### Merke

Gravitation: Massen ziehen sich an (Naturgesetz). Gravitationskraft:

$$F_G = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Die Gravitation der Erde wirkt weit hinaus in den Weltraum, sie wirkt aber auch auf alle Gegenstände im Lebensraum des Menschen. Dadurch wird jeder Stein, jeder Mensch, jeder Kartoffelsack von der Erde mit seiner jeweiligen Gewichtskraft  $F_G$  angezogen und zieht seinerseits die Erde mit der gleichen starken, aber entgegengesetzten Kraft an! Das scheint auf den ersten Blick unplausibel. Aber die Erde hat ja eine viel größere Masse als der Sack und reagiert deshalb auf die Anziehungskraft praktisch nicht.

Die Gewichtskräfte, an die der Mensch sich gewöhnt hat, werden durch Masse und Radius der Erdkugel bestimmt und sind, dem Gravitationsgesetz zufolge, der Masse  $m$  des Probekörpers streng proportional. Einsetzen der Größen liefert im Mittel:

$$F_G = m \cdot 9,81 \text{ N/kg}.$$

Die Konstante ist genau die Fallbeschleunigung  $g$  aus ► Kap. 2.1.3. Das ergibt sich aus dem 2. Newton'schen Gesetz, das aber erst in ► Kap. 2.3 behandelt wird.

### Merke

Schwerkraft = Masse mal Fallbeschleunigung

$$F_G = m \cdot g$$

■ ■ ■ Wäre die Erde eine mathematische Kugel mit homogen verteilter Massendichte, so wäre die letzte Gleichung überall auf der Erdoberfläche mit dem gleichen Zahlenwert gültig. Tatsächlich gilt aber in Djakarta  $F_G/m = 9,7818 \text{ N/kg}$  und am Nordpol  $F_G/m = 9,8325 \text{ N/kg}$ .

## 2.2.3 Arbeit und Energie

Es macht Mühe, eine Last zu heben; herunter fällt sie von allein. Aber auch, wenn die Last wieder herunterfällt, war doch die Mühe des Anhebens nicht ganz vergebens, denn beim Herunterfallen kann etwas bewirkt werden und sei es nur, dass die Last kaputtgeht. Die Physik beschreibt diese Vorgänge mit den Größen **Arbeit** und **Energie**. Mensch oder Kran leisten beim Heben der Last **Arbeit** oder **Hubarbeit**, die von der Last als **potentielle Energie** gespeichert wird. Beim Herabfallen,

-rollen oder -gleiten wird dann diese Energie wieder freigesetzt. Der Begriff Arbeit ist in der Physik eine recht klar und einfach definierte Größe und wird viel enger verstanden als in der Umgangssprache. Die zu leistende Hubarbeit ist umso größer, je höher die Hubhöhe  $\Delta h$  ist, um die die Last gehoben wird. Das Heben einer schwereren Last mit größerer Gewichtskraft  $F_G$  bedarf auch einer größeren Arbeit. Es liegt also nahe, die Hubarbeit  $W$  als das Produkt aus beidem festzulegen:

$$W = F_G \cdot \Delta h$$

Hebt man die Last mit einem Flaschenzug an (Abb. 2.22), so spart man Kraft, Arbeit spart man nicht. Zwar ist die Kraft  $F$ , mit der gezogen werden muss, aufgrund der trickreichen Rollenkonstruktion geringer als die Gewichtskraft  $F_G$ , aber das Seil muss auch die längere Strecke  $s$  gezogen werden. Das Produkt aus beidem bleibt gleich:

$$W = F \cdot s = F_G \cdot \Delta h$$

■ ■ ■ Im Flaschenzug verteilt sich die Gewichtskraft  $F_G$  der Last gleichmäßig auf die  $n$  Teilstücke des Seiles. Die Gegenkraft  $F$  braucht deshalb nur die Teilkraft  $F_G/n$  zu kompensieren. Zum Heben der Last um  $\Delta h$  muss freilich jedes Teilstück des Seiles entsprechend verkürzt werden, das gesamte Seil also um  $s = n \cdot \Delta h$ .

Die durch das Heben der Last hinzugewonnene **potentielle Energie**  $\Delta W_{\text{pot}}$  entspricht gerade dieser geleisteten Hubarbeit. Man kann also auch schreiben:

$$\Delta W_{\text{pot}} = F_G \cdot \Delta h.$$

Arbeit und Energie haben die gleiche Einheit und sind eng verwandt.

#### Merke

Potentielle Energie beim Heben:

$$\Delta W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot \Delta h$$

Aus diesem Zusammenhang folgt, dass die Energie in der Einheit **Newtonmeter (Nm)** gemessen werden kann. Sie wird auch **Joule (J)** genannt und ist per definitionem gleich der **Wattsekunde (Ws)**, der Einheit der elektrischen Energie. Für den mo-

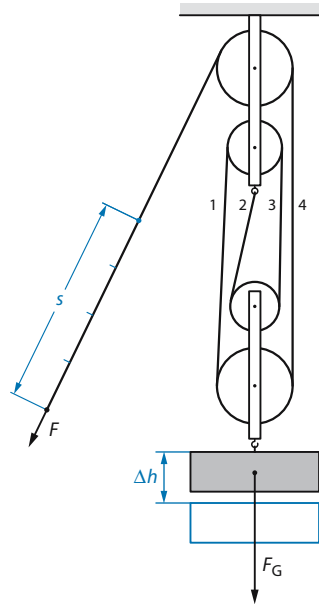


Abb. 2.22. Flaschenzug (Einzelheiten im Text)

deren Alltag ist sie zu klein; dort benutzt man lieber die **Kilowattstunde** ( $1 \text{ kWh} = 3.600.000 \text{ J}$ ). Sie hat einen Kleinhandelswert von etwa 12 Cent. Im Lebensmittelbereich taucht manchmal noch die **Kalorie (cal)** auf, in der Atomphysik das **Elektronenvolt (eV)**.

#### Merke

SI-Einheit der Energie: **Newtonmeter (Nm)** = **Joule (J)** = **Wattsekunde (Ws)**

Weitere Einheiten:

Kilowattstunde:  $1 \text{ kWh} = 3.600.000 \text{ J}$

Elektronenvolt:  $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

Kalorie  $1 \text{ cal} = 4,184 \text{ J}$

Anders als Arbeit ist Energie ein recht komplizierter und sehr vielschichtiger Begriff in der Physik. Energie hat die bemerkenswerte Eigenschaft, in mancherlei unterschiedlichen Formen auftreten zu können und sich von der einen in die andere überführen zu lassen; insofern ist sie wandelbar. Sie kann aber weder geschaffen noch vernichtet werden; insofern ist sie unwandelbar, ihr Betrag bleibt konstant.

Ohne **elektrische Energie**, leicht zugänglich bereitgestellt von jeder Steckdose, kann sich mancher ein Leben gar nicht mehr vorstellen. Gewonnen wird sie überwiegend aus **chemischer Energie**, durch Verbrennung von Kohle und Erdöl nämlich. Auch Mensch und Tier decken den Energiebedarf ihres Organismus aus chemischer Energie, enthalten in der Nahrung. Pflanzen haben sie vorher gespeichert, aus von der Sonne stammender **Strahlungsenergie**. Die Sonne bezieht sie aus **Kernenergie**, die grundsätzlich bei jeder spontanen Umwandlung von chemischen Elementen durch Radioaktivität, Kernspaltung oder Kernfusion frei wird. Im Gedankenversuch auf dem Papier lässt sich Energie aus jeder Form vollständig in jede andere Form überführen; in der Praxis bleibt freilich stets mehr oder weniger **Wärmeenergie** übrig.

Die eben besprochene **potentielle Energie** beim Heben ist in dieser Liste nur eine Sonderform der **mechanischen Energie**, die immer dann umgesetzt wird, wenn irgendwer irgendwas gegen irgendeine Kraft verschiebt, z. B. einen Wagen gegen die Reibungskraft seiner Räder, das Ende einer Schraubenfeder gegen deren elastische Kraft oder auch sich selbst die Treppe hinauf gegen die eigene Gewichtskraft.

Ist die Kraft  $F$  nicht konstant wie die Gewichtskraft  $F_G$  beim Heben, sondern eine Funktion  $F(s)$  der Position  $s$ , so genügt die einfache Multiplikation zur Berechnung der Arbeit nicht mehr; die Fläche unter dem Funktionsgraphen  $F(s)$  muss durch Integration bestimmt werden:

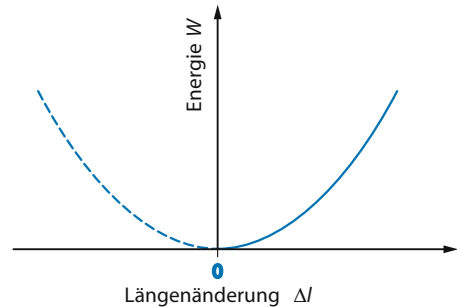
$$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s) \cdot ds$$

Bei der Schraubenfeder mit ihrem linearen Kraftgesetz  $F(s) = D \cdot s$  (► Kap. 2.2.1) ergibt sich die potentielle Energie der zusammengedrückten Feder analog zum freien Fall (► Kap. 2.1.3):

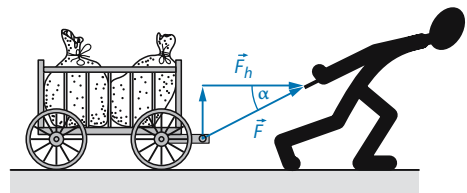
$$W_{\text{pot}}(s) = \frac{1}{2} D \cdot s^2 + W_0$$

Als Graph kommt also eine Parabel heraus (► Abb. 2.23).

Hier zeigt sich eine merkwürdige Eigenschaft der potentiellen Energie:  $W_{\text{pot}}$  lässt sich überhaupt nur definieren bis auf eine **willkürliche additive Konstante**  $W_0$ ; es ist grundsätzlich gleichgültig, ob man den Nullpunkt der potentiellen Ener-



► Abb. 2.23. Potentielle Energie einer Feder. Zum linearen Kraftgesetz einer Schraubenfeder (► Abb. 2.13) gehört eine parabolische Abhängigkeit der potentiellen Energie von der Dehnung (Stauchung gestrichelt)



► Abb. 2.24. Ziehen: Nur die horizontale Komponente der Zugkraft leistet Arbeit

gie der angehobenen Last auf die Oberkante des Labortisches, auf Meereshöhe, auf das Zentrum der Erde oder auf sonst ein Niveau bezieht. Änderungen der potentiellen Energie werden von der Wahl des Nullpunkts nicht beeinflusst.

Kräfte sind Vektoren, die Energie ist ein Skalar. Wer sich nach Art der ► Abb. 2.24 vor einen Wagen spannt, zieht um den Winkel  $\alpha$  schräg nach oben. Mit der vertikalen Komponente seiner Zugkraft  $F$  entlastet er lediglich die Vorderachse seines Wagens; nur die horizontale Komponente mit dem Betrag

$$F_h = F \cdot \cos \alpha$$

dient dessen Bewegung. Sie allein zählt bei der Berechnung der geleisteten Arbeit:

$$W = F \cdot \Delta s \cdot \cos \alpha.$$

Diese Formel lässt offen, ob man die Komponente der Kraft in Richtung des Weges in sie eingesetzt hat oder die Komponente des Weges in Richtung der Kraft. Mathematisch handelt es sich um das **skalare Produkt** der beiden Vektoren  $\vec{F}$  und

$\vec{s}$  (► Kap. 1.4). Sind  $F$  und  $\alpha$  nicht konstant, muss integriert werden, und zwar über dieses skalare Produkt zweier Vektoren. Es ergibt sich ein sog. Linienintegral, das man sich nicht mehr so ohne weiteres als eine Fläche unter einem Funktionsgraphen vorstellen kann. Es bedeutet, dass man den Gesamtweg in viele kurze fast gerade Wegstücke zerlegt und dann die auf diesen Wegstücken geleistete Arbeit summiert.

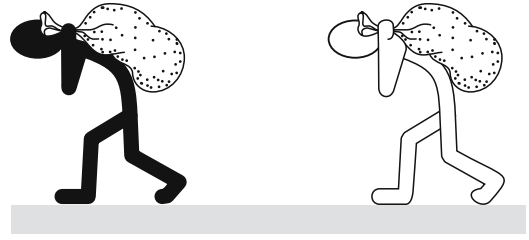
Ohne Weg keine Arbeit! Als „Weg“ zählt aber nur dessen Komponente in Richtung der Kraft. Wer sich einen Mehlsack auf die Schultern lädt, leistet Arbeit, Hubarbeit nämlich. Wer den Sack dann aber streng horizontal über den Hof trägt (► Abb. 2.25), leistet im Sinn der Mechanik keine Arbeit mehr. Dass er trotzdem ermüdet, ist seine Ungeschicklichkeit: Hätte er einen Wagen gebaut und sorgfältig alle Reibung vermieden, so hätte er den Sack, einmal aufgeladen, mit dem kleinen Finger über den Hof schieben können, ohne Arbeit, weil (praktisch) ohne Kraft. Weg und Gewichtskraft stehen senkrecht aufeinander, ihr skalares Produkt ist null.

### Merke

„Arbeit = Kraft · Weg“:  $W = F \cdot \Delta s$

### Klinik

**Halten macht auch Mühe.** Reine Haltebetätigung leistet keine mechanische Arbeit; der Weg fehlt. Für sie Energie einzusetzen, ist Verschwendung, kann aber manchmal nicht verhindert werden. Das gilt zum Beispiel für **Muskeln**. Sie können sich unter Kraftentwicklung zusammenziehen und dabei mechanische Arbeit leisten, beim Klimmzug etwa oder beim Aufrichten aus der Kniebeuge. Ein Muskel muss aber auch dann Energie umsetzen, wenn er sich lediglich von einer äußeren Kraft nicht dehnen lassen will. Die Natur hat Mensch und Tier so konstruiert, dass im Allgemeinen nur wenig Muskelarbeit für reine Haltebetätigung eingesetzt werden muss. Wer aufrecht steht, den trägt im Wesentlichen sein Skelett. Wer aber in halber Kniebeuge verharrt, dem zittern bald die Knie.



► Abb. 2.25. Keine Arbeit: Wer einen Mehlsack horizontal über den Hof trägt, leistet keine mechanische Arbeit gegen die Schwerkraft

So wandelbar die Erscheinungsformen der Energie sind, so unwandelbar ist ihr Betrag. Der „Satz von der Erhaltung der Energie“, der **Energiesatz** also, gilt zuverlässig.

### Merke

**Energiesatz:** Energie kann weder ins Nichts verschwinden noch aus dem Nichts entstehen, sie kann lediglich von einer Energieform in eine andere umgewandelt werden.

Keinem Naturgesetz ist so viel Aufmerksamkeit gewidmet, keines ist so oft und so sorgfältig überprüft worden wie der Energiesatz. Schon bevor er entdeckt wurde, haben zahlreiche Erfinder vergeblich versucht, ihn durch die Konstruktion eines **Perpetuum mobile** experimentell zu widerlegen. Darum darf man sich von häufig benutzten Vokabeln wie „Energieerzeugung“ oder „Energieverbrauch“ nicht irreleiten lassen.

Wer arbeitet, leistet etwas; wer schneller arbeitet, leistet mehr. Nach diesem Satz leuchtet die folgende Definition der physikalischen Größe **Leistung** unmittelbar ein:

$$\text{Leistung } P = \frac{\text{Energie } dW}{\text{Zeitspanne } dt'}$$

SI-Einheit ist Joule/Sekunde = Watt = W.

### Merke

Leistung  $P = dW/dt'$   
SI-Einheit 1 J/s = 1 Watt = 1 W.

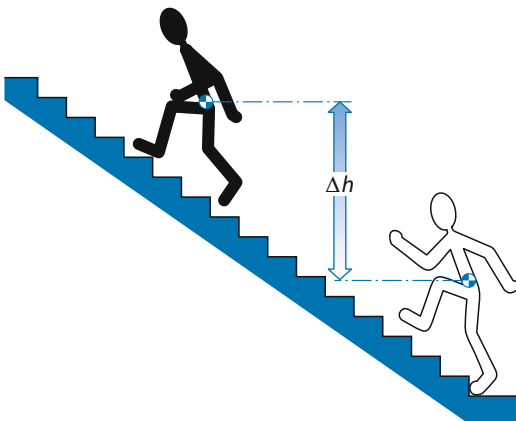
Um die Reaktionen des menschlichen Organismus auf körperliche Belastung zu untersuchen, benutzt der Sportarzt gern das sog. **Fahrradergometer**. Man setzt sich auf den Sattel eines stationären „Fahrrades“ und hält die Tretkurbel in Gang. Die dem Sportler dabei abverlangte Leistung wird von einer Elektronik auf voreingestellten Werten konstant gehalten. 20 W, einer schwachen Nachtlampe entsprechend, sind leicht zu leisten; 100 W, notwendig für eine kräftige Arbeitsplatzbeleuchtung, machen schon einige Mühe. 500 W für einen Toaster kann der Mensch nur für kurze Zeit liefern. Wollte man die so gewonnene elektrische Energie verkaufen, so käme man allenfalls auf einen Cent Stundenlohn; der Mensch ist zu wertvoll, um als reine Muskelkraftmaschine verschlissen zu werden. Übrigens kann man auch ohne Ergometer die Leistungsfähigkeit seiner Beine überprüfen: Man muss nur mit der Stoppuhr in der Hand eine Treppe hinauflaufen (■ Abb. 2.26).

### Rechenbeispiel 2.5: Kleinwagen

► **Aufgabe.** Ein flotter Kleinwagen wiege 1000 kg und habe eine maximale Motorleistung von 66 kW (entspricht 90 PS). Wie schnell kann er günstigstenfalls einen 500 m hohen Berg hinauffahren?

► **Lösung.** Die zu leistende Hubarbeit ist  $W = h \cdot m \cdot g = 500 \text{ m} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot g = 4,9 \cdot 10^6 \text{ J}$ . Leistet das Auto konstant 66 kW, so braucht es für diese Arbeit die Zeit

$$t = \frac{4,9 \cdot 10^6 \text{ J}}{66 \text{ kW}} = 74,3 \text{ s}.$$



■ Abb. 2.26. Leistung beim Treppesteigen

## 2.2.4 Kinetische Energie

Lässt man einen Stein (der Masse  $m$ ) fallen, so verliert er potentielle Energie. Wo bleibt sie, da Energie doch nicht verschwinden kann? Lässt man einen Stein fallen, so gewinnt er Geschwindigkeit  $\vec{v}$ ; zu ihr gehört

$$\text{kinetische Energie } W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2.$$

■■■ Dass diese Definition zumindest insofern vernünftig ist, als sie sich mit Energiesatz und Fallgesetz verträgt, sieht man leicht: Nach der Fallzeit  $\Delta t$  hat der Stein die Geschwindigkeit  $v = g \cdot \Delta t$  erreicht, die Strecke  $\Delta s = \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2$  durchfallen und die potentielle Energie

$$m \cdot g \cdot \Delta s = m \cdot g \cdot \frac{1}{2} g \cdot \Delta t^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot g^2 \cdot \Delta t^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

in kinetische Energie umgesetzt.

### Merke

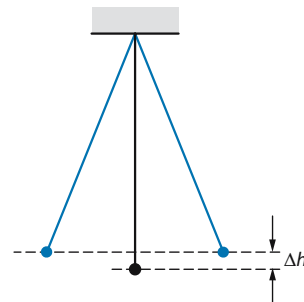
Kinetische Energie

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Ein Musterbeispiel für ständige Umwandlung kinetischer Energie in potentielle und umgekehrt liefert das Fadenpendel (■ Abb. 2.27). Die erste Auslenkung von Hand hebt den Schwerpunkt der Kugel um die Hubhöhe  $\Delta h$  an, erhöht also die potentielle Energie um

$$\Delta W_{\text{pot}} = m g \Delta h.$$

Dieser Betrag ist dann voll in kinetische Energie umgewandelt worden, wenn das Pendel durch



■ Abb. 2.27. Energieerhaltung beim Fadenpendel. Beide Umkehrpunkte liegen um die gleiche Höhe  $\Delta h$  über dem Tiefstpunkt der Ruhelage

seine Ruhelage schwingt; es tut dies mit der Geschwindigkeit  $v_0$ :

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = \Delta W_{\text{pot}}$$

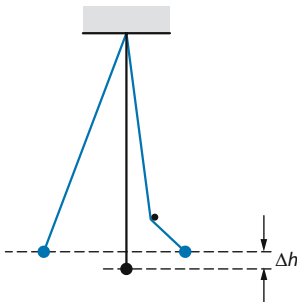
Daraus folgt

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot \Delta W_{\text{pot}} / m} = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h}$$

Hinter der Ruhelage wandelt sich kinetische Energie wieder in potentielle um, und zwar so lange, bis die Pendelkugel in ihrem Umkehrpunkt zur Ruhe kommt. Sie tut dies auf der Höhe  $\Delta h$  über dem Tiefstpunkt. Von nun an wiederholt sich das Spiel periodisch. Auf die Höhe  $\Delta h$  steigt die Kugel auch dann, wenn man ihrem Faden ein Hindernis in den Weg stellt (**Fangpendel** – ■ Abb. 2.28).

Die Geschwindigkeit  $v_0$ , mit der das Pendel durch seine Ruhelage schwingt, hängt nur von der Hubhöhe  $\Delta h$  ab, nicht von der Masse, nicht von der Fadenlänge, nicht von der Form der Bahn.  $v_0$  stimmt mit der Geschwindigkeit eines Körpers überein, der die Strecke  $\Delta h$  aus der Ruhe frei durchfallen hat. Hier zeigt sich der Vorteil einer so allgemein gültigen Beziehung wie der des Energiesatzes: das Kind auf der Schaukel, der Skispringer am Schanzentisch, der Wagen der Achterbahn, der Apfel, der vom Baum fällt: für alle Geschwindigkeiten gilt das gleiche Gesetz ...

... sofern man die Reibung vernachlässigen darf. Reibung führt zu einer Kraft, die die Bewegung abbremst (► Kap. 2.3.2). Auch gegen diese Reibungskraft muss Arbeit geleistet werden; früher oder später zehrt sie die kinetische Energie jeder sich selbst überlassenen Bewegung auf und



■ Abb. 2.28. Energieerhaltung beim Fangpendel. Auch jetzt liegen beide Umkehrpunkte auf gleicher Höhe und um  $\Delta h$  über dem Tiefstpunkt

wandelt sie in Wärme um. Auch zur Wärme gehört kinetische Energie, die der ungeordneten Bewegung einzelner Atome und Moleküle nämlich. Diese Unordnung hat aber eine so grundsätzliche Bedeutung, dass die Wärme mit vollem Recht als eigene Energieform angesehen wird.

### Rechenbeispiel 2.6: Beschleunigung des flotten Kleinwagens

► **Aufgabe.** Unser Kleinwagen ( $m = 1000$  kg, Motorleistung  $66$  kW) beschleunige aus dem Stand  $10$  Sekunden lang mit maximaler Leistung. Welche Geschwindigkeit hat er dann erreicht? Reibung wollen wir in dieser Abschätzung vernachlässigen.

► **Lösung.** Die vom Motor geleistete Arbeit erhöht die kinetische Energie des Autos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \cdot v^2 &= 66 \text{ kW} \cdot 10 \text{ s} \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{2 \cdot 66 \text{ kW} \cdot 10 \text{ s}}{1000 \text{ kg}}} = 36,3 \text{ m/s} = 130,8 \text{ km/h} \end{aligned}$$

### Rechenbeispiel 2.7: Ein letzter Wurf vom Turm

► **Aufgabe.** Nun haben wir noch eine andere Art kennen gelernt, wie wir im Rechenbeispiel 2.3 (horizontaler Wurf vom Turm mit  $v_0 = 15$  m/s) die Auftreffgeschwindigkeit auf den Boden berechnen können. Es geht auch mit dem Energiesatz. Wie?

► **Lösung.** Der Stein startet mit der kinetischen Energie  $\frac{1}{2} m \cdot v_0^2$ . Beim Fallen vom Turm wird zusätzlich noch die potentielle Energie  $m \cdot g \cdot 10 \text{ m}$  in kinetische Energie umgewandelt. Die gesamte kinetische Energie beim Auftreffen ist also:  $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot 10 \text{ m}$ . Daraus ergibt sich für die Geschwindigkeit  $v$  beim Auftreffen:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2g \cdot 10 \text{ m} \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\left(15 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + 2g \cdot 10 \text{ m}} = 20,5 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Das hatten wir schon einmal herausbekommen. Der Abwurfwinkel geht in diese Rechnung gar nicht ein. Die Auftreffgeschwindigkeit ist tatsächlich immer gleich, unabhängig davon, in welche Richtung wir werfen. Nicht unabhängig vom Winkel ist natürlich die Wurfweite. Bei ihrer Berechnung hilft der Energiesatz nicht.



Kinetische Energie wandelt sich freiwillig in Wärme um, immer und unvermeidlich: Vollkommen lässt sich Reibung nicht ausschalten. Zuweilen wird sie sogar dringend gebraucht, z. B. dann, wenn ein schnelles Auto plötzlich abgebremst werden muss, um eine Karambolage zu vermeiden. Dann soll sich viel kinetische Energie rasch in Wärme umwandeln: Die Bremsen werden heiß. Gelingt dies nicht schnell genug, so entsteht die restliche Wärme bei plastischer Verformung von Blech.

### 2.2.5 Hebel und Drehmoment

Die Skelette der Wirbeltiere bestehen aus einer Vielzahl von Hebeln. Dazu gehört auch der linke Unterarm des Menschen (■ Abb. 2.29). Hält man ihn horizontal, in der Hand eine Hantel, so versucht deren Gewichtskraft, das Ellbogengelenk zu öffnen. Der Bizeps kann das aber verhindern. Weil er dicht neben dem Ellbogen am Unterarm angreift, muss seine Muskelkraft allerdings deutlich größer sein als die Gewichtskraft der Hantel; der Bizeps „sitzt am kürzeren Hebelarm“. In seiner einfachsten Form lautet das **Hebelgesetz**:

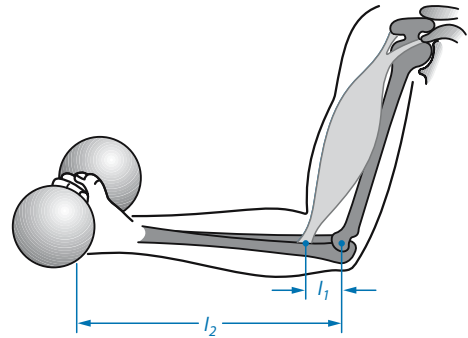
Kraft mal Kraftarm = Last mal Lastarm.

Es liegt nahe, die Gewichtskraft der Hantel als „Last“ zu bezeichnen und die Muskelkraft des Bizepses als „Kraft“. Umgekehrt geht es aber auch. Länge des **Hebelarms** ist der Abstand zwischen dem Angriffspunkt der jeweiligen Kraft und der Drehachse. Für den Bizeps sind das ungefähr 30 mm ( $l_1$  in ■ Abb. 2.29), während der Unterarm etwa 30 cm lang ist ( $l_2$ ).

#### Merke

Einfachste Form des Hebelgesetzes:  
Kraft mal Kraftarm = Last mal Lastarm.

Empirisch lässt sich das Hebelgesetz z. B. mit einer Stange untersuchen, die am linken Ende drehbar gelagert ist und in Längsrichtung verschiebbare Haken besitzt, nach unten zum Anhängen von Gewichtsklötzen, nach oben zum Einhängen von Federwaagen. Im Gedankenversuch soll der



■ Abb. 2.29. Arm und Bizeps. Als einarmiger Hebel: Kraft und Last greifen, auf die Drehachse (Ellbogengelenk) bezogen, auf der gleichen Seite an; der Hebelarm des Muskels ( $l_1 \sim 30$  mm) ist wesentlich kleiner als der Hebelarm ( $l_2 \sim 30$  cm) der Hantel

Hebel zwei Bedingungen erfüllen, die sich im realen Experiment nur näherungsweise verwirklichen lassen: Der Hebel soll einerseits starr sein, sich also weder dehnen, noch stauchen, noch verbiegen lassen, und andererseits masselos, also keine Gewichtskraft haben.

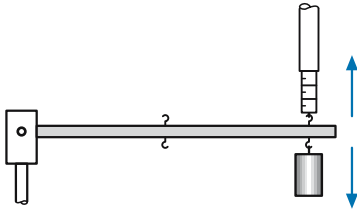
Dann spielt der Hebel in einer Situation, wie sie ■ Abb. 2.30 darstellt, keine Rolle: Die Federwaage muss so oder so die Gewichtskraft übernehmen. Man kann aber auch sagen, Kraftarm und Lastarm seien gleich, und darum müssten es Kraft und Last ebenfalls sein. Halbiert man den Lastarm (■ Abb. 2.31), so kommt die Federwaage mit der halben Kraft aus. Umgekehrt muss sie die doppelte Kraft aufbringen, wenn man ihren Hebelarm halbiert (■ Abb. 2.32). Das Spiel lässt sich auf vielerlei Weise variieren. Was immer man tut, im Gleichgewicht gilt das Hebelgesetz, das sich jetzt auch mathematisch formulieren lässt. Nennt man die Beträge der Kräfte von „Kraft“ und „Last“  $F_1$  und  $F_2$  und die zugehörigen Hebelarme  $l_1$  und  $l_2$ , so ist

$$l_1 \cdot F_1 = l_2 \cdot F_2$$

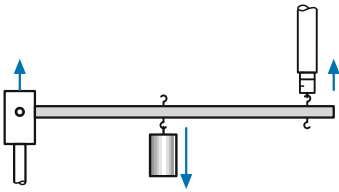
die Bedingung des Gleichgewichts, die Bedingung dafür, dass der Hebel ruhig bleibt und sich nicht bewegt.

Die letzte Gleichung ignoriert, dass Kräfte und Hebelarme Vektoren sind; sie kann sich das leisten, weil sie nur einen Sonderfall zu beschreiben braucht: horizontale Hebelarme  $\vec{l}$  und vertikale Gewichtskräfte  $\vec{F}$ , also rechte Winkel zwischen

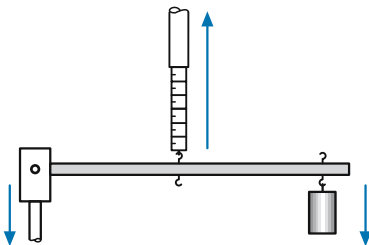




■ **Abb. 2.30. Hebel 1.** Die Federwaage kompensiert die Gewichtskraft, ob der Hebel nun da ist oder nicht. Die blauen Pfeile zeigen die Kraftvektoren

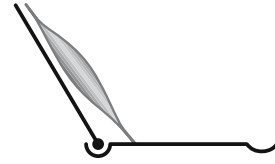


■ **Abb. 2.31. Hebel 2.** Hängt man die Last auf halben Hebelarm, so braucht die Federwaage nur die halbe Kraft aufzubringen. Die andere Hälfte liefert das Lager

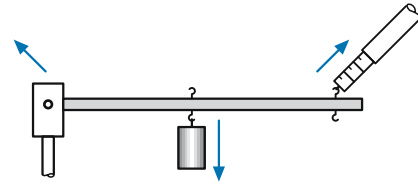


■ **Abb. 2.32. Hebel 3.** Wird der Kraftarm halbiert, so muss die Kraft verdoppelt werden

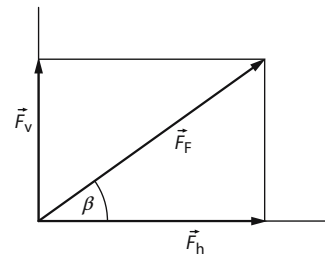
$\vec{l}$  und  $\vec{F}$ . Beim Unterarm gilt das nicht; selbst wenn er waagrecht gehalten wird, zieht der Bizeps, abhängig von der Position des Oberarms, im Allgemeinen schräg nach oben (■ Abb. 2.33). Im Modellversuch kann man diesen Fall dadurch nachbilden, dass man die Federwaage ebenfalls schräg nach oben ziehen lässt, mit einem Winkel  $\beta$  zwischen ihr und dem Hebelarm (■ Abb. 2.34). Dann hat nur die vertikale Komponente  $\vec{F}_v$  der Federkraft  $\vec{F}$  Bedeutung für das Hebelgesetz, während die horizontale Komponente  $\vec{F}_h$  lediglich den Hebel zu dehnen versucht und letztlich vom Achslager aufgefangen werden muss (■ Abb. 2.35). Das Kräfte-dreieck ist rechtwinklig und erlaubt darum, die Beträge der Komponenten mit den Winkel-



■ **Abb. 2.33. Bizeps.** Im Allgemeinen greift der Bizeps schräg am Unterarm an



■ **Abb. 2.34. Hebel 4.** Auch die Federwaage kann schräg am Hebel angreifen



■ **Abb. 2.35. Komponentenzersetzung.** Nur die Vertikalkomponente  $\vec{F}_v$  der Federkraft  $\vec{F}_F$  hat Bedeutung für das Hebelgesetz

funktionen Sinus und Kosinus unmittelbar auszurechnen:

$$F_v = F_F \cdot \sin \beta; F_h = F_F \cdot \cos \beta.$$

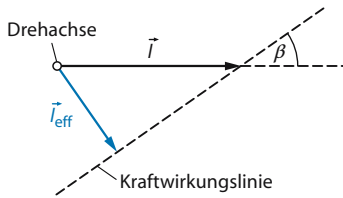
Dadurch bekommt das Hebelgesetz die Gestalt

$$l_1 \cdot F_{v1} = l_2 \cdot F_{v2}$$

und ausmultipliziert die Form

$$l_1 \cdot F_1 \cdot \sin \beta_1 = l_2 \cdot F_2 \cdot \sin \beta_2.$$

Man kann den Sinus des Winkels zwischen Kraft und Hebelarm auch anders deuten, nämlich durch die Definition eines sog. **effektiven Hebelarms**  $l_{\text{eff}}$ . Er ist der kürzeste Abstand zwischen der Drehachse und der **Kraftwirkungslinie** (■ Abb. 2.36), steht also senkrecht auf beiden:



■ Abb. 2.36. Effektiver Hebelarm. Zur Definition des effektiven Hebelarms  $l_{\text{eff}}$  und der Kraftwirkungsline

$$l_{\text{eff}} = l \cdot \sin \beta.$$

In dieser Interpretation schreibt sich das Hebelgesetz

$$l_{\text{eff}1} \cdot F_1 = l_{\text{eff}2} \cdot F_2,$$

was ausmultipliziert zu dem gleichen Ergebnis führt. Mathematisch spielt es keine Rolle, ob man den Sinus der Kraft zuordnet (Komponentenzerlegung) oder dem Hebelarm (effektiver Hebelarm); nur darf man nicht beides zugleich tun.

#### Merke

In der einfachsten Form des Hebelgesetzes stehen entweder „Kraft“ und „Last“ für deren Komponenten senkrecht zum Hebelarm oder „Kraftarm“ und „Lastarm“ für die effektiven Hebelarme.

Unabhängig von diesen beiden Deutungen bietet die Mathematik ihr vektorielles Produkt zweier Vektoren an. Die Physik folgt dem Angebot und definiert eine neue physikalische Größe, das

$$\text{Drehmoment} \quad \vec{T} = \vec{l} \times \vec{F}$$

Es steht senkrecht auf  $\vec{l}$  und  $\vec{F}$  und liegt demzufolge parallel zur Drehachse.

#### Merke

Drehmoment: Vektorprodukt aus Hebelarm und Kraft

$$\vec{T} = \vec{l} \times \vec{F}$$

Vom Hebel wird erwartet, dass er sich nicht dreht. Dazu müssen sich Drehmoment und Gegendrehmoment gegenseitig kompensieren:

$$\sum \vec{T} = 0$$

Mechanische Energie und Drehmoment werden beide in Newtonmeter gemessen, denn sie sind beide Produkte von jeweils einer Kraft und einer Länge, dem Schubweg bzw. dem Hebelarm. Der Einheit sieht man nicht an, dass es sich beim Drehmoment um ein vektorielles, bei der Energie aber um ein skalares Produkt zweier Vektoren handelt. Die Namen Joule und Wattsekunde bleiben aber der Energie vorbehalten.

#### Rechenbeispiel 2.8: Oktoberfest

► **Aufgabe.** Welche Kraft muss der Bizeps einer Kellnerin auf dem Oktoberfest ungefähr entwickeln, wenn sie in jeder Hand sechs volle Maßkrüge trägt? Ein voller Krug hat eine Masse von etwa 2 kg. Die Maße der Arme entnehme man ■ Abb. 2.26.

► **Lösung.** Der Bizeps sitzt am kürzeren Hebel und muss die zehnfache Gewichtskraft aufbringen:

$$F = \frac{30 \text{ cm}}{30 \text{ mm}} \cdot 12 \text{ kg} \cdot g = 1177 \text{ N}$$

### 2.2.6 Die Grundgleichungen des Gleichgewichts

Die Überlegungen des vorigen Kapitels unterstellen als selbstverständlich, dass die Position der Achse, um die sich ein Hebel drehen kann, im Raum unverrückbar festliegt. Wie man das technisch erreicht, wurde nicht gesagt, in den Zeichnungen nur angedeutet. Mit etwas Phantasie kann man etwa ■ Abb. 2.32 Folgendes entnehmen: Zwei quer am linken Ende des Hebels befestigte Achsstummel stecken drehbar in passenden Löchern des Lagerklotzes, der selbst über eine nicht gezeichnete Halterung zunächst vermutlich mit einem Tisch, am Ende aber mit dem Erdboden starr verbunden ist. Versucht nun eine von außen angreifende Kraft den Hebel wegzuziehen, so hält der Lagerklotz den Hebel dadurch fest, dass er durch winzige elastische Verformungen auf die Achsstummel die dort erforderliche Lagerkraft ausübt. In ■ Abb. 2.32 ist diese Lagerkraft auch eingezeichnet und nach unten gerichtet. Warum aber war es im vorigen Kapitel erlaubt, diese Lagerkraft mit keinem Wort zu erwähnen?

Wichtigste physikalische Größe beim Hebel ist das Drehmoment  $\vec{T}$ , im vorigen Kapitel als Kreuzprodukt aus Hebelarm  $\vec{l}$  und Kraft  $\vec{F}$  beschrieben:  $\vec{T} = \vec{l} \times \vec{F}$ . Der Hebelarm reicht von der Drehachse bis zur Kraftwirkungslinie. Nun greift eine Lagerkraft allemal an der Achse an. Folglich liefert sie mangels Hebelarm kein Drehmoment; folglich kann das Hebelgesetz ohne Lagerkräfte formuliert werden. Damit der Hebel aber auch wirklich im statischen Gleichgewicht ist, muss auch noch das gelten, was in ► Kap. 2.2.1 formuliert wurde: Die Summe aller an den Hebel angreifenden Kräfte muss null sein. Die Summe der Kraft, die das Gewicht ausübt und der Kraft, die die Federwaage ausübt, ist aber in ■ Abb. 2.32 keineswegs gleich null, da die Kraft der Federwaage doppelt so groß ist. Also muss das Lager mit einer nach unten gerichteten Kraft, die hier genauso groß ist, wie die Kraft des Gewichts, für den Ausgleich sorgen. Täte das Lager dies nicht, so würde der Hebel nach oben wegschlagen.

Entsprechend sind in den ■ Abb. 2.31 bis 2.34 die Lagerkräfte eingezeichnet. Nur in der Situation von ■ Abb. 2.30 hat das Lager nichts zu tun (außer natürlich den Hebel zum Teil zu tragen, aber dessen Gewicht sollte ja vernachlässigbar sein).

Bei Kräften und Drehmomenten denkt man instinktiv immer auch an Bewegungen, die sie ja grundsätzlich auslösen können, die in der Statik aber ausdrücklich ausgeschlossen werden. Häuser und Brücken sollen schließlich stehen bleiben und nicht einstürzen. Dazu müssen sich alle Kräfte  $\vec{F}$  und Drehmomente  $\vec{T}$  gegenseitig aufheben:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_i \vec{T}_i = 0.$$

#### Merke

Die Bedingungen der Ruhe: Nicht nur die Summe der Drehmomente, auch die der Kräfte muss Null sein:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0; \quad \sum_i \vec{T}_i = 0$$

### 2.2.7 Gleichgewichte

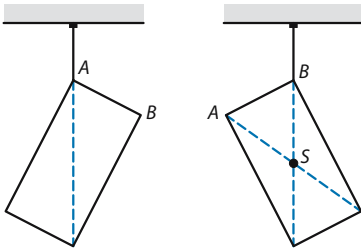
Regen Gebrauch vom Hebelgesetz macht zunächst einmal die Natur, etwa bei den Skeletten der Wirbeltiere und den zugehörigen Muskeln; regen Gebrauch macht aber auch die Technik, z. B. bei den **Balkenwaagen**, die zwei von massenproportionalen Gewichtskräften erzeugte Drehmomente miteinander vergleichen. Die Waage der Justitia, auch Apothekerwaage genannt (■ Abb. 2.37), besitzt einen genau in der Mitte gelagerten zweiarmigen Hebel, den **Waagebalken**. Die Gleichheit der Hebelarme ist hier unerlässlich; jede Abweichung würde zu einem systematischen Fehler führen. Das Waagegut wird dann mit passenden Stücken aus einem Gewichtssatz verglichen. Moderne Waagen freilich zeigen ihren Messwert elektronisch an und verraten nicht, wie sie das machen.

Im Gleichgewicht geht die Apothekerwaage in Ruhestellung, Waagebalken horizontal. Unbelastet tut sie dies auch. Wieso eigentlich?

Hängt man irgendeinen Körper nacheinander an verschiedenen Punkten auf und zieht man von jedem Aufhängepunkt eine Gerade senkrecht nach unten, so treffen sich alle Geraden in einem Punkt, dem **Schwerpunkt** (■ Abb. 2.38). Bei der Gewichtskraft darf man so tun, als sei die gesamte Masse eines Körpers in seinem Schwerpunkt konzentriert; man bezeichnet ihn deshalb auch als **Massenmittelpunkt**. Er kann außerhalb des Körpers liegen, z. B. beim Hufeisen. Der Mensch kann



■ Abb. 2.37. Einfache Balkenwaage

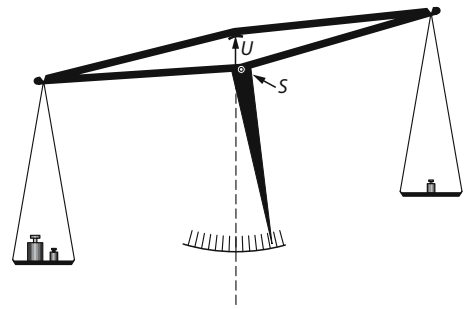


■ **Abb. 2.38. Schwerpunkt.** Der Schwerpunkt  $S$  eines frei hängenden Körpers begibt sich unter den Aufhängepunkt

seinen Schwerpunkt sogar durch Körperbewegungen verlagern, auch nach außen. Einem vorzüglichen Hochspringer gelingt es möglicherweise, ihn unter der Latte hindurchzumogeln (■ Abb. 2.39); das spart Hubarbeit.

Wenn es die Halterung erlaubt, versucht jeder Schwerpunkt von sich aus, unter den Punkt zu kommen, an dem das Objekt gehalten wird. Dann hat die Gewichtskraft keinen effektiven Hebelarm mehr und erzeugt kein Drehmoment. Der Waagebalken der Balkenwaage wird deshalb so konstruiert und aufgehängt, dass er dieses Ziel zu erreichen erlaubt und sich dabei waagrecht stellt. Dazu muss der Unterstützungspunkt über den Schwerpunkt gelegt werden.

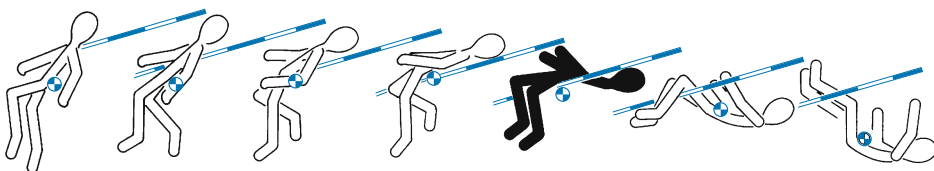
Ein Waagebalken nimmt seine Ruhestellung auch dann ein, wenn beide Waagschalen gleiche Lasten tragen und mit ihnen entgegengesetzt gleiche Drehmomente erzeugen. Hat aber z. B. die linke Waagschale ein Übergewicht (■ Abb. 2.40), so neigt sich der Waagebalken auf ihrer Seite und schiebt seinen Schwerpunkt nach rechts heraus. Das bedeutet effektiven Hebelarm, Gegendrehmoment und neues Gleichgewicht. Durch seine Schräglage zeigt der Waagebalken aber „Ungleichgewicht“ im Sinne von „Ungleichheit der Gewichte“ in den beiden Waagschalen an. Lenkt man den



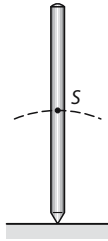
■ **Abb. 2.40. Apothekerwaage.** Außerhalb des Gleichgewichtes liegt der Schwerpunkt  $S$  des Waagebalkens nicht unter dem Unterstützungspunkt  $U$  und erzeugt deshalb ein rücktreibendes Drehmoment. Der Ausschlag der Waage und damit ihre Empfindlichkeit sind umso größer, je leichter der Balken, je länger die Hebelarme und je kleiner der Abstand des Schwerpunktes vom Unterstützungspunkt sind

Waagebalken durch kurzes Antippen aus, so führt ihn das rücktreibende Gegendrehmoment wieder in die Ausgangslage zurück, ob horizontal oder schräg. Man spricht immer dann von einem **stabilen Gleichgewicht**, wenn Störungen „von selbst“ rückgängig gemacht werden.

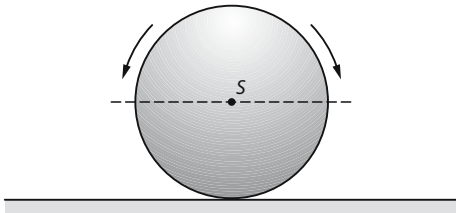
Ganz anders verhält sich ein Spazierstock, den man auf seine Spitze zu stellen versucht. Grundsätzlich müsste es möglich sein, seinen Schwerpunkt so exakt über den Unterstützungspunkt zu bringen, dass auch jetzt mangels effektiven Hebelarms kein Drehmoment auftritt (■ Abb. 2.41). Hier genügt aber die kleinste Kippung, der kleinste Lufthauch, um ein Drehmoment zu erzeugen, das die Auslenkung vergrößert: **labiles Gleichgewicht**; der Stock fällt um. Umfallen braucht allerdings Zeit. Mit der nötigen Geschicklichkeit lässt sich der Unterstützungspunkt deshalb rechtzeitig nachführen; ein Jongleur kann ein volles Tablett auf einer Stange balancieren und ein Seelöwe einen Ball auf seiner Nase.



■ **Abb. 2.39. Fosbury-Flop.** Bei einem optimal ausgeführten Fosbury-Flop rutscht der Schwerpunkt des Springers knapp unter der Latte hindurch



■ **Abb. 2.41. Labiles Gleichgewicht.** Der Schwerpunkt S fällt, wenn er nicht exakt über dem Unterstützungspunkt liegt: Abgabe potentieller Energie



■ **Abb. 2.42. Indifferentes Gleichgewicht.** Beim Rollen bewegt sich der Schwerpunkt S exakt horizontal: kein Umsatz potentieller Energie

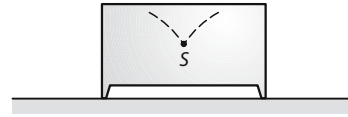
Auf der Grenze zwischen labilem und stabilem Gleichgewicht liegt das **indifferente Gleichgewicht**, das man durch eine „Auslenkung“ gar nicht verlässt. In ihm befindet sich z. B. eine Kreisscheibe oder eine Kugel auf exakt horizontaler Ebene. Symmetrische Massenverteilung vorausgesetzt, liegt der Schwerpunkt im Zentrum und damit genau über dem Unterstützungspunkt, dem Berührungspunkt mit der Ebene (■ Abb. 2.42): kein effektiver Hebelarm, kein Drehmoment, Gleichgewicht. Daran ändert sich auch nichts, wenn man die Kugel zur Seite rollt. Sie kehrt weder in die Ausgangslage zurück, noch läuft sie weg.

#### Merke

Gleichgewichte:

- stabil: Verrückung erfordert Energiezufuhr
- labil: Verrückung liefert Energie
- indifferent: Verrückung lässt Energie unverändert

Möbel stehen fest; offensichtlich befinden sie sich in stabilem Gleichgewicht, obwohl ihr Schwerpunkt wie beim Spazierstock über dem Fußbo-



■ **Abb. 2.43. Stabiles Gleichgewicht.** Der Schwerpunkt S liegt zwar über den Unterstützungspunkten, muss aber beim Kippen angehoben werden (Bahnen gestrichelt): Erhöhung der potentiellen Energie

den liegt. Wichtig: Sie berühren ihn in mehreren Berührungspunkten, mindestens drei. Hier empfiehlt es sich, mit Hilfe der Hubarbeit zu argumentieren. Wer eine Kommode kippen will, muss ihren Schwerpunkt anheben (■ Abb. 2.43), also Hubarbeit leisten, und mit ihr die potentielle Energie der Kommode erhöhen. Das gilt auch für den Waagebalken. Es ist das Kennzeichen des stabilen Gleichgewichts. Beim Spazierstock liegt demgegenüber der Schwerpunkt im Gleichgewicht so hoch wie möglich. Die potentielle Energie besitzt ihr Maximum und wird beim Kippen teilweise freigesetzt: Kennzeichen des labilen Gleichgewichts. Die Kugel kann auf ihrer horizontalen Ebene herumrollen, ohne die Höhe ihres Schwerpunktes zu ändern: kein Energieumsatz, indifferentes Gleichgewicht. Dahinter steht ein ganz allgemeines Naturgesetz: Jeder Körper, jedes „System“ möchte potentielle Energie, wenn möglich, loswerden.

#### Merke

Jedes „System“ versucht, potentielle Energie abzugeben.

## 2.3 Kraft und Bewegung

### 2.3.1 Die Newton'schen Gesetze

„Unten“ ist die Richtung der Fallbeschleunigung ebenso wie die der Gewichtskraft. Sollte zwischen beiden ein ursächlicher Zusammenhang bestehen? Dann dürfte es kein Privileg der Schwerkraft sein, Beschleunigungen auszulösen; andere Kräfte müssten dies, parallel zu ihren eigenen Richtungen, ebenfalls können. Dann brauchte aber auch ein Körper, auf den keine Kräfte wirken oder bei

dem die Summe der wirkenden Kräfte Null ist, nur auf Beschleunigungen zu verzichten und nicht, wie in der Statik, auf jede Bewegung überhaupt. Eine gleichförmige mit konstanter Geschwindigkeit bliebe ihm gestattet.

### Merke

#### 1. Newton'sches Gesetz:

Ein Körper, auf den keine Kräfte wirken oder die Vektorsumme der wirkenden Kräfte Null ist, behält seine Geschwindigkeit unverändert bei.

Um diese Vermutung experimentell zu verifizieren, muss man zunächst die Gewichtskraft des Probekörpers exakt kompensieren, ohne seine Bewegungsfreiheit allzu sehr einzuschränken. Das gelingt mit einer geraden Fahrbahn, die sich genau horizontal justieren lässt, sodass von der Gewichtskraft keine Komponente in Fahrtrichtung übrig bleibt. Ferner muss man die bremsenden Kräfte der Reibung vernachlässigbar klein machen, indem man gut schmiert. Bewährt hat sich ein hohler Vierkant als Fahrbahn; er wird auf eine Kante gestellt und bekommt in festen Abständen feine Löcher in beiden oberen Flächen (Abb. 2.44). Luft, in den am andern Ende verschlossenen Vierkant eingepresst, kann nur durch diese Löcher entweichen und hebt einen lose aufgelegten Metallwinkel so weit an, dass er den Vierkant nirgendwo berührt: Er gleitet praktisch reibungsfrei auf einem Luftpolster. Um seine Bewegungen auszumessen, postiert man längs der

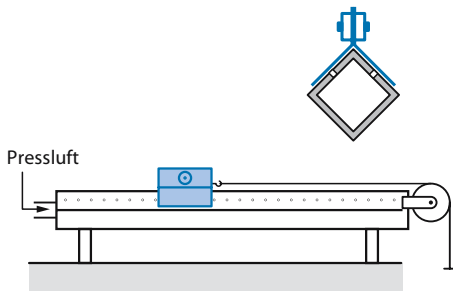


Abb. 2.44. Luftkissenfahrbahn. Aus den Löchern der hohlen Schiene wird Pressluft geblasen; sie hebt den Gleiter ein wenig an

Gleitbahn an den Positionen  $s$  Lichtschranken, die mit elektrischen Stoppuhren die Zeitpunkte  $t$  feststellen, zu denen der Gleiter bei ihnen vorbeikommt.

**1. Beobachtung:** Wie immer man den Gleiter im Einzelfall angestoßen hat, man findet  $\Delta s \sim \Delta t$ , also konstante Geschwindigkeit, in Übereinstimmung mit dem 1. Newton'schen Gesetz.

Um eine konstante Antriebskraft auf den Gleiter auszuüben, lenkt man eine kleine Gewichtskraft über Faden und Rolle in Gleitrichtung um (Abb. 2.44). Dabei muss man der Reibung im Rollenlager einige Aufmerksamkeit schenken.

**2. Beobachtung:** Wie immer man den Versuch im Einzelnen durchführt, wenn man den Gleiter aus der Ruhe startet, findet man für die Abstände  $\Delta s$  und die Zeitspannen  $\Delta t$  ab Start die Beziehung  $\Delta s \sim \Delta t^2$ . Nach den Überlegungen zum freien Fall entspricht das einer konstanten Beschleunigung

$$a = 2 \frac{\Delta s}{\Delta t^2},$$

also eine gleichförmig beschleunigte Bewegung.

**3. Beobachtung:** Wechselt man die Gewichte für die Antriebskraft  $F$  systematisch aus, so findet man eine Proportionalität zwischen  $a$  und  $F$ .

**4. Beobachtung:** Erhöht man die Masse  $m$  des Gleiters, indem man ihm zusätzliche Lasten zu tragen gibt, so bemerkt man eine **Trägheit** der Masse: Der Gleiter kommt umso „schwerer“ in Bewegung, je „schwerer“ er ist (das Wort „schwer“ in unterschiedlicher Bedeutung verwendet). Quantitativ findet man bei konstanter Kraft  $F$  eine umgekehrte Proportionalität zwischen Beschleunigung und Masse, also  $a \sim 1/m$ .

Alle Beobachtungen lassen sich zusammenfassen zu dem 2. Newton'schen Gesetz

$$\text{Kraft } \vec{F} = \text{Masse } m \cdot \text{Beschleunigung } \vec{a}$$

Das Gesetz gilt vektoriell:  $\vec{F}$  und  $\vec{a}$  haben gleiche Richtung. Es ist von so grundlegender Bedeutung, dass man es auch **Grundgleichung der Mechanik** nennt.

**Merke**

2. Newton'sches Gesetz, Grundgleichung der Mechanik:

Kraft = Masse mal Beschleunigung:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Damit ergibt sich auch ein wichtiger Zusammenhang der Einheiten:

**Merke**

Krafteinheit Newton:  $1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$

Auch der freie Fall hält sich an die Grundgleichung:

$$F_G = m \cdot g.$$

Warum aber hat die Masse eines fallenden Körpers keinen Einfluss auf die Fallbeschleunigung? Je schwerer ein Körper, umso größer die Gewichtskraft; eine umso höhere Kraft wird aber auch gebraucht, ihn zu beschleunigen. Das kompensiert sich gerade. Man sagt auch „schwere Masse gleich träge Masse“ und meint damit, dass im Gravitationsgesetz und im 2. Newton'schen Gesetz die gleiche Masse steht.

Es gibt noch einen weiteren, keineswegs selbstverständlichen Tatbestand, den man beachten muss, wenn man sich mit Kräften befasst. Wenn ein Körper auf einen anderen eine Kraft ausübt, nach welchem Mechanismus auch immer, so gibt ihm das keine Vorrechte: notwendigerweise übt nämlich der andere Körper auf den einen die gleiche Kraft aus, nur in entgegengesetzter Richtung. Man bezeichnet diesen Tatbestand als **3. Newton'sches Gesetz** und subsumiert ihn zuweilen unter dem Kürzel **actio = reactio**.

**Merke**

3. Newton'sches Gesetz: actio = reactio.

Wenn zwei Körper Kräfte aufeinander ausüben, sind diese entgegengesetzt gleich.

Bei der Massenanziehung leuchtet das 3. Newton'sche Gesetz unmittelbar ein: Das Gravitationsgesetz (► Kap. 2.2.2) gilt für beide Massen, für  $m_1$  wie für  $m_2$ . Die Erde zieht den Mond mit einer Kraft  $\vec{F}_M$  und zwingt ihn damit auf eine Bahn um den gemeinsamen Schwerpunkt. Mit der entgegengesetzten Kraft  $\vec{F}_E = -\vec{F}_M$  zieht aber auch der Mond die Erde an und zwingt sie ebenfalls auf eine Bahn um den gemeinsamen Schwerpunkt. Das fällt freilich kaum auf: Weil die Masse der Erde sehr viel größer ist als die des Mondes, liegt der gemeinsame Schwerpunkt noch innerhalb der Erdkugel. Bei dem Mann mit dem Bolterwagen vom ► Kap. 2.2.3 muss man schon etwas genauer nachdenken. In ■ Abb. 2.24 ist (zusammen mit ihren Komponenten) nur die Kraft  $\vec{F}$  eingetragen, die der Mann auf den Wagen ausübt. Dass der Wagen die entgegengesetzte Kraft  $-\vec{F}$  auf den Mann ausübt, erkennt man allenfalls an dessen Schräglage; nähme man  $-\vec{F}$  plötzlich weg, indem man das Zugseil kappt, so fiele der Mann vornüber.

### Rechenbeispiel 2.9: Die Kraft auf den Kleinwagen

► **Aufgabe.** Unser Kleinwagen aus Beispiel 2.6 ( $m = 1000 \text{ kg}$ ) beschleunigt in 10 Sekunden von Null auf 92 km/h. Welche Kraft wirkt dabei auf ihn?

► **Lösung.** Nach der Grundgleichung der Mechanik ist:

$$\begin{aligned} F &= m \cdot a = m \cdot \frac{130,8 \text{ km/h}}{10 \text{ s}} \\ &= m \cdot \frac{36,3 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = 3633 \text{ N} \end{aligned}$$

► **Aufgabe.** Was übt eigentlich die Kraft aus, die unseren Kleinwagen von eben beschleunigt?

► **Lösung.** Dumme Frage! Der Motor natürlich. Oder? Der Motor ist ja Teil des Autos und fährt mit. Würde er die das Auto beschleunigende Kraft ausüben, wäre das so wunderbar wie der Graf Münchenhausen, der sich am eigenen Zopf aus dem Sumpf zieht. Die Kraft muss schon von außen kommen, also von der Straße. Der Motor übt über die Räder eine Kraft auf die Straße aus. Die Gegenkraft beschleunigt das Auto. Sie beruht auf der Reibung zwischen Rädern und der Straße. Auf eisglatter Fahrbahn nützt der stärkste Motor nichts.



### 2.3.2 Reibung

So sorgfältig die Reibung bei Messungen zur Grundgleichung der Mechanik auch als störend unterdrückt werden muss, im Alltag ist sie lebenswichtig. Gehen kann der Mensch nur, wenn seine Füße fest genug am Boden haften, um die zur Bewegung notwendigen Kräfte zu übertragen. Übersteigen sie die Kräfte der **Haftreibung**, so gleitet der Mensch aus. Gebiete verminderter Haftreibung gelten geradezu sprichwörtlich als Gefahrenzonen: Man kann jemanden „auf’s Glatteis führen“.

Ist die Haftreibung einmal überwunden, so meldet sich beim ausgleitenden Menschen die (geringere) **Gleitreibung**. In der Verkehrstechnik ersetzt man sie, um Antriebskraft zu sparen, durch die (noch geringere) **rollende Reibung** der Räder auf Straße oder Schiene. Schmiermittel schließlich legen einen Flüssigkeitsfilm zwischen Achse und Achslager und tauschen dort die Gleitreibung ein gegen die **innere Reibung** in Fluiden wie Öl und Fett. Besonders gering ist die innere Reibung in Gasen; die Gleitbahn der ■ Abb. 2.44 nutzt dies aus, aber auch die Magnetschwebbahn der Zukunft. Reibung hindert Bewegungen. Sie erzeugt eine **Reibungskraft**, die bei der Haftreibung der angreifenden Kraft entgegensteht und mit ihr wächst, bei den anderen Reibungen der Geschwindigkeit entgegensteht und mit dieser wächst.

#### Merke

Reibung behindert Bewegungen;  
Arten der Reibung: Haftreibung, Gleitreibung,  
rollende Reibung, innere Reibung.

Verschiedene Reibungsarten können gleichzeitig auftreten. Ein Auto lässt sich nur deshalb lenken, weil seine Räder in Fahrtrichtung mit geringer Rollreibung rollen, quer dazu aber von der sehr viel größeren Haftreibung in der Spur gehalten werden. Tritt der Fahrer so heftig auf die Bremse, dass die Räder blockieren, dann gibt es nur noch Gleitreibung ohne Vorzugsrichtung, und das Fahrzeug bricht aus.

Für grobe Abschätzungen darf man so tun, als sei die Kraft der Flüssigkeitsreibung so ungefähr

proportional zur Geschwindigkeit und die der Gleitreibung so ungefähr konstant.

Wenn ein Auto anfährt, dann wird die vom Motor entwickelte Antriebskraft  $\vec{F}_A$  zur Beschleunigung des Wagens verwendet. Mit wachsen der Geschwindigkeit wächst aber die Reibungskraft  $\vec{F}_R$  und lässt immer weniger Beschleunigungskraft  $\vec{F}_B$  übrig:

$$\vec{F}_B = \vec{F}_A - \vec{F}_R.$$

Auf freier Strecke, bei konstanter Geschwindigkeit, kompensiert der Motor nur noch die Reibung. Beim Regentropfen ersetzt die Gewichtskraft den Motor. Weil  $\vec{F}_G$  rascher mit dem Durchmesser wächst als  $\vec{F}_R$ , fallen dicke Tropfen schneller als kleine (Stokes-Gesetz, ► Kap. 3.5.1).

■■■ Reibungskräfte sind immer abhängig von weiteren Größen wie der Geschwindigkeit oder dem Anpressdruck. In diesen Zusammenhängen tauchen Konstanten auf, die **Reibungskoeffizienten** genannt werden. Zwei Beispiele seien besprochen, da der Gegenstandskatalog dies fordert (ob Sie das für eine Prüfung wirklich brauchen, müssen Sie selbst entscheiden):

**Trockene Reibung zwischen Festkörpern.** „Trocken“ meint, dass keine Schmiermittel wie Öl zwischen den aneinander reibenden Flächen sind. Rutscht also zum Beispiel die Schuhsohle über den Fußboden, so ist die auftretende Gleitreibungskraft  $F_R$  näherungsweise proportional zu der senkrecht wirkenden Gewichtskraft  $F_N$ :

$$F_R = \mu_{\text{Gl}} \cdot F_N.$$

$\mu_{\text{Gl}}$  ist der sog. **Gleitreibungskoeffizient**. Wenn der Schuh schon rutscht, ist es oft schon zu spät. Er soll nicht rutschen, die Reibungskräfte sollen alle z. B. beim Gehen auftretenden horizontalen Kräfte auffangen. Dazu muss die maximale Haftreibungskraft  $F_H$  immer größer sein als diese horizontalen Kräfte. Auch sie hängt von der Gewichtskraft ab:

$$F_H = \mu_H \cdot F_N.$$

Der **Haftreibungskoeffizient**  $\mu_H$  ist in der Regel etwas höher als der Gleitreibungskoeffizient: wenn man erst einmal rutscht, gibt es kein Halten mehr. Diese Reibungskoeffizienten hängen natürlich von den Oberflächeneigenschaften der aneinander reibenden Flächen ab, aber kaum von der Geschwindigkeit (im Falle von  $\mu_{\text{Gl}}$ ) und erstaunlicherweise auch kaum von der Auflagefläche.



**Eine Kugel fällt durch Sirup.** Der Sirup umströmt hierbei die Kugel laminar (► Kap. 3.5.1 und 3.5.2). Aufgrund der inneren Reibung im Sirup gibt es eine Reibungskraft auf die Kugel, die in diesem Fall proportional zur Geschwindigkeit  $v$  ist:

$$F_R = \mu \cdot v = (6\pi \cdot \eta \cdot r) \cdot v$$

Auch dieser Proportionalitätsfaktor  $\mu$  wird zuweilen Reibungskoeffizient genannt. Er hängt vom der Viskosität  $\eta$  und dem Kugelradius  $r$  ab. Fällt die Kugel in Wasser, wird die Strömung turbulent und die Formel komplizierter.

### 2.3.3 Impuls

Wer vor Freude in die Luft springt, gibt der Erde einen Tritt. Das macht ihr nichts aus, denn sie besitzt die größte Masse, die in der Reichweite des Menschen überhaupt vorkommt. Ein startendes Flugzeug kann sich nicht von der Erde abstoßen; es saugt Luft aus der Umgebung an und bläst sie in gerichtetem Strahl nach hinten weg. Eine Mondrakete findet keine Luft mehr vor; sie verwendet für den gleichen Zweck die Verbrennungsgase ihres Treibstoffs. Wer immer seine Bewegung ändern will, muss etwas haben, wovon er sich abstoßen kann.

Für quantitative Überlegungen eignet sich der in ► Abb. 2.45 skizzierte Versuch. Zwei Wägelchen mit den Massen  $m_1$  und  $m_2$  stehen (reibungsfrei) auf ebener Bahn, eine gespannte Sprungfeder zwischen sich. Diese drückt auf die beiden Wagen mit betragsgleichen, aber entgegengesetzt gerichteten Kräften:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Ein Zwirnsfaden hält die Wagen zusammen; er liefert die Gegenkräfte, die das ganze System in Ruhe halten. Brennt man den Faden mit der Flamme eines Streichholzes durch, so fahren die Wagen auseinander, für kurze Zeit beschleunigt, bis die Feder entspannt herunterfällt:

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = -m_2 \cdot \vec{a}_2$$

Die Kräfte fallen rasch auf null; Gleiches gilt für die beiden Beschleunigungen. Doch wie deren zeitliche Verläufe auch immer aussehen, sie führen zu einer gewissen Endgeschwindigkeit  $\vec{v}$ . Auf einen Körper der Masse  $m$  überträgt die Kraft den

$$\text{mechanischen Impuls } \vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

mit der Einheit  $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ ; er ist ein Vektor.

Solange eine Kraft andauert, ändert sie den Impuls des Körpers mit der „Änderungsgeschwindigkeit“

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

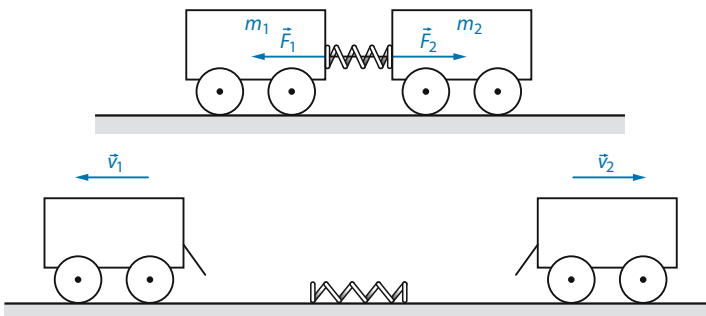
Da im Versuch der ► Abb. 2.45 die auf die beiden Wägelchen wirkenden Federkräfte zu jedem Zeitpunkt bis auf das Vorzeichen gleich waren, gilt dies für die Impulse ebenfalls:

$$\vec{p}_1 = m_1 \cdot \vec{v}_1 = -\vec{p}_2 = -m_2 \cdot \vec{v}_2.$$

Die Summe der beiden Impulse ist also null:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$$

Vor Beginn des Versuchs war sie das auch, denn da befanden sich beide Wägelchen in Ruhe. Hinter dieser Feststellung steht ein Naturgesetz, der Satz von der Erhaltung des Impulses (**Impuls-**



► Abb. 2.45. Zum Impulssatz (Einzelheiten im Text)

satz); er besagt: In einem abgeschlossenen System kann sich die Summe aller Impulse, der Gesamtimpuls also, nicht ändern.

### Merke

Für den mechanischen Impuls  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$  gilt ein Erhaltungssatz; er wird Impulssatz genannt.

Als „abgeschlossen“ bezeichnet man ein System, auf das keine äußeren Kräfte wirken: Aus

$$\sum \vec{F} = \sum \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

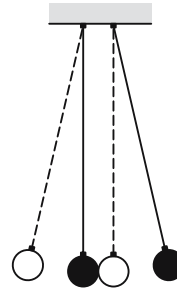
folgt

$$\sum \vec{p} = \text{const.}$$

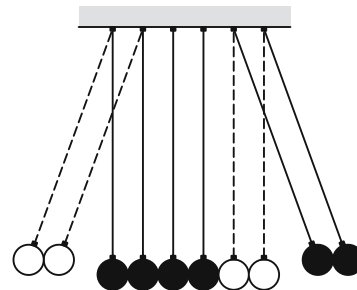
Die Mitglieder eines abgeschlossenen Systems können zwar Impuls untereinander austauschen, sie können aber Impuls weder schaffen noch vernichten.

Impuls wird bei jedem **Stoß** ausgetauscht, und Stöße gibt es viele in der Welt, nicht nur beim Boxen und beim Fußball. Röntgenquanten stoßen mit Elektronen (Compton-Effekt, ► Kap. 7.5.5), Elektronen stoßen mit Molekülen (Gasentladung, ► Kap. 6.6.6), Moleküle trommeln auf die Wände ihres Gefäßes (Gasdruck, ► Kap. 5.2.2). Beim Compton-Effekt kann man im Einzelfall den Impulssatz bestätigen; es ist ähnlich mühsam wie bei zwei Billardkugeln. Impulse sind ja Vektoren, die in ihre Komponenten zerlegt werden wollen. Man spart deshalb Rechenarbeit, wenn man sich auf den zentralen Stoß beschränkt, bei dem nur eine einzige Bewegungsrichtung vorkommt. Experimentell lässt sich dieser Fall hinreichend genau durch zwei Stahlkugeln repräsentieren, die als lange Fadenpendel nebeneinander hängen, und zwar an Doppelfäden, die sich nach oben V-förmig spreizen. Aus der Blickrichtung der ■ Abb. 2.46 ist dies nicht zu erkennen. Jedenfalls erlaubt die Spreizung den Kugeln nur eine Bewegung in der Zeichenebene.

Im einfachsten Fall bestehen die Kugeln aus gehärtetem Stahl und haben die gleiche Masse. Lässt man jetzt die eine Kugel auf die andere, vorerst in Ruhe belassene, aufschlagen, so vertauschen sie ihre Rollen: Die stoßende bleibt stehen, die gestoßene fliegt weg. Sie hat den Impuls der ersten Ku-



■ **Abb. 2.46. Stoßpendel.** Haben beide Kugeln gleiche Masse, so übernimmt die gestoßene von der stoßenden Impuls und kinetische Energie vollständig



■ **Abb. 2.47. Pendelkette.** Auf der einen Seite fliegen stets ebenso viele Kugeln ab, wie auf der anderen Seite auftreffen (gleiche Kugelmassen vorausgesetzt)

gel voll übernommen. Eine freundliche Spielerei liefert die Pendelkette der ■ Abb. 2.47. Sie erlaubt, mehrere Kugeln zur Seite zu ziehen und aufschlagen zu lassen. Die Kugeln am anderen Ende wissen genau, wie viele es waren: sie springen nach dem Stoß in gleicher Anzahl ab. Das ist kein Wunder. Man hat ja nur das erste Experiment mit einer einzigen stoßenden Kugel mehrmals rasch hintereinander ausgeführt. Die Zeitspanne, in der sich zwei Stahlkugeln beim Stoß berühren, liegt in der Größenordnung Millisekunden; sie ist so kurz, dass mehrere Stöße allemal nacheinander erfolgen.

Grundsätzlich wäre beim Stoß zweier Kugeln gleicher Masse der Impulssatz auch erfüllt, wenn die stoßende Kugel nicht stehen bliebe, sondern wie von einer Wand abprallte; dann müsste allerdings die gestoßene Kugel den doppelten Impuls übernehmen ( $\vec{p} + 0 = -\vec{p} + 2\vec{p}$ ) und die vierfache kinetische Energie (!), denn die wächst ja pro-

portional zu  $v^2$  und nicht bloß proportional zu  $\vec{v}$  wie der Impuls. Woher aber soll die Energie kommen? Der angenommene Fall ist gar nicht möglich. Stoßpartner müssen auf beide Erhaltungssätze achten. Das lässt ihnen keine Wahlfreiheit.

Ungleiche Stoßpartner machen die Rechnung kompliziert; erst bei extrem ungleichen Stoßpartnern wird sie wieder einfach, denn dann braucht der schwere Partner keine Energie zu übernehmen: Der Ball, der beim Squash gegen die Wand gedonnert wird, kommt mit (praktisch) dem gleichen Geschwindigkeitsbetrag und der gleichen kinetischen Energie zurück.

■ ■ ■ Zur Begründung: Als der fröhliche Mensch zu Beginn des Kapitels der Erde einen Tritt gab, verlangte der Impulssatz, wenn man die Beträge betrachtet,

$$M \cdot V = m \cdot v$$

(große Buchstaben für die Erde und kleine für den Menschen) mit der Konsequenz

$$\frac{m}{M} = \frac{V}{v} < 1.$$

Daraus folgt für die kinetische Energie

$$\frac{1}{2} M \cdot V \cdot V < \frac{1}{2} m \cdot v \cdot v.$$

Bisher war stillschweigend angenommen worden, dass alle in den Stoß hineingesteckte kinetische Energie hinterher immer noch kinetische Energie ist, man spricht hier vom **elastischen Stoß**. Streng genommen gibt es ihn gar nicht, denn auch

bei den besten Stahlkugeln geht immer noch ein wenig kinetische Energie in Wärme über. Den Extremfall auf der anderen Seite bezeichnet man als **unelastischen Stoß**, experimentell realisierbar beispielsweise durch ein Stückchen Kaugummi dort, wo sich die beiden Kugeln berühren. Nach dem Stoß können sie sich nicht mehr trennen, sie haften aufeinander. Die gemeinsame Geschwindigkeit wird vom Impulssatz bestimmt; der Energiesatz legt dann fest, wie viel Wärme durch plastische Verformung des Kaugummis entwickelt werden muss.

### 2.3.4 Trägheitskräfte

Ein Mensch, der im Bett liegt und schläft, meint, er sei in Ruhe. Tatsächlich rotiert er aber mitsamt der Erde um deren Achse und läuft mit ihr um die Sonne. Diese wiederum macht die Drehung der Milchstraße mit, die als Ganzes vermutlich auf eine andere Galaxis zuläuft. Eine „wahre“ Bewegung, eine „absolute“ Geschwindigkeit gibt es nicht und zwar grundsätzlich nicht. Die Messung einer Geschwindigkeit setzt eine Ortsbestimmung voraus und diese verlangt ein Koordinatenkreuz als **Bezugssystem**. Jeder Beobachter bevorzugt das Seine und behauptet gern, er befände sich mit ihm in Ruhe. Der Mensch neigt dazu, sich für den Mittelpunkt der Welt zu halten, in der Physik ist das in Grenzen sogar erlaubt: Koordinatensysteme, die sich mit konstanter Geschwindigkeit geradlinig gegeneinander bewegen, haben keine Vorrechte voreinander; von jedem darf jemand behaupten, es sei in Ruhe, aber natürlich nicht von zweien zugleich. Das gilt allerdings nicht mehr, wenn sich die Geschwindigkeit eines Systems ändert, wenn es z. B. rotiert, denn dann treten Trägheitskräfte auf. Sie sind es, die Karussell und Achterbahn so attraktiv machen.

Wenn ein Auto gegen einen Baum gefahren ist, dann liest man zuweilen in der Zeitung, die Insassen (nicht angeschnallt!) seien durch die Wucht des Aufpralls aus dem Wagen herausgeschleudert worden, gerade so, als habe sie eine plötzlich auftretende Kraft von ihren Sitzen gerissen. Dies entspricht auch ihrem subjektiven Empfinden. Ein Augenzeuge am Straßenrand könnte aber glaub-

#### Rechenbeispiel 2.10: Zorniges Kind

► **Aufgabe.** Ein Kleinkind, das in einem leichtgängigen Kinderwagen sitzt (Gesamtmasse Kind plus Kinderwagen: 10 kg) werfe seine volle Nuckelflasche (250 g) mit  $v_N = 2 \text{ m/s}$  in Fahrtrichtung aus dem Wagen. Wenn der Kinderwagen zunächst in Ruhe war, welche Geschwindigkeit hat er nun?

► **Lösung.** Der Gesamtimpuls war vor dem Wurf Null, also muss er es danach auch noch sein. Der Wagen wird sich also entgegengesetzt zur Wurftrichtung mit einer Geschwindigkeit  $v_W$  bewegen, für die gilt:

$$\begin{aligned} 250 \text{ g} \cdot v_N &= -10 \text{ kg} \cdot v_W \\ \Rightarrow |v_W| &= \frac{0,25 \text{ kg}}{10 \text{ kg}} \cdot v_N = 0,05 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

haft versichern, zunächst sei das Auto mit hoher Geschwindigkeit auf den Baum zugefahren, dann sei es plötzlich stehen geblieben, die Insassen jedoch nicht. Nach dieser Darstellung sind sie gerade deshalb aus dem Wagen geflogen, weil *keine* Kraft auf sie wirkte, um sie zusammen mit dem Auto anzuhalten. Was ist nun „wirklich“ geschehen? Existierte eine Kraft auf die Insassen, ja oder nein?

Die Frage ist falsch gestellt. Beide Formulierungen beschreiben den Unfall durchaus zutreffend, nur von verschiedenen Standpunkten aus, physikalisch gesprochen: aus verschiedenen Bezugssystemen. Der Augenzeuge befindet sich in dem gleichen Bezugssystem wie der Baum; ihnen gegenüber bewegen sich Auto und Fahrer zunächst gemeinsam. Der Wagen wird dann auf kürzeste Distanz bis zum Stillstand heruntergebremst; die dazu notwendigen hohen Verzögerungskräfte hinterlassen deutliche Spuren an Baum und Karosserie. Auf die nicht angeschnallten Insassen können entsprechende Kräfte nicht übertragen werden; folglich bewegen sie sich zunächst einmal mit unverminderter Geschwindigkeit in der alten Richtung weiter, wenn auch nicht lange.

Die Insassen sehen es anders. Ihr Bezugssystem ist der Wagen, in ihm befinden sie sich in Ruhe; dafür gleitet die Landschaft rasch an ihnen vorbei. Plötzlich rast ein Baum auf sie zu und beschleunigt ihr Bezugssystem in kürzester Zeit auf die Geschwindigkeit der Landschaft. In diesem Moment treten starke Kräfte auf, die sie aus dem Wagen schleudern. Sie empfinden diese Kräfte höchst real und nennen sie **Trägheitskräfte**.

#### Merke

Trägheitskräfte werden nicht von anderen Körpern ausgeübt. Sie treten nur scheinbar in beschleunigten Bezugssystemen auf.

Ähnliches, wenn auch weit harmloser, gilt im Fahrstuhl. Der Gedanke mag ausgefallen erscheinen, aber man kann auch dort die Gewichtskraft eines Menschen mit einer Federwaage feststellen. Führt der Fahrstuhl nun an, und zwar aufwärts, so muss der Passagier mit auf die Fahrstuhlge-

schwindigkeit beschleunigt werden. Dazu bedarf es einer nach oben gerichteten Kraft, die nur über die Waage auf ihn übertragen werden kann. Prompt zeigt sie diese Kraft an, zusätzlich zu der des Gewichtes, die von der Waage ja auch durch eine nach oben gerichtete Federkraft kompensiert werden muss. Hat der Fahrstuhl seine volle Geschwindigkeit erreicht, so verschwindet mit der Beschleunigung auch die Zusatzkraft, und die Waage meldet dem Passagier wieder sein normales Gewicht. Beim Bremsen im Obergeschoss wird der Fahrstuhlkorb verzögert, d. h. nach unten beschleunigt und der Passagier auch. Die dazu notwendige Kraft lässt sich mühelos von seiner Gewichtskraft abzweigen; die Waage zeigt entsprechend weniger an. Sobald der Fahrstuhl steht, ist alles wieder beim Alten.

#### Merke

Auch Verzögerungen (Bremsungen) sind Beschleunigungen.

Der Passagier sieht von den Bewegungen seines Fahrstuhls nichts, der Korb hat keine Fenster. Wohl aber bemerkt der Mann auf der Waage deren wechselnde Ausschläge. Er deutet sie als vorübergehende Trägheitskräfte, die, wie er weiß, in beschleunigten Bezugssystemen auftreten. Er kann dessen Beschleunigung  $a$  sogar aus den Abweichungen  $\Delta F_G$  der Waagenanzeige von dem Normalwert  $F_G$  ausrechnen, denn er kennt das Grundgesetz der Mechanik und seine eigene Masse  $m = F_G/g$ . Gelten muss

$$\Delta F_G = m \cdot a.$$

Könnte man den Fahrstuhl frei fallen lassen, so wäre  $a = g$ , und die Trägheitskraft höbe die Gewichtskraft auf: Der Passagier fühlte sich „schwerelos“.

■■■ Astronauten erleben diese Schwerelosigkeit tage- und monatelang, von dem Moment an nämlich, in dem das Triebwerk der Trägerrakete abgeschaltet wird, bis zum Wiedereintritt in die Erdatmosphäre, wenn die Bremsung durch Luftreibung beginnt. In der Zwischenzeit „fallen“ sie mitsamt ihrer Raumkapsel um die Erde herum, mit einer so hohen Geschwindigkeit in der „Ho-

horizontalen“, dass ihre Bahn die Erde nicht erreicht und zur Ellipse um deren Zentrum wird. Alles in der Kapsel, ob lebendig oder nicht, bewegt sich mit (praktisch) gleicher Geschwindigkeit und (praktisch) gleicher Beschleunigung auf (praktisch) parallelen, gekrümmten Bahnen. Im Bezugssystem der Kapsel fällt nichts zu Boden, es gibt gar kein „unten“: Kennzeichen der **Schwerelosigkeit**. Das heißt keineswegs, dass Raumschiff und Inhalt der irdischen Schwerkraft entzogen wären; alles bewegt sich lediglich so, dass sich Gewichts- und Trägheitskräfte genau kompensieren.

Beim Start war das ganz anders. Dort zeigte die Beschleunigung nach oben, die Trägheitskräfte addierten sich zu den Gewichtskräften und übertrafen sie um etwa das Dreifache, entsprechend einer Startbeschleunigung von 3 g.

Ein Mensch, der ausgleitet und mit dem Hinterkopf aufschlägt, holt sich möglicherweise eine Hirnverletzung an der Stirn: Beim Aufprall wird die Fallgeschwindigkeit des Schädels auf einer Strecke von vielleicht nur wenigen Millimetern abgebremst; das keineswegs starre Gehirn drückt sich am Hinterkopf zusammen und kann, wenn es das Unglück will, an der Stirn von der Hirnschale abreißen. Mit anderen Worten: Die im Bereich der Stirn auf Zug beanspruchte mechanische Verbindung zwischen Hirn und Schädel war den hohen Trägheitskräften beim Aufprall nicht gewachsen.

#### Merke

Bei Unfällen können hohe Beschleunigungen zu hohen Kräften führen, die entsprechende Verletzungen hervorrufen.

Trägheitskräfte sind wie Gewichtskräfte massenproportional. Darum bildet die Fallbeschleunigung  $g$  ein anschauliches Maß für die Beschleunigung eines Bezugssystems. Während der 3 g beim Start hat der Astronaut auf der Liege ein Gefühl, als hockten 2 Menschen auf ihm herum.

#### Rechenbeispiel 2.11: Wiegen im Aufzug

► **Aufgabe.** Wir steigen tatsächlich mit der Personenwaage unterm Arm in einen Aufzug und wiegen uns. Die Waage zeigt eine Masse an (70 kg), obwohl sie die Gewichtskraft misst. Der Hersteller hofft, dass der Umrechnungsfaktor von  $9,81 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$  schon stimmen wird. Nun fährt der Aufzug nach oben und beschleunigt dazu für kurze Zeit mit  $a = 1 \text{ m/s}^2$ . Auf welchen Wert erhöht sich für diese Zeit die Masse scheinbar?

► **Lösung.** Zu der Gewichtskraft  $m \cdot g$  tritt noch eine Trägheitskraft mit Betrag  $m \cdot a$  hinzu. Die Waage rechnet aber natürlich unverändert mit ihrem Umrechnungsfaktor, sodass sie eine scheinbare Masse von

$$m' = \frac{(g + a)m}{g} = 77,1 \text{ kg}$$

anzeigt.

### 2.3.5 Drehbewegungen

Im Weltraum gibt es fast schon „Gedrängel“, allerdings nur in einem schmalen Ring rund 36.000 km über dem Äquator: Dort versammeln sich alle Nachrichten- und Wettersatelliten der Erde. Man nennt sie geostationär, weil ein jeder senkrecht über seinem Punkt auf der Erde stehen bleibt, d. h. mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit um die Erde läuft, mit der sich diese selbst dreht. Warum Äquator, warum  $3,6 \cdot 10^7 \text{ m}$ ?

Wer auf einer Kreisbahn laufen will, braucht eine **Zetripetalbeschleunigung**  $\vec{a}_z$ , die ständig zum Mittelpunkt des Kreises zeigt, sich also mitdreht.

■ Kapitel 2.1.5 hatte für ihren Betrag

$$a_z = \omega^2 \cdot r = \frac{v^2}{r}$$

ergeben ( $\omega$  = Winkelgeschwindigkeit,  $v$  = Bahngeschwindigkeit,  $r$  = Radius der Kreisbahn). Nach der Grundgleichung der Mechanik muss  $\vec{a}_z$  von einer ebenfalls ständig zum Mittelpunkt des Kreises zeigenden Kraft geliefert werden. Sie heißt **Zentripetalkraft** und hat den Betrag

$$F_z = m \cdot a_z = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot v^2 / r.$$

Der Hammerwerfer auf dem Sportplatz muss sie mit seinen Muskeln aufbringen und über das Seil des „Hammers“ auf diesen übertragen.

## Merke

Kreisbahn: zur Zentripetalbeschleunigung  $\vec{a}_z$  gehört eine zum Zentrum hin gerichtete Zentripetalkraft mit Betrag:

$$F_z = m \cdot a_z = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

Die geostationären Satelliten können sich ihre Zentripetalkraft nur von der Gravitation holen. Die aber zeigt zum Zentrum der Erde; deren Mittelpunkt ist Mittelpunkt der Kreisbahn, ob der Satellit nun über die Pole läuft oder anderswo. Geostationär kann er sich freilich nur in einer Äquatorbahn aufhalten; bei allen anderen Bahnen würde er nicht konstant über einem Punkt der Erdoberfläche bleiben.

In Satellitenhöhe darf man für die Fallbeschleunigung nicht mehr den erdnahen Wert  $g$  ansetzen, man muss das Gravitationsgesetz  $F = G \cdot m \cdot M/r^2$  bemühen (► Kap. 2.2.2,  $G$  = Gravitationskonstante,  $M$  = Masse der Erde). Vom geostationären Satelliten wird die Kreisfrequenz  $\omega_E = 2\pi/24 \text{ h}$  verlangt, mit der die Erde rotiert. Daraus folgt für den Betrag der Zentripetalkraft:

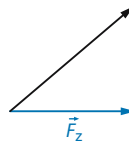
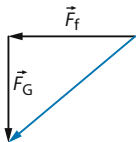
$$F_z = m \cdot \omega_E^2 \cdot r = G \frac{m \cdot M}{r^2}.$$

Dies ist eine Bestimmungsgleichung für  $r$ , denn sie lässt sich nach  $r^3$  auflösen:

$$r^3 = G \cdot M / \omega_E^2.$$

$G$  ist eine Naturkonstante,  $M$  und  $\omega_E$  sind fest vorgegeben, also kann die Bedingung „geostationär“ nur von einem einzigen Bahnradius erfüllt werden. Die Satelliten müssen sich drängeln.

Mit weniger Aufwand als eine Raumfähre dreht ein Kettenkarussell seine Passagiere im Kreis herum. Dabei schwenken die Gondeln nach außen; die Ketten, an denen sie hängen, können wie Seile nur Zugkräfte in ihrer eigenen Richtung übertragen (► Abb. 2.48). Der ruhende, außenstehende Beobachter sagt dazu: Die Passagiere brauchen für ihre Kreisbahn eine horizontale Zentripetalkraft  $\vec{F}_z$ ; die Ketten müssen sie liefern, mit der waagerechten Komponente ihrer Zugkraft. Diese Komponente existiert nur, wenn die Gondeln nach außen schwenken, und die Ketten schräg nach oben ziehen (► Abb. 2.48, rechtes Kräfterdreieck). Der Passagier hingegen sagt: Ich sitze in einem rotierenden, also beschleunigten Bezugssystem, auf mich wirkt außer meiner vertikalen Gewichtskraft  $\vec{F}_G$  eine horizontale Trägheitskraft, die **Zentrifugalkraft**  $\vec{F}_f$ . Beide addieren sich zu einer schräg nach unten und außen gerichteten



► **Abb. 2.48. Kettenkarussell.** Links: Kräfterdreieck aus der Sicht des Passagiers; die Ketten zeigen in Richtung der Resultierenden aus Zentrifugalkraft  $\vec{F}_f$  und Gewichtskraft  $\vec{F}_G$ . Rechts: Kräfterdreieck aus der Sicht des Zuschauers; die Kettenkraft liefert mit ihrer Horizontalkomponenten die zur Kreisbewegung notwendige Zentripetalkraft  $\vec{F}_z$ .



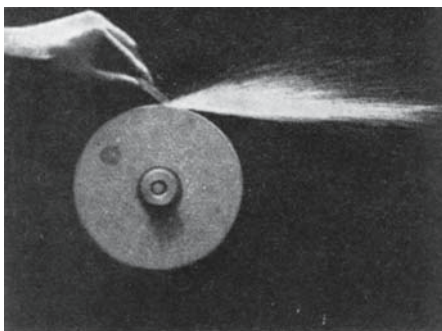
richteten Gesamtkraft, der die Ketten folgen müssen (■ Abb. 2.48, linkes Kräfterdreieck). Außerdem wirkt auf mich noch die Kraft der Ketten (rechtes Kräfterdreieck). Beides kompensiert sich gerade, sodass ich in meinem beschleunigten Bezugssystem in Ruhe bin.  $\vec{F}_z$  und  $\vec{F}_f$  haben die gleichen Beträge, nach der gleichen Formel zu berechnen.

#### Merke

Zentripetalkraft: nach innen gerichtete Zentralkraft;  
Zentrifugalkraft: nach außen gerichtete Fliehkraft im rotierenden Bezugssystem.

Wenn man die beiden Bezugssysteme nicht auseinander hält, kann man Fehlschlüssen aufsitzen. In welcher Richtung fliegt der „Hammer“ weg, den der Hammerwerfer erst im Kreis herum-schleudert und dann loslässt? Radial nach außen, in Richtung der Zentrifugalkraft. Der Werfer darf das in der Tat sagen; er dreht sich ja mit, er gibt sein rotierendes Bezugssystem selber vor. Aber da ist er der Einzige im ganzen Stadion. Alle anderen müssen sagen: Da hält einer mit seinen Muskeln den Hammer auf einer Kreisbahn, und plötzlich lässt er los; folglich fliegt der Hammer mit seiner momentanen Bahngeschwindigkeit ab, tangential zum Kreis, wie die Funken von einer Schleifscheibe (■ Abb. 2.49).

Von den Fliehkräften rotierender Bezugssysteme macht die Technik eifrig Gebrauch, auch im ärztlichen Labor. Die Bestandteile einer Suspen-



■ Abb. 2.49. Keine Kreisbewegung ohne Zentripetalkraft. Von einer Schleifscheibe tangential abfliegende Funken (nach R.W. Pohl)

sion lassen sich im Schwerfeld der Erde voneinander trennen, wie z. B. die Blutsenkung zeigt (► Kap. 3.3.3). Das braucht aber Zeit und lässt sich wesentlich beschleunigen, wenn man für seine Probe die Gewichtskraft durch die Fliehkraft einer **Zentrifuge** ersetzt. Auch sie ist massenproportional. Mit hohen Drehzahlen können durchaus handliche Geräte Radialbeschleunigungen von mehr als 1000 g erzielen. Die eingesetzten Reagenzgläser stehen dann bei laufender Zentrifuge horizontal und sind nicht ganz ungefährlich. 1000 g bedeuten tausendfache Gewichtskraft; da darf es keine mechanischen Schwachstellen geben, sonst fliegt die Zentrifuge auseinander.

#### Rechenbeispiel 2.20: Kettenkarussell

► **Aufgabe.** Mit ungefähr welcher Winkelgeschwindigkeit rotiert das Kettenkarussell in ■ Abb. 2.48?

► **Lösung.** Im Druck ist der zuschauende Familienvater etwa 23 mm hoch. Wenn er tatsächlich 1,80 m groß war, beträgt der Abbildungsmaßstab ungefähr 1:80. Im Bild ist eine Gondel etwa 36 mm von der vertikalen Drehachse entfernt, das entspräche in der Natur einem Bahnradius von ca. 3 m. Da aber der Vater näher an der Kamera stand als das Karussell, dürfte die Annahme  $r \approx 4$  m korrekter sein. Aus der Schräglage der Gondel ergibt sich für das Verhältnis von Zentripetalkraft zu Gewichtskraft

$$\frac{F_z}{F_G} = \frac{v^2}{r \cdot g} = 1,2.$$

Das ist auch das Verhältnis der dazugehörigen Beschleunigungen. Die Radialbeschleunigung ist also ca.  $a_r = 12 \text{ m/s}^2$ . In ► Kap. 2.1.4 haben wir gelernt, dass

$$a_r = \frac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2.$$

Damit ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_r}{r}} = 1,7 \text{ s}^{-1}.$$

Das entspricht etwa 16 Umdrehungen pro Minute.

### 2.3.6 Trägheitsmoment und Drehimpuls

Auch in der Drehbewegung steckt kinetische Energie. Zwar rotieren alle Masseteilchen um eines Rades mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , ihres unterschiedlichen Abstandes  $r(m)$  von der Drehachse wegen aber mit verschiedenen Bahngeschwindigkeiten  $v(m) = \omega \cdot r(m)$ . Es hilft also nichts,  $W_{\text{kin}}$  lässt sich nur durch Summieren der Beiträge aller Masseteilchen dm ermitteln. Mathematisch läuft dies auf eine Integration hinaus:

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot \int v^2(m) \cdot dm = \frac{1}{2} \cdot \omega^2 \cdot \int r^2(m) \cdot dm.$$

Das Integral bekommt einen eigenen Namen; es heißt

$$\text{Trägheitsmoment } I = \int r^2 \cdot dm$$

und wird in  $\text{kg} \cdot \text{m}^2$  gemessen. Leider hängt es nicht nur von der Masseverteilung des rotierenden Körpers ab, sondern auch von der Lage der Drehachse. Immerhin führt seine Definition aber zu der einfachen Beziehung

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2.$$

Demnach bedeuten Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit für die Rotation, was Masse und Geschwindigkeit für die Translation bedeuten.

Die Analogie reicht weiter. So kann die Grundgleichung der Mechanik bei Drehbewegungen in der Form

$$\vec{T} = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

geschrieben werden; Drehmoment  $\vec{T}$  und Kraft  $\vec{F}$  entsprechen einander. Auch wenn es bisher nicht erwähnt wurde: Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$  und Winkelbeschleunigung  $d\vec{\omega}/dt$  sind Vektoren, die in Richtung der Drehachse zeigen. Ganz allgemein kommt man von den Formeln der Translation zu denen der Rotation, wenn man ersetzt

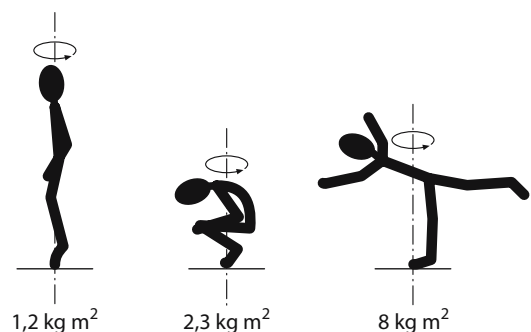
- Wegstrecke  $s$  durch Drehwinkel  $\alpha$
- Geschwindigkeit  $\vec{v}$  durch Winkelgeschwindigkeit  $\vec{\omega}$
- Beschleunigung  $\vec{a}$  durch Winkelbeschleunigung  $d\vec{\omega}/dt$
- Kraft  $\vec{F}$  durch Drehmoment  $\vec{T}$
- Masse  $m$  durch Trägheitsmoment  $I$

Wie nach dieser Aufstellung zu erwarten, gibt es als Gegenstück zum Impuls  $\vec{p}$  und dem Impulserhaltungssatz auch den

$$\text{Drehimpuls } \vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

mit dem **Drehimpulserhaltungssatz**. Er sorgt z. B. dafür, dass ein Kinderkreisel nicht umfällt und ein Frisbee stabil in der Luft liegt; mit dem Vektor  $\vec{L}$  muss auch die ihm parallele Richtung der Drehachse erhalten bleiben.

Ob sie ihn nun kennen oder nicht, Eistänzerinnen und Kunstspringer nutzen den Drehimpulserhaltungssatz auf recht raffinierte Weise. Achsenferne Massen tragen ja in weit höherem Maß zum Trägheitsmoment bei als achsennahe; der Radius  $r$  geht quadratisch ein. Deshalb kann der Mensch sein Trägheitsmoment (im Gegensatz zu seiner Masse) beträchtlich verändern, wie ■ Abb. 2.50 an drei Beispielen zeigt. Will nun die Eistänzerin eine Pirouette drehen, so besorgt sie sich zunächst mit dem Fuß ein Drehmoment  $\vec{T}$ , das ihr wegen  $\vec{T} = d\vec{L}/dt$  einen Drehimpuls verschafft. Diesen übernimmt sie in einer Stellung mit hohem Trägheitsmoment (drittes Teilbild der ■ Abb. 2.50) und relativ kleiner Winkelgeschwindigkeit. Wenn sie sich jetzt aufrichtet und die Arme an den Körper und damit an die vertikale Drehachse heranholt, nimmt ihre Winkelgeschwindigkeit merklich zu, denn anders kann der Drehimpuls bei vermindertem Trägheitsmoment nicht erhalten bleiben. Ähnliches tut der Kunstspringer beim Salto, nur rotiert er um eine horizontale Achse. Nach dem Absprung geht er in die Hocke, um  $I$  zu verrin-



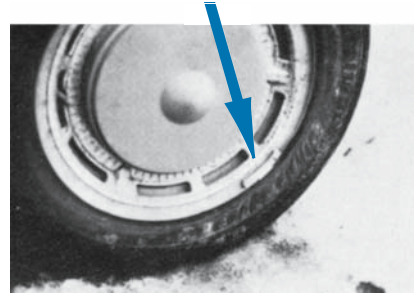
■ Abb. 2.50. Eistänzerin. Trägheitsmomente des Menschen in verschiedenen Körperhaltungen bei Drehung um die vertikale freie Achse (Anhaltswerte)



gern und  $\bar{\omega}$  zu erhöhen; am Ende des Sprunges streckt er sich wieder, um bei kleinerem  $\bar{\omega}$  mit den Händen zuerst sicher in das Wasser einzutauchen. Dort gibt er dann seinen Drehimpuls an die Erde zurück, von der er ihn beim Absprung vom Turm ausgeborgt hatte.

Weil achsenferne Körperteile mehr zum Trägheitsmoment beitragen als achsennahe, gehen z. B. Pferde auf Zehenspitzen: ihre kleinen und schmalen Hufe entsprechen anatomisch Finger- und Fußnägel. Das ist schlecht im Sumpf, aber gut zum raschen Laufen auf festem Boden: Die Beine lassen sich rasch bewegen, ohne viel Muskelkraft für hohe Drehmomente aufbringen zu müssen, die hohe Trägheitsmomente anfordern würden.

Wer einen Salto springt, rotiert um eine sog. **freie Achse**, im Gegensatz zum Geräteturner, der sich bei einer Riesenwelle die Reckstange als Drehachse vorgibt. Freie Achsen müssen immer durch den Schwerpunkt laufen, denn täten sie es nicht, so durchliefe der Massenmittelpunkt eine Kreisbahn: eine Zentrifugalkraft wäre die Folge. Die aber kann nur von einer festen Achse aufgefangen werden (bei einer Riesenwelle biegt sich die Reckstange ja auch ganz schön durch). Jedes Rad eines Autos muss durch eine kleine Zusatzmasse „ausgewuchtet“ werden (▣ Abb. 2.51), bis sein Schwerpunkt auf der konstruktiv vorgeschriebenen „Mechanikerachse“ liegt. Andernfalls „schlägt“ das Rad und reißt an seinem Lager. Der



▣ Abb. 2.51. Auswuchten. Zusatzgewicht zum Auswuchten eines Autorades

Springer im Salto hat kein Lager, ihm bleibt nur eine freie Achse. Beim Rad des Autos soll sie mit der Mechanikerachse zusammenfallen.

#### Merke

Für die Rotation bedeuten Drehmoment, Trägheitsmoment und Drehimpuls das, was für die Translation Kraft, Masse und Impuls ist

#### In Kürze

	Formel	Größen [Einheit]
<b>Lineare Bewegung</b> (Machen Sie sich die Interpretation von Weg-Zeit- und Geschwindigkeits-Zeit-Diagrammen klar.)		
Konstante Geschwindigkeit	$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	s: Weg [m] t: Zeit [s]
Weg	$s(t) = v \cdot t + s_0$	v: Geschwindigkeit [m/s] s <sub>0</sub> : Anfangsort [m]
Konstante Beschleunigung	$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	a: Beschleunigung [m/s <sup>2</sup> ]
Geschwindigkeit	$v(t) = a \cdot t + v_0$	v <sub>0</sub> : Anfangsgeschwindigkeit [m/s]
Weg	$s(t) = \frac{a}{2} t^2 + v_0 \cdot t + s_0$	

Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit		
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$\omega$ : Winkelgeschwindigkeit [1/s] $T$ : Umlaufzeit [s]
Bahngeschwindigkeit	$v = \omega \cdot r$	$r$ : Radius [m] $v$ : Bahngeschwindigkeit [m/s]
Radialbeschleunigung	$a_r = \frac{v^2}{r}$	$a_r$ : Radialbeschleunigung [m/s²] $F_z$ : Zentripetalkraft [N], nach innen gerichtet
Zentripetalkraft	$F_z = m \frac{v^2}{r}$	
Zentrifugalkraft	Im beschleunigten Bezugssystem ist die Zentrifugalkraft entgegengesetzt gleich der Zentripetalkraft.	
Schwerkraft		
Schwerkraft	$F_G = m \cdot g$	$F_G$ : Schwerkraft [N, Newton] $m$ : Masse [kg] $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ : Fallbeschleunigung
Hebelgesetz		
„Last mal Lastarm gleich Kraft mal Kraftarm“	$F_1 \cdot l_{\text{eff}_1} = F_2 \cdot l_{\text{eff}_2}$	$F_1$ : Last-Kraft [N] $l_{\text{eff}_1}$ : Lastarm [m] $F_2, l_{\text{eff}_2}$ : Kraft, Kraftarm
Drehmoment	$T = F \cdot l_{\text{eff}}$	$T$ : Drehmoment [Nm] $l_{\text{eff}}$ : effektiver Abstand des Angriffspunktes der Kraft von der Drehachse [m]
Gleichgewicht	Die Vektorsumme aller Kräfte und Drehmomente muss Null sein	
Grundgleichung der Mechanik		
Jede Beschleunigung erfordert eine resultierende Kraft	$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	$\vec{F}$ : Kraftvektor [N] $m$ : Masse [kg] $\vec{a}$ : Beschleunigungsvektor [m/s]
Arbeit		
Arbeit gleich Kraft mal Weg	$W = F \cdot \Delta s$	$W$ : Arbeit [J, Joule] $F$ : Kraft [N] $\Delta s$ : Weg [m]
Energie		
kinetische Energie (Bewegungsenergie)	$W_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2$	$W$ : Arbeit, Energie [J, Joule] $W_{\text{kin}}$ : kinetische Energie
potentielle Energie (Lageenergie)	$W_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot \Delta h$ (im Schwerfeld der Erde)	$W_{\text{pot}}$ : potentielle Energie
Leistung	$P = \frac{dW}{dt}$	$P$ : Leistung $\left[ \frac{\text{J}}{\text{s}} = \text{W, Watt} \right]$
Impuls		
Impuls	$p = m \cdot v$	$p$ : Impuls $\left[ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \right]$


## Übungsfragen

(• leicht; •• mittel; ••• schwer)



### Beschleunigung

- 1. Ein Körper bewegt sich mit einer negativen Beschleunigung von  $-1 \text{ m/s}^2$ . Seine Anfangsgeschwindigkeit ist  $1 \text{ m/s}$ . Nach welcher Zeit ist seine Geschwindigkeit Null?
- 2. Ein rasanter Sportwagen kommt in 6 Sekunden „auf Hundert“ ( $100 \text{ km/h}$ ). Wie groß ist die mittlere Beschleunigung im Vergleich zum freien Fall?
- 3. Sie lassen einen Stein in einen Brunnen fallen und hören es nach 2 Sekunden „platschen“. Wie tief ist der Brunnen?
- 4. Aus welcher Höhe muss man einen Dummy zu Boden fallen lassen, wenn man den Aufprall eines Motorradfahrers simulieren will, der mit  $50 \text{ km/h}$  auf eine Mauer fährt?
- 5. Ein Mensch gleitet aus und schlägt mit dem Hinterkopf auf den Boden. Dem Wievielfachen der Erdbeschleunigung ist der Schädel ausgesetzt? Zur Abschätzung sei angenommen: freier Fall aus  $1,5 \text{ m}$  Höhe; konstante Verzögerung beim Aufschlag auf einer Strecke von  $5 \text{ mm}$ .

### Zusammengesetzte Bewegung

- 6. Wie muss der Bootsführer in  Abb. 2.5 steuern, wenn er möglichst schnell ans andere Ufer kommen will?
- 7. Regentropfen, die auf die Seitenfenster eines fahrenden Zugs treffen, hinterlassen eine schräg laufende Spur auf dem Fenster. Ein durchschnittlicher Regentropfen fällt senkrecht mit etwa  $8 \text{ m/s}$  und die Spur auf dem Fenster habe einen Winkel von  $60^\circ$  zur Senkrechten. Wie schnell fährt der Zug, Windstille vorausgesetzt?
- 8. Ein Känguru auf der Flucht macht  $6 \text{ m}$  weite und  $1,5 \text{ m}$  hohe Sprünge. Wie groß ist die horizontale Fluchtgeschwindigkeit?

### Kraft, Drehmoment

- 9. Der statistische Einheitsmensch wiegt „70 Kilo“. Wie groß ist seine Gewichtskraft?
- 10. Wie viel Kraft spart die schiefe Ebene der  Abb. 2.21 quantitativ?
- 11. Angenommen, die Gewichtskraft des Flaschenzuges von  Abb. 2.22 könnte gegenüber den  $10 \text{ kN}$  der Gewichtskraft  $F_1$  der Last vernachlässigt werden.
  - a. Welche Kraft  $F$  belastet die Decke, wenn das freie Ende des Seiles senkrecht nach unten gezogen wird?
  - b. Wird die Decke stärker belastet, wenn man, wie gezeichnet, schräg zieht, oder weniger stark?
- 12. Sie machen auf einer Personenwaage schwungvolle Kniebeugen. Wie ändert das Anzeige am Ende der Abwärtsbewegung?
- 13. Ein Kind ist doppelt so schwer wie ein anderes. In welchem Abstand von der Drehachse einer Wippe setzen sie sich am besten, um gut wippen zu können?

### Energie und Leistung

- 14. Wie viel Zeit hat man, um seine  $70 \text{ kg}$  die  $16$  Stufen je  $17 \text{ cm}$  eines Stockwerkes hoch zu schleppen, wenn man dabei  $500 \text{ W}$  umsetzen will? Wer leichter ist, muss schneller sein.
- 15. Welche mechanische Arbeit leisten Sie ungefähr, wenn sie ein Stockwerk hinaufsteigen?
- 16. Ein Klotz mit einer Masse von  $1 \text{ kg}$  und einer Startgeschwindigkeit von  $1 \text{ m/s}$  kommt durch Reibung zur Ruhe. Welche Wärmemenge entsteht dabei?
- 17. Jane, nach Tarzan Ausschau haltend, rennt so schnell sie kann ( $5,6 \text{ m/s}$ ), greift sich eine senkrecht herunterhängende Liane und schwingt nach oben. Wie hoch schwingt sie? Spielt die Länge der Liane eine Rolle?

### Zum Impulssatz

- 18. Was ist „schlimmer“: gegen eine Betonwand fahren oder mit einem massegleichen Auto frontal zusammenstoßen, dass mit der gleichen Geschwindigkeit fährt?
- 19. Bei einem Verkehrsunfall fahren zwei massegleiche Wagen aufeinander. Wie viel Energie wird bei unelastischem Stoß durch verbogenes Blech in Wärme umgesetzt, wenn
  - a. der eine Wagen auf den stehenden anderen auffährt?
  - b. beide Wagen mit gleichen Geschwindigkeiten frontal zusammenstoßen?

### Trägheitskräfte

- 20. Wie reagiert der Abgleich einer Balkenwaage auf die Trägheitskräfte eines beschleunigten Bezugssystems?
- 21. Ein Passagier in einem Flugzeug, das gerade auf Starterlaubnis wartet, nimmt seine Armbanduhr an einem Ende und lässt sie senkrecht herunterbaumeln. Das Flugzeug bekommt die Starterlaubnis und beschleunigt. Dabei schwenkt die Uhr aus der Senkrechten um ca.  $25^\circ$  nach hinten. Nach  $18$  Sekunden mit etwa konstanter Beschleunigung hebt das Flugzeug ab. Wie groß ist seine Startgeschwindigkeit?

### Drehbewegung

- 22. Welche Drehfrequenz und welche Kreisfrequenz, welche Bahngeschwindigkeit und welche Winkelgeschwindigkeit hat die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne? (Erdbahnradius im Anhang).
- 23. Um welchen Faktor erhöht sich die Zentrifugalbeschleunigung einer Zentrifuge, wenn man deren Drehzahl verdoppelt?

# Mechanik deformierbarer Körper

## 3.1 Die Aggregatzustände – 68

## 3.2 Festkörper – 69

- 3.2.1 Struktur der Festkörper – 69
- 3.2.2 Verformung von Festkörpern – 70
- 3.2.3 Viskoelastizität – 73

## 3.3 Druck – 73

- 3.3.1 Stempeldruck – 73
- 3.3.2 Schweredruck – 75
- 3.3.3 Auftrieb – 77
- 3.3.4 Manometer – 79
- 3.3.5 Pumpen – 80
- 3.3.6 Kompressibilität – 81
- 3.3.7 Blutdruckmessung – 82

## 3.4 Grenzflächen – 83

- 3.4.1 Kohäsion – 83
- 3.4.2 Adhäsion – 86

## 3.5 Strömung – 88

- 3.5.1 Zähigkeit (Viskosität) – 88
- 3.5.2 Laminare Strömung – 89
- 3.5.3 Turbulente Strömung – 93
- 3.5.4 Staudruck – 95

### ➤ ➤ Einleitung

Der „starre Körper“ ist eine Fiktion: Auch der härteste „feste Körper“ lässt sich noch verbiegen und mit der nötigen Gewalt auch zerbrechen. Demgegenüber passt eine Flüssigkeit ihre Form dem Gefäß an, in dem sie sich befindet; sie behält aber ihr Volumen bei und bestimmt danach ihre Oberfläche. Ein Gas schließlich füllt (unter Laborbedingungen, nicht in astronomischem Maßstab) sein Gefäß vollständig und gleichmäßig aus. Eben weil Flüssigkeiten und Gase keine eigene Form besitzen, lassen sie sich etwa durch Strömung in Röhren relativ leicht transportieren. Blutkreislauf und Atmung nutzen dies aus.

## 3.1 Die Aggregatzustände

Bei einfachen Substanzen wie  $\text{H}_2\text{O}$  ist die Zuordnung zu den drei Aggregatzuständen fest, flüssig und gasförmig nahe liegend und unproblematisch. Beim Fensterglas mag verwundern, dass es zu den Flüssigkeiten gehört. Was aber macht man mit Kaugummi, Haut und Haaren?

Die Materie dieser Erde besteht aus Atomen. Jedes Atom besitzt eine lockere Elektronenhülle, die seinen Durchmesser bestimmt, und einen vergleichsweise kleinen Atomkern, der seine Masse bestimmt. Der Kern enthält Protonen und Neutronen. Protonen sind positiv elektrisch geladen, Elektronen negativ und Neutronen sind ungeladen (neutral); der Kern kann demnach seine Hülle durch elektrische Kräfte an sich binden. Diese Kräfte würden aber die positiven Protonen auseinander treiben, wären da nicht die anziehenden Kernkräfte zwischen ihnen und den Neutronen. Balance kann nur in bestimmten Kombinationen erreicht werden; Atome, Atomkerne existieren nur von den rund hundert chemischen Elementen.

Bis zum Element Nr. 83, dem Wismut, gibt es stabile Atomkerne, ab Nr. 84 (Polonium) zerfallen alle Kerne nach einer gewissen Zeit in kleinere, sind also radioaktiv. Elemente bis Nr. 92, dem Uran, kommen in der Natur vor, die Transurane müssen künstlich hergestellt werden. Stabile Atomkerne überdauern Jahrmilliarden; die schweren Elemente der Erde sind irgendwann einmal im Innern eines Sternes entstanden. Die

Vielfalt der Substanzen ist nur möglich, weil sich die wenigen Atomsorten in den unterschiedlichsten Kombinationen zu Molekülen zusammenlegen können. Wie sie dies tun, warum sie dies tun, ist Thema der Chemie. Deren Formeln sagen, welche Atome in welchen Anzahlen welche Moleküle bilden. Die zugehörigen Bindungskräfte sind weit schwächer als die Kernkräfte. Bei chemischen Reaktionen wird deshalb auch weit weniger Energie umgesetzt als bei Kernreaktionen. Kohlekraftwerke müssen wesentlich mehr Brennstoff verfeuern und entsorgen als Kernkraftwerke. Moleküle sind klein, selbst Billionen liefern noch keine sichtbaren Krümel. Makroskopische Körper entstehen nur, weil sich Moleküle zu großen Komplexen zusammenlegen können. Die dabei auftretenden Bindungskräfte sind freilich so schwach, dass man sie mit Hammer und Meißel oder auch mit reiner Temperaturerhöhung überwinden kann. Wenn Wasser verdampft, treten einzelne Moleküle durch die Oberfläche der Flüssigkeit in den Dampfraum über. Auch diese Phänomene tragen zur Vielfalt der Substanzen bei. Ob Nebel oder Regen, ob Hagelkorn, Tropfen oder Schneeflocke, ob Pfütze, Raureif oder Glatteis, immer handelt es sich um die gleichen  $\text{H}_2\text{O}$ -Moleküle, nur in verschiedenen **Aggregatzuständen**. Ein **Festkörper** ist formstabil; verbiegt man ihn nur leicht, so kehrt er elastisch in seine Ausgangsform zurück. Überfordert man seine mechanische Festigkeit, so zerreißt, zerbricht, zerkrümelt er. Eine **Flüssigkeit** besitzt keine eigene Form; sie passt sich dem Gefäß an, in das sie eingefüllt wurde. Wasser braucht dazu allenfalls Sekunden, Kochkäse Stunden, antiken Gläsern haben zweitausend Jahre noch nicht genügt, wider den Augenschein ist ein Glas kein Festkörper in der strengen Definition der Aggregatzustände (s. dazu auch Ende ► Kap. 5.3.1). Eine vorgegebene Flüssigkeitsmenge kennt ihr Volumen und behält es bei, wenn man sie umgießt. Die Molekülabstände liegen in der gleichen Größenordnung wie bei Festkörpern, die Dichten also auch. Ein Gas füllt dagegen jedes Volumen gleichmäßig aus, das man ihm als Gefäß anbietet (jedenfalls gilt das in irdischen Verhältnissen, solange die Schwerkraft keine nennenswerte Rolle spielt). Im **Gas** treffen sich die Moleküle nur noch selten, Kräfte zwischen ihnen können sich kaum auswir-

ken. Die Abstände sind groß, die Dichten normalerweise um Zehnerpotenzen geringer.

### Merke

Aggregatzustände:

- fest: formstabil bis zur Festigkeitsgrenze
- flüssig: nicht form-, wohl aber volumenstabil
- gasförmig: weder form- noch volumenstabil

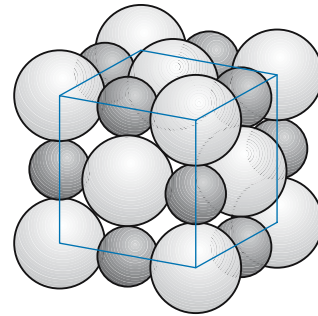
So ganz befriedigen kann die Einteilung in genau drei Aggregatzustände nicht. Was macht man mit Haut und Haaren? Sie sind weder richtige Festkörper noch richtige Flüssigkeiten. Als man die Aggregatzustände erfand, meinte man noch, Physik und Chemie brauchten und dürften sich nur mit toter Materie befassen, denn „das Leben“ habe eine völlig andere Qualität. Insofern war es eine Sensation, als Friedrich Wöhler 1828 mit dem Harnstoff zum ersten Mal eine den lebenden Organismen zugeordnete Substanz in der Retorte herstellte. Aber da gab es die Aggregatzustände schon.

## 3.2 Festkörper

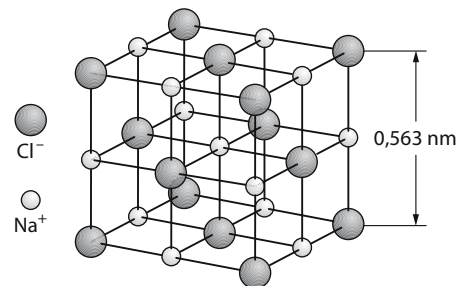
### 3.2.1 Struktur der Festkörper

Kennzeichen des Festkörpers ist seine kristalline Struktur. Sie verleiht ihm Formstabilität, macht ihn aber nicht starr. Der feste Körper lässt sich elastisch (vorübergehend) oder plastisch (dauerhaft) verformen.

Im **Kristallgitter** herrscht Ordnung; jedem Gitterbaustein wird ein fester Platz zugewiesen. Kochsalz beispielsweise besteht aus elektrisch positiv geladenen Ionen des Natriums und aus den negativen Ionen des Chlors. Im NaCl-Gitter sind sie so angeordnet, dass jedes  $\text{Na}^+$ -Ion sechs  $\text{Cl}^-$ -Ionen als nächste Nachbarn hat und umgekehrt. Das führt zu einer würfelförmigen **Elementarzelle** des Gitters, wie sie ■ Abb. 3.1 schematisch darstellt. Sehen kann man einen solchen Würfel nicht; dazu ist er zu klein. Seine Kantenlänge beträgt gerade ein halbes Nanometer.



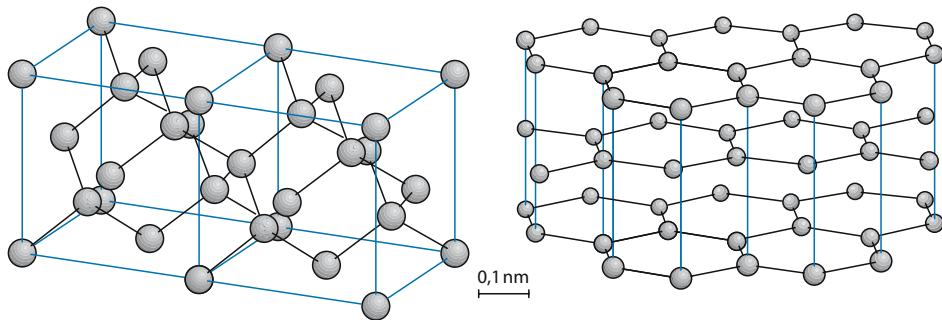
■ Abb. 3.1. Kristallgitter des NaCl (Kochsalz). Die dicken  $\text{Cl}^-$ -Ionen und die kleineren  $\text{Na}^+$ -Ionen liegen dicht an dicht



■ Abb. 3.2. Kubisch-flächenzentriertes Gitter (NaCl); Modelle dieser Art markieren nur die Lagen der Zentren der Gitterbausteine ohne Rücksicht auf deren Größe

Zeichnungen dieser Art stellen Gitterbausteine als Kugeln dar, die sich gegenseitig berühren. Das ist halbwegs realistisch, aber nicht sehr übersichtlich, weil man nicht in das Gitter hineinschauen kann. Insofern haben Zeichnungen nach Art der ■ Abb. 3.2 ihre Vorzüge. Sie sind Kristallmodellen nachempfunden, die man aus Holzkugeln und Metallstäbchen zusammenbastelt, um Symmetrien anschaulich darstellen zu können. Nur darf man sich nicht täuschen lassen: Die Bausteine eines Kristallgitters sind wirklich keine kleinen Kugeln, die von Stäben auf Distanz gehalten werden.

Im NaCl-Kristall liegen die Würfel der Elementarzelle dicht an dicht; das Gitter wiederholt sich identisch in allen drei Kantenrichtungen. Aber auch bei einer Drehung um eine Würfelkante landen nach  $90^\circ$  alle Gitterplätze wieder auf Gitterplätzen; viermal bis zur vollen Drehung. Die Kristallographen bezeichnen sie als „vierzäh-



■ Abb. 3.3. Diamant und Graphit. Zwei unterschiedliche Kristallmodifikationen des Kohlenstoffs.

lige Symmetrieachsen“ und reden von einem „kubischen Gitter“.

Die Atome des Kohlenstoffs bilden gern 6er-Ringe. Mit chemisch gebundenem Wasserstoff gibt das die ringförmigen Moleküle des Benzols, ohne jeden Bindungspartner die 6-zählige, hexagonale Kristallstruktur des Graphits (■ Abb. 3.3 rechts). Graphit ist schwarz und so weich, dass man mit ihm schreiben kann. Kohlenstoff kann aber auch kubisch kristallisieren. Dann ist er glasklar durchsichtig und härter als jedes andere Mineral; man kann Glas mit ihm ritzen. Aus einleuchtendem Grund bezeichnet man die zugehörige Struktur als **Diamantgitter** (■ Abb. 3.3 links).

Die Eigenschaften eines Festkörpers hängen nicht nur von der Natur seiner Bausteine ab, sondern auch von der Struktur des Kristallgitters. Dessen Bausteine müssen keine Atome sein wie beim Diamanten oder Ionen wie beim Kochsalz, ganze Moleküle sind ebenfalls erlaubt, wie beispielsweise bei Eis und Schnee. Auch die großen Moleküle des Insulins kann man mit einiger Mühe zu Kristallen zusammenlegen und sogar Viren, die im Grenzbereich zur lebenden Materie angesiedelt sind.

### 3.2.2 Verformung von Festkörpern

Auch die starken Bindungskräfte im Kristall halten die Gitterbausteine nicht unverrückbar auf ihren Plätzen fest, ein fester Körper ist noch kein starrer Körper. Er kann auch durch relativ schwache äußere Kräfte verbogen werden. Allerdings

lassen die Bindungen zunächst nur geringe Verschiebungen zu und holen die Gitterbausteine sofort in ihre Normallage zurück, sobald die äußere Kraft nachlässt: Die Verformung ist elastisch und verschwindet spurlos. Leicht untersuchen lässt sich ein Sonderfall, die Dehnung eines Drahtes unter Zug. Man darf ein lineares Kraftgesetz erwarten (► Kap. 2.2.1): Proportionalität zwischen Längenänderung  $\Delta l$  und angreifender Kraft  $F$ . Weiterhin wird  $\Delta l$  mit der Ausgangslänge  $l_0$  zu- und mit der Querschnittsfläche  $A$  des Drahtes abnehmen. Der Quotient  $\Delta l/l_0$  bekommt den Namen **Dehnung**, der Quotient  $F/A = \sigma$  heißt (mechanische) **Spannung**.

Sind Spannung und Dehnung einander proportional, so erfüllen sie das **Hooke'sche Gesetz**

$$\sigma = E \cdot \Delta l/l_0,$$

die Proportionalitätskonstante  $E$  heißt **Elastizitätsmodul**  $\sigma$ .  $\sigma$  und  $E$  haben die gleiche Einheit  $\text{N/m}^2$ , denn die Dehnung ist eine dimensionslose Zahl. Die Elastizitätsmodule gängiger Metalle liegen in der Größenordnung  $10^{11} \text{ N/m}^2$ .

#### Merke

- Mechanische Spannung

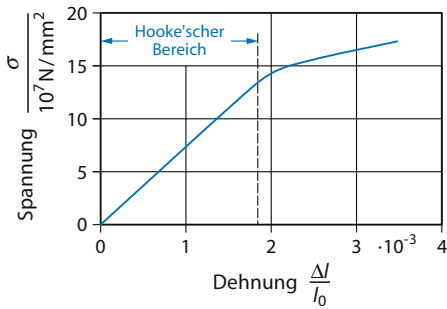
$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (\text{Kraft durch Querschnittsfläche})$$

- Dehnung = relative Längenänderung  $\frac{\Delta l}{l}$

- Hooke'sches Gesetz: Dehnung ist zur Spannung proportional:

$$\frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l}$$





■ Abb. 3.4. Spannungs-Dehnungs-Diagramm vom Kupfer

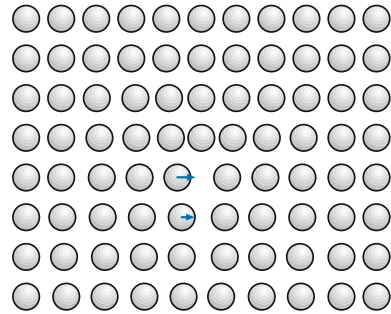
Erhöht man die Spannung über die sog. **Elastizitätsgrenze** hinaus, so nimmt die Dehnung überproportional zu (■ Abb. 3.4): Der Draht beginnt zu fließen und kehrt nach Entlastung nicht zur alten Ausgangslänge zurück, er hat sich plastisch gedehnt. Dem sind aber Grenzen gesetzt; irgendwann reißt der Draht. Manche Substanzen lassen sich fast gar nicht plastisch verformen; wird ihre Elastizitätsgrenze überschritten, so brechen sie wie Glas. Man nennt sie spröde.

#### Merke

Elastische Verformungen sind reversibel, plastische irreversibel.

Bei plastischer Verformung müssen ganze Bereiche eines Kristalls gegeneinander verschoben werden. Das geht nur, wenn Gitternachbarn sich voneinander trennen und mit neuen Nachbarn wieder zusammenlegen, ein schier unmöglicher Vorgang, wäre der Kristall perfekt gebaut. Tatsächlich springt ein Baustein innen nur in eine benachbarte Leerstelle, in einen aus irgendwelchen Gründen gerade nicht besetzten Gitterplatz.

Besondere Bedeutung haben hier linienförmige Anordnungen gleichartiger Leerstellen der Art, wie sie ■ Abb. 3.5 etwas schematisch skizziert (man nennt das eine Stufenversetzung). Hier kann eine ganze Atomreihe senkrecht zur Zeichenebene relativ leicht, z. B. nach rechts, in die Lücke hineinspringen und so die Versetzung um einen Atomabstand nach links verschieben. Ist nach diesem Mechanismus eine Stufenversetzung quer



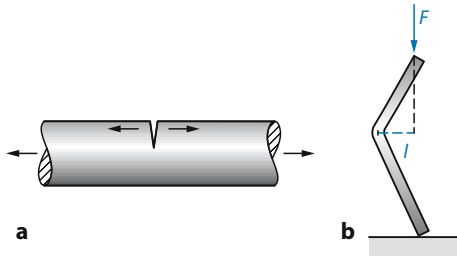
■ Abb. 3.5. Stufenversetzung. In den oberen Teil des Kristalls hat sich, vier Gitterabstände weit, eine zusätzliche Netzebene vertikal eingeschoben; unter ihrem Ende ist das Gitter dadurch ein wenig aufgeweitet worden. Oberhalb und unterhalb der Zeichenebene setzt sich die Versetzung in gleicher Weise im Kristall fort: sie zieht sich wie ein Schlauch durch den Kristall hindurch. Springen die beiden markierten Gitterbausteine nach rechts, so verschiebt sich die Versetzung um einen Netzebenenabstand nach links

durch den Kristall hindurchgewandert, so ist dessen unterer Bereich gegenüber dem oberen um einen Atomabstand abgeglitten. Zur plastischen Verformbarkeit gehören demnach bewegliche Versetzungen. Diese können sich aber an anderen Gitterfehlern wie Fremdatomen oder Einschlüssen festhaken: Gusseisen ist spröde, es enthält mehrere Prozent Kohlenstoff, an denen die Versetzungen hängen bleiben; schmiedbarer Stahl dagegen meist weniger als 0,1%.

Die Bruchfestigkeit hängt nicht nur von den Eigenschaften des Materials selbst ab. Schon winzige Kerben in der Oberfläche können sich verhängnisvoll auswirken, weil nämlich die oberflächennahen Anteile einer Zugkraft ein Drehmoment auf die Kerbenspitze ausüben (■ Abb. 3.6a). Es wächst auch noch, je weiter es die Kerbe einreißt. Dünne Stäbe, auf Stauchung beansprucht, knicken ein. Wieder wirkt ein Drehmoment auf die Knickstelle; wieder wächst es, je weiter das Material nachgibt, weil dann der effektive Hebelarm größer wird (■ Abb. 3.6b).

Knickung bedeutet **Biegung**. Ein gebogener Stab wird auf der Außenseite gedehnt, auf der Innenseite gestaucht. Dazwischen liegt die **neutrale Faser**, die ihre Länge nicht ändert (■ Abb. 3.7). Zur Biegesteifigkeit eines Stabes tragen die von der neutralen Faser am weitesten entfernten Teile



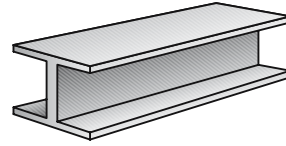


■ **Abb. 3.6 a,b. Instabilität durch Hebelwirkung beim Bruch.** Das Drehmoment (effektiver Hebelarm  $l$  mal Kraft  $F$ ), das auf die Spitze der Kerbe (a) oder die Knickstelle (b) wirkt, nimmt zu, je weiter die Kerbe einreißt bzw. der Stab einknickt

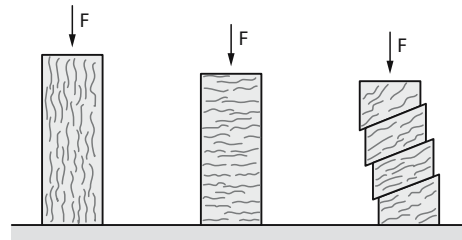
am meisten bei; man spart Material, wenn man sie auf Kosten des Mittelteils verstärkt. Technisches Beispiel: der Doppel-T-Träger (■ Abb. 3.8). Liegt die Richtung der Biegebeanspruchung nicht von vornherein fest, so empfiehlt sich ein kreisrundes Rohr mit relativ dünner Wand. Halme sind nach diesem Prinzip konstruiert, aber auch die hohlen Knochen der Vögel.

Dehnung und Stauchung sind nicht die einzigen mechanischen Belastungen, denen festes Material ausgesetzt sein kann. Eine Achse, die ein Drehmoment übertragen soll, wird auf **Drillung** beansprucht, auf **Torsion**. Bei Tiefbohrungen kann es vorkommen, dass die Maschine am oberen Ende des Bohrgestänges schon ein paar Umdrehungen weiter ist als der Bohrkopf tief unten.

Schließlich: die mechanischen Eigenschaften mancher Materialien sind nicht einmal in allen Richtungen gleich. Als Musterbeispiel kann ein Holzklotz dienen, der gestaucht werden soll (■ Abb. 3.9). Liegen seine Fasern längs oder quer zur Kraft, so besitzt er eine recht hohe Festigkeit. Sie ist deutlich geringer, wenn die Fasern einen

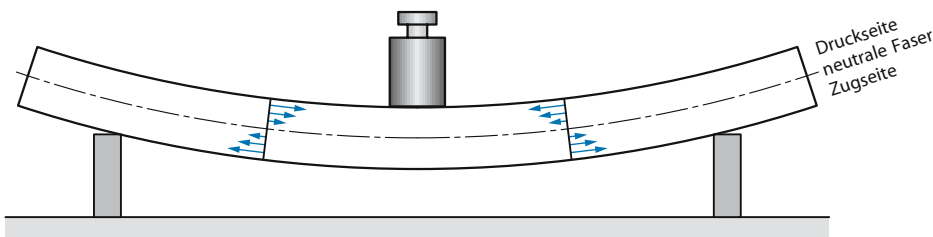


■ **Abb. 3.8. Doppel-T-Träger.** Das von der neutralen Faser am weitesten entfernte Material trägt am meisten zur Biegefestigkeit bei



■ **Abb. 3.9. Faseriges Material.** Gegenüber gerichteter Belastung hängt die Festigkeit faserigen Materials von der Richtung der Fasern ab

Winkel von  $45^\circ$  bilden, denn jetzt können die einzelnen Lagen des Holzes relativ leicht gegeneinander abgescher werden wie schlecht verleimte Brettchen. Unter  $45^\circ$  erzeugt die stauchende Kraft eine besonders hohe Schubspannung, hier also in Richtung der Fasern. Die dazu senkrechte Komponente der Kraft führt zur Normalspannung, die vom Holz leichter aufgenommen werden kann. Man sagt: die mechanischen Eigenschaften von Holz sind **anisotrop**. Das Gegenteil von anisotrop ist **isotrop**: ein isotropes Material verhält sich in allen Richtungen gleich. Metalle sind in der Regel ein Beispiel hierfür.



■ **Abb. 3.7. Neutrale Faser.** Bei der Biegung ändert die neutrale Faser ihre Länge nicht

**Rechenbeispiel 3.1: Mensch am Draht**

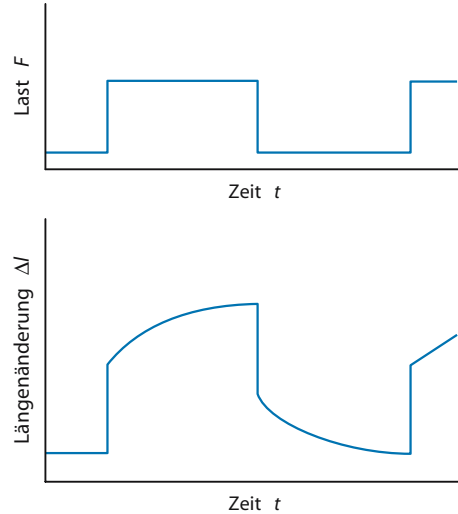
► **Aufgabe.** Welchen Durchmesser muss ein Kupferdraht mindestens haben, wenn er ohne plastische Verformung einen Menschen tragen soll? Beachte ■ Abb. 3.4.

► **Lösung.** Das Ende der Hooke'schen Geraden befindet sich etwa bei der Grenzspannung  $\sigma_g = 13 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ . Wenn der Mensch ein Gewicht von 690 N hat (entspricht 70 kg), so ergibt sich für die minimal erforderliche Querschnittsfläche:

$$A_{\min} = \frac{F_G}{\sigma_g} = 5,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = \frac{1}{4} d_{\min}^2$$

Also ist der minimale Durchmesser

$$d_{\min} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,6 \text{ mm}.$$



■ Abb. 3.10. Viskoelastizität. Längenänderung eines viskoelastischen Stabes unter wechselnder Last, idealisiert

**3.2.3 Viskoelastizität**

Leben ist an Wasser gebunden; es ist in den Weltmeeren entstanden und hat sich in seiner Entwicklung an dessen Zusammensetzung angepasst. Auch menschliches Leben braucht Wasser; der Salzgehalt des Blutes ist dem der Meere nicht unähnlich. In gewissem Sinn haben die Tiere, als sie an Land gingen, ihre alte Umgebung mitgenommen, nur mussten sie nun sorglich einhüllen, was vorher Umwelt gewesen war. Der starre Panzer der Insekten hat konstruktive Nachteile, z. B. beim Wachsen, man muss sich häuten. Wirbeltiere verlegen darum ihr tragendes Skelett nach innen, brauchen nun aber eine Haut, die schlagfest und wasserdicht ist und trotzdem beweglich und biegsam. Die technische Lösung heißt Hochpolymere. Die chemische Industrie hat sich ihrer in großem Umfang angenommen.

Unter **Polymerisation** versteht man das Zusammenlagern relativ „kleiner“ Moleküle der organischen Chemie zu größeren Komplexen, die dann viele Tausende von Atomen umfassen können. Manche haben fadenförmige Struktur, sind in sich selbst biegsam und lagern sich verhakelt und verknäult ihrerseits zusammen. Dabei bleiben sie oftmals in weiten Grenzen gegeneinander verschieblich, dürfen ihre Knäuel aufziehen, sich lokal voneinander trennen und umlagern. Die Körper, die sie bilden, sind weder so formstabil wie Kristalle noch so beweglich wie echte Flüssigkei-

ten. Man nennt sie **viskoelastisch**, denn sie können beispielsweise einer mechanischen Beanspruchung momentan und elastisch folgen, danach aber viskos weiterkriechen. Manche ändern ihre Form unter konstanter Belastung noch nach Minuten und Stunden. Hört die Belastung plötzlich auf, so kehren sie auf ähnlichem Weg mehr oder weniger genau in ihre Ausgangsform zurück, wie dies ■ Abb. 3.10 recht grobschematisch andeutet.

**3.3 Druck****3.3.1 Stempeldruck**

Bei Flüssigkeiten und Gasen haben Drücke ähnliche Funktionen wie Kräfte bei den Festkörpern.

Jede plastische Verformung eines Festkörpers beruht auf Abgleitungen nach Art verleimter Brettchen. Durch die Struktur des Kristalls sind **Gleitebenen** vorgebildet, die Schubspannungen einen vergleichsweise geringen, aber immer noch beträchtlichen Widerstand entgegensetzen. Flüssigkeiten und erst recht Gase haben, zumindest im Idealfall, gar keine Schubfestigkeit, weil sich ihre Moleküle grundsätzlich frei gegeneinander verschieben können: Flüssigkeiten sind nicht

formstabil. Deshalb kann der Arzt ein flüssiges Medikament aus der Ampulle in die Spritze saugen und dann durch die enge Kanüle seinem Patienten injizieren.

Die Injektion erfordert eine Kraft, als Muskelkraft vom Daumen auf den Kolben der Spritze ausgeübt. Der Kolben muss „dicht“ schließen, d. h. die Querschnittsfläche der Spritze voll ausfüllen, und trotzdem einigermaßen reibungsarm gleiten. Dadurch gerät das flüssige Medikament unter den

$$\text{Druck } p = \frac{\text{Kraft } F}{\text{Fläche } A}.$$

Hier steht die Kraft immer senkrecht auf der Fläche, als Vektoren haben demnach  $\vec{F}$  und  $\vec{A}$  die gleiche Richtung und brauchen darum nicht vektoriell geschrieben zu werden: Der Druck  $p$  ist ein Skalar (deshalb stört nur wenig, dass er den gleichen Buchstaben trägt wie der Impuls  $\vec{p}$ ).

Der Druck ist eine abgeleitete Größe mit der leider recht kleinen SI-Einheit

$$1 \text{ Pascal} = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2.$$

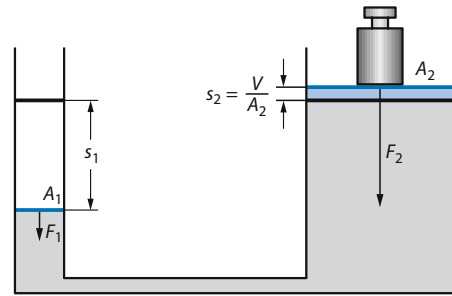
Schon der normale Luftdruck am Erdboden liegt in der Nähe von  $10^5 \text{ Pa}$ , einem Wert, der auch Bar genannt wird. Meteorologen messen auf ein Promille genau und darum in Hektopascal ( $1 \text{ hPa} = 100 \text{ Pa} = 1 \text{ mbar}$ ). In der Medizin ist es üblich, arteriellen Blutdruck in  $\text{mmHg} = 1,33 \text{ hPa}$  ( $\approx \text{Torr}$ ) anzugeben und venösen in  $1 \text{ mmH}_2\text{O} = 9,81 \text{ Pa}$ . Diese beiden Einheiten stammen von Flüssigkeitsmanometern ab (▣ Kap. 3.3.4), sind aber keine gesetzlichen Einheiten.

#### Merke

$$\text{Druck } p = \frac{\text{Kraft } F}{\text{Fläche } A}$$

$$\text{SI-Einheit: } 1 \text{ Pascal} = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

Der Druck in einer ruhenden Flüssigkeit, der **hydrostatische Druck**, ist allseitig gleich (solange man Gewichtskräfte vernachlässigen kann). In der Injektionsspritze wird er durch äußere Kraft auf den Kolben, den „Stempel“ erzeugt. Deshalb nennt man ihn auch Stempeldruck. Seine Allseitigkeit erlaubt der **hydraulischen Presse**, große Drücke zu



▣ Abb. 3.11. Hydraulische Presse. (Einzelheiten im Text)

erzeugen; ▣ Abb. 3.11 zeigt das Schema. Schiebt man den kleinen Kolben (Fläche  $A_1$ ) mit der Kraft  $F_1$  um die Strecke  $s_1$  in seinem Zylinder vor, so pumpt man ein Flüssigkeitsvolumen  $V = A_1 \cdot s_1$  mit dem Druck  $p = F_1/A_1$  in den großen Zylinder hinüber. Dessen Stempel rückt um die Strecke  $s_2 = V/A_2$  vor. Auf ihn wirkt die Kraft

$$F_2 = p \cdot A_2 = F_1 \cdot A_2/A_1.$$

Sie ist um das Verhältnis der beiden Kolbenflächen größer als  $F_1$ . Energie lässt sich so selbstverständlich nicht gewinnen, denn was der große Kolben an Kraft gewinnt, verliert er an Schubweg:

$$\begin{aligned} W_2 &= F_2 \cdot s_2 = p \cdot A_2 \cdot V/A_2 = p \cdot V \\ &= p \cdot A_1 \cdot V/A_1 = F_1 \cdot s_1 = W_1. \end{aligned}$$

Der Beziehung „Arbeit = Kraft mal Weg“ entspricht bei Flüssigkeiten die Beziehung „Arbeit = Druck mal Volumenänderung“; sie wird **Volumenarbeit** genannt. Bei variablem Druck muss man integrieren:

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p(V) dV$$

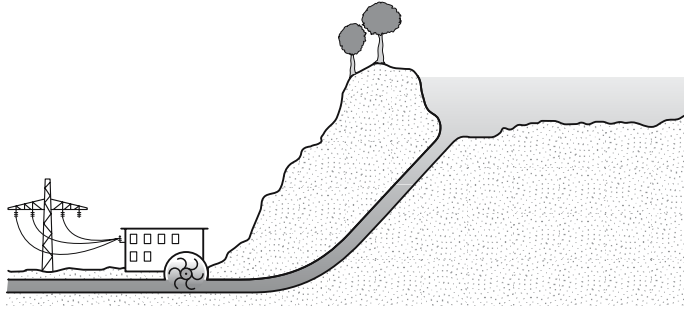
Das Herz des Menschen leistet Volumenarbeit.

#### Merke

Volumenarbeit: Druck mal Volumenänderung

$$W = p \cdot \Delta V$$

Volumenarbeit wird auch von den Turbinen eines Pumpspeicherwerkes geleistet (▣ Abb. 3.12).



■ **Abb. 3.12. Pumpspeicherwerk.** Nachts wird überschüssige elektrische Energie als Hubarbeit gespeichert, indem Wasser in den oberen See gepumpt wird; sie kann in der Leistungsspitze am Tag durch Volumenarbeit des Wassers wieder in elektrische Energie zurückverwandelt werden, freilich nur mit begrenztem Nutzeffekt

### 3.3.2 Schweredruck

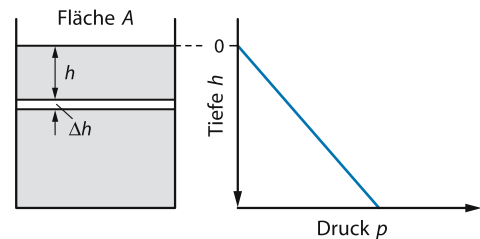
Pumpspeicherwerke nutzen den Druck aus, den Wasser durch seine Gewichtskraft erzeugt; er heißt **Schweredruck** und nimmt mit der Wassertiefe zu. Insofern bedarf der Satz von der Allseitigkeit und Gleichheit des hydrostatischen Druckes einer Präzisierung: der Satz gilt nur für den Stempeldruck im Zustand der Schwerelosigkeit. Sobald Gravitations- oder Trägheitskräfte eine Rolle spielen, überlagert sich der Schweredruck. Dessen Abhängigkeit von der Wassertiefe  $h$  lässt sich für den Sonderfall eines senkrecht stehenden zylindrischen Gefäßes relativ leicht ausrechnen (■ Abb. 3.13). Jede horizontale Wasserschicht der Dicke  $\Delta h$  drückt auf die unter ihr liegenden Schichten mit der Gewichtskraft  $\Delta F_G$ . Hat der Zylinder die Querschnittsfläche  $A$ , so gehört zu der Schicht das

- Volumen  $\Delta V = A \cdot \Delta h$ ,
- die Masse  $\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot A \cdot \Delta h$  ( $\rho$  = Dichte der Flüssigkeit) und die
- Gewichtskraft  $\Delta F_G = g \cdot \Delta m = g \cdot \rho \cdot A \cdot \Delta h$  ( $g$  = Fallbeschleunigung). Die Kraft erzeugt den
- Druck  $\Delta p = \Delta F_G / A = g \cdot \rho \cdot \Delta h$ .

Mit steigender Wassertiefe summieren sich alle Beiträge zum Druck der einzelnen Schichten.

Da Wasser praktisch inkompressibel ist, ändert sich die Dichte  $\rho$  mit der Tiefe nicht. Dann nimmt der Druck einfach linear mit der Wassertiefe zu:

$$p(h) = \rho \cdot g \cdot h,$$



■ **Abb. 3.13. Schweredruck.** Zur Herleitung der Formel: bei einer inkompressiblen Flüssigkeit ( $\rho$  = konstant) steigt er proportional zur Wassertiefe  $h$  an

(■ Abb. 3.13, rechtes Teilbild). In einer geschlossenen Dose überlagert sich ihm ein etwa noch vorhandener Stempeldruck  $p_s$ . Der Gesamtdruck  $p_g$  ist dann

$$p_g(h) = \rho \cdot g \cdot h + p_s$$

(■ Abb. 3.14). In offenen Gewässern erzeugt schon die Lufthülle der Erde einen solchen Stempeldruck.

■ ■ ■ Etwas anders liegt es mit dem Schweredruck in Gasen, zum Beispiel mit dem Luftdruck in der Erdatmosphäre, der ja auf dem Gewicht der Atmosphäre beruht. Da anders als bei Flüssigkeiten die Dichte eines Gases stark druckabhängig ist, variiert mit der Höhe beides: Druck und Dichte. Das führt dazu, dass der Druck nicht linear mit der Höhe abnimmt, sondern exponentiell (barometrische Höhenformel).

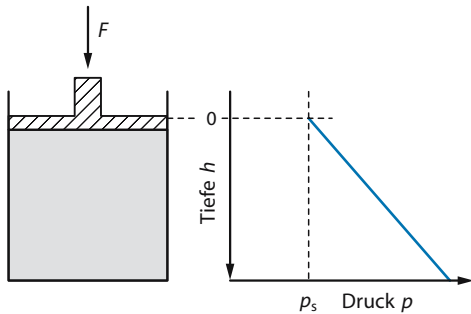


Abb. 3.14. Stempeldruck. Dem Schweredruck überlagert sich ein etwa vorhandener Stempeldruck  $p_s$  additiv

Wer taucht, registriert den Schweredruck des Wassers als Überdruck gegenüber dem Atmosphärendruck von rund  $10^5$  Pa, den er an Land gewohnt ist. Die Atemmuskulatur muss mit dem Überdruck fertig werden, solange der Sportler mit „Schnorchel“ taucht, die Atemluft also unter Normaldruck dicht über der Wasseroberfläche ansaugt. Das geht nur in geringer Tiefe. Wer weiter hinunter will, muss eine Pressluftflasche mitnehmen und vorsichtig wieder auftauchen, denn sonst bekommt er Schwierigkeiten mit den im Blut gelösten Gasen (Henry-Dalton-Gesetz, ► Kap. 5.3.9). Immerhin steigt der hydrostatische Druck im Wasser alle zehn Meter um rund  $10^5$  Pa.

#### Merke

Schweredruck:  
von der Gewichtskraft einer Flüssigkeit (Dichte  $\rho$ ) erzeugter Druck; er steigt mit der Tauchtiefe  $h$ :

$$p(h) = \rho \cdot g \cdot h.$$

Ideale Flüssigkeiten besitzen keine Scherfestigkeit, das heißt, sie lassen sich leicht verformen. Infolgedessen müssen ihre freien Oberflächen immer horizontal stehen. Täten sie es nicht, bekäme die Gewichtskraft eine Komponente parallel zur Oberfläche, der die Flüssigkeit nachgeben müsste. Dies gilt auch, wenn in **kommunizierenden Röhren** die Oberfläche durch Gefäßwände unterbrochen ist: Eine ruhende Wasseroberfläche liegt immer senkrecht zu der angreifenden Schwerkraft. Insofern bilden die Meere keine ebenen Oberflä-

#### Klinik

**Druck im Körper.** Auch die Blutgefäße des Menschen bilden eine „geschlossene Dose“ im Sinn der Überlagerung von Schwere- und Stempeldruck. Steht der Mensch aufrecht, so ist der **Blutdruck** in den Füßen notwendigerweise höher als im Kopf; liegt er horizontal, so sind beide Drücke ungefähr gleich. Das Gehirn braucht für seine Funktion aber unbedingt eine gleichmäßige Durchblutung; folglich muss ein Regelsystem dafür sorgen, dass Druckschwankungen im Kopf, wie sie Lageänderungen zunächst hervorrufen, in wenigen Sekunden aufgefangen werden. Krankhafte Störungen können die Einstellung des Soll-drucks merklich verzögern oder gar Regelschwingungen auslösen (► Abb. 3.15).

chen aus, sondern Ausschnitte aus einer Kugeloberfläche. Seeleute wissen das: Von einem entgegenkommenden Schiff tauchen zuerst die Mastspitzen über der Kimm auf, und der Mann im Mastkorb entdeckt sie früher.

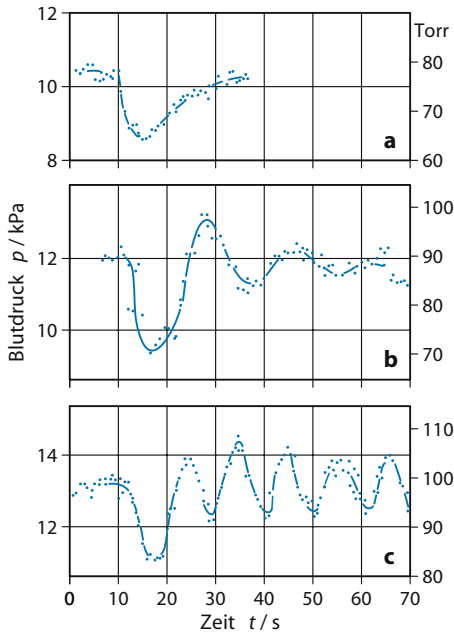
#### Rechenbeispiel 3.2: Wasserturm

► **Aufgabe.** In flachen Gegenden sieht man zuweilen einen Wasserturm in der Landschaft stehen. Er enthält im oberen Teil einen großen Wassertank. Zweck der Konstruktion ist es, am Fuße des Turms in den umgebenden Häusern einen Überdruck des Wassers am Wasserhahn zu erzeugen. Wie hoch muss der Turm in etwa sein, damit der Überdruck das Dreifache des Luftdrucks beträgt?

► **Lösung.** Es gilt die Faustformel: alle 10 m Wassertiefe steigt der Druck um ein Bar bzw. 1000 hPa. Genaues Nachrechnen liefert:

$$\begin{aligned}\Delta p &= \rho_w \cdot g \cdot 10 \text{ m} = 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 10 \text{ m} \\ &= 9,81 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 981 \text{ hPa}\end{aligned}$$

Der Wasserturm muss also etwa 30 m hoch sein. Man kann den Druck am Wasserhahn aber auch mit einer Pumpe aufrechterhalten.



■ **Abb. 3.15 a-c. Regelstörungen beim Blutdruck.** Die Versuchsperson wird auf einer horizontalen Liege festgeschnallt und ohne eigene Muskelarbeit in die Vertikale gekippt. Dadurch nimmt der Blutdruck im Oberkörper zunächst ab („das Blut sackt in die Füße“). Beim Gesunden wird der Druck im Gehirn in weniger als einer halben Minute wieder auf den Normalwert eingeregelt (a). Ein krankhaft gestörter Regelkreis kann aber durch diese Belastung in eine gedämpfte (b) und sogar in eine nahezu ungedämpfte (c) Regelschwingung geraten

### 3.3.3 Auftrieb

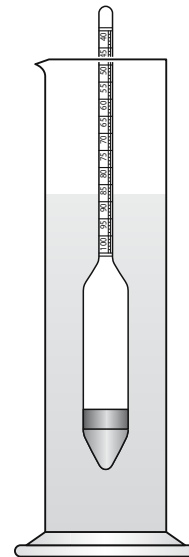
Jeder Körper wird, wenn man ihn unter Wasser taucht, von allen Seiten zusammengedrückt. Weil aber der Schweredruck mit der Wassertiefe zunimmt, übt er von unten eine größere Kraft auf den Körper aus als von oben: die Differenz liefert den **Auftrieb**, eine der Gewichtskraft entgegen, also aufwärts gerichtete Kraft  $F_A$ . Ihr Betrag entspricht der Gewichtskraft  $g \cdot m_f$  der vom Tauchkörper verdrängten Flüssigkeit (**archimedisches Prinzip**), ist also *seinem* Volumen  $V_k$  und *ihrer* Dichte  $\rho_f$  proportional. Dies soll hier ohne Begründung einfach nur festgestellt werden. Für geometrisch einfache Sonderfälle lässt es sich leicht nachrechnen; es allgemein herzuleiten, bedarf allerdings einer Integration.

#### Merke

##### Auftrieb

$$F_A = g \cdot m_f = V_k \cdot \rho_f \cdot g$$

Ein Körper, der mehr wiegt als die von ihm verdrängte Flüssigkeit, sinkt unter: Der Auftrieb kann das Gewicht nicht tragen, wenn die (mittlere) Dichte des Körpers größer ist als die der Flüssigkeit. Ist sie dagegen kleiner, so schwimmt der Körper; er taucht gerade so tief ein, dass die verdrängte Flüssigkeit ebenso viel wiegt wie er selber: Ein leeres Schiff liegt höher im Wasser als ein beladenes. Außerdem hat es auf hoher See einen etwas geringeren Tiefgang als im Hafen, denn der Salzgehalt gibt dem Meerwasser eine höhere Dichte. Die Tauchtiefe eines Aräometers (■ Abb. 3.16) misst die Dichte der Flüssigkeit, in der es schwimmt. Man muss das Gerät nicht in  $\text{g/cm}^3$  eichen; teilt man es in „Grad Öchsle“, so misst es als „Gleukometer“ das Mostgewicht zukünftiger Weine; es heißt „Laktometer“, wenn man mit ihm den Fettgehalt der Milch bestimmt, und „Urometer“ bei den entsprechenden Fachärzten. Jede Branche entwickelt ihre Fachsprache.



■ **Abb. 3.16. Aräometer.** Es taucht umso tiefer ein, je geringer die Dichte der Flüssigkeit ist

## Praktikum

## Dichtebestimmung

(Dichte: ► Kap. 1.2.2; Hebelgesetz und Balkenwaage: ► Kap. 2.2.4 bis 2.2.6)

## 1) Flüssigkeiten

Eine beliebte Methode ist die **Mohr'sche Waage**. Das ist eine Balkenwaage, an deren einer Seite ein Glaskörper (Volumen  $V_K$ , Masse  $m_K$ ) hängt, dessen Dichte  $\rho_K$  bekannt sein muss. Taucht man diesen Körper in die zu messende Flüssigkeit, so wirkt eine Auftriebskraft auf ihn, die proportional zur Dichte der Flüssigkeit ist. Diese wird mit der Waage ausgemessen. Das funktioniert genauso wie das in ► Abb. 3.16 dargestellte Aräometer, lässt sich nur genauer ablesen.

Ist  $F_L = m_K \cdot g$  das Gewicht des Glaskörpers in Luft und  $F_{Fl}$  sein Gewicht eingetaucht in der Flüssigkeit, so ist die Differenz die Auftriebskraft:

$$F_L - F_{Fl} = V_K \cdot \rho_{Fl} \cdot g$$

Dann ist:

$$\frac{F_L - F_{Fl}}{F_L} = \frac{V_K \cdot \rho_{Fl} \cdot g}{m_K \cdot g} = \frac{\rho_{Fl}}{\rho_K}$$

und so erhält man die Gesuchte Dichte der Flüssigkeit:

$$\rho_{Fl} = \frac{F_L - F_{Fl}}{F_L} \rho_K$$

Diese Formel hat noch den Reiz, dass die Gewichtskräfte gar nicht absolut bestimmt werden müssen, da es nur auf ein Verhältnis ankommt. Es reichen abgelesene Skalenteile.

Eine andere Methode ist der einfache Gewichtsvergleich zweier Flüssigkeiten gleichen Volumens mit der Balkenwaage. Ist die Dichte der einen Flüssigkeit bekannt, so kann die Dichte der anderen berechnet werden.

## 2) Festkörper

Nimmt man eine Flüssigkeit bekannter Dichte (in der Regel Wasser mit  $\rho_W = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ), so kann man die obige Formel auch herumdrehen und die Dichte des eingetauchten Körpers bestimmen.

Wer schwimmen will „wie ein Fisch im Wasser“, muss seine mittlere Dichte der Umgebung genau anpassen, sonst treibt er auf oder geht unter. Fische besitzen dafür eine Schwimmblase, die sie mehr oder weniger weit mit Gas aufblähen können. Damit ändern sie Volumen und Auftrieb, nicht aber Masse und Gewicht.

Der Mensch besteht im Wesentlichen aus Wasser; seine mittlere Dichte liegt nur wenig über  $1 \text{ g/cm}^3$ . Das erlaubt ihm, mit geringen Schwimmbewegungen den Kopf über Wasser zu halten. Der Auftrieb trägt den Körper und entlastet das Rückgrat.

## Klinik

**Blut ist eine so genannte Suspension.** In der Grundflüssigkeit Wasser befinden sich viele nicht gelöste Bestandteile wie zum Beispiel die Blutkörperchen. Blut bleibt deshalb gut durchmischt, weil sich die Dichten dieser Bestandteile und des Wassers nicht allzu sehr unterscheiden. Auftriebskraft und Schwerkraft halten sich in etwa die Waage. Aber nicht ganz. Blutkörperchen haben eine etwas höhere Dichte und sinken deshalb ganz langsam nach unten (☞ **Blut-senkung**).

■ ■ ■ Einen solchen Vorgang nennt man **Sedimentation**. Die Sinkgeschwindigkeit  $v$  ist proportional zur Fallbeschleunigung  $g$  oder der Beschleunigung  $a$ , der man das Reagenzglas eben aussetzt, zum Beispiel in einer Zentrifuge:

$$v = s_k \cdot a$$

Den Proportionalitätsfaktor  $s_k$  nennt man **Sedimentationskonstante**. Sie hängt vor allem vom Dichteunterschied zwischen Teilchen und Flüssigkeit ab. Ihre Einheit ist Grundsätzlich die Sekunde, sie wird aber in  $10^{-13}$  Sekunden = 1 Svedberg (S) angegeben.

Will man die Bestandteile des Blutes schnell trennen und nicht lange warten, so bedient man sich einer **Zentrifuge**. Die Sinkgeschwindigkeit  $v_s$  proportional zur Dichtedifferenz  $\Delta\rho$  und der Fallbeschleunigung:

$$v_s \sim \Delta\rho \cdot g$$

In der Zentrifuge wird nun die Fallbeschleunigung durch die Radialbeschleunigung der Drehbewegung bzw. die Schwerkraft durch die Zentrifugalkraft ersetzt (► Kap. 2.3.5). Diese kann mehr als 1000-mal höher sein. Dann geht es 1000-mal schneller.



**Rechenbeispiel 3.3: Mondgestein**

► **Aufgabe.** Ein Geologe findet heraus, dass ein Mondstein mit einer Masse von 8,2 kg eingetaucht in Wasser nur noch eine scheinbare Masse von 6,18 kg hat. Wie groß ist die Dichte des Steins?

► **Lösung.** Die Auftriebskraft ergibt sich aus der Differenz zwischen realer und scheinbarer Masse und ist  $F_A = 2,02 \text{ kg} \cdot g = 19,8 \text{ N}$ . Damit ergibt sich sein Volumen:

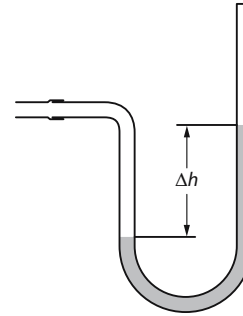
$$V = \frac{F_A}{\rho_{\text{Wasser}} \cdot g} = \frac{2,02 \text{ kg}}{0,001 \text{ kg/cm}^3} = 2020 \text{ cm}^3$$

und die Dichte zu  $\rho = \frac{m}{V} = 4,06 \text{ g/cm}^3$ .

**Die Krone des Hiëron**

► **Frage.** Der Sage nach hat Archimedes mit Hilfe seines Prinzips den Goldschmied des Betrugers überführt, bei dem König Hiëron von Syrakus eine Krone in Auftrag gegeben hatte. Hiëron ließ dafür einen abgewogenen Klumpen reinen Goldes aus seiner Schatzkammer holen und überzeugte sich später durch Nachwiegen, dass die fertige Krone das richtige Gewicht besaß. Trotzdem hatte der Schmied einen guten Teil des Goldes für sich behalten und durch zulegiertes Silber ersetzt; der Krone sah man das nicht an. Archimedes wusste, dass Silber „leichter“ ist als Gold, d. h. eine geringere Dichte besitzt. Er wies den Betrug nach mit einer Waage, einem hinreichend großen, wassergefüllten Bottich und einem zweiten Klumpen Gold, der so schwer war wie die Krone. Wie machte er das?

► **Antwort.** Klumpen und Krone haben gleiche Masse und bringen eine Waage ins Gleichgewicht. Die Krone hat wegen des Silbers eine kleinere Dichte und ein größeres Volumen; folglich ist ihr Auftrieb im Wasser größer. Taucht man Klumpen und Krone, während sie an der Waage hängen, ins Wasser, so kommt die Waage aus dem Gleichgewicht: die Krone erscheint leichter.



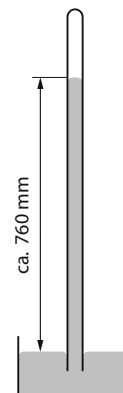
■ **Abb. 3.17. Flüssigkeitsmanometer.** Auf dem linken Schenkel lastet ein Überdruck

U gebogenen Glasrohr, so wie ■ Abb. 3.17 zeigt, muss der Gasdruck über dem linken Meniskus höher sein als über dem rechten, und zwar um einen Betrag  $\Delta p$ , der genauso groß ist wie der Schweredruck einer Wassersäule der Höhe  $\Delta h$ :

$$\Delta p = \rho \cdot g \cdot \Delta h.$$

Ein Flüssigkeitsmanometer lässt sich mit dem Lineal oder auch mit hinterlegtem Millimeterpapier ablesen; in die Eichung gehen dann noch die Dichte  $\rho$  der Manometerflüssigkeit und die Fallbeschleunigung  $g$  ein.

Schließt man den einen Schenkel des Flüssigkeitsmanometers und hält man ihn luftleer, so misst man den vollen Gasdruck auf der anderen Seite. Wäre dies normaler Luftdruck, so stiege Wasser rund 10 m hoch; höher kann auch die beste Saugpumpe auf dieser Erde Wasser nicht heben. Mit seiner großen Dichte verkürzt Quecksilber die Steig-

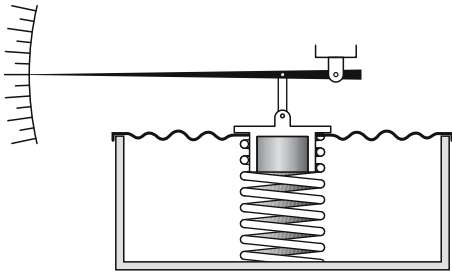


■ **Abb. 3.18. Quecksilber-Barometer**

**3.3.4 Manometer**

Der Schweredruck erlaubt die Konstruktion technisch besonders einfacher Druckmesser, der **Flüssigkeitsmanometer**. Steht Wasser in einem zum





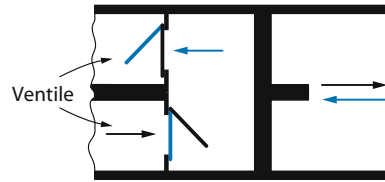
■ **Abb. 3.19. Dosenbarometer.** Der äußere Luftdruck biegt den gewellten Deckel durch und staucht die Schraubenfeder; nach ähnlichen Prinzipien lassen sich auch Manometer für hohe Drücke herstellen

höhe auf 760 mm (■ Abb. 3.18). Erfunden wurde das **Quecksilberbarometer** 1643 von Evangelista Torricelli. Von ihm hat die Druckeinheit „Torr“ ihren Namen, die praktisch mit der Einheit „mmHg“ übereinstimmt. Beide sind keine „guten“ Einheiten, weil die Fallbeschleunigung vom Ort abhängt und die Dichte des Quecksilbers von der Temperatur.

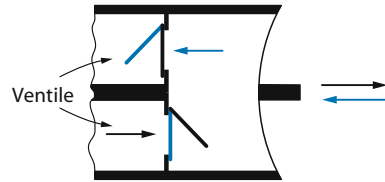
Flüssigkeitsmanometer lassen sich zwar leicht herstellen, sind aber unhandlich; sie müssen senkrecht stehen und können auslaufen. Darum verwendet man lieber dünnwandige Hohlkörper, die sich verbiegen, wenn eine Druckdifferenz zwischen innen und außen besteht. Die Verbiegung wird dann mechanisch oder auch elektrisch übertragen und gleich als Druck(differenz) angezeigt. Abbildung 3.19 zeigt ein Beispiel.

### 3.3.5 Pumpen

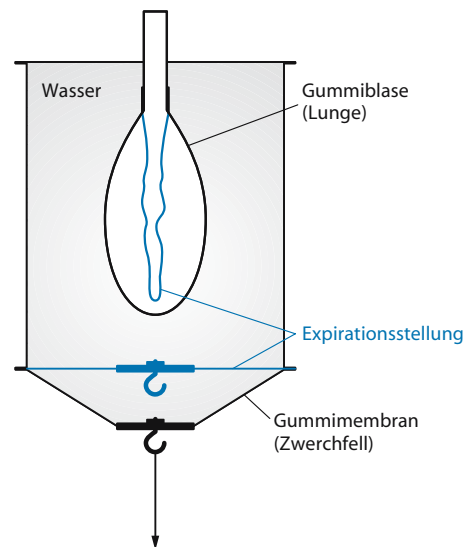
Mit einer Kammer, die periodisch ihr Volumen ändert, kann man pumpen; zwei Ventile braucht man auch noch dazu. Technisch einfach ist die **Kolbenpumpe** (■ Abb. 3.20), die abgesehen von notwendigen Dichtungen ganz aus Metall gefertigt werden kann. Die Ventile haben den zunächst nur pendelnden Strom der Flüssigkeit oder des Gases in eine Vorzugsrichtung zu steuern. Dazu muss ihre Bewegung mit der des Kolbens koordiniert werden, zwangsweise durch eine entsprechende Mechanik oder eleganter dadurch, dass die entsprechend konstruierten Ventile vom Strom des Fördergutes im richtigen Takt mitgenommen werden wie die Herzklappen.



■ **Abb. 3.20. Kolbenpumpe**



■ **Abb. 3.21. Membranpumpe**



■ **Abb. 3.22. Funktionsmodell der Lungenatmung** (nach Hinzpeter, Einzelheiten im Text)

Jeder Kolben braucht eine Dichtung gegenüber seinem Zylinder, ein technisch keineswegs einfach zu lösendes Problem. Darum ersetzt man zuweilen den Kolben durch eine biegsame Membran, die hin und her gebogen wird (**Membranpumpe**, ■ Abb. 3.21). Nach ähnlichem Prinzip arbeiten Herzen, nur verwendet die Natur weitaus raffinierteres Baumaterial: Muskeln, die sich auf Kommando zusammenziehen.

**Klinik**

**Auch die Lunge pumpt.** Die Lunge muss beim Einatmen Unterdruck erzeugen, um den Strömungswiderstand der Luftröhre zu überwinden. Für die nötige Kraft sorgt die Atemmuskulatur. Sie darf aber nicht an den Lungenbläschen unmittelbar angreifen, denn dazu sind diese viel zu zart und empfindlich. Folglich werden sie außen in die **interpleurale Flüssigkeit** eingebettet, die sich selbst wieder in einem festen Hautsack befinden. Er ist gasdicht an der Luftröhre angewachsen, unten mit dem Zwerchfell abgeschlossen und stabil genug für eine Verbindung mit den Muskeln. ■ Abbildung 3.22 zeigt ein Funktionsmodell der **Atmung**. Eine schlaife Gummiblase vertritt hier die Lunge. Sie schwimmt, über eine Röhre mit der Außenluft verbunden, in einem wassergefüllten Kasten. Seinen Boden bildet eine kräftige Gummischeibe, Ersatz für das Zwerchfell. In der Mitte hat sie einen kräftigen Haken, an dem die „Atemmuskulatur“ ziehen kann. Nun würde das Wasser allein durch seinen Schweredruck die „Lunge“ zusammenpressen, wäre der Kasten nicht dicht und sorgte nicht das „Zwerchfell“ von vornherein für einen gewissen Unterdruck. Zieht man am „Zwerchfell“, so vergrößert man das Volumen des „Thorax“. Wasser dehnt sich nicht; nur die „Lunge“ kann das Zusatzvolumen liefern: sie atmet ein und sie atmet wieder

aus, wenn der Zug am „Zwerchfell“ nachlässt. Freilich funktioniert das Verfahren nur, wenn der Kasten absolut gasdicht ist und nirgendwo „Nebenluft“ ansaugen kann. Beim kleinsten Leck klappt die „Lunge“ zusammen. Besäße der Mensch nicht zwei mechanisch getrennte Lungenflügel, so wäre ein Lungendurchschuss momentan tödlich.

Wie operiert man im Thorax? Öffnet man ihn ohne Vorsichtsmaßnahmen, so fällt mindestens eine halbe Lunge aus. Deshalb hat der Geheimrat Sauerbruch seinerzeit zunächst versucht, den interpleuralen Unterdruck bei offenem Thorax dadurch aufrechtzuerhalten, dass er kurzerhand den ganzen Operationssaal unter Unterdruck setzte, den Kopf des Patienten aber, sorgfältig am Hals abgedichtet, draußen ließ. Es ging, aber es war riskant. Ein plötzliches Leck irgendwo, ein Öffnen der Tür: der Unterdruck entwich, das Versuchstier war tot. Physikalisch wird aber gar kein Unterdruck außerhalb der Lunge verlangt, sondern nur eine Druckdifferenz zwischen innen und außen. Man kann sie auch durch leichten Überdruck auf die Atemöffnungen des Patienten erzeugen und dabei den Operationssaal so belassen, wie bei anderen Eingriffen auch. Das macht das technische Problem der Dichtung einfacher und verringert die Gefahr für den Patienten.

**3.3.6 Kompressibilität**

Die Moleküle der Festkörper und Flüssigkeiten kommen sich bis zur Berührung nahe; freien Platz zwischen ihnen gibt es kaum. Die **Kompressibilität** ist gering, denn die Massendichte lässt sich durch äußeren Druck nur geringfügig erhöhen; sie liegt in der Größenordnung von einigen Tonnen/Kubikmeter.

Ganz anders bei einem Gas. Seine Dichte liegt leicht um drei Zehnerpotenzen niedriger (normale Zimmerluft: ca. 1,2 kg/m<sup>3</sup>). Die Moleküle halten großen Abstand voneinander, zwischen ihnen ist viel Platz. Daraus folgt eine hohe Kompressibilität.

Gasmoleküle bewegen sich thermisch, ohne eine Richtung zu bevorzugen. Auf Gefäßwan-

dungen, die ihren Bewegungsdrang einschränken, üben die einen Druck dadurch aus, dass sie bei jedem Stoß auf die Wand kurz eine Kraft ausüben. Das geschieht umso öfter, je mehr sie sind, je größer ihre Anzahl  $N$ , genauer: ihre

$$\text{Anzahldichte} \quad n = \frac{\text{Anzahl } N}{\text{Gasvolumen } V}$$

ist. Damit hängt der Druck linear vom Kehrwert  $1/V$  des Volumens ab, beziehungsweise:

$$p \cdot V = \text{konstant}$$

Dieses sog. **Gesetz von Boyle-Mariotte** gilt allerdings nur bei konstanter Temperatur. Anders gesagt: die Konstante ist temperaturabhängig. Außerdem gilt das Gesetz nur für sog. ideale Gase (► Kap. 5.1.3), zu denen Zimmerluft aber gehört.

Man muss es berücksichtigen, wenn man das Atemzugvolumen eines Patienten bestimmen will und der Druck im Spirometer nicht mit dem in der Lunge übereinstimmt. Wie hat man zu rechnen? Man darf dem Gesetz von Boyle-Mariotte auch die Form  $p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2$  oder  $V_2 = V_1 \cdot p_1/p_2$  geben.

Die inkompressible Flüssigkeit und das hochkompressible ideale Gas markieren zwei mathematisch einfache Grenzfälle, zwischen denen sich die realen Substanzen herumtreiben. Bei ihnen muss man empirisch bestimmen, um welchen Betrag  $\Delta V$  das Ausgangsvolumen  $V$  abnimmt, wenn man den äußeren Druck um  $\Delta p$  erhöht. Eine Proportionalität zu  $V$  darf man erwarten, eine zu  $\Delta p$  nicht unbedingt. Es ist deshalb vernünftig, die

$$\text{Kompressibilität} \quad k = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp}$$

differentiell zu definieren (negatives Vorzeichen, weil  $V$  mit  $p$  abnimmt). Der Kehrwert wird **Kompressionsmodul**  $Q$  genannt. Für den Grenzfall des inkompressiblen Fluides gilt  $k = 0$ .


Eine solche Definition ist rein deskriptiv; sie beschreibt einen Zusammenhang, ohne nach dessen Ursachen zu fragen. Deshalb kann man sie auch in einer ganz anderen Situation benutzen, nämlich beim Einfüllen einer Flüssigkeit in ein dehnbare Gefäß, beim Einpumpen von Blut in die Aorta beispielsweise. Hier wächst das einfüllbare Volumen mit steigendem Druck, weil die Wände nachgeben. Deshalb wird  $Q$  mit positivem Vorzeichen definiert und bekommt einen anderen Namen:



$$\text{Volumenelastizitätsmodul} \quad Q = V \frac{dp}{dV}$$

Er hängt von der Form des Gefäßes ab, von der Dicke der Wand und deren elastischen Eigenschaften.

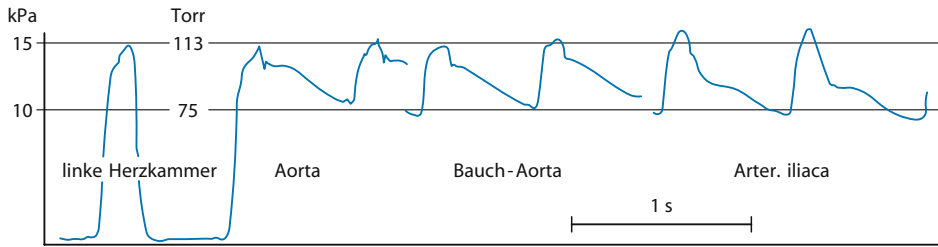
### 3.3.7 Blutdruckmessung

Im Allgemeinen verlangt eine Druckmessung mechanischen Anschluss des Manometers an das Druckgefäß, kein Problem bei Dampfkesseleisen und Autoreifen: die notwendigen Flansche und Ventile werden von vornherein vorgesehen.

Der Arzt müsste aber zur Blutdruckmessung eine hinreichend große Ader öffnen, um einen Katheter einführen zu können, an dessen äußerem Ende dann das Manometer sitzt. In Sonderfällen geschieht das tatsächlich, vor allem im Tierversuch. Der Experimentator, der bei den Messungen zu  Abb. 1.1 unbedingt den zeitlichen Verlauf des Druckes im linken Ventrikel eines Hundeherzens wissen wollte, hatte keine andere Wahl. Dass sich dieses Verfahren aber für die Routine-messung der ärztlichen Praxis verbietet, bedarf keiner Begründung. Hier hat sich eine Methode durchgesetzt, die als Musterbeispiel einer schon recht raffinierten indirekten Messung angesehen werden kann. Sie ist ohne einige Detailkenntnisse des Zusammenspiels von Herz und Aorta nicht zu verstehen.

Ein Herz arbeitet nach dem Prinzip der Kolbenpumpe: durch periodische Änderung des wirksamen Volumens wird Gas oder Flüssigkeit verschoben; Ventile sorgen dafür, dass dies nur in einer Richtung geschieht, beim Herzen also die Herzklappen. Unvermeidlich erfolgt der Transport stoßweise. Freilich könnte kein Schweißbrenner ordentlich funktionieren, würden ihm Brenngas und Pressluft stoßweise zugeführt. In der Technik lässt man deshalb die Pumpe zunächst in einen Windkessel blasen, in einen dichten Topf mit hinreichend großem Volumen. Das mindert die Druckstöße beträchtlich und lässt das Gas einigermaßen gleichmäßig abströmen. Das gleiche Ziel verfolgt die Aorta, nur kann sie es nicht als starres Gefäß tun, weil Blut inkompressibel ist wie Wasser. Deshalb muss sich die Aorta bei jeder Systole um das Herzschlagvolumen aufblähen. Dabei wird die Aortenwand gedehnt und gibt während der Diastole, von Ringmuskeln unterstützt, das Blut bei nur wenig abfallendem Druck in den Kreislauf. Die Aderwand entspannt sich und macht sich für die nächste Systole bereit. Den zeitlichen Verlauf des Druckes, mit Kathetern im Herzen und an verschiedenen Stellen im System der Arterien gemessen, zeigt  Abb. 3.23. Die druckstoßmindernde  **Windkesselfunktion** der Aorta ist nicht zu übersehen.

In allen Schlagadern schwankt der Blutdruck periodisch zwischen einem systolischen Maxi-



■ **Abb. 3.23. Windkesselleffekt.** Die starken Druckschwankungen in der Herzkammer werden zum großen Teil durch die Windkesselfunktion der Aorta aufgefangen (nach Rein-Schneider)

mum  $p_s$  und einem diastolischen Minimum  $p_d$  hin und her. Nur diese beiden Grenzwerte werden bei der üblichen **Blutdruckmessung** bestimmt, und zwar am Oberarm des meist sitzenden Patienten. Dazu wird ihm eine Manschette um den Arm gelegt, die unter einem nicht dehnbaren Gewebe einen breiten und weichen Gummischlauch besitzt. Dieser Schlauch wurde früher mit einem Gummibällchen von der Hand des Arztes aufgepumpt (■ Abb. 3.24), heute bevorzugt man eine Motorpumpe. Der Schlauch drückt dann Arm und Ärmel des Patienten zusammen und mit ihnen die Schlagader. Übersteigt der Manschettendruck  $p$  den systolischen Druck  $p_s$ , so wird die Schlagader völlig abgequetscht und die Blutversorgung des Unterarms unterbrochen: In der Beuge des Ellbogengelenks, dort wo die Schlagader dicht unter der Haut verläuft, ist mit Stethoskop oder Mikrofön kein Pulsgeräusch mehr wahrzunehmen. Lässt man jetzt über ein kleines Ventil Luft aus der Manschette heraus, so kann von dem Moment an, in dem der Druck  $p$  den systolischen Blutdruck  $p_s$  unterschreitet, dieser für kurze Zeit die Ader

öffnen. Deren anschließendes Zusammenschlagen unter dem Druck der Manschette liefert ein unverkennbares Geräusch im Ellbogengelenk. Es verstummt wieder, wenn  $p$  den diastolischen Druck  $p_d$  unterschreitet, weil die Schlagader jetzt ständig offen bleibt. Über das akustische Signal können Arzt und Patient auf dem Manometer der Manschette die beiden Grenzwerte  $p_s$  und  $p_d$  ablesen (Blutdruckmessung nach **Riva-Rocci**).

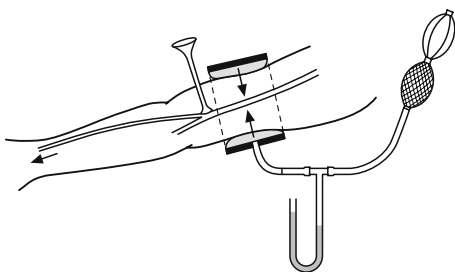
Dabei lässt sich allerdings ein systematischer Fehler nicht vermeiden. Das Herz schlägt ja nicht gerade in dem Moment, in dem der Manschettendruck den systolischen unterschreitet. Beim ersten hörbaren Pulsgeräusch liegt deshalb  $p$  bereits etwas unter  $p_s$  und entsprechend beim letzten Geräusch noch etwas über  $p_d$ . Beide Messwerte rücken umso dichter zusammen, je schneller die Luft aus der Manschette herausgelassen wird.

## 3.4 Grenzflächen

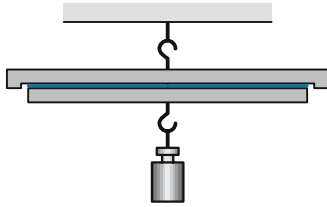
### 3.4.1 Kohäsion

Moleküle halten zusammen; zwischen ihnen herrschen „zwischenmolekulare Kräfte“ kurzer Reichweite, mit denen sie sich gegenseitig anziehen. Dies nennt man **Kohäsion**. Diese Kräfte bekommen besondere Bedeutung an den Grenz- und Oberflächen der Flüssigkeiten.

Wenn ein Kristall schmilzt, nimmt normalerweise die Dichte ab, aber nicht sehr. Auch in der Schmelze liegen die Moleküle noch „dicht an dicht“; die zwischenmolekularen Kräfte existieren nach wie vor, nur ist die Wärmebewegung so



■ **Abb. 3.24. Blutdruckmessung nach Riva-Rocci** (Einzelheiten im Text, Zeichnung nach Rein-Schneider)

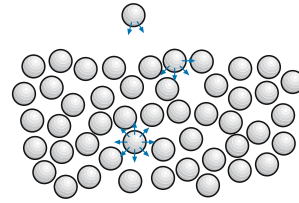


■ Abb. 3.25. Zerreißfestigkeit eines Ölfilms zwischen zwei Metallplatten. Die obere trägt einen Randwulst, um ein Abgleiten der unteren zur Seite zu verhindern.

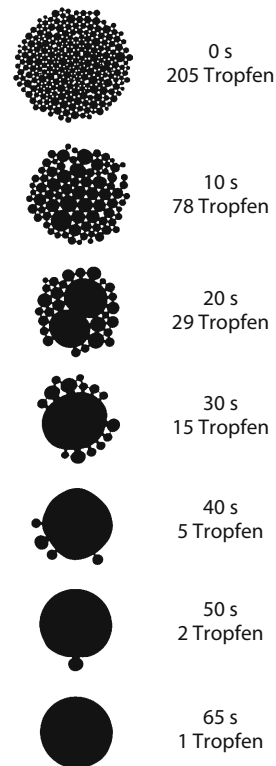
heftig geworden, dass sich die Bindungen auf feste Gitterplätze nicht länger aufrechterhalten lassen. Die Moleküle sind jetzt frei verschiebbar; die Flüssigkeit hat keine Schubfestigkeit, für eine Zerreißfestigkeit reichen die Kräfte der Kohäsion aber noch. Ein Ölfilm zwischen zwei Aluminiumplatten von etwa 20 cm Durchmesser vermag ein Kilogramm zu tragen (■ Abb. 3.25); herzlich wenig, wenn man an den Kupferdraht der Frage 3.2 denkt.

Am deutlichsten verspüren die oberflächennahen Teilchen die zwischenmolekularen Kräfte der Kohäsion, denn diese versuchen nicht nur, Moleküle zurückzuhalten, die in den Gasraum ausbrechen möchten, sie behindern schon deren Eindringen in die letzte Moleküllage (■ Abb. 3.26). Moleküle meiden darum die Oberfläche und halten sie so klein wie möglich: Die natürliche Form des Tropfens, der keinen äußeren Kräften unterliegt, ist die Kugel. Gießt man Quecksilber aus einem feinen Röhrchen in ein Uhrglas, so bildet es zunächst viele winzige Tröpfchen; sie schließen sich aber rasch zu größeren zusammen, bis nur ein einziger übrig bleibt, denn dadurch verringern sie ihre gemeinsame Oberfläche. ■ Abbildung 3.27 zeigt diesen Vorgang in einigen Momentaufnahmen. Die Kräfte der Kohäsion wirken auf die Moleküle wie eine sie einschließende, gespannte Haut. Für kleine Insekten kann sie lebensgefährlich werden; nicht alle sind stark genug, sich aus einem Wassertropfen zu befreien, der sie benetzt hat. Umgekehrt können Wasserläufer sich auf der Oberfläche halten, indem sie die „Haut“ ein wenig eindellen.

Vergrößert man die Oberfläche einer Flüssigkeit, so müssen Moleküle, die sich anfangs noch im Innern aufhalten durften, an die Oberfläche



■ Abb. 3.26. Kohäsion. Die zwischenmolekularen Kräfte wirken im Innern der Flüssigkeit allseitig, behindern aber bereits das Eintreten eines Moleküls in die letzte Lage unter der Oberfläche und vor allem den Übertritt in den Gasraum



■ Abb. 3.27. Oberflächenspannung. Hg-Tropfen verringern ihre gemeinsame Oberfläche, indem sie sich zu einem einzigen Tropfen zusammenschließen. Momentaufnahmen in 10 Sekunden Abstand; der Vorgang wird durch ein Gemisch von Wasser und Glycerin verlangsamt. Große Tropfen können unrund erscheinen, wenn sie im Moment der Belichtung noch schwingen, weil sie kurz zuvor einen kleinen Tropfen aufgenommen haben (nach R. W. Pohl)

gebracht werden. Das bedeutet Arbeit gegen die Kräfte der Kohäsion; für jedes neue Flächenelement  $A$  eine bestimmte Energie  $W_A$ . Man definiert die:

$$\text{Oberflächenspannung } \sigma = \frac{\text{Oberflächenenergie } W_A}{\text{Oberfläche } A}$$


Sie hat die SI-Einheit  $1 \text{ J/m}^2 = 1 \text{ N/m} = 1 \text{ kg/s}^2$ .

#### Merke

Oberflächenspannung:

$$\sigma = \frac{\text{Oberflächenenergie } W_A}{\text{Oberfläche } A}$$

#### Klinik

**Der Patient am „Tropf“.** Bei Patienten, die „ihre Tropfen nehmen“, dient die Oberflächenspannung zur  **Dosierung** von Medikamenten. Dabei verlässt man sich darauf, dass alle vom Schnabel der Flasche fallenden Tropfen zumindest so ungefähr die gleiche Größe haben. In manchem Mediziner-Praktikum wird so die Oberflächenspannung bestimmt (siehe Kasten). Die Tropfengröße hängt auch entscheidend vom Durchmesser des Rohres ab, aus dem die Flüssigkeit tropft. Eine Tropfflasche mit beschädigtem Schnabel dosiert falsch.

In einem Tropfen vom Radius  $r$  erzeugt die Oberflächenspannung einen Binnendruck

$$p = 2 \cdot \sigma / r.$$

In einer Seifenblase ist er doppelt so hoch. Allgemein gilt: Je kleiner Tropfen oder Blase, desto größer der Binnendruck, gerade umgekehrt wie bei einem Kinderluftballon.

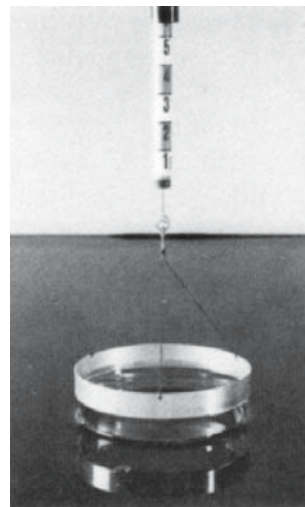
#### Rechenbeispiel 3.4: Binnendruck

► **Aufgabe.** Wie groß ist der Binnendruck in einem kugelförmigen Wassertropfen mit einem Zentimeter Radius? Die Oberflächenspannung sauberen Wassers ist ca.  $72 \text{ mN/m}$ . Ist der Binnendruck in einer gleichgroßen Seifenblase kleiner oder größer?

► **Lösung.** Die Oberflächenspannung trägt einen Anteil:

$$p_\sigma = \frac{144 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}}{0,01 \text{ m}} = 14,4 \text{ Pa}$$

bei. Dazu kommt aber natürlich noch der äußere Luftdruck von ca.  $1000 \text{ hPa}$ . Bei der Seifenblase trägt die Oberflächenspannung zwar doppelt bei, da sie eine innere und eine äußere Oberfläche hat. Durch die Seife im Wasser ist aber die Oberflächenspannung auf etwa  $30 \text{ mN/m}$  herabgesetzt, so dass in der Summe der Binnenüberdruck in der Seifenblase niedriger ist. Deshalb geht das Seifenblasenblasen mit reinem Wasser sehr schlecht: der Binnenüberdruck ist viel höher und die Blase platzt zu leicht.



■ **Abb. 3.28.** Messung der Oberflächenspannung mit Hilfe eines eingetauchten Ringes und einer Federwaage; Einzelheiten im Text

## Praktikum

## Messen der Oberflächenspannung

Es gibt im Wesentlichen drei Möglichkeiten, die Oberflächenspannung zu messen:

**Ringtensiometer:** Ein leichter Ring wird an einer Federwaage aufgehängt (■ Abb. 3.28) und in die zu untersuchende Flüssigkeit eintauchen. Zieht man ihn nun mitsamt der Waage vorsichtig nach oben, so zieht er einen Flüssigkeitsfilm hinter sich her. Dieser hat die Form eines Zylindermantels und hält dank seiner Oberflächenspannung den Ring fest, mit einer Kraft  $F$ , die zusätzlich zur Gewichtskraft von der Waage angezeigt wird. Man liest ihren Grenzwert  $F_\sigma$  in dem Moment ab, in der die Kraft der Waagenfeder den Ring aus der Flüssigkeit herausreißt. Der Ring hat z. B. den Durchmesser  $d$ , also den Umfang  $d \cdot \pi$ . Zieht er die zylindermantelförmige Flüssigkeitshaut um das Stückchen  $\Delta x$  weiter nach oben heraus, so vergrößert er deren Oberfläche um

$$\Delta A = 2\pi \cdot d \cdot \Delta x.$$

Der Faktor 2 rührt daher, dass die Haut eine Haut ist: sie hat nicht nur eine Oberfläche „nach außen“, sondern auch eine zweite (praktisch ebenso große) „nach innen“, d. h. mit Blickrichtung zur Zylinderachse. Die zur Schaffung der neuen Oberfläche  $\Delta A$  nötige Energie  $\Delta W$  beträgt

$$\Delta W = \sigma \cdot \Delta A = 2\pi \cdot \sigma \cdot d \cdot \Delta x.$$

Für die Waage bedeutet dies eine Zusatzkraft

$$F_\sigma = 2\pi \cdot \sigma \cdot d = \Delta W / \Delta x.$$

Die Messung von  $F_\sigma$  erlaubt also, die Oberflächenspannung  $\sigma$  zu bestimmen. Die Rechnung zeigt zugleich, dass sich eine gespannte Flüssigkeitslamelle nicht so verhält wie eine Gummihaut oder eine Feder:  $F_\sigma$  ist unabhängig von  $x$ , die Kraft wächst nicht mit der Dehnung.

**Stalagmometer:** Tropfen aus einem Rohr wie bei dem „Tropf“. An einem Röhrchen mit dem Außendurchmesser  $d$  kann sich ein Tropfen festhalten, weil er beim Abfallen erst einmal zusätzliche Oberflä-

che schaffen muss, und zwar für einen Zylinder mit dem Umfang  $d \cdot \pi$  (■ Abb. 3.29). Dazu gehört die Kraft

$$F_\sigma = \pi \cdot d \cdot \sigma$$

Der Tropfen reißt ab, sobald sein Volumen  $V_T$  so groß geworden ist, dass seine Gewichtskraft

$$F_G = \rho \cdot g \cdot V_T$$

( $\rho$  = Dichte der Flüssigkeit) die haltende Kraft  $F_\sigma$  erreicht hat. Ein vorgegebenes Volumen  $V_0$  der Flüssigkeit bildet also  $n = V_0 / V_T$  Tropfen:

$$n = \frac{g \cdot V_0 \cdot \rho}{\pi \cdot d \cdot \sigma}$$

Kennt man  $\rho$  und  $d$ , so kann man auf diese Weise auch die Oberflächenspannung bestimmen:

$$\sigma = \frac{g \cdot V_0 \cdot \rho}{\pi \cdot d \cdot n}$$

**Steighöhe in einer Kapillare** (siehe auch nächstes Kapitel): Die Kräfte zwischen Flüssigkeit und Rohrwand (Adhäsionskräfte) heben die Flüssigkeit um eine Steighöhe  $h$  an. Für eine kreisrunde Kapillare mit dem Innendurchmesser  $2r$  lässt sich  $h$  leicht angeben. Angenommen, das Wasser benetzt vollkommen, dann bildet seine Oberfläche in der Kapillare im Wesentlichen eine Halbkugel mit dem Radius  $r$  (■ Abb. 3.32). Die Folge ist ein Druck mit Kräften in Richtung Kugelmittelpunkt, erzeugt von der Oberflächenspannung  $\sigma$ :

$$p_\sigma = 2 \cdot \sigma / r.$$

An ihm kann sich der Flüssigkeitsfaden solange aufhängen, wie sein Schweredruck

$$p_s = \rho \cdot g \cdot h$$

unter  $p_\sigma$  bleibt. Die Steighöhe vermag also einen Grenzwert nicht zu überschreiten:

$$h < \frac{2 \cdot \sigma}{r \cdot \rho \cdot g}$$

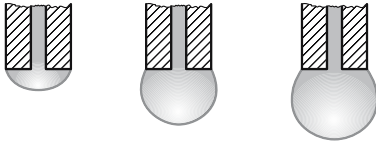
Leider muss man bei dieser Rechnung voraussetzen, dass die Flüssigkeit die Rohrwand vollkommen benetzt, was eher ausnahmsweise der Fall ist.

## 3.4.2 Adhäsion

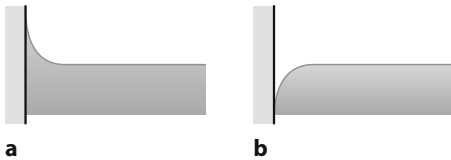
Jedes Gerät zur Bestimmung der Oberflächenspannung enthält einen Bauteil aus einem festen Körper, an dem die Flüssigkeit haftet: sie muss ihn

„benetzen“. Eine Flüssigkeit benetzt, wenn die Kohäsionskräfte, die ihre Moleküle aufeinander ausüben, geringer sind als die Adhäsionskräfte gegenüber den Molekülen in der festen Oberfläche: die **Adhäsion** muss die **Kohäsion** übertreffen.





■ **Abb. 3.29. Der „Tropf“.** Die Oberflächenspannung hält einen Tropfen am Röhrchen fest, weil dieser beim Abfallen zunächst zusätzlich Oberfläche für einen Zylinder vom Röhrchendurchmesser schaffen müsste



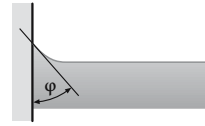
■ **Abb. 3.30 a,b. Benetzung.** Benetzende (a) und nichtbenetzende (b) Flüssigkeit an einer Gefäßwand

Das tut sie oft, aber keineswegs immer. Man braucht eine Glasplatte nur hauchdünn einzufetten und schon perlt das Wasser, das vorher noch benetzte, in dicken Tropfen ab: die zunächst **hydrophile** Oberfläche ist **hydrophob** geworden. Ob eine Flüssigkeit benetzt oder nicht, sieht man an der Form ihrer Oberfläche: zieht sie sich an einer Gefäßwand hoch, so überwiegt die Adhäsion; wird die Oberfläche heruntergedrückt wie beim Quecksilber, so ist die Kohäsion stärker (■ Abb. 3.30). Sind Benetzung oder Nichtbenetzung vollkommen, so kommt die Oberfläche asymptotisch an die Gefäßwand heran, wenn nicht, so stoßen beide in einem bestimmten Winkel aufeinander (■ Abb. 3.31).

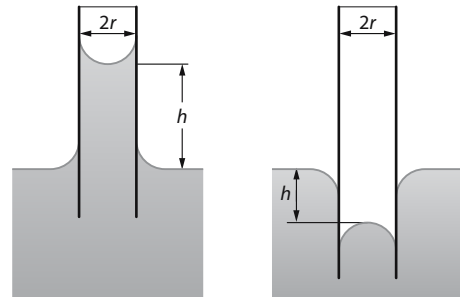
Stehen sich zwei Gefäßwände auf hinreichend kurzem Abstand gegenüber, so kann sich eine benetzende Flüssigkeit an beiden zugleich hinaufhangeln und so im Gefäß aufsteigen. Besonders wirksam funktioniert dies in feinen Röhren: Bäume transportieren mit Hilfe der **Kapillarwirkung** Wasser von den Wurzeln zu den Blättern.

Benetzt die Flüssigkeit nicht, so kommt es zu einer **Kapillardepression** (■ Abb. 3.32, rechtes Teilbild). Auf sie muss man achten, wenn man ein Quecksilbermanometer abliest.

Bestimmt wird die Oberflächenspannung von den vergleichsweise wenigen Molekülen, die sich



■ **Abb. 3.31. Unvollkommener Benetzung.** die Flüssigkeit bildet einen Winkel  $\varphi$  mit der Gefäßwand



■ **Abb. 3.32. Kapillaranhebung und -depression** (Einzelheiten im Text)

wirklich in der Oberfläche herumtreiben. Manche Molekülsorten haben sich darauf spezialisiert. Wenige Tropfen eines modernen Spülmittels genügen, um Wasser so zu „entspannen“, dass es ein Weinglas gleichmäßig benetzt, also keine Tropfen bildet und damit beim Verdunsten auch keine Tropfränder. Eine Ente, in entspanntes Wasser gesetzt, wundert sich sehr, weil sie nicht schwimmen kann: das Wasser drängt sich zwischen ihre sorgsam gefetteten Bauchfedern und vertreibt dort das Luftpolster, dessen Auftrieb die Natur bei der Konstruktion der Ente einkalkuliert hat. Spülmittel im Abwasser sind nicht unbedingt umweltfreundlich, Spülmittel, vom Teller in die Nahrung gelangt, nicht unbedingt gesundheitsfördernd.

#### Merke

- Kohäsion: Wirkung zwischenmolekularer Kräfte in einer Flüssigkeit
- Adhäsion: Wirkung zwischenmolekularer Kräfte zwischen Flüssigkeit und Festkörper
- Benetzung: Adhäsion überwiegt



**Rechenbeispiel 3.5: Loch im Blatt**

► **Aufgabe.** Bäume saugen Wasser aus den Wurzeln in die Blätter, wo es tagsüber in die Luft verdunstet. Ein großer Baum verdunstet leicht 200 l pro Stunde. Der Saugdruck wird durch Kapillareffekt erzeugt: In Zellzwischenräumen (den Stomata) bildet sich ein Wasserfilm, dessen Oberfläche einen hinreichend kleinen konkaven Krümmungsradius (wie in ■ Abb. 3.32, linkes Bild) aufweisen muss. Wie klein muss er sein bei einem 10 m hohen Baum?

► **Lösung.** Die Oberflächenspannung muss ein  $p_\sigma$  von etwa 1000 hPa aufbringen. Bei reinem Wasser hieße das für den Krümmungsradius:

$$r < \frac{2 \cdot 72 \text{ mN/m}}{10^5 \text{ N/m}^2} = 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 1,4 \text{ }\mu\text{m}.$$

Da im Pflanzensaft Stoffe gelöst sind, die die Oberflächenspannung herabsetzen, muss der Radius eher noch kleiner sein. Diese Abmessung entspricht in etwa der Größe der Zellen im Blatt.

**3.5 Strömung****3.5.1 Zähigkeit (Viskosität)**

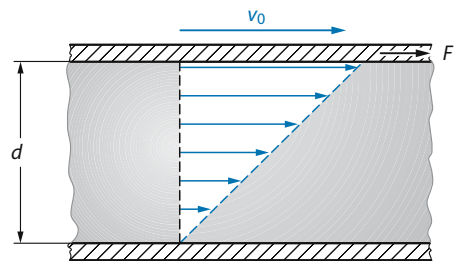
„Panta rhei“, sagte Heraklit, „alles fließt“. Wasser ist ein Ursymbol der Bewegung und des Lebens. Ohne Wasser hätte sich irdisches Leben nicht entwickeln können, jedenfalls nicht zu der heutigen Form. Wasser transportiert bereitwillig alles, was darauf und darin schwimmt, auch gelöste Moleküle. Pflanzen nehmen so ihre Nährstoffe aus dem Boden auf. Mit den Blättern verdunsten sie reines Wasser; was zuvor darin gelöst war, dürfen sie für sich behalten. Mensch und andere Vertebraten haben das Verfahren technisch höher entwickelt. Sie betreiben einen geschlossenen Blutkreislauf mit eigenem Pumpwerk und einem ungemein komplizierten Röhrensystem. Das Pumpen ist sehr wichtig, den die zwischenmolekularen Kräfte führen zu einer **inneren Reibung** in Flüssigkeiten. Ohne ständig treibendes Druckgefälle kommt eine strömende Flüssigkeit bald zur Ruhe: Von der Strömung wird Volumenarbeit in Reibungswärme übergeführt. Die Vorgänge der Reibung aber

sind komplex, unübersichtlich im Detail und Modellvorstellungen nur schwer zugänglich. Darum fasst man sie für Flüssigkeiten zu einer recht summarischen Größe zusammen, **Zähigkeit** oder auch **Viskosität** genannt. Sie ist eine Materialkenngröße, die zumeist deutlich mit steigender Temperatur abnimmt. Ihre Definition merkt man sich am leichtesten anhand eines Gedankenexperimentes, das sich auf dem Papier ganz einleuchtend darstellt, praktisch aber nur in abgewandelter Form durchzuführen ist.

Gegeben seien zwei ebene Platten im Abstand  $d$ , zwischen ihnen die Flüssigkeit in einer solchen Menge, dass sie auf beiden Platten die Fläche  $A$  benetzt. Hält man nun die untere Platte fest und zieht die obere mit einer Kraft  $F$  zur Seite, so gleitet diese ab, ganz am Anfang beschleunigt, bald aber wegen der inneren Reibung im Flüssigkeitsfilm nur noch mit einer konstanten Geschwindigkeit  $v_0$ . Als Folge der Adhäsion haftet der Film an beiden Platten: unten bleibt er demnach in Ruhe, oben bewegt er sich mit  $v_0$ . Dazwischen gleiten ebene Flüssigkeitsschichten aufeinander und bilden ein lineares Geschwindigkeitsprofil aus:  $v$  steigt proportional mit dem Abstand  $x$  von der unteren Platte an, bis es bei  $x = d$  den Wert  $v_0$  erreicht. Es stellt sich ein konstantes **Geschwindigkeitsgefälle**

$$dv/dx = v_0/d$$

ein (■ Abb. 3.33). Ändert man in einer Messreihe lediglich den Plattenabstand  $d$ , so wird man eine Proportionalität zwischen  $v_0$  und  $d$  finden. Die be-



■ **Abb. 3.33. Viskosität.** Gedankenversuch zur Definition der Zähigkeit  $\eta$  für einen (übertrieben dick gezeichneten) Flüssigkeitsfilm, der zwischen zwei parallelen Platten eine Fläche  $A$  ausfüllt. Eine Scherspannung  $F/A$  führt zu einem linearen Geschwindigkeitsgefälle  $dv/dx = v_0/d = F/(\eta \cdot A)$

nötigte Kraft  $F$  ihrerseits wächst proportional zur benetzten Fläche  $A$  und vor allem zur Zähigkeit  $\eta$  der Flüssigkeit:  $F = \eta \cdot A \cdot v_0/d$ . Auflösen nach  $\eta$  gibt die Definitionsgleichung für die Zähigkeit:

$$\eta = \frac{F \cdot d}{v_0 \cdot A}$$

Ihre SI-Einheit ist  $1 \text{ Ns/m}^2$ ; deren zehnter Teil wird als **Poise** (P) bezeichnet (nach J.L. Poiseuille, 1799–1869).

Gemessen wird die Zähigkeit in **Viskosimetern**, technischen Geräten, die im Prinzip so ähnlich funktionieren wie der Gedankenversuch. Im Mediziner-Praktikum, wo es mehr auf den Lerneffekt als auf Genauigkeit ankommt, wird die Strömung durch ein Rohr oder der Fall einer Kugel vermessen (siehe Kasten im nächsten Kapitel).

#### Merke

Zähigkeit = Viskosität; Maß für die innere Reibung einer Flüssigkeit; Messung in geeichten Viskosimetern; Einheit:  $1 \text{ Ns/m}^2$ .

Man kann es niemandem verargen, wenn er Glas als Festkörper bezeichnet. Der Augenschein spricht dafür und der allgemeine Sprachgebrauch ebenfalls. Trotzdem handelt es sich streng genommen um eine Flüssigkeit, wenn auch um eine extrem zähe. Kristallographen stellen keine kristalline Struktur fest. Mit weniger Aufwand kann man sich aber auch selbst überzeugen, indem man einen Glasstab erhitzt: Er wird weicher und weicher, lässt sich schon bald plastisch biegen, danach zu einem dünnen Faden ausziehen und beginnt schließlich wie eine richtige Flüssigkeit zu tropfen. Mit steigender Temperatur nimmt die Zähigkeit kontinuierlich ab. Ein Festkörper aber schmilzt: bei einer ganz bestimmten Temperatur bricht sein Kristallgitter plötzlich zusammen, die Substanz wechselt am **Schmelzpunkt** abrupt vom festen in den flüssigen Aggregatzustand und kehrt später beim Abkühlen genauso abrupt wieder in den festen Zustand zurück.

### 3.5.2 Laminare Strömung

Das Gedankenexperiment des vorigen Kapitels ist so übersichtlich, weil die einfache Geometrie für ein lineares Geschwindigkeitsprofil sorgt. Schon bei der Strömung durch Röhren wird es komplizierter: Auch hier haftet die Flüssigkeit an der Wand und fließt dann konsequenterweise am schnellsten in der Röhrenachse. Im kreisrunden Rohr nimmt das Geschwindigkeitsprofil die Form eines Rotationsparaboloides an (Abb. 3.34).

Die Strömungsgeschwindigkeit  $v$  liefert ein detailliertes, für viele Zwecke aber unnötig detailliertes Bild einer Strömung. Integration über die Querschnittsfläche  $A$  führt zur

$$\text{Volumenstromstärke} \quad I = \frac{dV}{dt} = \frac{\text{Volumen}}{\text{Zeit}}$$

und der mittleren Strömungsgeschwindigkeit  $\langle v \rangle = I/A$ . Die SI-Einheit der Volumenstromstärke,  $1 \text{ m}^3/\text{s}$ , passt zu Flüssen. Der Rhein bei Emmerich bringt es im Schnitt sogar auf etwa  $2,3 \cdot 10^3 \text{ m}^3/\text{s}$ , der Blutkreislauf des Menschen aber nur auf rund  $10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ . Da führt eine kleinere Einheit zu handlicheren Maßzahlen: Blutstromstärke  $I_b \approx 6 \text{ l/min}$ . Wer stattdessen sagt, das „Herzminutenvolumen“ des Menschen betrage ungefähr 6 Liter, muss daran denken, dass er von einer Volumenstromstärke redet und nicht von einem Volumen.

#### Merke

Volumenstromstärke:

$$I = \frac{dV}{dt} = \frac{\text{Volumen}}{\text{Zeit}}$$

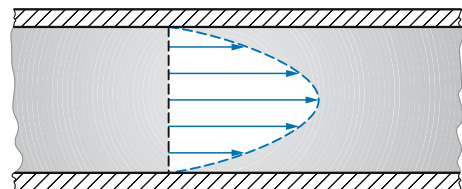


Abb. 3.34. Geschwindigkeitsprofil einer wirbelfrei in einer kreisrunden Röhre strömenden Flüssigkeit ist ein Rotationsparaboloid, dessen ebener Schnitt eine Parabel

Als Folge ihrer Viskosität entwickelt jede strömende Flüssigkeit Reibungswärme; die Pumpe muss sie als Volumenarbeit liefern. Ein Druckabfall  $\Delta p$  längs der Röhre wird gebraucht, um die Volumenstromstärke  $I$  gegen den

**Strömungswiderstand**  $R = \Delta p / I$

aufrechtzuerhalten (Einheit  $1 \text{ Ns/m}^5$ ). Den Kehrwert  $1/R$  bezeichnet man als Leitwert.

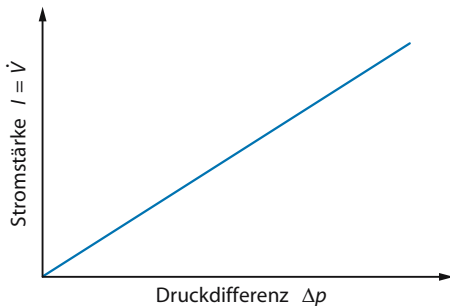
#### Merke

Strömungswiderstand:

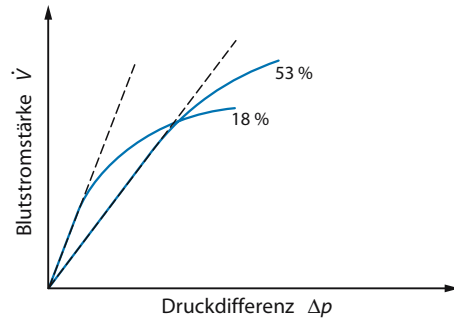
$$R = \frac{\text{Druckdifferenz } \Delta p}{\text{Volumenstromstärke } I}$$

In günstigen Fällen ist  $R$  vom Druck unabhängig. Dann besteht mit  $R = \text{konstant}$  und  $I \cdot \Delta p$  eine formale Analogie zum Ohm'schen Gesetz der Elektrizitätslehre (► Kap. 6.2.2): Einen elektrischen Widerstand, definiert als Quotient von elektrischer Spannung und elektrischer Stromstärke, nennt man **ohmsch**, wenn er von Strom und Spannung unabhängig ist. Flüssigkeiten, die das Ohm'sche Gesetz der Strömung erfüllen, heißen **newtonsch** (■ Abb. 3.35). Blut gehört nicht zu ihnen; schließlich enthält es rote Blutkörperchen mit einem beträchtlichen Volumengehalt (**Hämatokrit** genannt). Folge:  $\Delta p$  wächst überproportional zu  $I$  (■ Abb. 3.36).

Die Analogie zwischen elektrischem Strom und Flüssigkeitsströmung reicht weiter als nur zum (bedingt eingehaltenen) Ohm'schen Gesetz. Es gibt die Knotenregel, die besagt, dass an ei-



■ Abb. 3.35. Newton-Flüssigkeit. Stromstärke-Druckdifferenz-Diagramm einer Newton-Flüssigkeit, schematisch



■ Abb. 3.36. Strömungsverhalten von Blut. Stromstärke-Druckdifferenz-Diagramm des menschlichen Blutes, halb-schematisch; Parameter ist der Hämatokrit (Volumengehalt der Blutzellen)

ner Verzweigung die einfließenden und ausfließenden Ströme gleich sein müssen. Hier heißt das **Kontinuitätsgleichung**. Auch bei der Flüssigkeitsströmung ergibt sich: Setzt man mehrere Widerstandsstrecken hintereinander, so werden sie von der gleichen Stromstärke  $I$  durchflossen; dann addieren sich die Druckdifferenzen bzw. elektrischen Spannungen und mit ihnen die Strömungswiderstände:

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots = \sum R.$$

Entsprechend sind elektrischer wie Strömungswiderstand der Länge eines homogenen Drahtes bzw. Rohres proportional. Schaltet man aber mehrere Widerstandsstrecken parallel, so liegt über ihnen die gleiche Druckdifferenz (elektrische Spannung); es addieren sich die Ströme und mit ihnen die Leitwerte:

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum \frac{1}{R}$$

#### Merke

Parallelschaltung: Ströme und Leitwerte addieren sich;  
Serienschaltung: Druckdifferenzen und Widerstände addieren sich

Diese Analogien zwischen elektrischem und Flüssigkeitsstrom kommen nicht von ungefähr: Bei beidem handelt es sich tatsächlich um einen

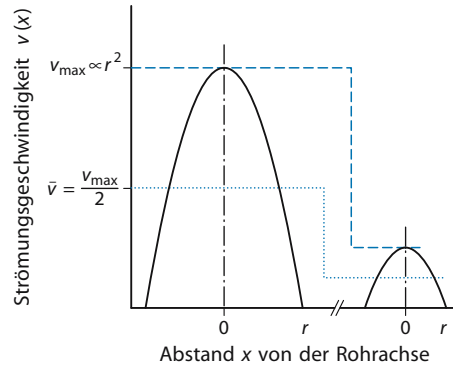
Strom vieler submikroskopischer Teilchen. Wenn man will, kann man für beide Ströme eine **Teilchenstromstärke** angeben, die besagt, wie viele Teilchen pro Zeiteinheit an einem imaginären Beobachtungsposten vorbeilaufen.

In zwei Punkten unterscheiden sich die wandernden Teilchen beider Strömungen allerdings markant voneinander: Elektronen sind sehr viel kleiner als Moleküle und es gibt nur eine Sorte von ihnen. Auf ihrem Marsch durch den Draht stoßen die Elektronen so gut wie gar nicht mit Artgenossen zusammen, sondern weit überwiegend mit den Gitterbausteinen des Metalls. Flüssigkeitsmoleküle stehen sich immer nur gegenseitig im Weg. Das hat zwei Konsequenzen: Erstens hängt ein elektrischer Widerstand von einer Materialkenngröße des Drahtes ab, in dem die Elektronen laufen (von dem spezifischen Widerstand nämlich), ein Strömungswiderstand aber nicht von einer Materialeigenschaft der Röhre, sondern der Flüssigkeit (von der Viskosität nämlich). Zum andern driften im Draht alle Elektronen mit der gleichen Geschwindigkeit (ebenes Geschwindigkeitsprofil); die elektrische Stromstärke ist darum der Elektronenanzahl direkt proportional und damit auch der Querschnittsfläche des Drahtes, unabhängig von dessen Form; Flüssigkeitsmoleküle haften an der Wand und driften umso schneller, je weiter sie von ihr weg sind: Maximale und mittlere Strömungsgeschwindigkeit wachsen mit dem Wandabstand, d. h. mit dem Rohrdurchmesser.

Im einfachen Fall eines Rohrs mit der Länge  $l$  und einer kreisförmigen Querschnittsfläche vom Radius  $r$  gilt das **Gesetz von Hagen-Poiseuille**

$$I = \frac{\pi r^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l} = \frac{A^2}{8\pi \cdot \eta} \cdot \frac{\Delta p}{l}$$

Die Gleichung leuchtet ein. Es kann nicht überraschen, wenn die Volumenstromstärke direkt proportional zum Druckgefälle ist und umgekehrt proportional zur Zähigkeit. Weiterhin wächst die im Rohr vorhandene Flüssigkeitsmenge proportional zu dessen Querschnittsfläche und somit zum Quadrat des Radius. Genau so wächst, des parabolischen Geschwindigkeitsprofils wegen, aber auch die maximale Strömungsgeschwindigkeit in der Rohrachse (■ Abb. 3.37) und mit ihr die mittlere



■ **Abb. 3.37. Gesetz von Hagen-Poiseuille.** die mittlere Strömungsgeschwindigkeit beträgt bei parabolischem Geschwindigkeitsprofil gerade die Hälfte der Maximalgeschwindigkeit in der Rohrachse

Geschwindigkeit. Beide Effekte zusammen liefern einen Anstieg der Stromstärke mit dem Quadrat der Fläche und mit der vierten Potenz des Radius. Den Zahlenfaktor bekommt man allerdings nur durch mathematisch-formale Integration.

Die vierte Potenz im Zähler signalisiert eine ungemein starke Abhängigkeit der Stromstärke und des Widerstandes vom Radius der Röhre: Nur 20% Aufweitung verdoppeln schon Strom und Leitwert!

#### Merke

Für kreisrunde Röhren (Radius  $r$ , Länge  $l$ ) gilt das Gesetz von Hagen-Poiseuille:

$$I = \frac{\pi r^4}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{l}$$

Dieses Gesetz gilt freilich nur für sogenannte **laminare Strömung**, die frei von Wirbeln und Turbulenzen ist. Dazu darf die Strömungsgeschwindigkeit nicht zu groß werden. Details erörtert das nächste Kapitel.

## Praktikum

## Viskosität und Strömung

Es wird üblicherweise die Viskosität von Wasser und einer höher viskosen Flüssigkeit auf zwei Arten bestimmt:

1) Strömung durch ein Rohr und Anwenden des **Hagen-Poiseulle Gesetzes**:

$$\eta = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8 l I}.$$

Der Radius  $r$  des durchströmten Rohrs muss sehr genau gemessen werden, den treibenden Druck  $\Delta p$  besorgt man sich als Schweredruck und den Volumenstrom  $I$  misst man mit Messbecher und Stoppuhr.

2) Fall einer Kugel. Kleine Kugeln (Radius  $r$ ), sinken, wenn sie sich gegenseitig nicht stören, mit der Geschwindigkeit

$$v_0 = \frac{F}{6\pi \cdot \eta \cdot r} = \frac{2r^2}{9 \cdot \eta} g \cdot \Delta \rho$$


(**Stokes-Gesetz**) – hier ist  $F$  der Anteil der Gewichtskraft, den das archimedische Prinzip (► Kap. 3.3.3) den Kugeln wegen ihres Dichteüberschusses gegenüber der Flüssigkeit noch lässt. Zusammen mit der Formel für die Auftriebskraft ergibt sich dann:

$$\eta = \frac{2 \cdot r^2}{9 \cdot g} \frac{\rho_K - \rho_{Fl}}{v_0}$$

wobei  $\rho_K$  die Dichte der Kugel und  $\rho_{Fl}$  die Dichte der Flüssigkeit ist.

Rote Blutkörperchen haben Scheibchenform und sinken darum nach einem komplizierteren Gesetz zu Boden. Man braucht es zum Glück nicht zu kennen, um aus erhöhter **Blutsenkungsgeschwindigkeit** eine Infektion zu diagnostizieren.

## Klinik

**Das „Rohrsystem“ im Körper.** Das Gesetz von Hagen-Poiseuille erlaubt der Natur, mit kleinen Änderungen den Durchmesser von Kapillaren und die  **Durchblutung** des betroffenen Organs wirksam zu steuern. Bei der Haut ist das für die Regelung der Körpertemperatur wichtig. Die vom Organismus entwickelte Wärme muss ja unbedingt an die Umgebung abgegeben werden, und zwar exakt und nicht nur einigermaßen, denn auf längere Zeit kann der Körper keine Wärme speichern. Darum ziehen sich die Blutgefäße der Haut bei Kälte ein wenig zusammen, vermindern kräftig die Durchblutung und senken so mit der Oberflächentemperatur die Wärmeabgabe. Täten sie es nicht, könnte der Mensch erfrieren. Diese Gefahr besteht ganz ernsthaft für einen Be-trunkenen in kalter Winternacht, denn Alkohol er-

weitert die Blutgefäße, wirkt also dem physiologischen Regelprozess entgegen. Obendrein verschafft er den Thermorezeptoren in der Haut ein ungerechtfertigtes Wärmegefühl.

Das Gefäßsystem des Menschen ist ungemein verzweigt. Je feiner es sich verästelt, desto größer wird seine gesamte Querschnittsfläche. Die Aorta ist noch ein einzelner dicker Schlauch von etwa 4,5 cm<sup>2</sup>; die Arterien bringen es schon zusammen auf  $\approx 20$  cm<sup>2</sup>, die Arteriolen auf rund 400 cm<sup>2</sup> und die Kapillaren schließlich auf etwa 4500 cm<sup>2</sup>. Entsprechend sinkt die mittlere Strömungsgeschwindigkeit, denn die gesamte Stromstärke muss ja konstant bleiben. Für Druckabfall und Strömungswiderstand gilt das keineswegs: Vom verfügbaren Blutdruck beanspruchten Aorta und Arterien nur wenig, die Arteriolen das meiste.

**Rechenbeispiel 3.6: Wie schnell strömt das Blut?**

► **Aufgabe.** Die Hauptarterie im Körper hat einen Durchmesser von ca. 2 cm und transportiert etwa 6 Liter Blut pro Minute. Wie schnell strömt durch sie das Blut?

► **Lösung.** Die Querschnittsfläche der Aorta beträgt:  $A = \pi \cdot (1 \text{ cm})^2 = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ .  $A$  mal der Strecke  $s$ , die das Blut in einer Sekunde zurücklegt, ist das Volumen, das in einer Sekunde durch die Aorta fließt. Für den Volumenstrom gilt also:

$$I = A \cdot \frac{ds}{dt} = A \cdot v$$

und für die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}}{3,14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 32 \text{ cm/s}.$$

**Rechenbeispiel 3.7: Lüftung**

► **Aufgabe.** Welchen Durchmesser muss ein 21 m langes Lüftungsrohr haben, wenn durch dieses Rohr in einem 9 m x 14 m x 4 m großen Raum alle 10 Minuten die Luft ausgetauscht werden soll? Der Lüftungsventilator kann einen Überdruck am Ausgang von 0,71 hPa erzeugen. Die Viskosität von Luft beträgt  $0,018 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

► **Lösung.** Die gewünschte Volumenstromstärke beträgt:

$$I = \frac{504 \text{ m}^3}{600 \text{ s}} = 0,84 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}.$$

Umformen der Gleichung von Hagen-Poiseuille liefert:

$$\begin{aligned} \pi \cdot r^4 &= \frac{8\eta \cdot l \cdot I}{\Delta p} \\ &= \frac{8 \cdot 0,018 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot 21 \text{ m} \cdot 0,84 \text{ m}^3/\text{s}}{710 \text{ Pa}} \\ &= 3,58 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Radius  $r = 18,4 \text{ cm}$  und der Durchmesser zu ca. 37 cm.

**Rechenbeispiel 3.8: Viele kleine Rohre**

► **Aufgabe.** Wenn ein kreisrundes Rohr vorgegebener Länge und Querschnittsfläche aufgeteilt wird in 100 parallel geschaltete, ebenfalls kreisrunde Röhrchen gleicher Länge, gleicher Gesamtquerschnittsfläche und mit untereinander gleichen Einzelquerschnitten, um welchen Faktor steigt der Strömungswiderstand gegenüber einer newtonschen Flüssigkeit?

► **Lösung.** Nach Hagen-Poiseuille ist der Strömungswiderstand umgekehrt proportional zur Querschnittsfläche ins Quadrat:  $R \propto 1/A^2$ . Die Querschnittsfläche des Einzelröhrchens ist 100-mal kleiner als die des Rohrs, sein Strömungswiderstand also 10.000-mal größer. 100 Röhrchen parallel haben dann einen 100-mal höheren Strömungswiderstand als das Rohr.

**3.5.3 Turbulente Strömung**

Im Laborversuch kann man strömendes Wasser strichweise einfärben und so die Strombahnen sichtbar machen. Eine laminare Strömung zeigt immer, auch wenn sie Hindernissen ausweichen muss, sorglich voneinander getrennte, parallel verlaufende **Stromfäden**; ■ Abb. 3.38 bringt einige Beispiele. Hinter scharfen Kanten, bei plötzlicher Änderung des Strömungsquerschnittes und ganz allgemein bei hinreichend hohen Strömungsgeschwindigkeiten können sich aber Wirbel bilden (■ Abb. 3.39); die Strömung wird **turbulent**. Luftwirbel hinter Masten lassen Fahnen im Winde flattern; Strudel in Flüssen bringen Gefahr nicht nur für Schwimmer; Zyklone können ganze Landstriche verwüsten.

Strudel rotieren um ihren Wirbelkern, aber nicht wie ein Rad mit überall gleicher Winkelgeschwindigkeit, sondern innen schneller als außen. Damit schaffen sie gegenüber laminarer Strömung zusätzliche Reibungsflächen und setzen so vermehrt kinetische Energie in Wärme um. Wirbel bedeuten zusätzlichen Reibungswiderstand, zusätzlich zu dem, den das Gesetz von Hagen-Poiseuille beschreibt. Darum suchen Vögel, Fische, Verkehrsflugzeuge und manche Autos durch **Stromlinienform** Wirbelbil-



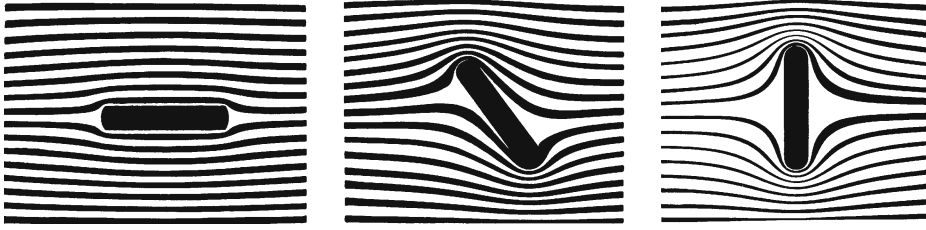


Abb. 3.38. Stromfäden laminarer Strömung um Hindernisse (nach R. W. Pohl)

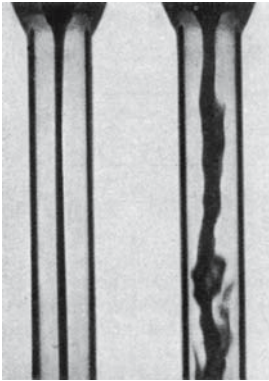


Abb. 3.39. Laminare und turbulente Strömung. Das Wasser wurde bei Eintritt in das Glasrohr in dessen Achse eingefärbt (nach R. W. Pohl)

dung am Heck zu vermeiden; der größere Teil des Luftwiderstands liegt hinter ihnen und nicht am Kopfende (das gilt allerdings nicht mehr für überschallschnelle Düsenjäger).

Wenn das Staubecken eines Pumpspeicherwerkes leer läuft, setzt es potentielle Energie, die zuvor als Hubarbeit am Wasser geleistet wurde, zum Teil in Beschleunigungsarbeit um, die dann als kinetische Energie von den Turbinen weiterverwendet werden kann, zum Teil aber eben auch als Reibungsarbeit in Wärme, die für die technische Nutzung verloren ist. Der Quotient der beiden Energien heißt **Reynold-Zahl**  $R_e$ :

$$R_e = \frac{\text{Beschleunigungsarbeit}}{\text{Reibungsarbeit}}$$

Erfahrungsgemäß muss man mit Turbulenzen rechnen, wenn  $R_e$  einen kritischen Grenzwert von etwa 1100 überschreitet. Nun steigt die kine-

tische Energie, die Beschleunigungsarbeit also, quadratisch mit der Strömungsgeschwindigkeit, die Reibungsarbeit aber im Wesentlichen nur linear. Schnelle Strömungen neigen also eher zur Wirbelbildung.

Ähnliches gilt für Flüssigkeiten geringer Viskosität: Ohne Zähigkeit keine Reibung, ohne Reibung keine Reibungsenergie, ohne nennenswerte Reibungsenergie hohe Reynoldszahl, also Turbulenz. Wiederum ein paradoxes Ergebnis: gerade reibungsarme Flüssigkeiten mit kleinem  $\eta$  neigen zu relativ hohen Strömungswiderständen, weil zu Wirbeln. Blutkreislauf und Atmung bilden zwei nicht nur für den Warmblüter lebensnotwendige Strömungen. Der Organismus achtet sorglich darauf, dass sie normalerweise laminar erfolgen.

Die Definition der Reynold-Zahl als das Verhältnis zweier Energien (oder Leistungen) mag physikalisch halbwegs einleuchten; im praktischen Einzelfall kann man mit ihr nicht so sehr viel anfangen, denn wie will man die beiden Energien durch Messung oder Rechnung zuverlässig auseinander halten? Überschlagend kann man aber Folgendes sagen: Die Beschleunigungsarbeit findet sich als kinetische Energie wieder, ist also zumindest lokal der Massendichte  $\rho$  des strömenden Mediums und dem Quadrat der Strömungsgeschwindigkeit  $v$  proportional. Die Reibungsarbeit wächst demgegenüber im Wesentlichen nur linear mit  $v$ , außerdem aber auch noch mit der Zähigkeit  $\eta$ . Die Reynold-Zahl  $R_e$  sollte also ihrerseits dem Bruch  $\rho \cdot v / \eta$  proportional sein. Setzt man hier die SI-Einheiten der drei Größen ein, so stellt man fest: Dem Bruch kommt die Einheit  $1/\text{m}$  zu. Man muss ihn also noch mit einer Länge mul-

tiplizieren, um etwas Dimensionsloses wie die Reynold-Zahl herauszubekommen. Deshalb darf man auch

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot l}{\eta}$$

schreiben und  $l$  etwas sibyllinisch als eine für die experimentelle Anordnung **charakteristische Länge** bezeichnen. Bei einer kreisrunden Röhre entspricht sie dem Radius und nicht etwa dem Durchmesser. Im Ernstfall, etwa bei besonders turbulenzträchtigen, plötzlichen Querschnittserweiterungen, erfordert die richtige Bestimmung der charakteristischen Länge das ganze Fingerspitzengefühl des gelernten Hydrodynamikers.

#### Rechenbeispiel 3.9: Reynold-Zahl in der Aorta

► **Aufgabe.** Blut sollte besser laminar strömen. Spricht die Reynold-Zahl für die Situation in der Aorta (Beispiel 3.5) dafür? Die Viskosität des Blutes beträgt etwa  $\eta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$ , die Dichte entspricht etwa der des Wassers.

► **Lösung.**

$$Re = \frac{1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 0,3 \text{ m/s} \cdot 0,01 \text{ m}}{4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}} = 750.$$

Das ist tatsächlich noch gut unter 1000.

### 3.5.4 Staudruck

Ein Arzt spielt beispielsweise mit seiner Injektionsspritze. Zwischen Daumen und Zeigefinger erzeugt er leicht eine Kraft von 20 N (er kann nämlich mit dem Daumen ein Gewichtsstück von 2 kg anheben). Bei einer Spritze mittleren Kalibers ( $66 \text{ mm}^2$  Kolbenfläche) bedeutet das einen Überdruck  $p$  von 0,3 MPa. Vernachlässigt man die Reibung, so wird Volumenarbeit  $pV$  vollständig in kinetische Energie  $\frac{1}{2}mv^2$  des ausgespritzten Wassers umgesetzt:

$$p \cdot V = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot v^2$$

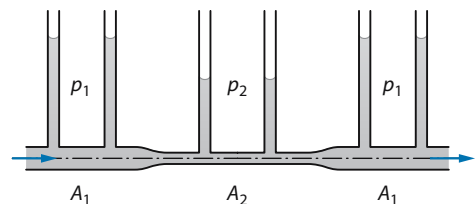
( $\rho$  = Dichte).  $V$  lässt sich auf beiden Seiten streichen. Demnach steigt die Geschwindigkeit  $v$ , mit der das Wasser ausgeworfen wird, unabhängig

vom Volumen der Spritze mit der Quadratwurzel aus dem Druck an:

$$v = \sqrt{2p/\rho}$$

Der Arzt bringt es also ohne Mühe auf 25 m/s und das Blut einer verletzten Arterie auf 5,5 m/s (bei 160 hPa Systolendruck). Der Weltrekord im Sprint liegt bei 10 m/s. Die Querschnittsfläche der Kanüle kommt in der Gleichung nicht vor;  $v$  ist von ihr unabhängig, sofern die Reibung nicht zu groß wird (feine Kanüle) und der Daumen genügend Energie liefern kann, um den angenommenen Druck auch wirklich aufrechtzuerhalten (grobe Kanüle).

In allen Düsen, in allen Engpässen muss eine Strömung Volumenarbeit in kinetische Energie umsetzen. Das hat eine überraschende Konsequenz. Flüssigkeiten sind meist inkompressibel. Folglich fließt durch die Engstelle die gleiche Volumenstromstärke, quält sich durch sie in vorgegebener Zeit das gleiche Volumen hindurch wie durch das weite Rohr. Das erfordert aber erhöhte Strömungsgeschwindigkeit, also Erhöhung der kinetischen Energie. Diese kann nicht aus dem Nichts geschaffen, sondern nur aus der Volumenarbeit  $pV$  genommen werden. Der Inkompressibilität wegen kann sich aber  $V$  nicht nennenswert ändern; folglich muss der Druck sinken, um die Energie zu liefern: Im Engpass ist der Druck keineswegs erhöht, wie man naiv erwarten möchte, sondern ganz im Gegenteil vermindert (Abb. 3.40); man kann auf diese Weise sogar saugen. Der Zerstäuber des Floristen zeigt dies für einen Luftstrom, der Wasser ansaugt und die Wasserstrahlpumpe für den umgekehrten Fall.



► **Abb. 3.40. Hydrodynamisches Paradoxon.** In der Querschnittsverengung nimmt der statische Druck ab (die Zeichnung unterstellt, dass die innere Reibung der Flüssigkeit vernachlässigt werden kann)



Solange die Reibungsarbeit vernachlässigt werden kann, lässt sich dieses **hydrodynamische Paradoxon** leicht quantitativ beschreiben, denn dann wird Volumenarbeit nur zur Erzeugung kinetischer Energie verwendet, und die Summe beider Energien ist konstant:

$$p \cdot V + \frac{1}{2} m \cdot v^2 = p \cdot V + \frac{1}{2} \rho \cdot V \cdot v^2 = \text{konstant.}$$

Daraus folgt die **Bernoulli-Gleichung**

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = p_{\text{ges}} = \text{konstant.}$$

In Worten:

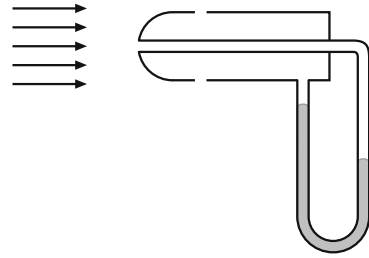
statischer Druck + Staudruck = Gesamtdruck.

#### Merke

Gesetz von Bernoulli:

In der Engstelle einer Strömung ist der Druck vermindert.

Auch das Produkt  $\rho \cdot v^2$  hat die Dimension eines Druckes. Den Namen **Staudruck** macht das Staurohr verständlich. ■ Abbildung 3.41 zeigt es schematisch im Schnitt, der Luftstrom komme von links. Dann herrscht an den seitlichen Öffnungen nur der statische Druck  $p_0$ . Vorn am Staurohr wird aber die Strömungsgeschwindigkeit auf null abgebremst, dort steht also der Gesamtdruck  $p_{\text{ges}}$ . Das Flüssigkeitsmanometer zeigt als Differenz den Staudruck an. Flugzeuge können so ihre Geschwindigkeit messen und Physiologen auch die Strömungsgeschwindigkeit des Blutes in einer Vene (im Tierversuch, versteht sich).



■ **Abb. 3.41. Staurohr.** Das Manometer misst den Staudruck als Differenz von statischem und Gesamtdruck; das umgebende Medium strömt von links an. Der Staudruck ist ein Maß für seine Strömungsgeschwindigkeit

Der Druckminderung in Düsen entspricht eine Druckerhöhung in Rohrerweiterungen. Kann die Viskosität der Flüssigkeit nicht vernachlässigt werden, so überlagert sich dem Effekt nach Bernoulli ein Druckabfall nach Hagen-Poiseuille.

#### Rechenbeispiel 3.10: Staudruck am Flugzeug

► **Aufgabe.** Welchen Staudruck wird ein Staurohr an einem Passagierflugzeug, das mit 900 km/h fliegt, in etwa anzeigen?

► **Lösung.** Wir müssen die Dichte der Luft wissen. Diese ist in verschiedenen Höhen sehr unterschiedlich, den diese Dichte ist proportional zum Luftdruck (Gasgesetz, ► Kapitel 5.1.3). Der Luftdruck ist ein Schweredruck, der mit zunehmender Höhe exponentiell abnimmt. In 5 Kilometer Höhe ist die Luftdichte etwa  $0,5 \text{ kg/m}^3$  und der Staudruck  $p = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = 156 \text{ hPa}$ .

#### In Kürze

	Formel	Größen [Einheit]
<b>Elastische Verformung eines Festkörpers</b>		
Mechanische Dehnung	$\frac{\Delta l}{l_0}$	$\Delta l$ : Längenänderung [m] $l_0$ : Anfangslänge [m]
Mechanische Spannung	$\sigma = \frac{F}{A}$	$\sigma$ : mechanische Spannung $\left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$ $F$ : Kraft auf A [N] $A$ : Querschnittsfläche [m <sup>2</sup> ]
Hooke'sches Gesetz	$\frac{\Delta l}{l_0} = E \cdot \sigma$	$E$ : Elastizitätsmodul $\left[ \frac{\text{m}^2}{\text{N}} \right]$

Druck		
Druck	$p = \frac{F}{A}$	<p><math>p</math>: Druck <math>\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa, Pascal}\right]</math>  <math>10^5 \text{ Pa} \approx 1 \text{ bar} = 760 \text{ mmHg}</math>  <math>F</math>: Kraft [N]  <math>A</math>: Stempelfläche [<math>\text{m}^2</math>]</p>
Schweredruck	$p = \rho \cdot g \cdot h$	<p><math>\rho</math>: Dichte der Flüssigkeit <math>\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]</math>  <math>g</math>: Fallbeschleunigung <math>\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]</math>  <math>h</math>: Tiefe unter Oberfläche [m]</p>
Auftrieb		
Auftriebskraft (gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit)	$F = V_K \cdot \rho_{\text{fl}} \cdot g$	<p><math>F</math>: Auftriebskraft [N]  <math>V_K</math>: verdrängtes Volumen [<math>\text{m}^3</math>]  <math>\rho_{\text{fl}}</math>: Dichte der Flüssigkeit <math>\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]</math>  <math>g</math>: Fallbeschleunigung <math>\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]</math></p>
Strömung		
Volumenstromstärke	$I = \frac{\Delta V}{\Delta t}$	$I$ : Volumenstromstärke $\left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right]$
Gesetz von Hagen-Poiseuille (Laminare Strömung durch ein Rohr)	$I = \frac{\pi \cdot r^4 \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot l}$	<p><math>l</math>: Rohrlänge [m]  <math>r</math>: Rohrradius [m]  <math>\eta</math>: Viskosität <math>\left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}^2}\right]</math>  <math>\Delta p</math>: Druckdifferenz [Pa]</p>
Strömungswiderstand	$R = \frac{\Delta p}{I}$	<p><math>R</math>: Strömungswiderstand <math>\left[\frac{\text{Ns}}{\text{m}^5}\right]</math></p> <p>Für Strömungswiderstände gelten die gleichen Regeln wie für elektrische: Addition bei Reihenschaltung, Addition der Kehrwerte bei Serienschaltung</p>
Gesetz von Bernoulli	<p>Gesamtdruck gleich statischer Druck plus Staudruck</p> $p_{\text{ges}} = p_0 + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2$	<p><math>p_{\text{ges}}</math>: Gesamtdruck [Pa]  <math>p_0</math>: statischer Druck [Pa]  <math>\rho</math>: Dichte <math>\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]</math>  <math>v</math>: Strömungsgeschwindigkeit [m/s]</p>
Oberflächen und Grenzflächen		
Kohäsion Adhäsion	<p>Kräfte zwischen den Molekülen der Flüssigkeit  Kräfte zwischen Flüssigkeit und Wand</p>	
Oberflächenspannung	$\sigma = \frac{W_A}{A}$	<p><math>\sigma</math>: Oberflächenspannung <math>\left[\frac{\text{J}}{\text{m}^2}\right]</math>  <math>W_A</math>: Oberflächenenergie [J]  <math>A</math>: Fläche [<math>\text{m}^2</math>]</p>

## Übungsfragen

• leicht; •• mittel; ••• schwer

### Zur Elastizität

- 1. Ein Stahldraht mit einer Querschnittsfläche von  $1 \text{ cm}^2$  wird mit einer Kraft von  $1 \text{ kN}$  gedehnt. Welche Zugspannung in der Einheit  $\text{N/m}^2$  herrscht im Draht?
- 2. Wie groß ist der Elastizitätsmodul des Kupfers? Siehe **Abb. 3.4**
- 3. Eine  $1,6 \text{ m}$  lange Klaviersaite aus Stahl habe einen Durchmesser von  $0,2 \text{ cm}$ . Wie groß ist die Zugkraft, wenn sich die Saite um  $3 \text{ mm}$  beim Spannen dehnt? Der Elastizitätsmodul von Stahl sei  $2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ .

### Zu Druck und Auftrieb

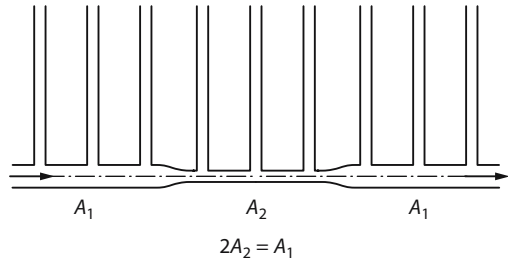
- 4. In einer Injektionsspritze muss der Kolben  $15 \text{ mm}$  vorgeschoben werden, um  $1 \text{ ml}$  zu injizieren. Der Arzt drückt mit  $15 \text{ N}$  auf den Kolben. Mit welchem Druck wird injiziert?
- 5. Wie groß ist der Gesamtdruck in  $1 \text{ m}$  Wassertiefe?
- 6. Die Dichte von Eis ist  $917 \text{ kg/m}^3$  und die von Seewasser  $1,025 \text{ kg/m}^3$ . Wie viel Prozent des Volumens eines Eisberges schaut aus dem Wasser heraus?
- 7. Ein Eimer Wasser wird mit  $3,5$ -mal der Fallbeschleunigung nach oben beschleunigt. Wie groß ist die Auftriebskraft auf einen  $3\text{-kg}$ -Granitstein? Wird er schwimmen? Die Dichte von Granit ist  $2,7 \text{ g/cm}^3$ .

### Zu Oberflächenspannung

- 8. Ein Aluminiumring ( $50 \text{ mm}$  Durchmesser, Masse  $3,1 \text{ g}$ ) wird entsprechend der **Abb. 3.28** in Wasser getaucht und herausgezogen. Im Moment, in dem der Wasserfilm reißt, zeigt die Waage  $53 \text{ mN}$  an. Wie groß ist die Oberflächenspannung des Wassers?
- 9. Wenn die „Füße“ eines Insekts einen Radius von  $0,03 \text{ mm}$  haben und das Insekt  $0,016 \text{ g}$  wiegt, würden Sie erwarten, dass es mit seinen sechs Beinen auf der Wasseroberfläche stehen kann (wie ein Wasserläufer)?

### Zur Strömung

- 10. Wie schnell strömt die Luft in Rechenbeispiel 3.7?
- 11. Wie ist der Strömungswiderstand eines Rohres definiert?
- 12. Wie erhöht sich die Volumenstromstärke einer laminar strömenden Flüssigkeit in einem Rohr, wenn man den Radius verdoppelt?
- 13. Die mechanische Leistung  $P$ , die benötigt wird, um einen Volumenstrom  $I$  durch ein Rohr zu drücken, ist  $P = I \cdot \Delta p$ , wobei  $\Delta p$  die Druckdifferenz zwischen Rohranfang und Rohrende ist. Begründen Sie das.
- 14. Welche mittlere mechanische Leistung muss das Herz eines Menschen liefern, wenn es bei einem Druck am Auslauf (Aorta) von  $174 \text{ hPa}$  eine mittlere Blutstromstärke von  $6 \text{ l/min}$



**Abb. 3.42.** Zu Frage 3.15

aufrechterhalten soll? Das Blut kommt aus der Vene ohne nennenswerten Druck zurück.

- 15. Wie hoch stehen die Flüssigkeitssäulen in den Röhrchen der Abbildung, wenn eine zähe Flüssigkeit von links nach rechts durch das untere Rohr strömt?

- 16. Wasser fließe mit  $0,65 \text{ m/s}$  durch einen Schlauch mit dem Innendurchmesser  $3 \text{ cm}$ . Der Durchmesser einer Düse am Ende des Schlauches betrage  $0,3 \text{ cm}$ . Mit welcher Geschwindigkeit tritt das Wasser aus der Düse aus? Die Pumpe auf der einen Seite und die Düse auf der anderen Seite des Schlauches befinden sich auf gleicher Höhe, der Strom wird also nicht durch einen Schweredruck unterstützt. An der Ausgangsseite der Düse herrsche Atmosphärendruck. Welchen Druck muss die Pumpe erzeugen (reibungsfreie Strömung angenommen)?

# Mechanische Schwingungen und Wellen

## 4.1 Mechanische Schwingungen – 100

- 4.1.1 Oszillatoren – 100
- 4.1.2 Harmonische Schwingungen – 100
- 4.1.3 Gedämpfte Schwingungen – 103
- 4.1.4 Erzwungene Schwingungen – 104
- 4.1.5 Überlagerung von Schwingungen – 105

## 4.2 Seilwellen – 107

## 4.3 Schallwellen – 110

- 4.3.1 Schallerzeugung – 110
- 4.3.2 Schallnachweis – 111
- 4.3.3 Schallintensität und Lautstärke – 112
- 4.3.4 Schallausbreitung – 115

## ➤ ➤ Einleitung

Der Mensch informiert sich über den momentanen Zustand seiner Umwelt mit Hilfe seiner fünf Sinne. Die beiden am besten entwickelten Sinne benutzen zur Informationsübertragung Wellen: der Gesichtssinn die elektromagnetischen des Lichtes, das Gehör die mechanischen des Schalls.

4

## 4.1 Mechanische Schwingungen

### 4.1.1 Oszillatoren

Das Pendel einer alten Standuhr kann schwingen, eine Klaviersaite auch; beide sind dafür gebaut. Ein Dachziegel ist das nicht. Trotzdem kann er sich lockern und, wenn er im Wind klappert, eine Art von Schwingungen ausführen. Die Vielfalt all dessen, was da schwingen kann, ob es das nun soll oder nicht, ist so groß, dass man bei allgemeinen Betrachtungen gern auf die farblose Bezeichnung **schwingungsfähiges Gebilde** oder **Oszillator** ausweicht.

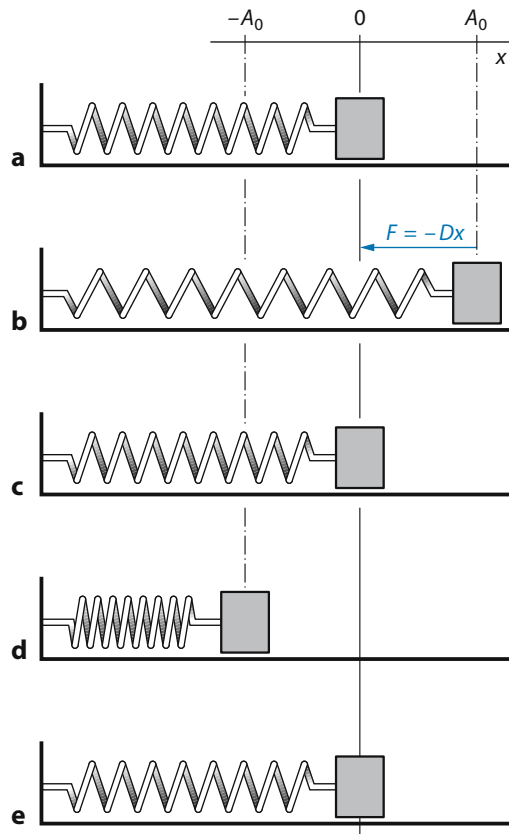
Das Pendel der Standuhr kann man schwingen sehen. Eine Quarzuhr und auch Computer bekommen ihren Takt von einem kleinen schwingenden Quarzkristall vorgegeben. Der ist gut verpackt und nicht zu sehen. Aber nicht nur Gegenstände können schwingen, sondern auch zum Beispiel der Luftdruck in einer Schallwelle oder das elektromagnetische Feld in einer Lichtwelle. Die Physik der Schwingungen kann durchaus kompliziert werden.

Ein „schwingungsfähiges Gebilde“ besitzt eine wohldefinierte Ruhelage, in der es dauernd verbleiben kann. Wird es aus ihr ausgelenkt, so versuchen rücktreibende Kräfte, das Pendel in die Ruhelage zurückzuholen. Dort angekommen, schwingt es wegen seiner Massenträgheit über die Ruhelage hinaus. Kenngröße eines Pendels ist seine Eigenfrequenz, zusätzliche Kenngröße einer Schwingung deren Amplitude. Die einfachsten Schwingungen, die so genannten harmonischen Schwingungen, werden mathematisch durch die Winkelfunktionen Sinus oder Kosinus beschrieben. Kompliziertere Schwingungen können als Überlagerung solcher einfacher Schwingungen aufgefasst werden.

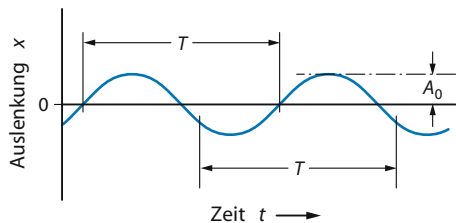
### 4.1.2 Harmonische Schwingungen

Ein besonders einfach zu verstehendes schwingungsfähiges Gebilde in der Mechanik ist das **Federpendel** der **Abb. 4.1a**. Es besitzt einen Klotz mit der Masse  $m$ , der längs einer Schiene (beispielsweise nach Art des Luftkissenfahrzeugs der **Abb. 2.43** von **► Kap. 2.3.1**) „reibungsfrei“ streng horizontal gleiten kann, dies aber zunächst nicht tut, weil er von einer Schraubenfeder in seiner Ruhestellung  $x = 0$  gehalten wird. Dort kann er bleiben, kräftefrei, denn die Feder ist entspannt, und die Gewichtskraft wird von der Schiene aufgefangen.

Um das Pendel in Gang zu setzen, kann man den Klotz per Hand zur Seite ziehen (**Abb. 4.1b**), ihm also eine **Auslenkung**  $A_0$  entlang der  $x$ -Achse verpassen. Dabei spannt man die Feder. Sie soll dem linearen Kraftgesetz des **► Kap. 2.2.1** gehor-



■ Abb. 4.1. Federpendel. Ablauf einer Schwingungsdauer



■ Abb. 4.2. Harmonische Schwingung mit der Amplitude  $A_0$  der Auslenkung  $A(t)$  und der Schwingungsdauer  $T$

chen, also entsprechend ihrer Federkonstanten  $D$  (Einheit 1 N/m) den Pendelkörper mit der Kraft

$$F(x) = -D \cdot x$$

in Richtung Ruhelage zurückziehen: negatives Vorzeichen, **rücktreibende Kraft**. Lässt man den Klotz bei der Auslenkung  $A_0$  los, so verlangt die Grundgleichung der Mechanik, also das 2. Newton'sche Gesetz (► Kap. 2.3.1), dass sich der Klotz nach links in Bewegung setzt, und zwar mit der Beschleunigung

$$a_0 = F(A_0)/m = -A_0 \cdot D/m.$$

Folge: Abnahme der Auslenkung  $x$ , mit ihr (des Betrages) der rücktreibenden Kraft  $F(x)$ , aber Zunahme (des Betrages) der nach links gerichteten Geschwindigkeit  $v(t)$ . Sie ist eine Funktion der Zeit und wächst, bis der Pendelkörper seine Ruhelage  $x = 0$  erreicht. Dort bleibt er aber nicht stehen, sondern läuft, für den Moment kräftefrei, mit momentan konstanter Geschwindigkeit weiter nach links, als Folge seiner Trägheit (■ Abb. 4.1c). Von da ab wird die Schraubenfeder gestaucht,  $x$  und  $F$  wechseln ihre Vorzeichen, und die Kraft bleibt, jetzt nach rechts gerichtet, rücktreibende Kraft. Sie bremst den Pendelkörper ab, bis er im linken **Umkehrpunkt** der Schwingung, also bei  $-A_0$ , momentan zur Ruhe kommt (■ Abb. 4.1d). Dort hat die Kraft ihren (momentanen) Höchstwert und beschleunigt den Pendelkörper, jetzt nach rechts. Wieder läuft er kräftefrei durch die Ruhelage (■ Abb. 4.1e) hindurch, jetzt weiter nach rechts, und dehnt die Feder, bis deren rücktreibende Kraft ihn im rechten Umkehrpunkt bei  $+A_0$  momentan zur Ruhe bringt. Eine **Schwingungsdauer**  $T$  ist abgelaufen. Von nun ab wiederholt sich der ganze Vorgang **periodisch**, d. h. in im-

mer der gleichen Weise, in immer gleichen Zeitspannen.

Diese Bewegung der Masse kann mit einer Sinusfunktion beschrieben werden:

$$x(t) = A_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi_0\right) = A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0),$$

(■ Abb. 4.2). Man könnte auch die Kosinusfunktion nehmen. Eine solche Bewegung, die durch Kosinus oder Sinus beschrieben wird, nennt man **harmonische Schwingung**.

#### Merke

Die Winkelfunktionen Sinus und Kosinus beschreiben harmonische Schwingungen.

Für die Schwingungsdauer  $T$  eines Pendels ist es gleichgültig, ob man sie von Umkehrpunkt zu Umkehrpunkt (auf der gleichen Seite), von Nulldurchgang zu Nulldurchgang (in gleicher Richtung) oder irgendeiner Auslenkung dazwischen zur nächsten gleichen danach zählt. Den Kehrwert der Schwingungsdauer  $f = 1/T$  nennt man die **Frequenz** der Schwingung. Sie gibt an, wie viele Perioden in einer Sekunde ablaufen und hat die SI-Einheit  $1/s = s^{-1}$ . Es ist üblich, diese Einheit **Hertz** zu nennen und mit Hz abzukürzen.

#### Merke

Einheit der Frequenz: 1 Hertz = 1 Hz = 1/s

Da die Mathematiker der Sinusfunktion eine Periode von  $2\pi$  gegeben haben, steht in der Klammer der Sinusfunktion nicht einfach die Frequenz vor der Zeitvariable  $t$ , sondern Frequenz mal  $2\pi$ :  $\omega = 2\pi \cdot f$ .  $\omega$  wird **Kreisfrequenz** genannt. Diese ist verwandt mit der Winkelgeschwindigkeit von ► Kap. 2.1.5 und hat deshalb denselben Buchstaben. Vor der Sinusfunktion steht die **Amplitude**  $A_0$ . Sie entspricht gerade der maximalen Auslenkung aus der Ruhelage  $x = 0$ , denn die Sinusfunktion wird maximal 1. In der Klammer steht noch der **Phasenwinkel**  $\varphi_0$ , der bestimmt, wo die Schwingung bei der Zeit  $t = 0$  startet. Meistens interessiert dieser Phasenwinkel nicht.

## Merke

Harmonische Schwingung:

$$x(t) = A_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

- $A_0$ : Amplitude = Maximalausschlag
- $T$ : Schwingungsdauer
- Kreisfrequenz  

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$
- Frequenz  $f = 1/T$

Die Amplitude, mit der das Federpendel schwingt, kann man offenbar frei wählen. Man startet die Bewegung eben mit einer mehr oder weniger starken Auslenkung. Die Schwingungsdauer sucht sich das Pendel aber selbst. Wie lange dauert nun eine Schwingungsdauer  $T$ ? Soviel kann man sich denken: Je größer die Masse  $m$  des Pendelkörpers ist, desto langsamer kommt sie in Bewegung und wieder heraus. In einer Formel für  $T$  wird man  $m$  über dem Bruchstrich erwarten. Umgekehrt, je stärker die Feder, desto schneller die Schwingung: In der Formel für  $T$  wird man die Federkonstante  $D$  unter dem Bruchstrich vermuten. Dass freilich

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{m/D}$$

herauskommt, kann man sich auf solche Weise nicht überlegen; da muss man rechnen.

■■■ Definitionsgemäß ist beim Federpendel die Beschleunigung  $a$  gleich der zweiten Ableitung  $d^2x/dt^2$  der Auslenkung nach der Zeit. Die Formel für die rücktreibende Kraft  $F = -D \cdot x$  führt zusammen mit der Grundgleichung der Dynamik (2. Newton'sches Gesetz) auf die Gleichung:

$$d^2x/dt^2 = F/m = -D/m \cdot x(t)$$

Eine Gleichung, die neben der Variablen (hier  $x$ ) auch einen ihrer Differentialquotienten enthält, heißt **Differentialgleichung**. Die Lösung einer solchen Gleichung ist nicht einfach eine Zahl, sondern eine Funktion  $x(t)$ . Diese Lösungsfunktion beschreibt eben gerade die Bewegung des Pendels. Der Mathematiker löst eine Differentialgleichung mit Scharfsinn, Phantasie und festen Regeln; der mathematische Laie, auch der Physiker, schlägt die Lösung in entsprechenden Büchern nach. Im vorliegenden Fall geht es um die **Schwingungsdifferentialgleichung** in ihrer einfachsten Form, der spä-

ter noch das ► Kap. 6.12.2 gewidmet werden wird. Sie wird durch eine Sinusfunktion  $x(t) = A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$  gelöst (es darf auch der Kosinus sein und es darf auch noch ein Phasenwinkel  $\varphi_0$  in der Klammer stehen). Davon überzeugt man sich durch Ableiten und Einsetzen. Es gilt:

wenn

$$x(t) = A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

dann

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

und

$$\frac{dx(t)}{dt} = -A_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = -\omega^2 \cdot x(t)$$

Den Faktor  $\omega$  bei jeder Ableitung schleppt die **Kettenregel** der **Differentiation** herein.

In der letzten Gleichung muss nun nur noch  $\omega^2 = D/m$  gesetzt werden und die Schwingungsdifferentialgleichung steht da. Also löst die Sinusfunktion die Differentialgleichung wenn

$$\omega = 2\pi/T = \sqrt{D/m}$$

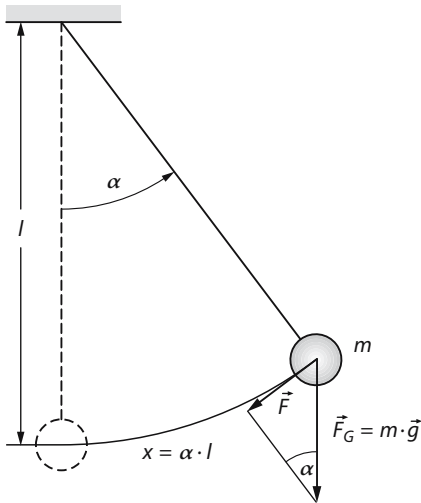
gesetzt wird.

Das Federpendel schwingt gemäß einer Sinusfunktion, also harmonisch, weil die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist. Ohne dieses funktioniert die ganze Rechnung nicht. Eine Schwingung kann dann zwar immer noch herauskommen, aber keine harmonische.

Eben deswegen ist das technisch so einfache **Fadenpendel**, also ein mit langem Faden irgendwo aufgehängter Stein, genau betrachtet, kein harmonisch schwingendes Gebilde. Das Fadenpendel zweigt seine rücktreibende Kraft  $F$  von der Gewichtskraft  $F_G$  der Pendelmasse ab, und da besteht keine Proportionalität zum Auslenkwinkel  $\alpha$ , sondern zu dessen Winkelfunktion  $\sin(\alpha)$  (► Abb. 4.3). Bei sehr kleinen Winkeln macht das freilich nichts aus;  $\sin(4,4^\circ) = 0,076719$  ist gegenüber  $4,4^\circ$  im Bogenmaß ( $= 0,076794$ ) erst um ein Promille zurückgeblieben, da darf man noch  $\sin(\alpha) = \alpha$  setzen. Für kleine Winkel schwingt das Fadenpendel doch fast harmonisch und eine Rechnung entsprechend der obigen liefert:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$





■ **Abb. 4.3. Fadenpendel.** Die Gewichtskraft  $\vec{F}_G$  kann in zwei zueinander senkrechte Komponenten zerlegt werden, von denen die eine ( $\vec{F}$ ) rücktreibend wirkt und die andere vom Faden aufgefangen wird. Bei kleinen Ausschlägen kann  $\sin \alpha = \alpha$  gesetzt werden. Dann schwingt das Pendel harmonisch mit der Schwingungsdauer  $T = 2\pi \cdot \sqrt{l/g}$

Bemerkenswerterweise hängt die Kreisfrequenz also nur von der Pendellänge  $l$  und der Fallbeschleunigung  $g$  ab, aber nicht von der Masse  $m$ .

In einem Experiment kann man sich leicht überzeugen, dass die Schwingungsdauer bei großen Auslenkungswinkeln aber auch noch von der Amplitude abhängt. Dies ist ein untrügliches Zeichen für eine nichtharmonische Schwingung, denn bei der Sinusfunktion sind Amplitude und Frequenz völlig unabhängig voneinander.

### 4.1.3 Gedämpfte Schwingungen

Wie sieht es mit der mechanischen Energie bei einer Schwingung aus? Wenn eine Masse  $m$  mit der Geschwindigkeit  $v$  läuft, besitzt sie die kinetische Energie  $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ . Wenn eine Feder mit der Federkonstanten  $D$  um das Stück  $x$  gedehnt oder gestaucht wird, ändert sich die potentielle Energie um  $W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D \cdot x^2$ . Folglich besitzt ein Federpendel eine Schwingungsenergie  $W_s$ , die sich irgendwie aus  $W_{\text{kin}}$  und  $W_{\text{pot}}$  zusammensetzt. Wie?

#### Rechenbeispiel 4.1: Fahrwerksfeder

► **Aufgabe.** Eine vierköpfige Familie mit einer Gesamtmasse von 200 kg steigt in ihr Auto mit einer Masse von 1200 kg. Das Auto senkt sich um 3 cm. Wie groß ist die Federkonstante der vier Fahrwerksfedern zusammengekommen? Mit welcher Frequenz beginnt das Auto zu schwingen, wenn es durch ein Schlagloch fährt?

► **Lösung.** Die zusätzlich Gewichtskraft beträgt  $200 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 1962 \text{ N}$ . Die Federkonstante ist also:

$$D = \frac{1962 \text{ N}}{3 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 6,54 \cdot 10^4 \text{ N/m.}$$

Bei einer Gesamtmasse von 1400 kg ist dann die Eigenfrequenz des Autos:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} = 1,1 \text{ Hz.}$$

Beim Nulldurchgang ist die Feder momentan entspannt:  $W_{\text{pot}} = 0$ . Folglich muss der Pendelkörper die Schwingungsenergie ganz allein tragen. Das kann er auch, denn er ist ja auf seiner Höchstgeschwindigkeit  $\pm v_0$ . Die geht quadratisch in  $W_{\text{kin}}$  ein, folglich spielt die Richtung der Geschwindigkeit keine Rolle. In den Umkehrpunkten ist der Pendelkörper momentan in Ruhe:  $W_{\text{kin}} = 0$ . Folglich muss die Feder die Schwingungsenergie ganz allein tragen. Das kann sie auch, denn sie ist ja mit der Amplitude  $\pm A_0$  maximal gedehnt oder gestaucht.  $A_0$  geht quadratisch in  $W_{\text{pot}}$  ein, folglich spielt das Vorzeichen keine Rolle. Für die vier genannten Positionen darf man also schreiben

$$\text{Schwingungsenergie } W_{s0} = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} D \cdot A_0^2.$$

Eine harmonische Schwingung erreicht immer wieder die gleiche Amplitude  $A_0$ ; demnach hat die Schwingungsenergie  $W_s$  zumindest alle halbe Schwingungsdauer den genannten Wert. Da darf man erwarten, dass es zwischendurch nicht anders ist und sich  $W_{\text{pot}}$  und  $W_{\text{kin}}$  bei jeder momentanen Auslenkung  $x(t)$  ständig zum gleichen  $W_s$  addieren:

$$\begin{aligned} W_s &= W_{\text{kin}}(t) + W_{\text{pot}}(t) \\ &= \frac{1}{2} m \cdot v^2(t) + \frac{1}{2} D \cdot x^2(t) = \text{konstant} \end{aligned}$$

Mit anderen Worten:

#### Merke

Beim harmonisch schwingenden Oszillator wechselt die volle Schwingungsenergie ständig zwischen der potentiellen Energie der Feder und der kinetischen Energie des Pendelkörpers hin und her.

4

Die harmonische Schwingung hält ihre Amplitude  $A = A_0$ , der harmonische Oszillator seine Schwingungsenergie  $W_s$  eisern konstant, auf immer und ewig. Das ist graue Theorie. In der Wirklichkeit schwingt ein Pendel aus, wenn die Uhr abgelaufen ist: Jede folgende Amplitude bleibt um ein Stückchen  $\Delta A$  kleiner als die letzte, die Schwingung ist gedämpft und verliert Schwingungsenergie. Das darf man so sagen, obwohl Energie als solche selbstverständlich nicht verloren gehen kann. Das verbietet der Energiesatz. Es wird lediglich Schwingungsenergie in eine andere Energieform umgewandelt, üblicherweise in Wärme. Unter bestimmten Bedingungen bleibt der Quotient  $\Delta A/A$  von Schwingung zu Schwingung konstant. Dann fallen die Amplitude  $A(t)$  und die Schwingungsenergie  $W_s(t)$  exponentiell mit der Zeit ab, und zwar  $A$  mit der Dämpfungskonstanten  $-\delta$ :

$$A(t) = A_0 e^{-\delta \cdot t}$$

und  $W_s$ , weil dem Amplitudenquadrat proportional, mit  $-2\delta$ :

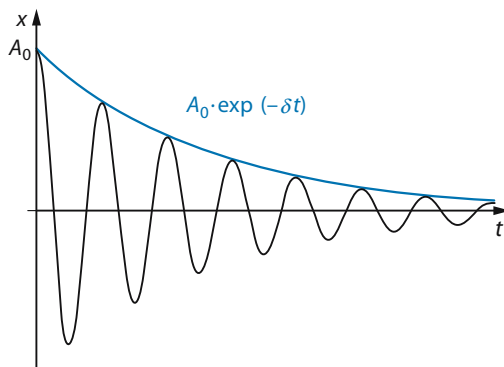
$$W_s(t) = W_{s0} e^{-2\delta \cdot t}.$$

■ Abbildung 4.4 zeigt eine in dieser Weise gedämpfte Schwingung graphisch. Ihre Formel

$$x(t) = A_0 \exp(-\delta \cdot t) \cos(\omega \cdot t)$$

benutzt zwar weiter die Winkelfunktion Kosinus, um eine harmonische Schwingung handelt es sich aber nicht mehr, nicht einmal um einen periodischen Vorgang.

Mit wachsendem  $\delta$  kommt das gedämpfte Pendel immer schneller zum Stillstand, bis es schließlich, ohne auch nur einmal durchzuschwingen, auf schnellstem Weg in die Ruhelage zurückkehrt. Das ist der sog. **aperiodische Grenzfall**, um den sich vor allem die Instrumentenbauer bemühen. Ei-



■ Abb. 4.4. Gedämpfte Schwingung. Die blau gezeichnete Kurve läuft durch die Maximalausschläge der Schwingung und ist eine Exponentialfunktion

ne Waage soll ihren Messwert ja möglichst rasch anzeigen und nicht lange um ihn herumpendeln. Die Instrumente im Armaturenbrett des Autos müssen grobe Erschütterungen ertragen. Darum dämpft man sie bis in den sog. **Kriechfall**, in dem sie nur betont langsam auf den Messwert zumarschieren.

Ein Kind, zum ersten Mal auf eine Schaukel gesetzt, muss angestoßen werden und nach wenigen Schwingungen wieder. Es lernt aber bald, durch geschickte Bewegung des Oberkörpers und der Beine, die Schaukel in Gang zu halten, also verlorene Schwingungsenergie durch Muskelarbeit zu ersetzen, ohne im Geringsten zu verstehen, wie das eigentlich funktioniert.

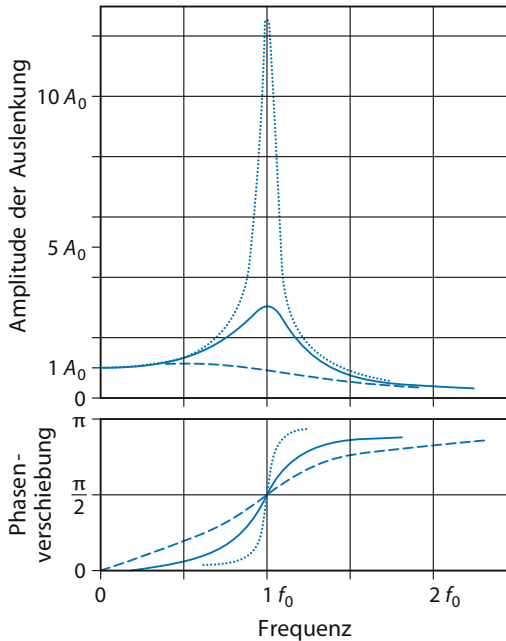
Die rhythmische Energiezufuhr muss nicht gefühlsmäßig oder gar durch Nachdenken besorgt werden, eine rein mechanisch oder auch elektromechanisch vom Pendel selbst ausgelöste **Selbststeuerung** tut es auch, wie alle Uhren beweisen.

### 4.1.4 Erzwungene Schwingungen

Die regelmäßige Energiezufuhr für eine ungedämpfte Schwingung muss nicht vom Pendel selbst ausgelöst werden, sie kann auch von einem unabhängigen Erreger ausgehen. Wird z. B. das linke Ende der Pendelfeder in ■ Abb. 4.5 von irgendeiner Mechanik periodisch hin und her gezogen, so schwingt der Pendelkörper auch jetzt ungedämpft, allerdings nicht mit seiner Eigen-



■ **Abb. 4.5. Erzwungener Schwingungen.** Das linke Ende des Federpendels wird mit vorgegebbarer Frequenz und Auslenkungsamplitude sinusförmig hin- und herbewegt



■ **Abb. 4.6. Resonanzkurven.** Der Oszillator hat die Eigenfrequenz  $f_0$  (sie ist zugleich Einheit der Abszisse). Einheit der Ordinate ist die Amplitude  $A_0$  der Auslenkung bei kleinen Frequenzen. Mit stärkerer Dämpfung nimmt die Resonanzüberhöhung ab und die Phasenverschiebung zwischen Erreger und Resonator zu. Das Maximum der Resonanzkurve verschiebt sich zu kleinen Frequenzen (nach R.W. Pohl)

frequenz  $f_0$ , sondern mit der Frequenz  $f$  des Erregers: Das Pendel führt eine **erzwungene Schwingung** aus. Dabei hat es seine Eigenfrequenz freilich nicht vergessen; zumeist schwingt es nämlich mit umso größerer Amplitude, je näher  $f$  und  $f_0$  beieinander liegen. Nicht selten klappert ein altes Auto bei einer ganz bestimmten Geschwindigkeit besonders laut: Irgendein Stück Blech hat sich gelockert, ist dadurch schwingungsfähig geworden und gerät in **Resonanz**, wenn seine Eigenfrequenz vom Motor getroffen wird.

Eine genauere Untersuchung erzwungener Schwingungen führt zu den Resonanzkurven (■ Abb. 4.6). Bei kleinen Frequenzen folgt der Oszillator dem Erreger unmittelbar, beide erreichen ihre Maximalausschläge zum gleichen Zeitpunkt: Sie schwingen **in Phase**, ohne Phasenverschiebung also, d. h. mit dem Phasenwinkel  $\varphi = 0$ . Erhöht man die Frequenz des Erregers, so wächst im Allgemeinen die Amplitude des Oszillators. Sie erreicht ihren Höchstwert so ungefähr bei dessen Eigenfrequenz und geht von da ab asymptotisch auf null zurück. Erreger und Pendel schwingen schließlich **in Gegenphase** ( $\varphi = \pi$ ). In unglücklichen Fällen kann die Resonanzamplitude so groß werden, dass der Oszillator dabei zu Bruch geht. Durch seinen Blechtrommler Oskar Matzerath, der gläserne Gegenstände aller Art „zersingen“ kann, hat Günter Grass der **Resonanzkatastrophe** zu literarischem Ruhm verholfen. Physikalisch setzt sie Oszillatoren mit extrem geringer Dämpfung voraus. Bis in den Kriechfall hinein gedämpfte Resonatoren sind zu einer **Resonanzüberhöhung** über die Amplitude des Erregers hinaus gar nicht fähig.

#### 4.1.5 Überlagerung von Schwingungen

Wenn man die momentanen Auslenkungen mehrerer gleichzeitig ablaufender Schwingungen addiert, so spricht man von einer **Überlagerung von Schwingungen**. Rein mathematisch geht es also um die Summe

$$x(t) = \sum_n A_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t + \varphi_n).$$

Der Phasenwinkel  $\varphi$  schiebt die zugehörige Teilschwingung in die richtige Position auf der Zeitachse. Am besten lässt man sich die Summe von einem Computer nicht nur ausrechnen, sondern gleich als Kurve auf Papier oder Bildschirm aufzeichnen. Dabei handelt es sich keineswegs um eine mathematische Spielerei; die Überlagerung von Schwingungen hat durchaus praktische Bedeutung, wie sich noch herausstellen wird.

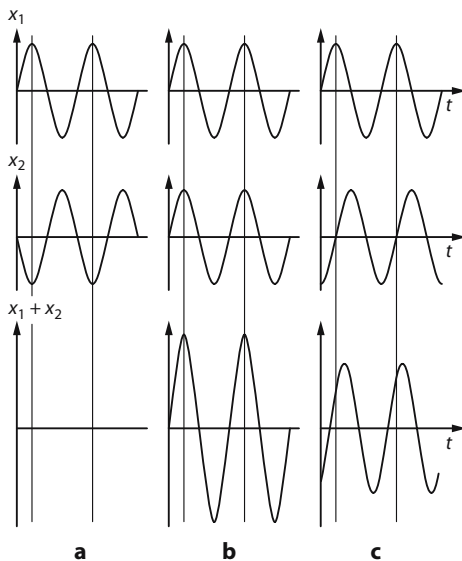
In besonders einfachen Fällen kann man auch ohne Rechnung herausfinden, was bei einer Überlagerung von Schwingungen herauskommen muss, etwa bei der Addition zweier Sinusschwin-

gungen gleicher Amplitude und Frequenz, d. h. bei

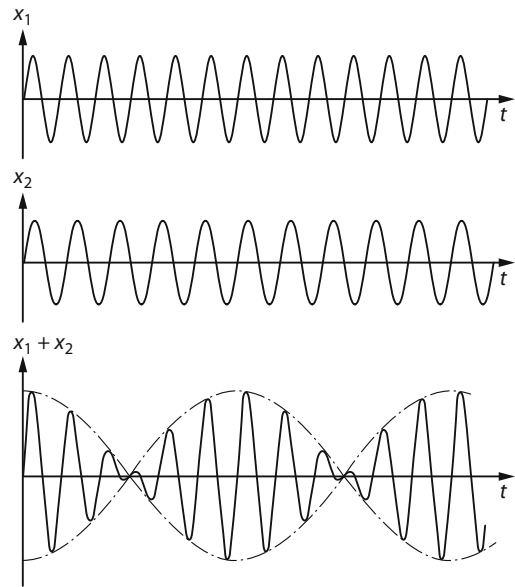
$$x(t) = A_0 \{ \sin(\omega \cdot t) + \sin(\omega \cdot t + \varphi) \}.$$

Hier darf der Phasenwinkel  $\varphi$  auf keinen Fall vergessen werden; er spielt eine entscheidende Rolle. Bei  $\varphi = 0$  sind beide Schwingungen in Phase, ihre Auslenkungen stimmen zu jedem Zeitpunkt nach Betrag und Vorzeichen überein. Demnach ist auch die Summe mit beiden Schwingungen in Phase, hat aber doppelte Amplitude (■ Abb. 4.7b); man spricht hier von **konstruktiver Interferenz**. Bei  $\varphi = \pi = 180^\circ$  befinden sich die beiden Schwingungen in Gegenphase; ihre Auslenkungen stimmen nur noch im Betrag überein, haben aber entgegengesetzte Vorzeichen. Folglich ist die Summe zu jedem Zeitpunkt null; die Schwingungen löschen sich gegenseitig aus: **destruktive Interferenz** (■ Abb. 4.7a). Jeder andere Phasenwinkel führt zu einem Ergebnis zwischen diesen beiden Grenzfällen; Abbildung 4.7c zeigt ein Beispiel.

Bemerkenswert ist die Überlagerung zweier Schwingungen von nicht genau, aber fast gleicher



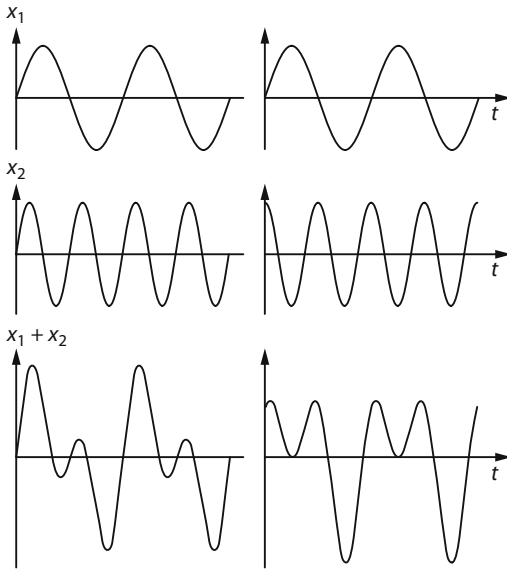
■ Abb. 4.7a–c. Überlagerung zweier Schwingungen: mit gleicher Frequenz und Amplitude der Auslenkung. **a** Auslöschung bei Gegenphase, destruktive Interferenz; **b** Amplitudenverdopplung bei Überlagerung in Phase, konstruktive Interferenz; **c** mittlere Amplitude und Phasenlage bei Fällen zwischen den beiden Extremen



■ Abb. 4.8. Schwebung: Überlagerung zweier Schwingungen mit gleicher Auslenkungsamplitude und nahezu gleichen Frequenzen

Frequenz: Sie führt zur **Schwebung** (■ Abb. 4.8). Verstärken sich die beiden Schwingungen zu irgendeinem Zeitpunkt, weil sie gerade gleiche Phase haben, so wird ein Weilchen später die eine Schwingung der anderen um genau eine halbe Schwingungsdauer davongelaufen sein: Beide geraten in Gegenphase und löschen sich aus. Dieses Spiel wiederholt sich regelmäßig und zwar mit der halben **Differenzfrequenz**, der halben Differenz der beiden Einzelfrequenzen.

Etwas schwieriger zu übersehen ist die Überlagerung zweier Schwingungen im Frequenzverhältnis 1:2. Auch hier hängt das Resultat wesentlich von der Phasenlage ab (■ Abb. 4.9). Grundsätzlich darf man auch mehr als zwei Schwingungen einander überlagern. Treibt man es weit genug, so kann man grundsätzlich jeden periodisch ablaufenden Vorgang, jede noch so komplizierte Schwingungsform aus einzelnen Sinusschwingungen zusammensetzen (**Fourier-Synthese**) oder auch in sie zerlegen (**Fourier-Analyse**). In mathematischer Strenge lässt sich beweisen: Die Frequenz  $f_0$ , mit der sich ein beliebiger Vorgang periodisch wiederholt, erscheint in der Analyse als Frequenz der **Grundschwingung**. Ihr überlagern



■ Abb. 4.9. Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Auslenkungsamplitude im Frequenzverhältnis 1:2. Die Phasenbeziehung ist wesentlich

sich Oberschwingungen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz  $f_0$  sind. Über die Phasenwinkel dieser sog. **Harmonischen** lässt sich Allgemeines nicht aussagen, sie hängen vom Einzelfall ab. Dies gilt auch für die Amplituden, die allerdings normalerweise mit steigender Frequenz schließlich einmal monoton gegen null gehen.

Übersichtlich darstellen und mathematisch einfach beschreiben lässt sich nur die rein harmonische Schwingung, also die Sinusschwingung. Die Welt ist aber voll von anharmonischen Schwingungen. Das Fourier-Theorem versucht, den komplizierten allgemeinen Fall auf den einfachen zurückzuführen.

#### Merke

Anharmonische Schwingungen können als Überlagerung harmonischer Schwingungen aufgefasst werden.

## 4.2 Seilwellen

Ein Federpendel schwingt harmonisch. Es hält sich an die Resonanzkurve, sobald seinem Federende eine sinusförmige Bewegung aufgezwungen wird. Was aber geschieht, wenn man zwei Federpendel so aneinander koppelt, wie ■ Abb. 4.10 das zeigt? Einem Pendelkörper macht es weiter nichts aus, wenn er statt von einer nun von zwei Federn in die Ruhelage gezogen wird; für ihn addieren sich lediglich die beiden Federkonstanten.

Stößt man zunächst nur ein Pendel an, so glaubt es, zwischen zwei fest eingespannten Federn zu schwingen; der andere Pendelkörper bleibt ja zunächst noch in Ruhe. Aus seiner Sicht führt aber eines seiner Federenden eine sinusförmige Schwingung aus, und zwar genau in seiner Eigenfrequenz. Folglich erinnert er sich der Resonanzkurve und beginnt seinerseits zu schwingen. Die dafür notwendige Energie kann ihm aber nur vom ersten Pendel geliefert werden; dessen Amplitude nimmt also ab. Wenn sie auf null angekommen ist, haben beide Oszillatoren ihre Rollen vertauscht; die Energie läuft zurück und das Spiel wiederholt sich. Jedes der beiden Pendel führt die Bewegung einer Schwebung aus (■ Abb. 4.11), sie tauschen die Schwingungsenergie periodisch untereinander aus. Die Schwebungsfrequenz derartiger **gekoppelter Pendel** hängt wesentlich von der Stärke der koppelnden Feder ab.

Merklich anders verhält sich eine lange Kette gleicher Oszillatoren, zumal wenn sie relativ stark gekoppelt sind (■ Abb. 4.12). Hier gibt jedes Pendel mit nur geringer Zeitverzögerung Schwingungsenergie bereits an seinen Nachbarn zur Rechten weiter, während es noch weitere Energie vom Nachbarn zur Linken aufnimmt: Die Erregung läuft auf diese Weise von dem einen Ende der Kette zum andern und möglicherweise auch wieder zurück. Das einzelne Pendel verlässt dabei seinen Platz in der Kette nicht, es schwingt lediglich um seine Ruhelage. Materie wird nicht transportiert, sondern lediglich ein Erregungszustand, repräsentiert durch lokale Pendelbewegungen und die mit ihnen verbundene Schwingungsenergie: Entlang der Pendelkette läuft eine **Welle**.

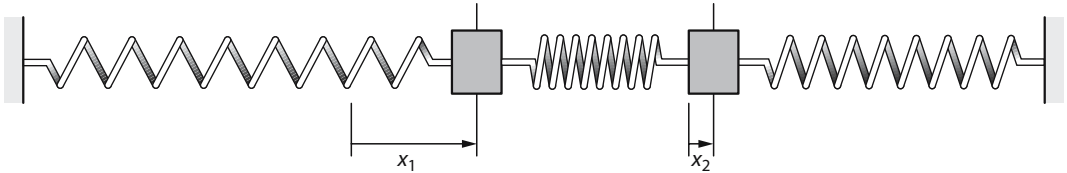


Abb. 4.10. Zwei gekoppelte Federpendel. Momentane Auslenkungen  $x_1$  und  $x_2$

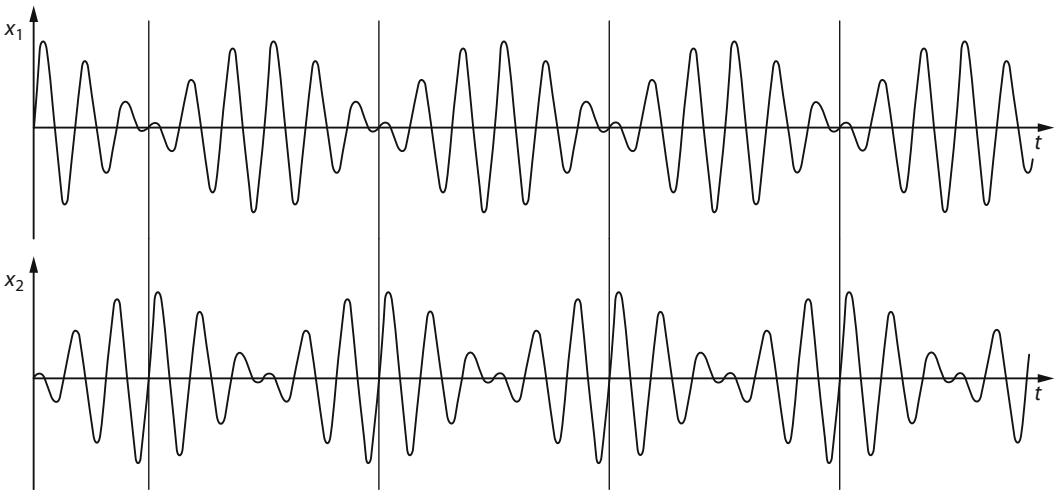


Abb. 4.11. Schwingungen gekoppelter Pendel: Die Schwingungsenergie wechselt mit der Schwebungsfrequenz zwischen beiden Pendeln hin und her



Abb. 4.12. Pendelkette

#### Merke

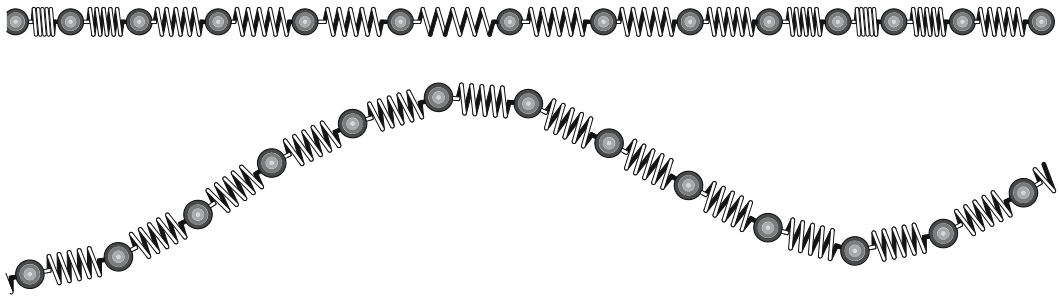
Eine Welle läuft eine Kette gekoppelter Oszillatoren entlang.  
Wellen transportieren Energie, aber keine Materie.

#### Merke

longitudinale Welle: Oszillatoren schwingen in Ausbreitungsrichtung;  
transversale Welle: Oszillatoren schwingen quer zur Ausbreitungsrichtung.

Grundsätzlich sind den Oszillatoren der Pendelkette beim Transport der Welle verschiedene gemeinsame Schwingungsrichtungen erlaubt. Man unterscheidet zwei Grenzfälle (Abb. 4.13):

Dabei übernimmt jedes einzelne Pendel den Schwingungsablauf von seinem Nachbarn: Die Welle läuft durch die ganze Kette, ob sie nun aus einem kurzen Impuls oder einem längeren Wellenzug besteht. Übrigens wird nicht verlangt, dass man Pendelmassen und Kopplungsfedern deutlich voneinander trennen kann. Auch eine lange Schraubenfeder vermag Längs- und Querwellen zu transportie-



■ Abb. 4.13. Längs- und Querswelle. „Momentaufnahmen“, schematisch

ren, sogar ein Seil, eine Wäscheleine; hier sind allerdings nur Querswellen leicht zu erkennen.

Die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** einer Welle hängt von den mechanischen Eigenschaften der Pendelkette, des „Mediums“ ab, in dem die Welle läuft. Auf jeden Fall muss aber eine sinusförmige Welle während einer Schwingungsdauer  $T$  um genau eine Wellenlänge fortschreiten (■ Abb. 4.14). Kehrwert von  $T$  ist die Frequenz  $f$ . Daraus folgt  $c = \lambda \cdot f$ .

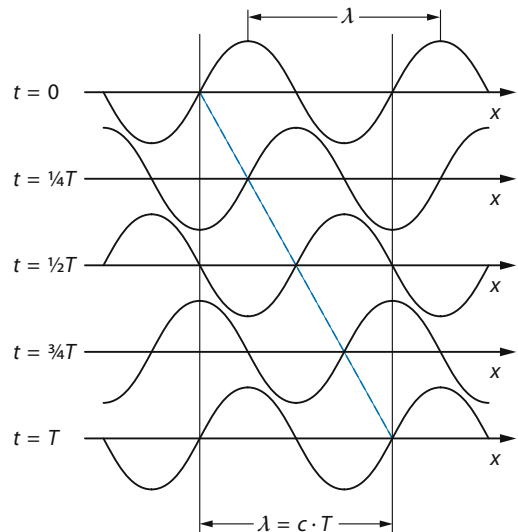
#### Merke

Ausbreitungsgeschwindigkeit = Wellenlänge  
mal Frequenz:

$$c = \lambda \cdot f$$

■■■ An diese Beziehung hält sich jede sinusförmige Welle, ob sie nun Seil-, Schall-, Licht-, Wasser- oder sonst eine Welle ist. In manchen Fällen muss man allerdings damit rechnen, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit von der Frequenz abhängt:  $c = c(f)$ . Diese **Dispersion** spielt z. B. bei der optischen Abbildung durch Linsen eine bedeutsame Rolle (► Kap. 7.2.4). Ihre Folge: Die Fourier-Komponenten eines Impulses laufen in der Welle unterschiedlich schnell, ändern also ihre gegenseitigen Phasenbeziehungen während der Laufzeit und damit auch die Form des Impulses. Wer es ganz genau nimmt, muss deshalb zwischen der **Phasengeschwindigkeit** der (unendlichen) Sinuswelle und der meist kleineren **Gruppengeschwindigkeit** eines begrenzten Wellenzuges unterscheiden.

Kommt eine Welle an das Ende der Pendelkette, so kann sie (unter geeigneten Bedingungen) reflektiert werden und die Pendelkette zurückschlagen. Die Überlagerung zweier gegenläufiger Wel-



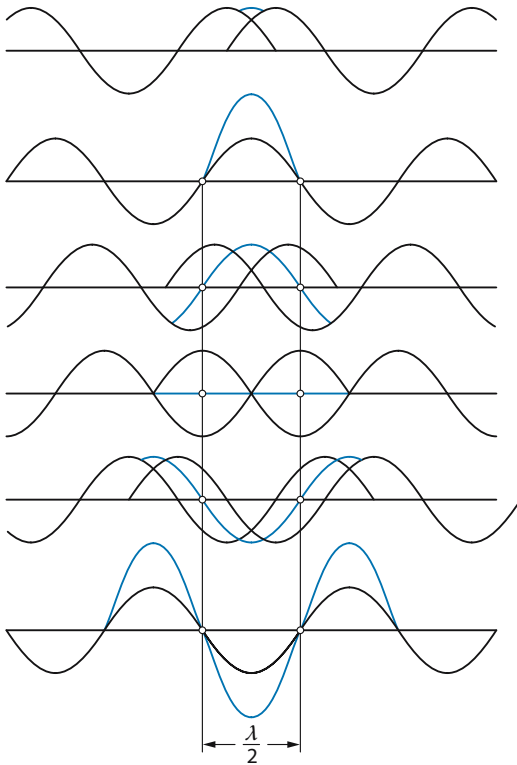
■ Abb. 4.14. Welle. Sie läuft in der Schwingungsdauer  $T$  um eine Wellenlänge  $\lambda$  weiter: Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c = \lambda \cdot f$

len gleicher Frequenz und Amplitude führt zu einer **stehenden Welle**: Einzelne Oszillatoren bleiben ständig in Ruhe, sie liegen in **Schwingungsknoten**; andere sind in maximaler Bewegung, sie liegen in **Schwingungsbäuchen** (■ Abb. 4.15). Der Abstand zwischen benachbarten Knoten oder Bäuchen beträgt eine halbe Wellenlänge, der zwischen Knoten und Bauch ein Viertel.

#### Merke

Zwei gegenläufige Wellen gleicher Amplitude und Frequenz liefern eine stehende Welle mit ortsfesten Schwingungsbäuchen und -knoten.





■ **Abb. 4.15. Stehende Welle.** Zwei gegenläufige Wellen mit gleicher Auslenkungsamplitude und gleicher Frequenz geben eine stehende Welle mit ortsfesten Schwingungsknoten (Ruhe) und ortsfesten Schwingungsbäuchen (maximale Amplitude der Auslenkung)

#### Rechenbeispiel 4.2: Was für eine Welle?

► **Aufgabe.** Welche Ausbreitungsgeschwindigkeit hat eine Welle mit einer Frequenz von  $10^{10}$  Hz und einer Wellenlänge von 3 cm?

► **Lösung.**  $c = \lambda \cdot f = 3 \cdot 10^8$  m/s. Das ist eine ziemlich hohe Geschwindigkeit, tatsächlich die höchste, die es gibt: die von Licht im Vakuum. Es handelt sich wohl um eine elektromagnetische Mikrowelle (► Kap. 7.1).

### 4.3 Schallwellen

#### 4.3.1 Schallerzeugung

Mechanische Schwingungen im Frequenzbereich von etwa 16 Hz bis etwa 16 kHz kann der Mensch

hören; man nennt sie **Hörschall**. Schwingungen kleinerer Frequenz werden als Bewegungen empfunden, unterhalb von 3 Hz lassen sie sich unmittelbar abzählen; in der Akustik nennt man sie **Infraschall**. Die obere Hörgrenze hängt vom Lebensalter ab und geht mit den Jahren zurück. Schall, dessen Frequenz über der Hörgrenze liegt, heißt **Ultraschall**.

#### Merke

Hörschall: Frequenzen zwischen ca. 16 Hz und ca. 16 kHz,  
Ultraschall: Frequenzen über dem Hörbereich.

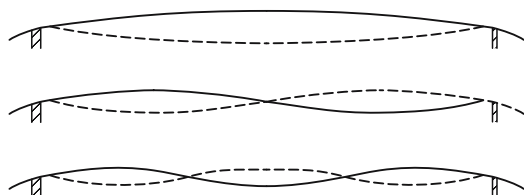
Alles, was sich in Luft bewegt, erzeugt Schall; bewegt es sich periodisch und im Bereich des Hörschalls, so erzeugt es einen Ton oder einen Klang; bewegt es sich nichtperiodisch, so gibt es nur ein Geräusch. Die Zähne einer Kreissäge greifen periodisch ins Holz und kreischen dementsprechend; die Tonhöhe sinkt, wenn es dem Motor Mühe macht, das Sägeblatt durchzuziehen. Auch Drehbewegungen sind periodische Bewegungen; der Bohrer des Zahnarztes singt penetrant und drehzahlabhängig.

Vielseitigste Form der Schallerzeugung ist die mit der Membran eines Lautsprechers: Sie vermag Stimmen von Mensch und Tier zu imitieren und alle Musikinstrumente. Dazu wird eine meist konische Membran aus starkem Papier von einem Elektromagneten gewaltsam hin und her gezogen, und zwar im Takt eines Wechselstroms, den ein elektronischer Verstärker liefert. Bewegt sich die Membran momentan nach rechts, so schiebt sie dort Luftmoleküle zusammen, erzeugt also einen (geringen) Überdruck; entsprechend führt eine Bewegung in Gegenrichtung zu einem Unterdruck. Über- wie Unterdruck breiten sich mit Schallgeschwindigkeit aus:

#### Merke

Schallwellen in Gasen und Flüssigkeiten sind Druckwellen, also longitudinal.

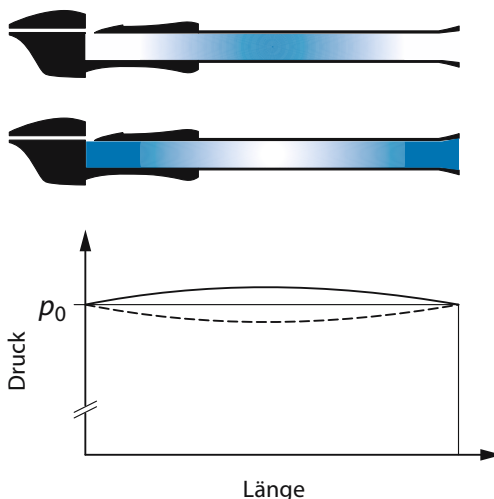
■ ■ ■ Edelste Form der Musikerzeugung ist die mit der Geige. Ihre Saiten schwingen in der Form stehen-



■ Abb. 4.16. Geigensaiten. Die Grundschwingung und die beiden ersten Oberschwingungen

der Seilwellen. Da eine Saite an ihren Enden fest eingespannt ist, müssen dort Schwingungsknoten liegen. Sie haben den Abstand einer halben Wellenlänge und liefern damit den einen bestimmenden Faktor zur **Grundfrequenz** der Saitenschwingung. Diese Frequenz lässt sich erhöhen, wenn man die wirksame Länge der Saite verkürzt: So werden Geigen gespielt. Die Grundfrequenz steigt aber auch, wenn man die Saite straffer spannt, denn damit erhöht man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Seilwelle: So werden Geigen gestimmt. Die Forderung nach Knoten an den Enden der Saite verbietet nicht, dass weitere Knoten auftreten, z. B. einer genau in der Mitte oder zwei auf je einem Drittel der wirksamen Länge (■ Abb. 4.16). Unterteilen können die Knoten ihre Saite aber nur in ganzzahligen Bruchteilen; die zugehörigen Frequenzen sind demnach ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz. Derartige **Obertöne** erzeugt jedes Musikinstrument, sie machen seine **Klangfarbe** aus. Freilich, nicht die Saite bestimmt die Schönheit des Geigenklanges, sondern der Geigenkörper. Die Saite allein kann des akustischen Kurzschlusses wegen so gut wie gar nicht abstrahlen, sie braucht den Geigenkörper als Resonanzboden. Dessen ungeheuer zahlreiche Eigenfrequenzen, von der Saite mehr oder weniger angeregt, machen den Klang einer Stradivari.

Nicht nur Festkörper haben ihre Eigenfrequenzen, sondern auch in Hohlräumen eingesperrte Gase. Der Detektiv klopft die Wände nach geheimen Fächern ab und der Arzt den Brustkorb seines Patienten nach dessen Lunge. Die Resonanztöne signalisieren beiden die Grenzen des Hohlraumes. Flöten geben ihm die Form einer gestreckten Röhre und bilden damit die Verhältnisse der schwingenden Saite nach. Die Blockflöte ist an beiden Enden offen: Dort liegen die Schnellebäuche und Druckknoten einer stehenden Schallwelle, ihr Abstand beträgt eine halbe Wellenlänge des Grundtones (■ Abb. 4.17, Schalldruck und Schallschnelle werden im übernächsten Kapitel behandelt). Welche Frequenz zur Wellenlänge gehört, bestimmt die Schallgeschwindigkeit der Luft; bläst man eine Blockflöte mit Wasser-



■ Abb. 4.17. Offene Pfeife (Blockflöte). Der Luftdruck  $p$  hat an beiden Enden einen Knoten und schwankt im Schwingungsbauch ein ganz klein wenig um den Barometerdruck  $p_0$

stoff an, steigt ihre Tonhöhe um mehr als eine Oktave. Die für den Menschen wichtigste Form der Schallerzeugung ist die mit dem **Kehlkopf**. Dieser besitzt zwei Stimmbänder, die er über den Stellknorpel willkürlich anspannen kann. Durch die Stimmritze zwischen ihnen wird beim Sprechen und Singen Luft gepresst. Die in Grenzen einstellbaren Eigenfrequenzen der Stimmbänder bestimmen die Tonlage, nicht aber den Laut, der den Mund verlässt. Hier spielen Unterkiefer und vor allem die bewegliche Zunge die entscheidenden Rollen: Sie legen die momentane Form des Rachenraumes fest und damit die Eigenfrequenzen dieses Hohlraumes, die von den Stimmbändern zu Resonanz angeregt werden können.

### 4.3.2 Schallnachweis

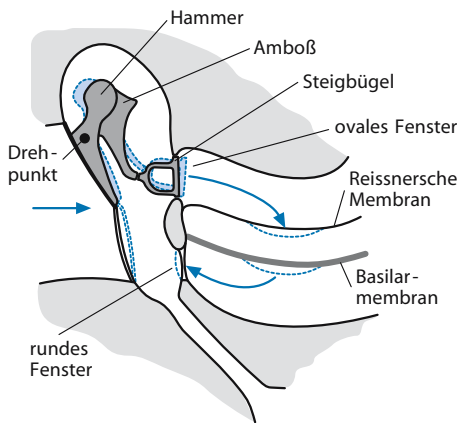
Mikrophone haben die Aufgabe, ankommende Schallschwingungen so getreu wie möglich in synchrone elektrische Schwingungen zu übertragen, die dann elektronisch weiterverarbeitet werden. Dazu haben alle Mikrophone wie das Ohr eine Membran, die sich im Takt der Luftschwingung mitbewegt und deren Bewegung meistens mit magnetischen Effekten in ein elektrisches Signal übertragen wird. Vollkommen kann das nie gelingen, denn notwendigerweise bilden Membran und Elektronik schwingungsfähige Gebilde

**Klinik**

**Das Ohr des Menschen.** Das Organ, mit dem der Mensch Schallschwingungen in Nervensignale überführt, ist das **Corti-Organ**, mechanisch gekoppelt an die Basilarmembran in der Schnecke des **Innenohres**. Als überaus empfindliches Häutchen kann die Basilarmembran nur in einer Flüssigkeit aufbewahrt werden. Damit steht die Natur vor dem im folgenden Kapitel bei der Sonographie angesprochenen Problem, Schallenergie, die über das schallweiche Medium Luft angeliefert wird, auf die vergleichsweise schallharte Flüssigkeit zu übertragen. Dem dient das zierliche Hebelsystem des **Mittelohres**, also die drei Gehörknöchelchen Hammer, Amboss und Steigbügel (Abb. 4.18). Sie werden bewegt von dem eigentlichen Schallaufnehmer, dem **Trommelfell**, einer dünnen, schallweichen Haut, die quer im Gehörgang steht; sie geben ihre Bewegungen weiter an die Haut des ovalen Fensters, hinter der sich die Flüssigkeit der

Schnecke befindet. Die Fläche des ovalen Fensters liegt deutlich unter der des Trommelfells; das ist wesentlich für die Energieübertragung.

Das Trommelfell selbst ist nur insoweit schallweich, als es auf beiden Seiten an Luft angrenzt, also nicht dort, wo der Hammer ansetzt. Auf jeden Fall muss aber der Luftraum des Mittelohres Verbindung zur Außenwelt haben, denn sonst würde das Trommelfell auf jede langsame Änderung des Luftdruckes reagieren wie die Membran eines Dosenbarometers. Diese Verbindung besorgt die **Eustachi-Röhre**. Sie ist nicht selten durch Flüssigkeiten aus irgendeinem Katarrh verstopft. Dann spürt man zuweilen bereits einen „**Druck**“ auf den **Ohren**, wenn man in einem Hochhaus mit dem Fahrstuhl fährt oder mit einem Auto den Berg hinunter. Der Luftdruck fällt ja mit der Höhe über dem Meeresspiegel. Schluckbewegungen helfen, den „Druck“ zu mindern.



**Abb. 4.18. Mittelohr.** Der Schall versetzt zunächst das schallweiche Trommelfell in Schwingungen; diese werden von Hammer, Amboss und Steigbügel auf die (der nachfolgenden Flüssigkeit wegen) schallharte Haut des ovalen Fensters übertragen

mit Eigenfrequenzen und der Neigung zu Resonanzüberhöhungen. Die technischen Tricks, mit denen man gute und teure, oder auch nicht ganz so gute, dafür aber billigere Mikrophone herstellt, brauchen hier nicht besprochen werden.

### 4.3.3 Schallintensität und Lautstärke

Der Überschallknall der Düsenjäger ist zumindest unangenehm. Als ein Warnsystem, das auch im Schlaf nicht abgeschaltet wird, hat das Gehör seine Empfindlichkeit bis an die Grenze des Sinnvollen gesteigert; noch ein wenig mehr und es müsste die thermische Bewegung der Luftmoleküle als permanentes Rauschen wahrnehmen. Zum Hörschall normaler Sprechlautstärke gehören Druckschwankungen, **Schalldruck** oder auch Schallwechseldruck genannt, deren Amplituden in der Größenordnung Zentipascal ( $10^{-2}$  Pa) liegen. Sie bedeuten Schwingungen der Moleküle mit Amplituden im Bereich 10 nm und mit Geschwindigkeitsamplituden von 0,1 mm/s. Man bezeichnet sie als **Schallschnelle**. Sie hat mit der Ausbreitungs-

geschwindigkeit der Schallwellen nichts zu tun, wohl aber mit der von der Schallwelle transportierten Leistung, dem **Energiestrom**  $P = dW/dt$  der Welle mit der Einheit Watt. Zu ihm gehört eine Energiestromdichte mit der SI-Einheit  $W/m^2$ , die auch **Schallintensität** oder Schallstärke genannt wird und den Buchstaben  $I$  bekommt. Sie ist ein rein physikalisches, vom menschlichen Gehör unabhängiges und darum auch für Ultraschall verwendbares Maß für die Leistung, die ein Mikrofon oder auch ein Ohr mit seiner Empfängerfläche aufnehmen kann:

$$\text{Schallintensität } I = \frac{\text{Energiestrom } P}{\text{Empfängerfläche } A}.$$

■ ■ ■ Zwischen ihr und der Schallschnelle  $v$  besteht der Zusammenhang

$$I = \frac{1}{2} \rho \cdot c \cdot v^2.$$

Herleitung: Jede Schallwelle besitzt eine Energiedichte

$$\varepsilon = \frac{\text{Energie}}{\text{Volumen}} = \frac{W}{V}.$$

$W$  setzt sich aus potentieller Energie und kinetischer zusammen, muss aber im jeweiligen Maximum von jeder allein geliefert werden können. Daraus folgt für das Maximum der kinetischen Energie

$$W = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

und nach Division durch das Volumen

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2$$

$\varepsilon$  wird mit der Schallgeschwindigkeit  $c$  transportiert. Das bedeutet einen Energiedichtefluss  $\varepsilon \cdot c$ , eben die Schallintensität  $I$ .

Erträglicher Schalldruck liegt um Zehnerpotenzen unter dem Luftdruck. Der Schalldruck darf nicht mit dem Schallstrahlungsdruck verwechselt werden, den eine Schallwelle auf jedes Hindernis ausübt, das ihr im Wege steht. Auch der Strahlungsdruck ist gering; für den Effekt der Posauern von Jericho hat er gewiss nicht ausgereicht.

Geräte zur Messung von Schallintensitäten benötigen grundsätzlich ein Mikrofon, einen Verstärker und einen Anzeigemechanismus. Die Eichung in  $W/m^2$  macht im Prinzip keine Schwierigkeiten. Dem Arbeitsphysiologen aber, der sich für den Krach in einer Kesselschmiede interessiert oder die Störung der Nachtruhe durch den

nahe gelegenen Flugplatz, ist damit wenig gedient. Schall stört nur, wenn man ihn hört: Ultraschall macht keinen Lärm (was nicht heißt, dass er harmlos ist). Auch im Hörbereich wertet das Ohr Schall verschiedener Frequenzen höchst unterschiedlich. Seine höchste Empfindlichkeit liegt bei 3 kHz; nicht ohne Grund brüllen Babys bevorzugt auf dieser Frequenz: Hier hört die Mutter bereits eine Schallintensität von  $10^{-12} W/m^2$ . Schon bei 1 kHz erfordert die Hörschwelle zehnfache Schallintensität. Den Frequenzgang des normalen menschlichen Gehörs versucht man durch eine neue Messgröße zu berücksichtigen, durch die **Lautstärke** mit der Einheit **Phon**.

Im empfindlichsten Bereich des Gehörs liegen zwischen Hör- und Schmerzschwelle ungefähr 12 Zehnerpotenzen der Schallintensität. Kein Gerät mit linearer Skala kann einen derart großen Bereich überdecken. Das gilt auch für Sinnesorgane. Folglich reagieren sie in etwa logarithmisch (**Weber-Fechner-Gesetz**). Es hat bei der Festlegung der Schallpegelskala und der Phonskala Pate gestanden, der das in der Technik übliche **Pegelmaß** zugrunde liegt. Es wird in **Dezibel** (dB) angegeben.

Wem das Dezibel nicht geläufig ist, dem kann es Kummer bereiten. Der Name lässt eine Einheit vermuten, tatsächlich handelt es sich aber eher um eine Rechenvorschrift. Ist eine Energie  $W_1$  im Laufe der Zeit auf irgendeine Weise auf  $W_2 = 0,01 \cdot W_1$  heruntergegangen, so beträgt der Unterschied der beiden **Pegel** 20 dB. Um das herauszufinden, bildet man zunächst den Bruch  $W_1/W_2$ , logarithmiert ihn dekadisch und multipliziert anschließend mit 10. Das Ergebnis ist der Pegelunterschied in Dezibel:

$W_1/W_2 = 100$ ;  $\lg 100 = 2$ ;  $10 \cdot 2 = 20$ ; also 20 dB Pegelunterschied.

Ein „Unterschied“ der Pegel von 0 dB bedeutet  $W_1 = W_2$ , weil

$$\lg 1 = 0 = 10 \cdot \lg 1 \text{ ist.}$$

Bei linearem Kraftgesetz der Schraubenfeder ist die Schwingungsenergie  $W$  des Federpendels dem Quadrat der Amplitude  $A$  proportional:

$$W_1/W_2 = A_1^2/A_2^2.$$

Daraus folgt

$$10 \lg(W_1/W_2) = 10 \lg(A_1/A_2)^2 = 20 \lg(A_1/A_2).$$

Man kann das Pegelmaß also auch aus dem Amplitudenverhältnis bestimmen, aber dann verlangt die Rechenvorschrift einen Faktor 20 zum Logarithmus.

So verfährt die Größe **Schallpegel**, auch Schalldruckpegel genannt:

$$\text{Schallpegel } L_p = 20 \cdot \frac{\lg p_s}{\lg p_{s0}}$$

Hier ist  $p_s$  der aktuelle Schalldruck und  $p_{s0} = 2 \cdot 10^{-5}$  Pa ein Bezugsschalldruck, der etwa der Hörschwelle entspricht. Die Bezeichnung der Schallpegeleinheit ist 1 dB (SPL) (für „sound pressure level“). Da ein Faktor 20 vor dem Logarithmus steht, ist der Schallpegel ein logarithmisches Maß der Schallintensität. Die Bezeichnung Schalldruckpegel ist deshalb irreführend. Da das Ohr für verschiedene Frequenzen verschieden empfindlich ist, weicht die Lautstärkeskala, die das Lautstärkeempfinden nachstellen soll und in Phon (oder dB(A)) gemessen wird, von der Schallintensitätsskala in der Weise ab, wie es die Abb. 4.19 darstellt. Bei 1000 Hz ist die Phonskala identisch mit der Schallpegelskala und propor-

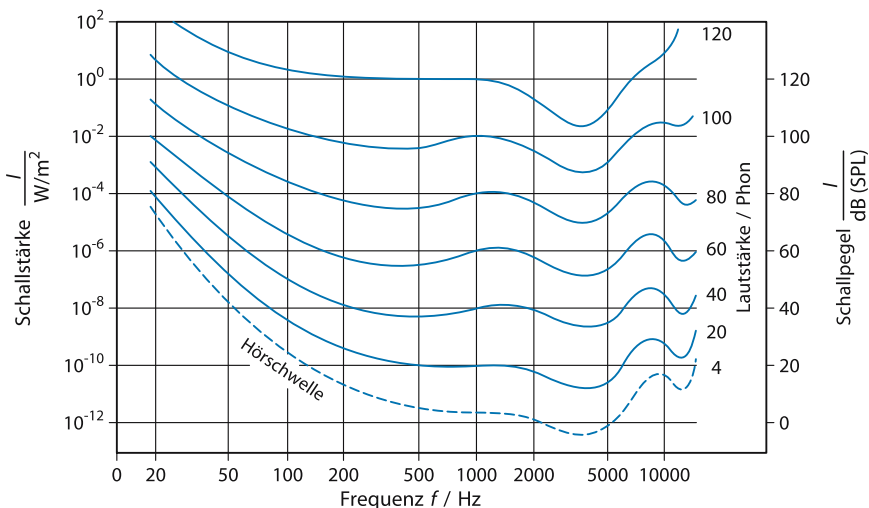
tional zum Logarithmus der Schallintensität. Bei anderen Frequenzen hingegen folgt die Phonskala den blauen Linien im Diagramm, die jeweils zu einem bestimmten Phonwert gehören. Das Diagramm stellt also die Empfindlichkeit eines offiziellen „Normalohrs“ dar. ■ Tabelle 4.1 fasst die Schallgrößen zusammen. Einige Anhaltswerte zur Phonskala liefert die folgende Aufstellung:

— Blätterrauschen	10 Phon
— Flüstern	20 Phon
— Umgangssprache	50 Phon
— starker Straßenlärm	70 Phon
— Presslufthammer in der Nähe	90 Phon
— Motorrad in nächster Nähe	100 Phon
— Flugzeugmotor 3 m entfernt	120 Phon

Lautstärken über 120 Phon schmerzen. Eine Lautstärke ist übrigens nur für den Ort des Empfängers definiert, nicht etwa für eine Schallquelle.

#### Merke

Die Lautstärke mit der Einheit Phon ist ein an die spektrale Empfindlichkeit des menschlichen Gehörs angepasstes und im Wesentlichen logarithmisches Maß der Schallintensität.



■ Abb. 4.19. Spektrale Empfindlichkeit des menschlichen Gehörs. Töne gleicher Lautstärke (in Phon) werden als gleich laut empfunden. Bei 1000 Hz ist die Lautstärke streng logarithmisch zur Schallstärke(intensität); dort bringt ein Faktor 100 in der Schallstärke einen Zuwachs von 20 Phon in der Lautstärke

Tabelle 4.1 Schallmessgrößen

Name	Weiterer Name	Einheit	Hörschwelle
Schalldruck	Schallwechseldruck	1 Pa (Pascal)	$\sim 2 \cdot 10^{-5}$ Pa
Schallintensität	Schallstärke	1 W/m <sup>2</sup>	$\sim 10^{-12}$ W/m <sup>2</sup>
Schallpegel	Schalldruckpegel	1 dB SPL	$\sim 0$ dB SPL
Lautstärke		1 Phon oder 1 dB(A)	4 Phon (dB(A))

Die Phonskala birgt Überraschungen für jeden, dem der Umgang mit Logarithmen nicht geläufig ist. Knattert ein Moped in einiger Entfernung mit 62 Phon, so schaffen vier vom gleichen Typ zusammen nicht mehr als 68 Phon. Umgekehrt kann der Hersteller von Schalldämmstoffen schon ganz zufrieden sein, wenn es ihm gelingt, von 59 Phon auf 39 Phon herunterzukommen, denn das bedeutet die Reduktion der Schallintensität auf 1%.

#### Rechenbeispiel 4.3: Schalldämmung

► **Aufgabe.** Eine Schalldämmmauer reduziert den Schallpegel von 70 dB auf 50 dB. Um welchen Faktor wird die Schallintensität reduziert?

► **Lösung.** Maßgeblich ist der Pegelunterschied von -20 dB. Es ist:

$$-20\text{dB} = 10 \cdot \lg \frac{I_1}{I_0} \Rightarrow \frac{I_1}{I_0} = 10^{-\frac{20}{10}} = 0,01.$$

Am besten lernt man das auswendig: 20 dB sind ein Faktor 100.

so in der Optik wieder, aber auch in der Kernphysik. Seine Gültigkeit setzt freilich voraus, dass von dem Medium, in dem sich die Strahlung ausbreitet, keine Energie absorbiert wird. Tatsächlich setzen aber alle schallleitenden Substanzen einen Teil der Schallleistung in Wärme um, im Idealfall entsprechend einer Exponentialfunktion. In Luft ist diese Absorption relativ gering; eben deswegen kann man sich auch noch auf einige Entfernung etwas zurufen, eben deswegen kann aber auch Bau- und Straßenlärm so lästig werden. Material zur Schalldämmung muss Schall absorbieren. Dazu muss es ihn aber zunächst einmal aufnehmen: Es darf ihn nicht reflektieren.

Dichte  $\rho$  und Schallgeschwindigkeit  $c$  sind Materialkonstanten einer jeden schallleitenden Substanz. Ihr Produkt heißt **Schallwellenwiderstand**. Er ist groß in den als **schallhart** bezeichneten Metallen und klein in den **schallweichen** Gasen. Nur Substanzen mit gleichem Schallwellenwiderstand können Schall reflexionsfrei voneinander über-

### 4.3.4 Schallausbreitung

Eine frei im Raum aufgehängte Schallquelle könnte grundsätzlich gleichmäßig nach allen Seiten abstrahlen. Die von ihr ausgesandte Schallleistung erfasst dann mit wachsendem Abstand  $r$  immer größere Kugelflächen, die proportional zu  $r^2$  anwachsen. Die Schallintensität  $I$  nimmt dementsprechend ab:

$$I(r) \sim 1/r^2.$$

Dieses quadratische Abstandsgesetz gilt auch für eine gerichtete Strahlung, die nur einen begrenzten Raumwinkel erfasst (Abb. 4.20), und es gilt für Strahlungen aller Art. Es findet sich al-

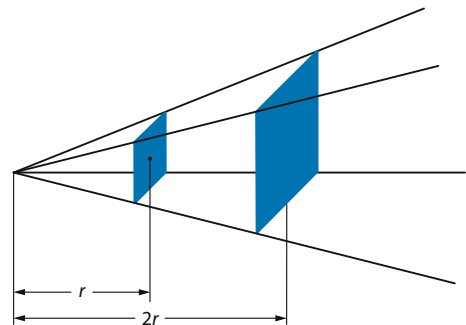


Abb. 4.20. Quadratisches Abstandsgesetz. Die in einen festen Raumwinkel hinein abgestrahlte Leistung erfasst eine Fläche, die mit dem Quadrat des Abstandes  $r$  vom Sender wächst



### Klinik

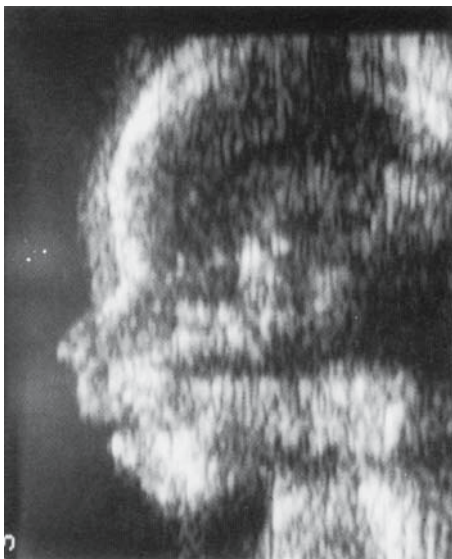
**Ultraschalldiagnose.** In der Medizin heißt das Verfahren, das mit Ultraschallechos ortet **Sonographie**. Es muss mit dem Problem der **Ankopplung** fertig werden. Der Schallkopf mit Ultraschallsender und Mikrophon, mit dem der Arzt die Bauchdecke seines Patienten abtastet, ist relativ schallhart, der akustisch im Wesentlichen aus Wasser bestehende Patient ist dies auch. Ein schallweiches Luftpolster zwischen Schallkopf und Bauchdecke hätte Reflexionen zur Folge, die den **Ultraschall** gar nicht erst in den Patienten hineinließen. Folglich muss der Zwischenraum mit einem ebenfalls leicht schallharten Gel ausgefüllt werden. Jede Ultraschalldiagnose beginnt deshalb mit dem Aufbringen dieses Gels.

■ Abbildung 4.21 zeigt das aus Ultraschallechos rekonstruierte Bild vom Kopf eines Ungeborenen. Einer Röntgenaufnahme hätte man mehr Details entnehmen können, aber die Sonographie gilt als weniger schädlich. Ultraschall gehört zwar nicht wie die Röntgenstrahlung zur sog. **ionisierenden Strahlung** (Abschnitt 9), bei hinreichender Intensität und Einwirkungsdauer vermag aber auch er Chromosomenaberrationen, d. h. Genschäden im Zellkern, auszulösen.

Chemiker benutzen den Ultraschall, um Emulsionen herzustellen, also nichtmischbare Flüssigkeiten fein ineinander zu verteilen.

Hörschall muss zu seiner Wahrnehmung nicht unbedingt auf dem normalen Wege über Luft, Trommelfell und die Gehörknöchelchen auf das eigentliche Sinnesorgan, die Basilarmembran in der Schnecke des Innenohres, übertragen werden: Eine Stimmgabel, unmittelbar auf die Stirn gesetzt, ist gut zu hören, allerdings nur vom Träger der Stirn selbst (**Körperschall**). Nicht nur Gase, sondern auch feste, flüssige und viskoelastische Körper übertragen Schall, im Beispiel also die Schädelknochen. Verwunderlich ist das nicht. Die Atome eines Kristalls etwa können um ihre offiziellen Gitterplätze herum schwingen. Dabei übertragen sie ihre Bewegungen durch zwischenatomare Kräfte auf ihre Gitternachbarn. Alle zusammen bilden ein dreidimensionales System von Pendelketten.

Generell gilt: Je härter der Körper und je kleiner seine Dichte, umso höher die Schallgeschwindigkeit. In Gasen ist die Schallgeschwindigkeit  $c$  verhältnismäßig klein, ca. 330 m/s in Luft gegenüber 1480 m/s in Wasser und ungefähr 5 km/s in Aluminium.



■ Abb. 4.21. Sonogramm. Der Kopfes eines ungeborenen Kindes (Aufnahme: Prof. Dr. M. Hansmann, Bonn)

nehmen. Täfelt man einen Raum lückenlos an Wänden, Decke und Boden mit Kupferplatten, so kann er den Schall kaum noch loswerden, weil er ihn ständig reflektieren muss. Miteinander sprechen kann man in einem solchen **Hallraum** kaum: Die erste Silbe klingt noch nach, wenn die vierte gesprochen wird. Der Nachhall großer Kirchenschiffe zwingt den Pfarrer zum pastoralen Ton.

Fehlt der Nachhall, so klingt der Raum „trocken“, bis zum Extrem des eigens für raumakustische Untersuchungen konstruierten **reflexionsfreien Raumes**.

Das menschliche Gehirn ist nicht nur in der Lage, Lautstärke wahrzunehmen, sondern auch den Laufzeitunterschied der Schallwellen zu den beiden Ohren. Das dient zum Richtungshören. Besonders ausgeprägt nutzen die Fledermäuse das Richtungshören zur Orientierung: Sie senden kurze Ultraschallimpulse scharf gerichtet aus und bestimmen aus der Ankunftszeit des Echos die Ent-



fernung des Reflektors. Nach dem gleichen Prinzip, aber mit Wasserschall, arbeitet das „Sonarsystem“ der Marine zur Ortung von Unterseebooten.

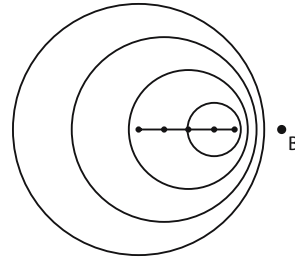
Schallwellen sind Druckwellen, also Wellen eines Skalars, auf den sich die Begriffe „longitudinal“ und „transversal“ gar nicht anwenden lassen. Die Druckwelle löst aber geringe Molekülbewegungen in Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit aus. Insofern sind Schallwellen in Wasser und Luft longitudinale Wellen und in massiven Festkörpern meistens auch. Sie transportieren zwar keine Materie, sind aber an Materie gebunden. Vakuum ist absolut „schalltot“.

Im Prinzip breiten sich Schallwellen nach den gleichen Gesetzen aus wie sichtbares Licht: Welle ist Welle. Schallwellen zeigen alle Erscheinungen der Beugung, Brechung und Interferenz, die im ► Kap. 7.4 für Licht ausführlich besprochen werden; nur verlangen die vergleichsweise großen Wellenlängen größere Apparaturen. Für die Schallreflexion des Echos nimmt man am besten gleich eine ganze Bergwand; für echten Schattenschwurf sind normale Häuser schon zu klein. Immerhin dringt der tiefe, d. h. langwellige Ton der großen Trommel einer Militärkapelle leichter in Seitenstraßen ein als die hohen Töne der Querpfiffe.

Normalerweise hört das Ohr einen Ton mit eben derjenigen Frequenz, mit der ihn die Schallquelle ausgesandt hat. Das muss aber nicht so sein. In dem Moment, in dem die Feuerwehr an einem vorbeifährt, sinkt die Tonhöhe des Martinshorns, für den Passanten auf der Straße, nicht für die mitfahrenden Feuerwehrmänner. Die Ursache dieses **Dopplereffekts** liegt in der Relativbewegung der Schallquelle gegenüber Luft und Hörer. Fährt die Quelle auf einen zu, so treffen die Druckmaxima das Ohr in rascherer Folge, als sie vom Horn ausgesandt werden, denn der Schallweg wird immer kürzer. Folge: Man hört einen zu hohen Ton. Das Umgekehrte tritt ein, wenn sich die Schallquelle fortbewegt (■ Abb. 4.22). Näherungsweise ist die Frequenzänderung  $\Delta f$  proportional zur Frequenz  $f_0$  der Schallquelle und zur Relativgeschwindigkeit  $\Delta v$  zwischen Quelle und Empfänger:

$$\Delta f = f_0 \frac{\Delta v}{c}.$$

$c$  ist hier die Schallgeschwindigkeit.



■ **Abb. 4.22. Dopplereffekt.** Wenn sich die Schallquelle auf den Beobachter  $B$  zubewegt, registriert dieser eine erhöhte Schallfrequenz

### Klinik

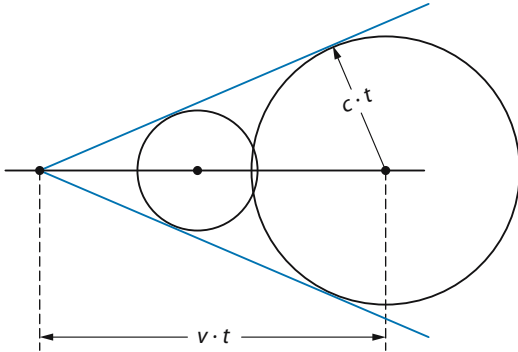
🔗 **Dopplerultraschalldiagnostik.** Auch der Dopplereffekt wird zur medizinischen Diagnose benutzt, zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit des Blutes in Adern nämlich. Blut emittiert von sich aus zwar keinen Ultraschall, und die zahllosen Zellen, die in ihm herumschwimmen, sind viel zu klein für eine sonographische Ortung, aber sie streuen den Schall ähnlich diffus wie die Schwebeteilchen in diesiger Luft das Sonnenlicht. Als Streuzentren werden die Zellen zu unselbständigen **Sekundärstrahlern**. Weil sie so viele sind, alle von der gleichen Welle angeregt werden und mit gleicher Geschwindigkeit in gleicher Richtung nebeneinander herlaufen, geben sie zusammen eine beobachtbare, dopplerverschobene Schallwelle ab.

### Merke

Als Dopplereffekt bezeichnet man die Frequenzverschiebung  $\Delta f$ , die eine Relativgeschwindigkeit zwischen Wellenquelle und Wellenempfänger erzeugt:

$$\Delta f = f_0 \frac{\Delta v}{c}$$

Wer mit mehr als Schallgeschwindigkeit durch die Luft fliegt, kann nach vorn keinen Schall mehr abstrahlen. Dafür erzeugt er einen Druckstoß, den er als kegelförmig sich ausbreitende **Kopfwelle** hinter sich her zieht (■ Abb. 4.23). Eine plötzliche Druckänderung empfindet das Ohr als Knall. Überschallflugzeuge lösen mit ihrer Kopfwelle ei-



■ **Abb. 4.23.** Kopfwelle eines mit der Geschwindigkeit  $v$  nach links fliegenden Überschallflugzeuges ( $c$  = Schallgeschwindigkeit). Die Kopfwelle ist die einhüllende der vom Flugzeug ständig ausgesandten Kugelwellen

nen zumindest lästigen Überschallknall aus, und zwar nicht *in* dem Moment, in dem sie die Schallgeschwindigkeit überschreiten („die Schallmauer durchbrechen“), sondern *von da ab*. Sie ziehen eine Knallschleppe hinter sich her, solange sie schneller sind als der Schall.

#### Rechenbeispiel 4.4: Echolot

► **Aufgabe.** Delphine benutzen Schallwellen, um ihre Beute zu lokalisieren. Ein 10 cm großes Objekt kann er so auf 100 m Entfernung wahrnehmen. Wie lange war eine Schallwelle zum Objekt und zurück dann unterwegs?

► **Lösung.** Die Schallgeschwindigkeit im Wasser beträgt etwa 1500 m/s. Für 200 m braucht ein Schallpuls also etwa 0,13 Sekunden. Ein modernes Ultraschalldiagnosegerät kann aus dieser Laufzeit die genaue Distanz des Objekts und aus einer eventuellen Frequenzverschiebung aufgrund des Dopplereffektes auch noch die Geschwindigkeit des Objekts in Sichtrichtung bestimmen.

#### Rechenbeispiel 4.5: Erdbebenstärke

► **Aufgabe.** Die Intensität einer Erdbebenwelle 100 km von der Quelle entfernt sei

$$I_1 = 1,0 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2.$$

Wie hoch ist sie 400 km von der Quelle entfernt?

► **Lösung.** Die Intensität sinkt mit eins durch Abstand ins Quadrat, also:

$$I_2 = \left( \frac{100 \text{ km}}{400 \text{ km}} \right)^2 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2 = 6,2 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2$$

#### Rechenbeispiel 4.6: Dopplerverschiebung

► **Aufgabe.** Die Beute bewege sich mit 3 m/s auf unseren Delphin zu. Welche Frequenzverschiebung ergibt das im reflektierten Signal, wenn die Schallwelle eine Frequenz von 5000 Hz hat?

► **Lösung.** Tatsächlich gibt es hier zwei Dopplerverschiebungen: An der Beute hat die Welle eine höhere Frequenz, da die Beute sich auf die Quelle zu bewegt. Die Beute reflektiert die Welle auch mit dieser höheren Frequenz. Sie ist dann selbst wieder eine bewegte Quelle, deren Signal am Ort des Delphins frequenzerhöht wahrgenommen wird. Also bekommen wir:

$$\Delta f = 2 \cdot f_0 \cdot \frac{3 \text{ m/s}}{1480 \text{ m/s}} = 20,3 \text{ Hz}.$$

In Kürze		
	Formel	Größe [Einheit]
Harmonische Schwingungen		
Harmonische Schwingungen	$x(t) = A_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ $= A_0 \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$ $= A_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ <p>Tritt bei der Schwingung ein Energieverlust ein, so liegt eine gedämpfte Schwin- gung vor (Abb. 4.4)</p>	$A_0$ : Amplitude [m] $f$ : Frequenz [Hz (Hertz)] $T = 1/f$ : Schwingungsdauer, Periodendauer [s] $\omega = 2\pi \cdot f$ : Kreisfrequenz [1/s]
Harmonische Wellen (Schall, Licht)		
Phasengeschwindigkeit	$c = \lambda \cdot f$	$c$ : Phasengeschwindigkeit $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ $\lambda$ : Wellenlänge [m] $f$ : Frequenz [Hz]
Polarisation	<i>Transversal</i> – Auslenkung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle <i>Longitudinal</i> – Auslenkung parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle	
Intensität	Intensität $I$ einer Welle: Energiestromdichte $\left[\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}\right]$	
Schall		
Schallpegel	Für die Schallausbreitung gilt weitgehend das Gleiche wie in der Optik für Licht (Brechungsgesetz, Reflexionsgesetz). Aber: Schall ist eine longitudinale Welle. $L = 10 \cdot \lg \frac{I}{\text{Bezugsintensität}}$	$L$ : Schallpegel [dB (SPL)] $I$ : Intensität $\left[\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}\right]$
Lautstärke	Mit der Ohrempfindlichkeit gewichteter Schallpegel	[Phon]
Pegelmaß (Dezibel)	Eine Intensitätserhöhung um den Faktor 100 entspricht einer Erhöhung des Pegels um 20 Dezibel (dB).	
Abstandsgesetz	$I \sim \frac{1}{r^2}$ <p>Startet eine Welle von einer punktförmigen Quelle, so vermindert sich ihre Intensität mit dem Quadrat des Abstandes</p>	$I$ : Intensität $\left[\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}}\right]$ $r$ : Abstand [m]
Dopplereffekt	Bewegen sich Quelle und Empfänger aufeinander zu, so erhöht sich die Frequenz beim Empfänger, entfernen sich beide voneinander, so erniedrigt sich die Frequenz.	

## Übungsfragen

(• leicht; •• mittel; ••• schwer)

### Schwingungen

- 1. Die Amplitude einer ungedämpften harmonischen Schwingung betrage 5 cm, die Schwingungsdauer 4 s und der Phasenwinkel  $\pi/4$ . Welchen Wert besitzt die Auslenkung und die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t = 0$ . Welche maximale Beschleunigung tritt auf?
- 2. Als Sekundenpendel bezeichnet man ein Fadenpendel, das genau eine Sekunde braucht, um von einem Umkehrpunkt zum anderen zu kommen. Wie groß ist seine Pendellänge?
- 3. Eine kleine Fliege (0,15 g) wird in einem Spinnennetz gefangen. Dort schwingt sie mit etwa 4 Hz. Wie groß ist die effektive Federkonstante des Netzes? Mit welcher Frequenz würde ein Insekt mit einer Masse von 0,5 g schwingen?
- 4. Zwei Federpendel haben gleiche Masse und schwingen mit der gleichen Frequenz. Wenn eines die 10fache Schwingungsenergie des anderen hat, wie verhalten sich dann ihre Amplituden?

### Wellen

- 5. Die Schallquellen der Ultraschallgeräte beim Arzt arbeiten meist bei Frequenzen in der Größenordnung 1 MHz. Wie groß ist die zugehörige Wellenlänge im Gewebe? [Zur Abschätzung darf die Schallgeschwindigkeit im Gewebe der des Wassers (ca. 1500 m/s) gleichgesetzt werden]. Nur Objekte, die größer sind als die Wellenlänge, können von einer Welle gut wahrgenommen werden.
- 6. Warum muss bei einer Ultraschalluntersuchung Gel zwischen Ultraschallkopf und Körper geschmiert werden?
- 7. Für ein Taschenlampenbirnchen wird in 10 cm Abstand eine Lichtintensität von  $1 \text{ W/m}^2$  gemessen. Wie groß ist die Intensität in 20 cm Abstand?
- 8. Wenn jeder der 65 Sänger eines Chores für sich allein den Chorleiter mit 65 Phon „beschallt“, mit welcher Lautstärke hört der Chorleiter den ganzen Chor?
- 9. Was ergibt  $0 \text{ dB} + 0 \text{ dB}$ ?
- 10. Sie gehen mit einer Tasse Kaffee (Durchmesser der Tasse: 8 cm) die Treppe hinauf und machen dabei in jeder Sekunde einen Schritt. Der Kaffee schaukelt sich in der Tasse auf und nach ein paar Schritten kleckert er Ihnen auf die Schuhe. Welche Geschwindigkeit haben die Oberflächenwellen auf Ihrem Kaffee?
- 11. Sie stehen zwischen zwei Musikern, die beide den Kammerton A spielen. Einer spielt ihn richtig mit 440 Hz, einer falsch mit 444 Hz. Mit welcher Geschwindigkeit müssen Sie sich auf welchen Musiker zu bewegen, um beide Töne mit gleicher Tonhöhe zu hören?

# Wärmelehre

## 5.1 Temperatur – 122

- 5.1.1 Temperaturmessung – 122
- 5.1.2 Ausdehnungskoeffizienten – 124
- 5.1.3 Das ideale Gas – 125
- 5.1.4 Partialdruck – 127

## 5.2 Thermische Bewegung – 127

- 5.2.1 Wärme – 127
- 5.2.2 Molekularbewegung – 130
- 5.2.3 Wärmeleitung – 132
- 5.2.4 Diffusion – 133
- 5.2.5 Osmose – 135

## 5.3 Phasenumwandlungen – 137

- 5.3.1 Umwandlungswärmen – 137
- 5.3.2 Schmelzwärme – 138
- 5.3.3 Lösungs- und Solvatationswärme – 139
- 5.3.4 Verdampfung – 140
- 5.3.5 Dampfdruck und Dampfdichte – 141
- 5.3.6 Luftfeuchtigkeit – 142
- 5.3.7 Verdampfungsenthalpie – 143
- 5.3.8 Zustandsdiagramme – 144
- 5.3.9 Absorption und Adsorption – 146

## 5.4 Wärmehaushalt des Menschen – 147

- 5.4.1 Konvektion – 147
- 5.4.2 Temperaturstrahlung – 149
- 5.4.3 Transpiration – 151

## 5.5 Wärmenutzung – 151

- 5.5.1 Die Sonderstellung der Energieform „Wärme“ – 151
- 5.5.2 Zum Wärmehaushalt der Erde – 153

## ➤ ➤ Einleitung

Wärme ist eine Form der Energie. Wird sie einem Körper zugeführt, so erhöht er normalerweise seine Temperatur. Lediglich bei Phasenumwandlungen, insbesondere beim Wechsel des Aggregatzustandes, wird Energie ohne Temperaturänderung als latente Wärme aufgenommen oder abgegeben. Als Warmblüter muss der Mensch seine Körpertemperatur konstant halten, d. h. für einen ausgeglichenen Wärmehaushalt seines Organismus sorgen. Aber auch der Wärmehaushalt der Erde darf vom Menschen nicht ernsthaft gestört werden, weil sonst klimatische Veränderungen mit unabhsehbaren Folgen eintröten. Energie anderer Form kann immer leicht in Wärme umgewandelt werden, umgekehrt ist das viel schwieriger. Deshalb produzieren Kraftwerke so viel Abwärme.

## 5.1 Temperatur

### 5.1.1 Temperaturmessung

Als Warmblüter muss der Mensch seine Körpertemperatur recht genau konstant halten. Aber was ist das eigentlich: **Temperatur**?

Das Système International d'Unités ernennt die Temperatur zur Grundgröße und weist ihr die nicht sehr bekannte Einheit **Kelvin** (K) zu. Im Alltag messen die Angelsachsen in **Grad Fahrenheit** (°F) und der Rest der Welt in **Grad Celsius** (°C). Die Frage ist damit nicht beantwortet.

Die Atome und Moleküle, aus denen alles zusammengesetzt ist, halten nicht still, sondern führen eine ständige Wimmel- und Zitterbewegung aus. In dieser Bewegung ist kinetische Energie gespeichert. Die Temperatur ist ein Maß für diese kinetische Energie der Atome und Moleküle.

#### Merke

Die Temperatur ist ein Maß für die thermische Wimmelbewegung.

■ Abschnitt 5.2.2 geht noch genauer auf diese Bewegung ein. Wie misst man nun die Temperatur?

Die meisten Eigenschaften der meisten Substanzen hängen ein wenig von der Temperatur ab und können deshalb grundsätzlich zu deren Mes-

sung herangezogen werden. Ein bewährter Effekt ist die **thermische Ausdehnung**: Von ganz wenigen Ausnahmen abgesehen, nimmt die Dichte einer Substanz mit wachsender Temperatur ab, ihr spezifisches Volumen also zu. Der Effekt ist gering; man muss schon einen Glaskolben mit angeschmolzener Kapillare bis zum Rand mit einer Thermometerflüssigkeit (z. B. Quecksilber) füllen, in die allein sie sich thermisch ausdehnen kann. Der kleine Kapillarquerschnitt  $A$  übersetzt eine geringe Volumenausdehnung  $\Delta V$  in eine relativ große Längenänderung  $\Delta l = \Delta V/A$  des Flüssigkeitsfadens. Damit man ihn besser sehen kann, bekommt das Kapillargefäß oft die Form einer als Lupe wirkenden Zylinderlinse. Wichtig ist dabei natürlich, dass die thermische Ausdehnung normaler Flüssigkeiten größer ist als die der Gläser. Fieberthermometer älterer Bauart (■ Abb. 5.1) funktionieren so.

#### Merke

Thermische Ausdehnung: Mit steigender Temperatur nimmt die Dichte einer Substanz ab und das spezifische Volumen zu.

Moderne elektronische Fieberthermometer nutzen einen anderen Effekt zur Temperaturmes-



■ Abb. 5.1. Fieberthermometer

sung. Bei fast allen leitfähigen Materialien steigt mit der Temperatur der elektrische Widerstand (► Kap. 6.4.2), und zwar oft genau proportional zur Temperatur. Der Vorteil ist, dass der elektrische Widerstand leicht elektronisch erfasst und das Thermometer so mit Mikroprozessorintelligenz ausgestattet werden kann. Ein modernes Fieberthermometer piept, wenn es fertig gemessen hat.

Wer ein Thermometer benutzt, verlässt sich darauf, dass es die Temperatur seiner Umgebung annimmt, denn die soll schließlich gemessen werden. Etwas Zeit kostet dieser Temperaturengleich; ein Fieberthermometer braucht üblicherweise etwa zwei Minuten dazu. Aber *dass* der Ausgleich erfolgt, gehört zum Wesen der Temperatur.

#### Merke

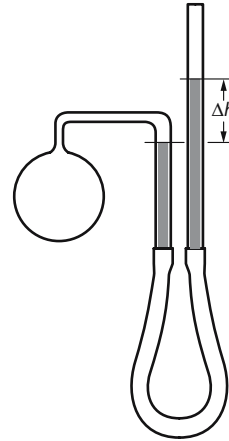
Zwei Körper, die in thermischem Kontakt stehen, gleichen ihre Temperaturen an.

Die Celsius-Skala hält sich an zwei Fixpunkten fest: Unter dem normalen Luftdruck von 1013 hPa erstarrt reines Wasser bei 0 °C und siedet bei 100 °C. Der Bereich dazwischen wird in einhundert „gleiche“ Teile geteilt, mit diesen werden die außen liegenden Bereiche aufgefüllt.

#### Merke

Fixpunkte der Celsius-Skala:  
Gefrierpunkt des Wassers (Eispunkt): 0 °C  
Siedepunkt des Wassers: 100 °C  
(beide bei 1013 hPa Luftdruck)

In begrenzten Bereichen lässt sich die thermodynamische Temperaturskala recht gut mit einem Gas als Thermometersubstanz reproduzieren. Das Gesetz von Boyle-Mariotte (► Kap. 3.3.6) bietet dazu zwei Möglichkeiten: Entweder misst man in Abhängigkeit von der Temperatur das Volumen einer Gasmenge bei konstantem Druck oder den Druck bei konstantem Volumen. Das Gasthermometer der ► Abb. 5.2 geht den zweiten Weg. Eine gasgefüllte Glaskugel geht in eine Kapillare über, die in einem Flüssigkeitsmanometer endet. Dessen rechter Schenkel ist über einen Gum-



► Abb. 5.2. Gasthermometer (Einzelheiten im Text)

mischlauch angeschlossen, sodass man ihn heben und senken kann. Dadurch lässt sich der linke Meniskus auf eine feste Marke bringen und das Gasvolumen auf einem festen Wert halten. Messreihen ergeben, dass die Art des Gases keine Rolle spielt, solange man sich an „vernünftige“ Gase wie Wasserstoff, Stickstoff, Sauerstoff oder Helium hält. Verbindet man die bei 0 °C und 100 °C gemessenen Drücke mit einer Geraden und extrapoliert sie zu tiefen Temperaturen, so schneiden sie die Abszisse bei −273,15 °C (► Abb. 5.3). Dort liegt der **absolute Nullpunkt der Temperatur**, bei dem die Wimmelbewegung der Atome erstickt. Kälter geht es nicht und dieser Nullpunkt kann grundsätzlich nicht unterschritten werden. Von ihm aus zählt die Kelvin-Skala. Ihre Teilstriche haben den gleichen Abstand wie die der Celsius-Skala: Die Differenz der beiden Fixpunkte beträgt nicht nur 100 °C, sondern auch 100 K. Beide Skalen sind um 273,15 Einheiten gegeneinander versetzt. Das macht die Umrechnung einfach: Die Maßzahl der Kelvin-Skala ist um 273,15 größer als die der Celsius-Skala:

$$\{T_K\} = \{T_C\} + 273,15.$$

Korrekt lässt sich dieser Zusammenhang nur als Zahlenwertgleichung schreiben. Zuweilen liest man freilich auch

$$T = 273 + t$$



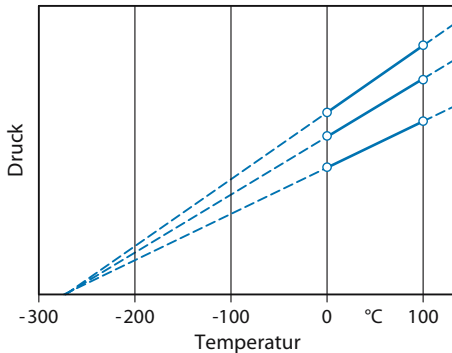


Abb. 5.3. Messungen mit dem Gasthermometer. Die verschiedenen Geraden gehören zu verschiedenen Gasmengen (Einzelheiten im Text)

mit der Anmerkung,  $T$  sei die „absolute Temperatur“ und  $t$  die „Celsius-Temperatur“. Wer Bescheid weiß, kann sich das leisten. Tatsächlich gibt es aber nur eine einzige Temperatur und die ist, wie jede andere messbare Größe auch, unabhängig von der Maßeinheit.

#### Merke

Die Kelvin-Skala zählt vom absoluten Nullpunkt der Temperatur aus. Man erhält ihre Maßzahl, indem man die der Celsius-Skala um 273,15 erhöht.

Weil der absolute Nullpunkt nicht unterschritten werden kann, gibt es keine negativen Temperaturen, wohl aber eine negative Maßzahl in der Celsius-Skala, die ihren eigenen Nullpunkt willkürlich auf 273,15 K legt. Die Fahrenheit-Skala versuchte um 1700 herum, negative Vorzeichen zu vermeiden; aber damals wusste man noch nicht, wie kalt es grundsätzlich werden kann. Darum ist es nur für den Wetterbericht einigermaßen gelungen: 0 °F entsprechen -18 °C und 100 °F ungefähr der Körpertemperatur des Menschen:

$$\{T_F\} = 1,8 \cdot \{T_C\} + 32.$$

Einen gewissen Überblick über die Temperaturskalen geben die folgenden Werte (unter Verzicht auf Stellen hinter dem Komma):

- Absoluter Nullpunkt: 0 K = -273 °C = -460 °F;
- Eispunkt: 273 K = 0 °C = 32 °F;

- Körpertemperatur des Menschen: 310 K = 37 °C = 99 °F;
- Siedepunkt des Wassers (1013 hPa): 373 K = 100 °C = 212 °F.

Der Einsatz von Flüssigkeitsthermometern ist begrenzt auf den Bereich zwischen Schmelzpunkt und Siedepunkt der Thermometersubstanz, zwischen -35 °C und 350 °C beim Quecksilber beispielsweise. Bei elektrischen **Widerstandsthermometern** ist der Einsatzbereich nach unten gar nicht und nach oben durch den Schmelzpunkt des Metalls gegeben (1773 °C bei Platin).

### 5.1.2 Ausdehnungskoeffizienten

Auch Festkörper dehnen sich bei Erwärmung aus; Drähte und Stäbe werden in erster Linie länger. Bei hinreichend kleinen Temperaturänderungen  $\Delta T$  darf man erwarten, dass die Längenänderung  $\Delta l$  sowohl zu  $\Delta T$  wie zur Ausgangslänge  $l_0$  proportional ist:

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T.$$

Die Proportionalitätskonstante  $\alpha$  wird **linearer Ausdehnungskoeffizient** genannt. Er erweist sich, wenn man sehr genau misst, als etwas temperaturabhängig. Bei Metallen liegt er in der Größenordnung  $10^{-5} \text{ K}^{-1}$ . Das ist nicht viel. Trotzdem lässt sich die thermische Ausdehnung der Metalle zur Temperaturmessung verwenden, z. B. dadurch, dass man zwei Bleche mit unterschiedlichem  $\alpha$  aufeinander schweißt. Ein solcher **Bimetallstreifen** krümmt sich bei Erwärmung nach der einen und bei Abkühlung nach der anderen Seite

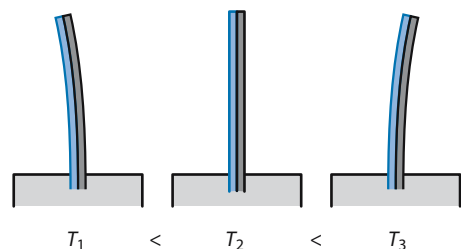


Abb. 5.4. Bimetallstreifen. Er biegt sich bei Änderung der Temperatur wie gezeichnet, wenn sich das linke Metall stärker ausdehnt als das rechte

(▣ Abb. 5.4). Er ist kräftig genug, um einen elektrischen Kontakt zu öffnen oder zu schließen und so beispielsweise die Temperatur eines Bügeleisens oder eines Kühlschranks zu regeln.

Selbstverständlich dehnt sich ein homogener Draht prozentual in seiner Längsrichtung thermisch nicht stärker aus als quer dazu. Mit der Länge nimmt auch das Volumen  $V$  zu:

$$\Delta V = \beta \cdot V_0 \cdot \Delta T;$$

für den **Volumenausdehnungskoeffizienten**  $\beta$  gilt generell:

$$\beta = 3\alpha.$$

Wieso? Für den Sonderfall eines Würfels mit der Kantenlänge  $a$  und dem Volumen  $V = a^3$  lässt es sich leicht zeigen. Bei der Temperaturerhöhung  $\Delta T$  wächst  $V$  auf

$$\begin{aligned} V(1 + \beta \cdot \Delta T) &= a^3(1 + \alpha \cdot \Delta T)^3 \\ &= a^3[1 + 3\alpha \cdot \Delta T + 3(\alpha \cdot \Delta T)^2 \\ &\quad + (\alpha \cdot \Delta T)^3]. \end{aligned}$$

Nun ist aber  $\alpha \cdot \Delta T$  allemal klein gegen die eins. Seine höheren Potenzen sind es erst recht und können nach den Überlegungen zur Fehlerrechnung (► Kap. 1.3) vernachlässigt werden:

$$1 + \beta \cdot \Delta T \sim 1 + 3\alpha \cdot \Delta T.$$

Für Flüssigkeiten kann nur der Volumenausdehnungskoeffizient angegeben werden. Auch er ist klein, liegt aber meist ein bis zwei Zehnerpotenzen über denen der Metalle. Einige Werte finden sich im Anhang.

#### Merke

Thermische Ausdehnung:  
linearer Ausdehnungskoeffizient  $\alpha$ :

$$\Delta l = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T;$$

Volumenausdehnungskoeffizient  $\beta = 3\alpha$ :

$$\Delta V = \beta \cdot V_0 \cdot \Delta T.$$

Generell können Ausdehnungskoeffizienten von der Temperatur abhängen. Wasser zeigt eine markante Anomalie: Es hat seine größte Dichte bei 4 °C. Für Fische kann dies überlebenswichtig sein, denn ein Teich hält an kalten Winterta-

gen auf seinem Grund die 4 °C auch dann noch bei, wenn er oben zufriert: Das kältere Wasser ist „leichter“ und sinkt nicht nach unten. Diese Anomalie hat übrigens nichts damit zu tun, dass Eischollen schwimmen. Die Besonderheit, sich beim Erstarren auszudehnen, ist nicht auf Wasser beschränkt.

#### Merke

Anomalie des Wassers: größte Dichte bei 4 °C.

#### Rechenbeispiel 5.1: Stahlbrücke

► **Aufgabe.** Das freitragende Teil einer Stahlbrücke sei bei 20 °C 200 m lang. Wie viel Längenspiel müssen die Konstrukteure einplanen, wenn die Brücke Temperaturen von -20 °C bis +40 °C ausgesetzt ist? Der Ausdehnungskoeffizient von Eisen beträgt  $12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

► **Lösung.** Da die Kelvin-Skala die gleiche Gradeinteilung hat wie die Celsius-Skala könnte man die Einheit des Ausdehnungskoeffizienten auch in °C<sup>-1</sup> schreiben. Die Schrumpfung der Brücke im kältesten Fall wäre:  $\Delta l = \alpha \cdot 200 \text{ m} \cdot (-20^\circ\text{C}) = -4,8 \text{ cm}$ , die Ausdehnung  $\Delta l = \alpha \cdot 200 \text{ m} \cdot 40^\circ\text{C} = 9,6 \text{ cm}$ . Es muss also insgesamt ein Spielraum von 14,4 cm eingeplant werden.

### 5.1.3 Das ideale Gas

Festkörper und Flüssigkeiten sind praktisch inkompressibel; unter Druck ändern sie Dichte, Volumen und Ausdehnungskoeffizienten fast gar nicht. Anders sieht es bei den Gasen aus. Nach dem **Gesetz von Boyle-Mariotte** (► Kap. 3.3.6) sind ihre Dichten dem Druck proportional, ist das Produkt Druck mal Volumen konstant:

$$p \cdot V = \text{konstant}$$

Das Gasthermometer (► Kap. 5.1.1) postuliert für dieses Produkt eine Proportionalität zur Temperatur  $T$ :

$$p \cdot V \sim T.$$

Nun leuchtet ein, dass die doppelte Menge Wasserstoff auch den doppelten Platz bean-

spricht;  $p \cdot V$  ist auch der Gasmenge proportional. Nimmt man die Masse des eingesperrten Gases als Maß für dessen Menge, so bekommt man für jede Gasart eine andere Proportionalitätskonstante. Rechnet man aber mit der Anzahl  $N$  der eingesperrten Moleküle, so gilt für alle Gase die gleiche Konstante. Sie bekommt den Buchstaben  $k$  oder  $k_B$  und den Namen

**Boltzmann-Konstante**  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ .

Gase, die sich tatsächlich an die hier skizzierten Gesetzmäßigkeiten halten, werden „ideale Gase“ genannt. Für sie gilt die **Zustandsgleichung** der idealen Gase, das Gasgesetz also:

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T.$$

Dahinter steht eine bemerkenswerte Tatsache: Überall dort, wo das Gasgesetz gilt, spielt nur die Anzahl  $N$  der Moleküle eine Rolle, nicht deren Namen, nicht deren chemische Natur.

Man kann das Gasgesetz auch auf die von den  $N$  Molekülen repräsentierte **Stoffmenge**  $n$  beziehen. Dazu muss man, wie in ► Kap. 1.2.1 beschrieben,  $N$  durch die **Avogadro-Konstante**  $N_A$  ( $= 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ ) dividieren, danach aber zum Ausgleich die Boltzmann-Konstante mit  $N_A$  multiplizieren. Dieses Produkt bekommt den Namen

**Allgemeine Gaskonstante**

$$R = N_A \cdot k = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

und gibt dem Gasgesetz die Form

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T.$$

Der Quotient  $V/n$  ist das Molvolumen  $V_n$ . Unter **Normalbedingungen**, d.h. einem Druck  $p = 1013 \text{ hPa}$  und der Temperatur  $T = 0^\circ \text{C}$ , beträgt das Molvolumen eines idealen Gases  $22,4 \text{ l/mol}$ .

#### Merke

Gasgesetz (Zustandsgleichung der idealen Gase)

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T = n \cdot R \cdot T$$

$k = k_B$  = Boltzmann-Konstante  $= 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

$R$  = allgemeine Gaskonstante  $= 8,31 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$

Hat man ein Gas nicht auf Normalbedingungen, so kann man mit dem Gasgesetz leicht auf diese umrechnen, denn es verlangt bei einer abgeschlossenen Gasmenge, dass  $p \cdot V$  proportional zu  $T$ , dass also  $p \cdot V/T$  konstant sein muss. Daraus folgt zum Beispiel für die Umrechnung des Volumens in zwei Zuständen 1 und 2:

$$V_2 = \frac{T_2}{T_1} \frac{p_1}{p_2} V_1$$

#### Rechenbeispiel 5.2: Wie viel Moleküle in einem Atemzug?

► **Aufgabe.** Ungefähr wie viele Moleküle atmet man bei einem 1-Liter-Atemzug ein?

► **Lösung.** Luft unter Normalbedingungen ist in guter Näherung ein ideales Gas. Das Molvolumen ( $6,02 \cdot 10^{23}$  Moleküle) ist als  $22,4 \text{ l}$ . Man atmet also etwa

$$\frac{1 \text{ l}}{22,4 \text{ l}} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 2,7 \cdot 10^{22} \text{ Moleküle ein.}$$

#### Rechenbeispiel 5.3: Reifendruck

► **Aufgabe.** Ein Reifen ist bei  $10^\circ \text{C}$  auf einen Überdruck von  $200 \text{ kPa}$  aufgepumpt. Nachdem das Auto  $100 \text{ km}$  gefahren ist, ist die Reifentemperatur auf  $40^\circ \text{C}$  gestiegen. Welcher Überdruck herrscht nun im Reifen?

► **Lösung.** Das Volumen des Reifens bleibt in etwa konstant. Wir haben also:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

Um diese Formel nutzen zu können, müssen wir zwei Dinge tun: die Temperaturen in absolute Temperaturen umrechnen ( $273 \text{ K}$  addieren) und zum Überdruck den Luftdruck ( $101 \text{ kPa}$ ) addieren, um auf den Gesamtdruck zu kommen. Dann bekommen wir:

$$p_2 = \frac{313 \text{ K}}{283 \text{ K}} \cdot 301 \text{ kPa} = 333 \text{ kPa.}$$

Das entspricht dann wieder einem Überdruck von  $232 \text{ kPa}$ . Das ist ein Anstieg um immerhin  $15\%$ . Deshalb soll man Reifendrucke immer im kalten Zustand messen.

### 5.1.4 Partialdruck

Dass sich Luft im Wesentlichen aus Stickstoff und aus Sauerstoff zusammensetzt, dass diese Elemente zweiatomige Moleküle bilden, die Atome der Edelgase aber für sich allein bleiben, kümmert das Gasgesetz wenig: Ihm sind alle Moleküle gleich und Atome hält es auch für Moleküle. Ihm geht es nur um deren Anzahl  $N$ . Bei einem Gasgemisch aus  $n$  Komponenten darf man deren Molekülanzahlen  $N_1$  bis  $N_n$  darum einfach aufaddieren:

$$p \cdot V = (N_1 + N_2 + \dots + N_n) \cdot kT = kT \cdot \sum_{i=1}^n N_i$$

Auch das Produkt aus Druck  $p$  und Volumen  $V$  auf der linken Seite der Gleichung darf man den Komponenten zuordnen. Dies tut man vor allem für den Druck:

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_n) \cdot V = kT \cdot \sum_{i=1}^n N_i$$

Jeder Molekülsorte steht das gesamte Volumen  $V$  zur Verfügung; also trägt jede Komponente mit dem **Partialdruck**  $p_i$  ihren Anteil zum Gesamtdruck  $p$  bei:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{i=1}^n p_i$$

Definitionsgemäß stehen die Partialdrücke untereinander in den gleichen Verhältnissen wie die Molekülanzahlen:

$$p_1 : p_2 : p_3 = N_1 : N_2 : N_3$$

## 5.2 Thermische Bewegung

### 5.2.1 Wärme

Ein Tauchsieder soll Wasser erwärmen, also dessen Temperatur erhöhen. Dazu holt er elektrische Energie „aus der Steckdose“, setzt sie in **Wärme** um und gibt sie an das Wasser weiter, in dem sie mikroskopisch betrachtet als kinetische Energie in der Wimmelbewegung der Atome gespeichert wird.

#### Merke

Wärme ist die mit der thermischen Molekularbewegung verbundene Energie.  
Temperaturerhöhung erfordert Energiezufuhr.

In leidlicher Näherung ist die erzielte Temperaturerhöhung  $\Delta T$  (zu messen in Kelvin) der zugeführten Wärme  $Q$  (zu messen in Joule) proportional. Die Beziehung

$$Q = C \cdot \Delta T$$

definiert die **Wärmekapazität**  $C$  eines bestimmten festen, flüssigen oder auch gasförmigen „Körpers“. Zu ihr gehört die Einheit J/K. Ein Kaninchen ist kleiner als ein Elefant; für die Wärmekapazitäten der beiden gilt das auch. Bezieht man  $C$  auf die Masse  $m$  des Körpers, so erhält man die

$$\text{spezifische Wärmekapazität } c = \frac{C}{m}$$

$$\text{Einheit: } 1 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}};$$

bezieht man  $C$  auf die Stoffmenge  $n$ , erhält man die

$$\text{molare Wärmekapazität } c_n = \frac{C}{n}$$

$$\text{Einheit: } 1 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}.$$

Die beiden werden zuweilen nicht ganz korrekt, aber kürzer „spezifische Wärme“ und „Molenwärme“ genannt.

#### Merke

##### Wärmekapazität

$$C = Q / \Delta T \quad \text{Einheit: } 1 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

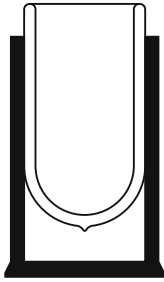
##### spezifische Wärmekapazität

$$c = C / m \quad \text{Einheit: } 1 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

##### molare Wärmekapazität

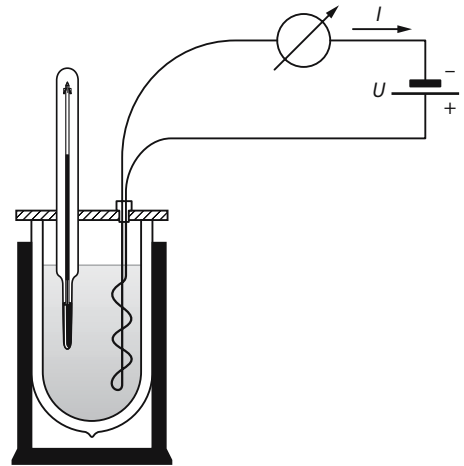
$$c_n = C / n \quad \text{Einheit: } 1 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Wärmemengen bestimmt man im **Kalorimeter**; man misst die Temperaturänderung einer bekannten Wärmekapazität. Favorisierte Kalorimetersubstanz ist das Wasser, in abgemessener



5 **Abb. 5.5. Dewar-Gefäß** (Thermosflasche), doppelwandiges Gefäß mit guter Wärmeisolation. Der Zwischenraum zwischen den beiden Wänden ist evakuiert, um Wärmeverluste durch Wärmeleitung zu reduzieren (► Kap. 5.2.3); die Wände sind verspiegelt, um Wärmeverluste durch Strahlung zu reduzieren (► Kap. 5.4.2). Dewar-Gefäße können „implodieren“ und gehören deshalb in einen stabilen Behälter

Menge eingefüllt in ein Gefäß mit guter Wärmeisolierung. Bewährt haben sich die **Dewar-Gefäße** (spricht: Djuar), doppelwandige Glasflaschen mit evakuierter Wandung (► Abb. 5.5): Als thermische Bewegung von Molekülen ist Wärme an Materie gebunden, Vakuum unterbindet jede Wärmeleitung. Im Haushalt bezeichnet man Dewar-Gefäße als **Thermosflaschen**.



**Abb. 5.6. Versuchsanordnung** zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität des Wassers

In keinem Physikpraktikum für Mediziner fehlt ein Kalorimeterversuch. In der Regel wird die Wärmekapazität einer Substanz bestimmt. Entweder wird elektrisch mit einem Tauchsieder eine bestimmte Wärmemenge zugeführt und die Temperaturerhöhung gemessen. Oder es wird ei-

### Klinik

**Energie zum Leben.** Leben braucht Energie; es setzt Energie um und das nicht nur, wenn man sich bewegt, also mechanische Arbeit produziert. Auch im Schlaf hat der Mensch noch einen **Grundumsatz** von etwa 80 W, also ungefähr 7 MJ/Tag oder auch 1650 kcal/Tag. Er ist erforderlich, um lebenswichtige Funktionen wie Atmung und Herzschlag, aber auch um die Körpertemperatur aufrechtzuerhalten. Der Mensch besitzt ferner eine Wärmekapazität; da er im Wesentlichen aus Wasser besteht, darf man bei 70 kg Körpermasse getrost schreiben:

$$C(\text{Mensch}) \sim 70 \text{ kcal/K} \sim 0,3 \text{ MJ/K}.$$

Das heißt nun wieder: Könnte man einen Menschen völlig wärmeisolieren, so würde ihn sein Grundumsatz mit einer Geschwindigkeit von etwa 1 K/h aufheizen. Viel schneller kann Fieber aus rein wärmetechnischen Gründen nicht steigen.

Mensch und Tier beziehen die zum Leben notwendige Energie aus der Nahrung, also aus komplizierten organischen Molekülen. Diese bestehen aber im Wesentlichen aus Atomen des Kohlenstoffs (C) und des Wasserstoffs (H). Letzten Endes werden sie in Kohlendioxid ( $\text{CO}_2$ ) und in Wasser ( $\text{H}_2\text{O}$ ) übergeführt, d. h. mit Sauerstoff (O) aus der Atmung oxidiert. Der Weg der chemischen Umsetzung ist kompliziert und läuft in vielen Einzelschritten ab; zu jedem gehört eine Energieumwandlung. Schließlich und endlich wird aber immer Wärme daraus, und zwar insgesamt genau so viel wie bei schlichter Verbrennung in der Retorte; auf den Energiesatz ist Verlass. Deshalb kann man ganz unabhängig von einem lebenden Organismus den **Brennwert** von Nahrungsmitteln im Laboratorium messen, den Betrag der chemischen Energie also, die bei der Oxydation z. B. eines Pfeffersteaks frei wird; Beispiele: 2300 kJ bei 100 g Schokolade, 188 kJ bei 100 g Bier.


## Praktikum

## Kalorimeter

Es geht darum, die Energiemenge zu ermitteln, die benötigt wird, um eine feste oder flüssige Probe um eine gewisse Temperaturdifferenz zu erwärmen, also um die Bestimmung einer Wärmekapazität.

Für alle Messungen braucht man ein gut gegen Wärmeaustausch isoliertes Gefäß, ein **Kalorimeter**. Auch bei guter Isolation hat das Kalorimeter (+ Thermometer + Rührer) selbst eine bestimmte Wärmekapazität  $C_W$ , die bei der Rechnung berücksichtigt werden muss. (Man nennt  $C_W$  auch **Wasserwert**: Wenn man in Kalorien (statt Joule) pro Kelvin rechnet (was man aber nicht mehr tut), gibt der Wasserwert an, wie vielen Gramm Wasser das Kalorimeter entspricht.)

Es gibt dann zwei Messmethoden:

1. Man führt einer Flüssigkeit (Masse  $m_{\text{Fl}}$ ) mittels eines Tauchsieders (elektrischen Widerstandes) eine bestimmte elektrische Energie zu wie in  Abb. 5.6 dargestellt.

Legt man für die Zeitspanne  $\Delta t$  eine elektrische Spannung  $U_0$  an den Tauchsieder, so fließt der Strom  $I_0$  und setzt (wie in ► Kap. 6.1.2 erläutert werden wird) die elektrische Energie

$$W = U_0 \cdot I_0 \cdot \Delta t$$

in die Wärmemenge  $Q$  um. Diese heizt die Flüssigkeit entsprechend ihrer spezifischen Wärmekapazität  $c_{\text{Fl}}$  bis zur Endtemperatur  $T_1$  auf:

$$\Delta Q = m_{\text{Fl}} \cdot c_{\text{Fl}} \cdot (T_1 - T_0).$$

Allerdings hat das Kalorimeter selbst (Gefäß + Thermometer + Heizwendel) auch eine gewisse Wärmekapazität  $C_W$ , die bei genauer Rechnung berücksichtigt werden muss:

$$Q = (m_{\text{Fl}} \cdot c_{\text{Fl}} + C_W) \cdot (T_1 - T_0).$$

Im Rechenbeispiel 5.4 wird das am Beispiel des Wassers durchgerechnet.

2. Ermittlung einer Mischtemperatur  
Ist die spezifische Wärmekapazität des Wassers, nämlich

$$c(\text{H}_2\text{O}) = 4,18 \text{ J/(g} \cdot \text{K)},$$

bekannt, so können die Wärmekapazitäten anderer Substanzen nach folgendem Schema ausgemessen werden: Man hängt z. B. einen Kupferring (Masse  $m_K$ ) zunächst in siedendes Wasser (Temperatur  $T_3$ ) und bringt ihn dann in das Kalorimeterwasser; dessen Temperatur steigt dadurch von  $T_1$  auf  $T_2$ . Die dafür notwendige Wärme muss der Ring durch Abkühlung geliefert haben. Der Kupferring liefert also die Wärmemenge:

$$Q_K = m_K \cdot c_K \cdot (T_3 - T_2)$$

Wasser und Kalorimeter erhalten die Wärmemenge:

$$Q_W = (m(\text{H}_2\text{O}) \cdot c(\text{H}_2\text{O}) + C_W) \cdot (T_2 - T_1)$$

Im thermischen Gleichgewicht sind diese beiden Wärmemengen gleich:

$$Q_W = Q_K$$

Das lässt sich dann nach der spezifischen Wärmekapazität von Kupfer  $c_K$  auflösen:

$$c_K = \frac{(c(\text{H}_2\text{O}) \cdot m(\text{H}_2\text{O}) + C_W) \cdot (T_1 - T_2)}{m_K (T_2 - T_3)}.$$

Die Mischtemperatur  $T_2$  berechnet sich gemäß:

$$T_2 = \frac{c_K \cdot m_K \cdot T_3 + (c(\text{H}_2\text{O}) \cdot m(\text{H}_2\text{O}) + C_W) \cdot T_1}{c_K \cdot m_K + c(\text{H}_2\text{O}) \cdot m(\text{H}_2\text{O}) + C_W}.$$

Das Angleichen der Temperatur kann etwas dauern. Verliert das Kalorimeter in dieser Zeit doch etwas Wärme, so muss man den Temperaturverlauf auftragen und extrapolieren.

Rechenbeispiel 5.5 gibt ein Beispiel zum Einsatz dieser Formeln.

Wenn man schon mal ein Kalorimeter und einen Tauchsieder bei der Hand hat, kann man natürlich auch noch die **Schmelzwärme** (► Kap. 5.3.2) zum Beispiel von Wasser messen, in dem man einem Wasser-Eis-Gemisch bei 0 °C so lange Wärmeenergie zuführt, bis das ganze Eis geschmolzen ist.

ne Mischungstemperatur bestimmt. Näheres beschreibt die Praktikumsbox.

Im Zusammenhang mit Wärme und der in Lebensmitteln enthaltenen Energie taucht zuweilen noch eine alte Energieeinheit auf, die dem  $c(\text{H}_2\text{O})$  angepasste Einheit **Kalorie** (cal), definiert zu:

$$1 \text{ cal} = 4,1840 \text{ J}.$$

Sie gehört nicht zu den SI-Einheiten und verschwindet deshalb allmählich von der Bildfläche.

**Rechenbeispiel 5.4: Nachgemessen**

► **Aufgabe.** Wasser wird mit einem Tauchsieder im Dewar-Gefäß aufgewärmt. Im Experiment wurden die folgenden Werte ermittelt:  $m = 200 \text{ g}$ ,  $U_0 = 10 \text{ Volt}$ ,  $I_0 = 4,7 \text{ Ampere}$ ,  $\Delta t = 50 \text{ s}$ ,  $T_1 = 18,3 \text{ }^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 21,1 \text{ }^\circ\text{C}$ . Kommt der Wert für die Wärmekapazität des Wassers  $c(\text{H}_2\text{O})$  tatsächlich wie oben angegeben heraus? Der Wasserwert des Kalorimeters sei vernachlässigbar. Anmerkung: Ein Voltampere entspricht einem Watt.

► **Lösung.** 
$$c(\text{H}_2\text{O}) = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta T} = \frac{U_0 \cdot I_0 \cdot \Delta t}{m(T_2 - T_1)}$$
$$= \frac{47 \text{ W} \cdot 50 \text{ s}}{200 \text{ g} \cdot 2,8 \text{ K}} = 4,2 \frac{\text{J}}{\text{g} \cdot \text{K}}$$

**Rechenbeispiel 5.5: Kalorimeter**

► **Aufgabe.** Eine Probe mit einer Masse von  $m_p = 46 \text{ g}$  und einer Temperatur von  $T_p = 100 \text{ }^\circ\text{C}$  wird in ein Kalorimeter, das  $200 \text{ g}$  Wasser bei  $20 \text{ }^\circ\text{C}$  enthält, geworfen. Der Behälter ist aus Kupfer und hat eine Masse von  $100 \text{ g}$ . Es stellt sich eine Mischtemperatur von  $23,6 \text{ }^\circ\text{C}$  ein. Wie groß ist die spezifische Wärmekapazität  $c_p$  der Probe?

Sie brauchen die spezifischen Wärmekapazitäten von Wasser ( $4,18 \text{ J/gK}$ ) und von Kupfer ( $0,39 \text{ J/gK}$ )

► **Lösung.** Die von der Probe abgegebene Wärmemenge muss gleich der von Wasser und Behälter aufgenommenen Wärmemenge sein, also

$$\begin{aligned} c_p \cdot m_p \cdot (T_p - T_M) &= c_p \cdot 46 \text{ g} \cdot 76,4 \text{ K} \\ &= 200 \text{ g} \cdot 4,18 \text{ J/gK} \cdot 3,6 \text{ K} \\ &+ 100 \text{ g} \cdot 0,39 \text{ J/gK} \cdot 3,6 \text{ K} = 3139 \text{ J} \end{aligned}$$

Nach  $c_p$  auflösen ergibt:

$$c_p = \frac{3139 \text{ J}}{46 \text{ g} \cdot 76,4 \text{ K}} = 0,893 \text{ J/gK.}$$

Das könnte Aluminium sein.

**Rechenbeispiel 5.6: Schlankwerden auf die harte Tour**

► **Aufgabe.** Ein Student isst ein Mittagessen, dessen Brennwert mit  $2000 \text{ Kilokalorien}$  angegeben worden ist. Er will das wieder abarbeiten, indem er eine  $50\text{-kg}$ -Hantel stemmt. Sagen wir, er kann sie  $2 \text{ m}$  hoch heben. Wie oft muss er sie heben, um die  $2000 \text{ kcal}$  wieder los zu werden?

► **Lösung:**  $2000 \text{ kcal} = 8,37 \cdot 10^6 \text{ J}$ . Der Student leistet bei  $N$ -mal Stemmen die Arbeit  $W = N \cdot m \cdot g \cdot h$ .

Also ist:

$$N = \frac{8,37 \cdot 10^6 \text{ J}}{50 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 2 \text{ m}} = 8532.$$

**Rechenbeispiel 5.7: Im Saloon**

► **Aufgabe.** Ein Cowboy schießt mit seiner Pistole eine  $2\text{-g}$ -Bleikugel mit  $200 \text{ m/s}$  in die Holzwand, wo sie stecken bleibt. Angenommen, die freiwerdende Energie bleibt vollständig in der Kugel. Wie heiß wird sie dann? (Wärmekapazität von Blei:  $c(\text{Pb}) = 0,13 \text{ J/g} \cdot \text{K}$ )

► **Lösung.** Die frei werdende Energie ist

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = 40 \text{ J.}$$

Wir bekommen also die Temperaturänderung:

$$\Delta T = \frac{Q}{m \cdot c} = \frac{40 \text{ J}}{2 \text{ g} \cdot 0,13 \text{ J/g} \cdot \text{K}} = 154 \text{ K.}$$

War die Zimmertemperatur  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ , so bedeutet dies  $174 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**5.2.2 Molekularbewegung**

Wo bleibt die Energie, die einem Körper bei Erwärmung zugeführt wird? Verloren gehen kann sie ja nicht. Sie wird in der thermischen Bewegung der Moleküle gespeichert, denn zu jeder Bewegung, ob geordnet oder nicht, gehört zumindest kinetische Energie.

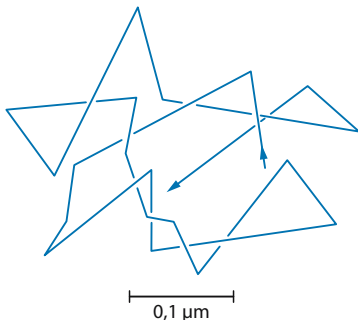
Von der thermischen Bewegung kann man sich durch Augenschein überzeugen. Zwar vermag kein Lichtmikroskop einzelne Moleküle darzustellen, wohl aber die in verdünnter Tinte aufgeschwemmten Pigmentteilchen. Sie sind klein genug, um die Stöße der Wassermoleküle, die von allen Seiten auf sie einrennen, als unregelmäßig zu empfinden, und zittern und torkeln unentwegt hin



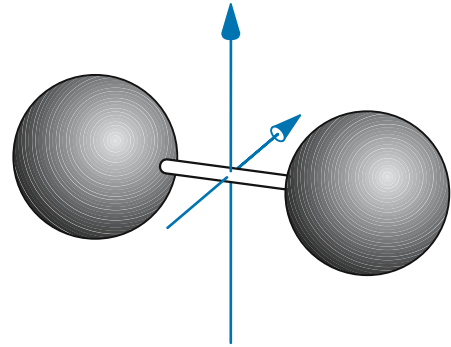
und her (**Brown'sche Molekularbewegung**). Erst gegenüber größeren Flächen mitteln die Stöße zu einer (scheinbar) konstanten Kraft, einem (scheinbar) konstanten Druck.

Die thermische Molekularbewegung hält unentwegt an, sie wird mit steigender Temperatur heftiger und mit sinkender langsamer. Weniger als gar keine Bewegung kann es nicht geben; es leuchtet ein, dass ein absoluter Nullpunkt der Temperatur existiert.

Ein Gasmolekül glaubt die meiste Zeit seines Lebens, es sei allein auf der Welt. Zwar stößt es in Zimmerluft ungefähr jede Nanosekunde mit einem Artgenossen zusammen, aber diese **mittlere freie Flugzeit** ist groß gegen die eigentliche Stoßzeit und die **mittlere freie Wegstrecke** groß gegen den Moleküldurchmesser. ■ Abbildung 5.7 versucht, den Zickzackweg eines Moleküls darzustellen, grobschematisch, weil er gewiss nicht in einer Ebene bleibt. Edelgase gehen keine chemischen Verbindungen ein, auch nicht mit sich selbst; ihre Atome sind zugleich ihre Moleküle. Als kleine Kugeln können sie thermisch nur geradeaus laufen bis zum nächsten Stoß. Die Moleküle einer Flüssigkeit hingegen stehen ständig in „Tuchföhlung“; sie spüren ständig die von ihren Nachbarn ausgehenden, anziehenden Kräfte der Kohäsion. Sie können sich kaum besser bewegen als Autos im Stau. Die Moleküle eines Festkörpers schließlich sind an ihre Gitterplätze gebunden; ihre thermische Bewegung beschränkt sich auf Schwingungen um ihre Ruhelagen.



■ **Abb. 5.7. Bahn eines Stickstoffmoleküls in Zimmerluft.** Bei Zimmertemperatur wäre das Molekül die gezeichnete Strecke in ungefähr 50 ns ( $5 \cdot 10^{-8}$  s) abgelaufen (aber natürlich nicht in der Zeichenebene geblieben)

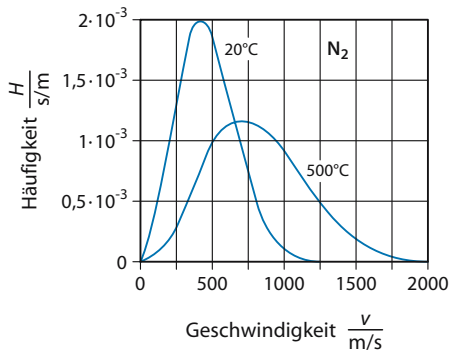


■ **Abb. 5.8. Zweiatomiges, hantelförmiges Molekül.** Es besitzt zwei Achsen, zwei Freiheitsgrade, in denen es Rotationsenergie unterbringen kann

■ ■ ■ Atome können sich geradlinig in die drei Raumrichtungen bewegen. Man sagt: sie haben drei **Freiheitsgrade**. Die zweiatomigen Moleküle des Stickstoffs ( $N_2$ ) bilden dahingegen Hanteln, die auch noch um zwei zueinander senkrechte Achsen rotieren können (■ Abb. 5.8); Drehung um die Hantelachse bringt mangels Trägheitsmoment keine Rotationsenergie unter: zwei zusätzliche Freiheitsgrade, zusammen fünf. Dreiatomige Moleküle besitzen für Achsen in allen drei Raumrichtungen Trägheitsmomente: ein zusätzlicher Freiheitsgrad, zusammen sechs. Komplizierter wird es, wenn ein Molekül auch noch in sich schwingen kann; jede Möglichkeit bringt gleich zwei Freiheitsgrade, einen für die kinetische, einen für die potentielle Energie der Schwingung. Das gilt dann auch für die Schwingungen der Gitterbausteine eines Kristalls: Atome im Kristall haben sechs Freiheitsgrade. Hinzu kommen dann noch die Regeln der Quantenphysik, welche Rotationen und Schwingungen im Einzelfall überhaupt ausgeführt werden dürfen. Wenn aber ein Freiheitsgrad angeregt ist, dann hat er nach dem wichtigen **Gleichverteilungssatz** Anspruch auf eine mittlere thermische Energie  $\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} kT$  für jedes Molekül. Für ein einatomiges Gas bedeutet das eine molare Wärmekapazität  $c_m = \frac{3}{2} R$ , für einfache Kristallgitter wie zum Beispiel in Metallen  $c_m = \frac{6}{2} R$  (Regel von Dulong-Petit).

#### Merke

Die Temperatur ist ein Maß für die Energie der thermischen Wimmelbewegung. Sie ist proportional zur kinetischen Energie in der Schwerpunktbewegung der Moleküle

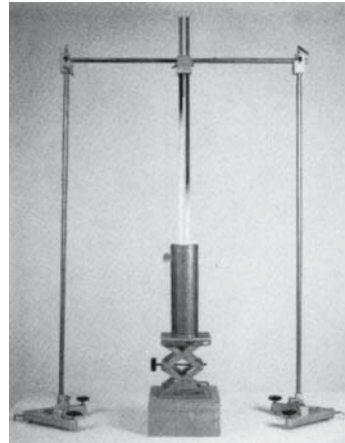


■ **Abb. 5.9. Geschwindigkeitsverteilung von Stickstoffmolekülen** für zwei Temperaturen (Maxwell-Geschwindigkeitsverteilung). Als Ordinate ist die Häufigkeit  $H$  aufgetragen, mit der Moleküle in einem Geschwindigkeitsintervall der Breite  $\Delta v$  zu erwarten sind. Stecken in dem Intervall  $\Delta N$  Moleküle, so haben die an der Gesamtanzahl  $N$  den Anteil  $\Delta N/N$  und die Häufigkeit  $H = \Delta N/(N \cdot \Delta v)$ . Wegen des Geschwindigkeitsintervalls unter dem Bruchstrich kommt der Häufigkeit hier die Einheit  $s/m$  zu

Kein Gasmolekül läuft exakt mit der Geschwindigkeit, die ihm nach dem Gleichverteilungssatz zusteht.  $v_{th}$  ist nur der Mittelwert, um den sich die wirklichen (momentanen) Geschwindigkeiten mehr oder weniger eng gruppieren. Jede Temperatur hat ihre charakteristische Geschwindigkeitsverteilung (Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung, ■ Abb. 5.9).

### 5.2.3 Wärmeleitung

Lange bevor sich ein Gasmolekül in der thermischen Bewegung ernsthaft von seinem Ausgangspunkt entfernt hat, ist es schon mit unzähligen Artgenossen unter Austausch von Energie und Impuls zusammengestoßen. Die Gitterbausteine des Kristalls können thermische Energie sogar weitergeben, ohne ihren Platz zu verlassen. Hängt man einen Metallstab mit seinem unteren Ende in flüssigen Stickstoff, bringt man ihn also dort auf rund 80 K, so kann man verfolgen, wie Raureif am Stab emporklettert, d. h. wie sich der Eispunkt langsam nach oben schiebt, in Kupfer deutlich schneller als in Eisen, denn Cu hat eine höhere **Wärmeleitfähigkeit** (■ Abb. 5.10).



■ **Abb. 5.10. Demonstrationsversuch zur Wärmeleitung.** Ein Kupfer- und ein Eisenstab mit gleichen Abmessungen tauchen gleich tief in flüssigen Stickstoff. Reifbildung markiert den langsam nach oben kriechenden Eispunkt, er kriecht im Kupfer schneller als im Eisen

#### Merke

Wärmeleitung: Wärmetransport ohne Materietransport.

Durch die thermische Bewegung wird eine

*Wärmemenge  $Q$ ,*

gemessen in Joule, fortgeleitet in einem

*Wärmestrom  $I = dQ/dt$  Einheit: 1 Watt,*

er repräsentiert eine Leistung. Ein Wärmestrom braucht, um fließen zu können, eine Querschnittsfläche  $A$ , zu ihm gehört deshalb eine

*Wärmestromdichte  $j_Q = I/A$ , Einheit:  $1 \frac{W}{m^2}$ .*

Ihre Ursache ist eine Temperaturdifferenz  $\Delta T$ , genauer, ein

*Temperaturgradient  $dT/dx$ ,*

gemessen in K/m. In guter Näherung sind Gradient und Wärmestromdichte einander proportional. Daraus ergibt sich die

*Wärmeleitungsgleichung  $j_Q = -\lambda \cdot dT/dx$*

mit der *Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$* . Das negative Vorzeichen berücksichtigt, dass Wärme von heiß

nach kalt fließt, also den Temperaturberg hinunter.  $\lambda$  wird in  $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$  gemessen. Im Allgemeinen hängt die Wärmeleitfähigkeit etwas von der Temperatur ab. Man muss deshalb vorsichtig sein, wenn man den Differentialquotienten der Wärmeleitungsgleichung kurzerhand wie einen Differenzenquotienten behandelt. Oftmals kommt es einem aber gar nicht so genau darauf an.

### Merke

Wärmeleitungsgleichung:

Wärmestromdichte:

$$j_Q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx}$$

mit der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ .

Auch die Elektronen, die im Metall den elektrischen Strom transportieren, nehmen an der Wärmebewegung teil. Gute elektrische Leiter wie Silber und Kupfer sind deshalb auch gute Wärmeleiter; Kochlöffel fertigt man seit alters her aus dem elektrischen Nichtleiter Holz. Gase haben schon wegen ihrer geringen Dichte auch nur geringe Wärmeleitfähigkeit. Vakuum isoliert elektrisch wie thermisch. Das Dewar-Gefäß nutzt das aus.

### Rechenbeispiel 5.8: Wärmeverlust durchs Fenster

► **Aufgabe.** Welcher Wärmeverlust entsteht an einem  $2 \text{ m}^2$  großen Fenster (einglasig, Glasdicke  $3 \text{ mm}$ ), wenn an der Innenseite eine Temperatur von  $15^\circ\text{C}$  und auf der Außenseite eine Temperatur von  $14^\circ\text{C}$  herrscht. Die Wärmeleitfähigkeit von Glas ist etwa  $1 \text{ W}/\text{m} \cdot \text{K}$ .

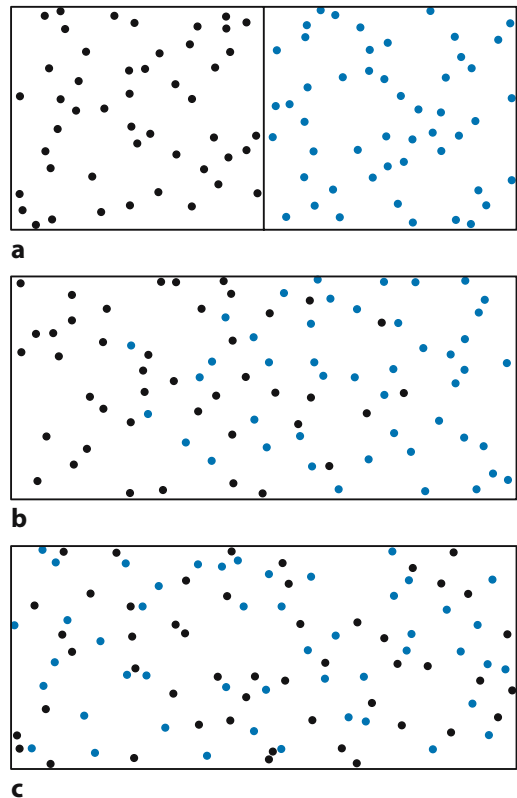
► **Lösung:** Durch die Scheibe wird eine Leistung von

$$P = \frac{1 \text{ W}/\text{mK} \cdot 2 \text{ m}^2}{0,003 \text{ m}} \cdot 1 \text{ K} = 667 \text{ W}$$

transportiert. Da muss ein kräftiger Heizstrahler gegen heizen. Also lieber doppelt verglasen, denn die Luft zwischen den Scheiben hat eine Wärmeleitfähigkeit von nur  $0,023 \text{ W}/\text{mK}$ .

## 5.2.4 Diffusion

Die thermische Bewegung wirbelt die Moleküle eines Gases ständig durcheinander und verteilt sie gleichmäßig im Gelände, auch und vor allem dann, wenn mehrere Molekülsorten gleichzeitig herumschwirren: Sie werden auf die Dauer homogen durchmischt. Im Gedankenversuch kann man ein Gefäß durch eine herausnehmbare Trennwand unterteilen und z. B. auf der linken Seite Sauerstoff, auf der rechten Stickstoff einfüllen, beide Gase unter gleichem Druck (Abb. 5.11a). Entfernt man die Trennwand, so werden im ersten Augenblick nur Sauerstoffmoleküle die alte Grenzfläche von links überqueren, einfach weil rechts keine vorhanden sind. Auch eine Weile spä-



■ Abb. 5.11. Diffusion im molekularen Bild. Im ersten Moment nach Entfernen der Trennwand können die beiden Molekülsorten nur jeweils von einer Seite aus die alte Grenzfläche überschreiten. Erst wenn sich die Konzentrationen ausgeglichen haben, verschwinden auch die Nettoströme der Teilchen

ter werden sie dort noch in der Minderzahl sein und deshalb überwiegend von links nach rechts **diffundieren** (■ Abb. 5.11b). Erst wenn sich die Anzahldichten der beiden Molekülsorten nach längerer Zeit völlig ausgeglichen haben, werden sich auch die Anzahlen der Grenzgänger in beiden Richtungen ausgleichen.

### Merke

Diffusion: Transport von Molekülen durch thermische Bewegung.

5

Letztlich gibt es immer dann Diffusion, wenn ein Konzentrationsgefälle vorliegt, Moleküle an einem Ort häufiger sind als am Nachbarort. Man beschreibt das wie bei einer Temperatur mit einem **Konzentrationsgradienten**  $dc/dx$ . Und entsprechend wie bei der Wärmeleitung ist der Teilchenstrom der Diffusion proportional zu diesem Konzentrationsgradienten. Das **Diffusionsgesetz** formuliert man mit der **Teilchenstromdichte**  $j$ :

$$j = -D \cdot dc/dx$$

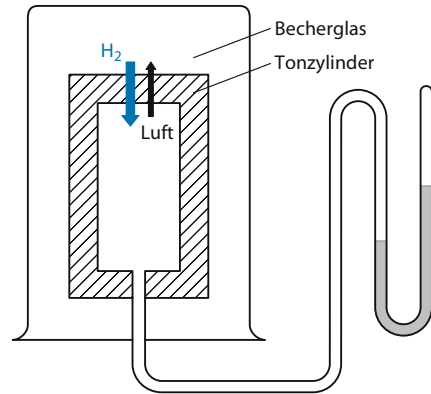
mit dem **Diffusionskoeffizienten**  $D$ . Seine SI-Einheit ist  $m^2/s$ , oft wird er aber in  $cm^2/s$  angegeben.

### Merke

Diffusionsgesetz: Teilchenstrom proportional zum Konzentrationsgradienten

$$j = -D \cdot \frac{dc}{dx}$$

Mit steigender Temperatur wird die thermische Bewegung immer heftiger; kein Wunder, dass mit ihr auch der Diffusionskoeffizient zunimmt. Kleinere Moleküle müssen schneller laufen als große, um ihren Anteil an der thermischen Energie zu übernehmen: Kein Wunder, dass der Diffusionskoeffizient von Wasserstoff größer ist als der von Sauerstoff oder Stickstoff. Dieses Faktum lässt sich sinnfällig demonstrieren; man braucht dazu einen hohlen und porösen Tonzylinder, an den unten ein gläserner Stutzen mit einem Wassermanometer angeschmolzen ist (■ Abb. 5.12). Stülpt man jetzt ein mit gasförmigem Wasserstoff gefülltes Becherglas von oben über den Zylinder, so signalisiert



■ Abb. 5.12. Versuch zur Diffusion von Gasen. Das Becherglas wird von unten mit Wasserstoff gefüllt. Da er schneller in den porösen Tonzylinder diffundiert als Luft hinauskommt, entsteht im Zylinder vorübergehend ein Überdruck


das Manometer Überdruck:  $H_2$  diffundiert schneller in den Zylinder hinein als Luft heraus.

Was den Gasen recht ist, ist den Flüssigkeiten billig und vor allem auch den in ihnen gelösten Stoffen. Deren Moleküle haben aber in ihrer thermischen Bewegung sehr viel kleinere freie Weglängen und darum auch sehr viel kleinere Diffusionskoeffizienten als die Moleküle der Gase. Füllt man einen meterhohen Zylinder zur Hälfte mit Wasser, schichtet man vorsichtig unter sorgsamer Vermeidung von Wirbeln Tinte darüber, lässt man das Ganze ruhig stehen und schaut nach einem Jahr wieder nach, so ist die scharfe Grenzfläche zwar durchaus um einige Zentimeter auseinander gelaufen, aber von einer homogenen Durchmischung kann auch nach 100 Jahren noch nicht die Rede sein. Wer Milch in den Kaffee gießt, trinkt gern ein leidlich homogenes Gemisch. Im Grunde braucht er nur zu warten, die Diffusion wird es schon besorgen. Besser ist es umzurühren, d. h. die Diffusion durch **Konvektion** zu ersetzen.

Die geringe Diffusionsgeschwindigkeit in Flüssigkeiten hat erhebliche Konsequenzen für die Konstruktion von Mensch und Tier. Die von Muskeln und Organen benötigten Nährstoffe können zwar vom Blutkreislauf durch Konvektion „vor Ort“ angeliefert werden, das letzte Stückchen des Weges müssen sie aber durch Diffusion zurücklegen. Dieses Stückchen soll nach Möglichkeit klein sein und die Querschnittsfläche des Dif-

fusionsstromes nach Möglichkeit groß. Darum ist das System der Blutgefäße so unglaublich fein verästelt, darum sind die Lungenbläschen so winzig und so zahlreich.

### Klinik

**Diffusion durch die Zellmembran.** Besondere Bedeutung für lebende Organismen hat die  **Diffusion** durch eine Zellwand, allgemeiner ausgedrückt: durch eine **Membran**. Es kann nicht verwundern, dass hier die Diffusionskoeffizienten noch wesentlich kleiner sind als in der reinen Zellflüssigkeit. Im Grenzfall liegt der Konzentrationsgradient  $c'$  voll über der Zellwand und ist zur Konzentrationsdifferenz  $\Delta c$  zwischen den in sich nahezu homogenen Lösungen auf beiden Seiten der Membran proportional. Das erlaubt, dem Diffusionsgesetz die Form

$$j = -\frac{D}{d} \Delta c = -P \cdot \Delta c$$

zu geben ( $d$  = Membrandicke) und so einen für Membran und diffundierende Substanz zusammen charakteristischen **Permeabilitätskoeffizienten**  $P = D/d$  zu definieren. Man kann ihn messen, ohne  $d$  zu kennen. Eine anständige Membran ist 5 nm dick (**Einheitsmembran**) und hat bei Körpertemperatur für Glukose ein  $P$  von ungefähr 6 mm/s, der Diffusionskoeffizient beträgt  $3 \cdot 10^{-5}$  mm<sup>2</sup>/s.

### Rechenbeispiel 5.9: Hechelndes Insekt?


► **Aufgabe.** Ein Insekt atmet nicht, der Sauerstoff diffundiert hinein. Sauerstoff diffundiert von der Oberfläche eines Insekts durch kleine Röhren, die man Tracheen nennt. Diese sei 2 mm lang und habe eine Querschnittsfläche von  $2 \cdot 10^{-9}$  m<sup>2</sup>. Angenommen, die Sauerstoffkonzentration im Insekt ist halb so groß wie in der Luft, welcher Sauerstofffluss geht durch die Trachea? Die Sauerstoffkonzentration in der Luft ist etwa 8,7 mol/m<sup>3</sup> und die Diffusionskonstante  $D = 10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s.

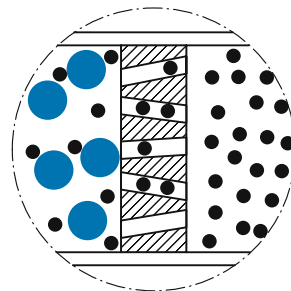
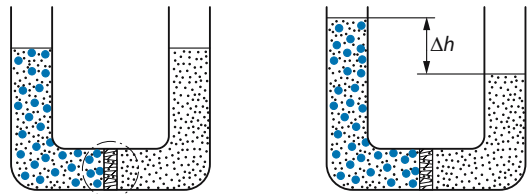
► **Lösung:** Die Sauerstoffflussdichte ist

$$j = D \cdot \frac{\Delta c}{\Delta x} = D \cdot \frac{4,35 \text{ mol/m}^3}{0,002 \text{ m}} = 0,0218 \text{ mol/m}^2.$$

Der gesamte Sauerstofffluss ergibt sich durch Multiplizieren mit der Querschnittsfläche zu  $4,36 \cdot 10^{-11}$  mol.

## 5.2.5 Osmose

Der Teilchenstrom aufgrund von Diffusion kann zu einem Überdruck dort führen, wo er hinfließt. Dies geschieht dann, wenn ein entsprechender Gegenstrom durch eine selektivpermeable Membran, die nur Teilchen einer Sorte hindurchlässt, verhindert wird. In Gasen gibt es so etwas fast nicht. Anderes gilt in Flüssigkeiten. Gerade lebende Organismen setzen in unglaublicher Vielfalt **selektiv-permeable** Membranen ein, Membranen also, die z. B. Wassermoleküle hindurchlassen, gelöste Zuckermoleküle aber nicht (man spricht auch von „semipermeablen“ Membranen; dieser Name ist nicht unbedingt glücklich gewählt worden, denn „semipermeabel“ bedeutet in wörtlicher Übersetzung „halbdurchlässig“). Im einfachsten Fall darf man sich eine solche Membran als ein Sieb mit molekülfeinen Poren vorstellen ( Abb. 5.13): Die gelösten Moleküle sind einfach zu dick, um hindurchzukommen. Spezialisierte Membranen ent-



■ **Abb. 5.13. Osmose.** Einfache Modellvorstellung zur Entstehung des osmotischen Drucks. Die feinen Poren der Membran lassen nur die kleinen Moleküle des Lösungsmittels hindurch, nicht aber die dicken der gelösten Substanz. Demnach kann nur das Lösungsmittel seinem Konzentrationsgefälle folgen und in die Lösung diffundieren und zwar grundsätzlich so lange, bis der dort entstehende Überdruck ( $\approx \Delta h$ ) einen Rückstrom durch die Membran auslöst, der den Diffusionsstrom kompensiert

wickeln allerdings eine Fülle von Fähigkeiten der Selektion, die sich so einfach nicht erklären lassen; manche lebenden Membranen können sogar nicht nur sortieren, sondern auch aktiv pumpen, also von sich aus einen Konzentrationsunterschied auf ihren beiden Seiten aufbauen.

### Merke

Osmose: Diffusion durch eine selektiv-permeable, für verschiedene Moleküle unterschiedlich durchlässige Membran.

Notwendigerweise ist die Anzahldichte der  $\text{H}_2\text{O}$ -Moleküle in einer Zuckerlösung geringer als in destilliertem Wasser. Sind beide Flüssigkeiten durch eine nur für Wasser durchlässige selektiv-permeable Membran getrennt, so diffundiert Wasser durch die Membran hindurch in die Lösung, versucht also, diese zu verdünnen. Dadurch erhöht sich dort der Druck, und zwar grundsätzlich bis zu einem Grenzwert, der **osmotischer Druck** genannt wird.

### Merke

Osmotischer Druck: durch Osmose über einer selektiv-permeablen Membran mögliche (potentielle) Druckdifferenz.

Es kann lange dauern, bis sich dieser Grenzwert  $p_{\text{osm}}$  wirklich einstellt; zudem platzt die Membran nicht selten vorher. Insofern kann man  $p_{\text{osm}}$  als „potentiellen“ Druck bezeichnen, der oft gar nicht erreicht wird. Trotzdem lohnt es sich, nach einer Formel zu suchen, die ihn auszurechnen erlaubt. Dabei zeigt sich überraschenderweise, dass es letztendlich nur auf die Stoffmengendichte  $n/V$  (oder die Anzahldichte  $N/V$ ) der gelösten Moleküle ankommt, nicht auf deren Natur und auf die der Moleküle des Lösungsmittels auch nicht (nur muss die Membran beide Sorten voneinander unterscheiden können). Aus quantitativer Rechnung, die hier nicht vorgeführt werden soll, folgt als gute Näherung die **van't-Hoff-Gleichung**

$$p_{\text{osm}} = \frac{n}{V} R \cdot T$$


Sie liefert den potentiellen osmotischen Druck einer Lösung gegenüber reinem Lösungsmittel. Stehen sich an der Membran zwei Lösungen gegenüber, so kann sich höchstens die Differenz der beiden osmotischen Drücke ausbilden.

### Merke

van't-Hoff-Gleichung für den osmotischen Druck:

$$p_{\text{osm}} = \frac{n}{V} R \cdot T$$

## Klinik

**Leitungswasser ist tödlich.** Lösungsmittel können Fremdmoleküle beträchtlich dichter packen als Gase unter Normalbedingungen; osmotische Drücke sind entsprechend hoch. Lebende Organismen müssen ihrer selektiv-permeablen Membranen wegen auf die Dichten der  **osmotisch wirksamen Teilchen** in ihren verschiedenen Gefäßen achten und der Arzt zuweilen auch. Wollte man einem Unfallpatienten, weil gerade nichts Besseres zur Hand ist, seinen Blutverlust durch Leitungswasser ersetzen, so brächte man ihn auf der Stelle um: Die roten Blutkörperchen sind die Zusammensetzung des Blutplasmas gewohnt, ihr eigener Inhalt hat die entsprechende Konzentration. Kommen sie in reines Wasser, so dringt dies durch ihre Oberflächenmembran ein und bringt sie zum Platzen. Umgekehrt werden sie von einer zu konzentrierten Lösung ausgetrocknet. Bei mikroskopisch kleinen Zellen geht

das schnell. Blutersatzmittel müssen deshalb **isotonisch** zum Blut sein, d. h. die gleiche Stoffmengendichte osmotisch wirksamer Teilchen haben. Für den osmotischen Druck ist es allerdings gleichgültig, welche Moleküle ihn erzeugen, sofern sie die Membran nur nicht durchdringen können. Die Haut der roten Blutkörperchen vermag z. B. die Ionen des Kochsalzes von Wassermolekülen zu unterscheiden. Deshalb kann die berühmte **physiologische Kochsalzlösung** im Notfall als Blutersatz dienen. Wesentlich Neues geschieht, wenn die Membran positive und negative Ionen unterscheiden kann, wenn sie **ionensensitiv** ist, denn dann baut sie statt des osmotischen Drucks eine elektrische Membranspannung. Auch diesen Effekt setzen lebende Organismen virtuos ein, etwa bei der Nervenleitung. Er gehört aber in die Elektrizitätslehre und wird deshalb erst in ► Kap. 6.8.1 behandelt.



■■■ Formal stimmt die van't-Hoff-Gleichung mit dem Gasgesetz überein (► Kap. 5.1.3). Dies kann zu der falschen Deutung verleiten, nur die gelösten Moleküle trommeln auf die für sie undurchdringliche Membran wie Gasmoleküle auf die Gefäßwand, während die Moleküle des Lösungsmittels quasi frei durch die Membran hindurchschlüpfen. Warum sollte dann aber das Lösungsmittel in die Lösung einzudringen und sie zu verdünnen suchen? Das Bild ist falsch.

### Rechenbeispiel 5.10: Kochsalzlösung

► **Aufgabe.** Wie groß ist der osmotische Druck der physiologischen Kochsalzlösung (0,9 Gewichtsprozent NaCl) bei Körpertemperatur? Holen Sie sich die notwendigen Daten für die Molarität (Anzahl der Mole pro Liter) von NaCl aus dem Anhang.

► **Lösung.** Wir wenden die van't-Hoff-Gleichung an:

$$p_{\text{osm}} = \frac{n}{V} \cdot R \cdot T.$$

$R = 8,31 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ ;  $T = 37^\circ\text{C} = 310 \text{ K}$ . Zur Molarität:

Molare Massen:  $M(\text{Na}) = 23,0 \text{ g/mol}$ ;  $M(\text{Cl}) = 35,5 \text{ g/mol}$ ; also  $M(\text{NaCl}) = 58,5 \text{ g/mol}$ .

Die physiologische Kochsalzlösung enthält 0,9 Gewichtsprozent NaCl in  $\text{H}_2\text{O}$ . Da ein Liter Wasser recht genau ein Kilogramm Masse hat, bedeutet das 9 g/Liter Kochsalz. Dann ist die Molarität:

$$\frac{n(\text{NaCl})}{V} = \frac{9 \text{ g/Liter}}{M(\text{NaCl})} = 0,154 \text{ mol/Liter}.$$

Es sind aber beide Ionensorten osmotisch wirksam, was den Wert für die Osmose verdoppelt:

$$\frac{n(\text{Ionen})}{V} = 0,308 \text{ mol/Liter}.$$

Damit folgt:

$$p_{\text{osm}} = 793 \text{ J/Liter} = 7,9 \cdot 10^5 \text{ J/m}^3 = 0,79 \text{ MPa}.$$

Das ist achtmal höher als der Luftdruck. Spült man sich die Nase mit Leitungswasser, bekommt man diesen hohen Druck sehr unangenehm zu spüren. Man nimmt also besser eine **Salzlösung**. Im Körper kompensieren sich die osmotischen Drücke weitgehend.

## 5.3 Phasenumwandlungen

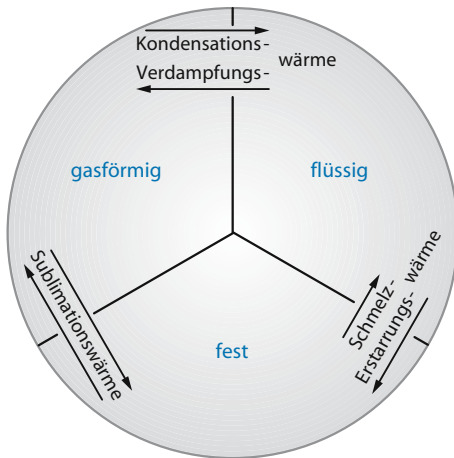
### 5.3.1 Umwandlungswärmen

$\text{H}_2\text{O}$  kommt in der Natur in allen drei Aggregatzuständen vor, als Eis oder Schnee, als Wasser und als Wasserdampf. Dies weiß jeder. Allenfalls muss man erwähnen, dass Wasserdampf ein unsichtbares Gas ist. Wolken und Nebel enthalten bereits flüssiges Wasser, zu kleinen Tröpfchen kondensiert. Schnee kann **schmelzen** (Übergang von fest nach flüssig), Wasser zu Eis **erstarren** (Übergang von flüssig nach fest); Wasser kann **verdampfen** (Übergang von flüssig nach gasförmig) und Wasserdampf kann **kondensieren** (Übergang von gasförmig nach flüssig). Wer gut beobachtet, sieht aber auch, dass Schnee an sonnigen Wintertagen verschwindet, ohne zu schmelzen: Er **sublimiert** (Übergang von fest nach gasförmig). Auch der Übergang in Gegenrichtung wird Sublimation genannt.

Die Alchimisten des Mittelalters waren bitter enttäuscht, als sie bei dem Versuch, viele kleine Diamanten zu einem großen zusammenzuschmelzen, wertlose Krümel von Graphit erhielten. Kohlenstoff kommt ja in diesen beiden Kristallisationsformen vor (► Kap. 3.2.1) und kann grundsätzlich von der einen in die andere übergehen (in die des Diamanten allerdings nur unter extrem hohem Druck). Analoges gilt für viele andere Substanzen auch. Alle diese einer Substanz möglichen Erscheinungsformen bezeichnet man in der Thermodynamik als Phasen. Zwischen ihnen gibt es **Phasenübergänge**; die wichtigsten sind die Wechsel der Aggregatzustände.

Die anziehenden Kräfte zwischen den Molekülen reichen nicht weit. In Gasen spielen sie der großen Molekülabstände wegen nur eine untergeordnete Rolle. Wenn sie als gar nicht vorhanden angesehen werden dürfen, spricht man vom idealen Gas. Moleküle einer Flüssigkeit spüren dagegen die Kräfte der Kohäsion sehr deutlich und bilden ihrerwegen Tropfen. In Festkörpern geben sie den Gitterbausteinen sogar feste Plätze vor, um die sie nur ein wenig schwingen dürfen. Bei der Sublimation werden Moleküle gegen diese Kräfte voneinander getrennt. Das kostet Energie; sie muss als **Sublimationswärme** von außen zugeführt werden. Bei späterer Kondensation zu Wasser und an-





■ Abb. 5.14. Die Aggregatzustände und ihre Umwandlungswärmen

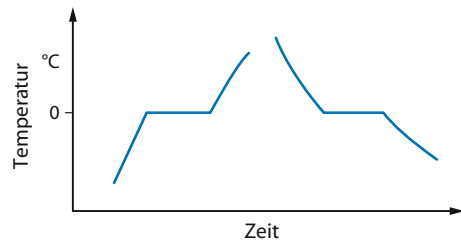
schließender Kristallisation zu Eis wird sie in zwei Schritten wieder frei. **Umwandlungswärmen** treten bei allen Phasenübergängen in der einen oder anderen Richtung auf. ■ Abbildung 5.14 nennt ihre Namen.

#### Merke

Zu Phasenumwandlungen gehören Umwandlungsenergien (■ Abb. 5.14).

### 5.3.2 Schmelzwärme

Wenn man ein kleines Becherglas mit Wasser füllt, ein Thermometer hineinstellt, das Ganze in einer Tiefkühltruhe einfriert und danach herausholt, dann kann man zusehen, wie die Temperatur langsam wieder ansteigt. Zunächst kommt das Thermometer aber nur bis auf  $0^\circ\text{C}$ , bleibt dort längere Zeit stehen und klettert erst weiter, wenn das Eis geschmolzen ist (■ Abb. 5.15, links). Auch während dieses Haltepunktes nimmt das kalte Becherglas ständig Wärme aus der Umgebung auf; es steckt sie aber nicht in die Wärmekapazität seines Inhalts, sondern nutzt sie, Eis zu schmelzen. Die einströmende Wärme wird als **Schmelzwärme** gebraucht und kann darum die Temperatur nicht erhöhen. Das Analoge hätte man auch vorher beim



■ Abb. 5.15. Erwärmungs- und Abkühlungskurve für  $\text{H}_2\text{O}$ . Während des Haltepunktes bleibt die Temperatur konstant, weil Schmelz- bzw. Erstarungswärme den Wärmeaustausch mit der Umgebung decken

Abkühlen beobachten können. Hier gab das Becherglas ständig Wärme an den Kühlschrank ab; zu Beginn und am Ende wurde sie der Wärmekapazität des Wassers entnommen, für die Dauer des Haltepunktes aber von dessen **Erstarungswärme** geliefert (■ Abb. 5.15, rechts). Nur am **Schmelzpunkt** können Kristall und Schmelze nebeneinander existieren: Ein Zehntelgrad mehr und alles ist geschmolzen; ein Zehntelgrad weniger und alles ist erstarrt (im thermodynamischen Gleichgewicht wenigstens). Beim Schmelzen oder Erstarren muss die Umwandlungswärme allerdings von der Umgebung beschafft oder an sie abgegeben werden, und das kostet Zeit. Solange Eisstückchen im Wasser schwimmen, steht die Temperatur zuverlässig auf  $0^\circ\text{C}$  (nahe der Oberfläche wenigstens; am Boden des Teiches können, der Dichteanomalie des Wassers wegen,  $4^\circ\text{C}$  herrschen).

#### Merke

Haltepunkt: Bei gleichmäßiger Zu- oder Abfuhr von Wärme bleibt die Temperatur einer Probe während einer Phasenumwandlung konstant.

Die spezifische Schmelzwärme  $c_s$  des Eises lässt sich leicht im Wasserkalorimeter messen. Man wirft einen mit Filterpapier getrockneten Eiskwürfel (Masse  $m_E$ ) in Wasser (Masse  $m_W$ , spez. Wärmekapazität  $c_W$ , Temperatur  $T_0$ ) und bestimmt die neue Temperatur  $T_1$ , wenn der Würfel gerade geschmolzen ist. Dann ist dem Kalorimeterwasser die Wärmemenge

$$\Delta Q = m_W \cdot c_W (T_0 - T_1)$$

entzogen und dazu verwendet worden, zunächst das Eis zu schmelzen und dann das Schmelzwasser auf  $T_1$  aufzuwärmen:

$$\Delta Q = m_E [c_s + c_W (T_1 - 0^\circ \text{C})].$$

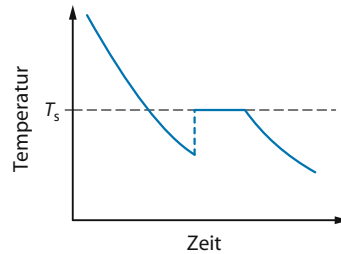
Heraus kommt  $c_s = 333 \text{ kJ/kg}$ . Wasser hat nicht nur eine ungewöhnlich hohe spezifische Wärmekapazität, sondern auch eine ungewöhnlich hohe spezifische Schmelzwärme.

Schmelz- und Erstarrungspunkt liegen bei der gleichen Temperatur  $T_s$ . Aber nicht immer erstarrt eine Schmelze, sobald diese Temperatur von oben her erreicht wird: Viele Substanzen kann man mit etwas Vorsicht **unterkühlen**, d. h. eine Weile deutlich unter dem Erstarrungspunkt flüssig halten. Irgendwann setzt die Kristallisation aber doch einmal ein; dann wird plötzlich viel Erstarrungswärme frei, die Temperatur springt auf  $T_s$  und wartet dort die reguläre Dauer des Haltepunkts ab (Abb. 5.16), sofern die Unterkühlung nicht schon zu weit heruntergeführt hat. Umwandlungen der Aggregatzustände sind so genannte **Keimbildungsprozesse**; sie müssen nicht nur thermodynamisch möglich sein, sie müssen eigens ausgelöst werden, und zwar durch einen Keim, der sich im statistischen Zufall bildet. Meist tut er dies rasch, zuweilen aber auch erst nach Jahrhunderten: Glas, so wie man es normalerweise kennt, ist eine unterkühlte Flüssigkeit. Wenn es doch einmal kristallisiert, „entglast“ es und zerfällt zu Pulver.

#### Merke

Die Erstarrung ist ein Keimbildungsprozess; das macht die Unterkühlung einer Schmelze möglich.

■ ■ ■ Die allermeisten Substanzen dehnen sich beim Schmelzen aus; ihr Kristall hat eine größere Dichte als ihre Flüssigkeit. Ein hoher äußerer Druck bringt darum den festen Aggregatzustand in Vorteil und hebt den Schmelzpunkt ein wenig an. Das ist aber kein Naturgesetz, sondern nur eine Regel. Regeln haben Ausnahmen, und wieder ist die pathologische Substanz  $\text{H}_2\text{O}$  dabei: Eisberge schwimmen, folglich sinkt der Schmelzpunkt unter Druck, zur Freude der Schlittschuhläufer. Sie stehen mit voller Gewichtskraft auf schmaler Kufe. Das bedeutet hohen lokalen Druck und örtlich schmelzendes Eis: Der Schlittschuh gleitet auf einer dünnen



■ **Abb. 5.16. Unterkühlung.** Der Erstarrungspunkt  $T_s$  wird zunächst unterschritten, bis die nach Einsetzen der Erstarrung plötzlich frei werdende Erstarrungswärme  $T$  wieder auf  $T_s$  anhebt

Schicht flüssigen Wassers, die gleich hinter ihm wieder erstarrt.

#### Rechenbeispiel 5.11: Eistee

► **Aufgabe.** Für eine Feier soll Eistee produziert werden. Dazu werden 3 Liter auf  $20^\circ \text{C}$  abgekühlter Tee genommen und ein halbes Kilo  $-10^\circ \text{C}$  kaltes Eis dazugetan. Führt das zu einer erwünschten Temperatur oder gibt es gar Tee-Eis? Neben der Schmelzwärme brauchen wir noch die spezifischen Wärmekapazitäten von

Wasser ( $c_w = 4,18 \text{ J/(g} \cdot \text{K)}$ ) und Eis ( $c_E = 2,1 \text{ J/(g} \cdot \text{K)}$ ).

► **Lösung.** Zunächst wollen wir feststellen, ob der Tee flüssig bleibt. Um den Tee auf  $0^\circ \text{C}$  abzukühlen, müssen wir eine Energie von  $W = m_w \cdot c_w \cdot (20^\circ \text{C} - 0^\circ \text{C}) = 250 \text{ kJ}$  entziehen. Um das Eis auf  $0^\circ \text{C}$  zu erwärmen und dann zu schmelzen, brauchen wir  $W = m_E \cdot c_E \cdot 10^\circ \text{C} + m_E \cdot c_s = 10,5 \text{ kJ} + 167 \text{ kJ} = 177,5 \text{ kJ}$ . Der Tee bleibt also flüssig, denn das Schmelzen des Eises entzieht dem Tee nicht genug Energie. Die resultierende Temperatur  $T$  stellt sich so ein, dass das Aufwärmen des Eises genau so viel Energie benötigt, wie das Abkühlen des Tees bringt:  $177,5 \text{ kJ} + 0,5 \text{ kg} \cdot c_w \cdot T = 3 \text{ kg} \cdot c_w \cdot (20^\circ \text{C} - T)$ . Daraus ergibt sich  $T = 5,1^\circ \text{C}$ . Das ist gut getroffen.

### 5.3.3 Lösungs- und Solvatationswärme

Schmelzen ist nicht die einzige Möglichkeit, ein Kristallgitter kleinzubekommen: In einer passenden Flüssigkeit kann man einen Kristall auch auflösen. Weil dabei Arbeit gegen die Kräfte der Gitter

terbindung geleistet, weil **Gitterenergie** aufgebracht werden muss, liegt die Erwartung nahe, dass sich eine Lösung, nachdem man sie angesetzt hat, zunächst einmal abkühlt.  $\text{KNO}_3$  (Salpeter) in Wasser tut dies tatsächlich. Es kann aber auch anders kommen, denn möglicherweise lagern sich die Moleküle des Lösungsmittels an gelöste Teilchen an und bilden so eine **Solvathülle** (beim Wasser Hydrathülle genannt). In gewissem Sinn entspricht dieser Vorgang einer lokalen Erstarrung des Lösungsmittels, bei der dann Solvatationsenergie frei wird. Dies kann schon bei der Mischung zweier Flüssigkeiten geschehen; Lösen ist im Grunde ja nur eine Sonderform des Mischens. Gießt man Alkohol oder Schwefelsäure in Wasser, so erwärmt sich die Mischung. Die **Lösungswärme**, die sich unmittelbar beobachten lässt, ist die Differenz von freigesetzter Solvatationsenergie und aufzubringender Gitterenergie.

#### Merke

Beim Ansetzen einer Lösung: Abkühlung, wenn Lösungswärme überwiegt; Erwärmung, wenn Solvatationswärme überwiegt.

Auf jeden Fall liegt der Erstarrungspunkt einer Lösung unter dem des reinen Lösungsmittels. Dies nutzt aus, wer Salz streut, statt Schnee zu schippen. Er will eine wässrige Salzlösung erzeugen, deren Gefrierpunkt unter der aktuellen Lufttemperatur liegt und darum flüssig bleibt. Es mag überraschen, soll hier aber ohne weitere Begründung lediglich festgestellt werden: Die **Gefrierpunktserniedrigung**  $\Delta T_s$  hängt nur vom Lösungsmittel und der Anzahldichte  $n$  der gelösten Teilchen ab, nicht aber von deren Art, von der gelösten Substanz also:

$$\Delta T_s \sim n.$$

Statt der Teilchenanzahldichte kann man jede der in ► Kap. 1.2.2 aufgeführten Dichten und Gehalte benutzen.

#### Merke

Die Gefrierpunktserniedrigung ist nahezu proportional zur Stoffmengendichte der gelösten Substanz.

### 5.3.4 Verdampfung

Auch die Moleküle einer Flüssigkeit verteilen ihre thermischen Geschwindigkeiten um einen temperaturbedingten Mittelwert; es gibt schnelle und langsame Teilchen. Zudem werden immer einige oberflächennahe Moleküle versuchen, in den Gasraum auszubrechen; aber nur den schnellsten wird es gelingen, denn an der Oberfläche wirken die zwischenmolekularen Kräfte ja einseitig und halten die langsameren Moleküle fest. Umgekehrt kann aber jedes Molekül aus dem Dampf in die Flüssigkeit zurückkehren, wenn es nur die Oberfläche erreicht.

Aus dieser einfachen Modellvorstellung lassen sich einige Folgerungen herleiten, die experimentell überprüft werden müssen:

- Eine Flüssigkeit kann bei allen Temperaturen **verdampfen**, nicht nur beim **Siedepunkt**. In der Tat trocknet eine regennasse Straße auch bei normaler Lufttemperatur, allerdings umso schneller, je wärmer es ist, in Übereinstimmung mit dem Modell.
- Weil nur die schnellsten Moleküle verdampfen, verbleibt den übrigen im Schnitt immer weniger thermische Energie, sie kühlen sich ab. Diesen Effekt nutzt der Mensch, wenn er schwitzt; sein Hund kann nicht schwitzen und muss darum hechelnd Wasser verdampfen. Das Problem der Verdampfungswärme wird in ► Kap. 5.3.7 behandelt.
- Im thermodynamischen Gleichgewicht treten aus einer Flüssigkeitsoberfläche genauso viele Flüssigkeitsmoleküle aus wie ein. Das setzt voraus, dass die Konzentration der Flüssigkeitsmoleküle in der Luft einen ganz bestimmten Wert hat. Diese Konzentration ist nichts anderes als der Partialdruck des Dampfes im Gleichgewicht. Dieser für das Gleichgewicht charakteristische Partialdruck wird **Dampfdruck** der Flüssigkeit genannt. Er ist für jede Flüssigkeit verschieden und hängt stark von der Temperatur ab (s. nächstes Kapitel). Stehen Flüssigkeit und Dampf nicht miteinander im Gleichgewicht, so **verdampft** entweder die Flüssigkeit oder der Dampf **kondensiert**. Beides kostet Zeit. Schließlich muss die Umwandlungswärme heran- oder abgeführt werden.

- Bei nichtmischbaren Flüssigkeiten in getrennten Schalen können nur arteigene Flüssigkeiten aus dem Dampfraum zurückkehren; artfremde müssen draußen bleiben. Wenn solche Flüssigkeiten in den gleichen Gasraum hineindampfen, addieren sich ihre Dampfpartialdrücke unabhängig voneinander zum Gesamtdruck.
- Übersteigt der Dampfdruck einer Flüssigkeit den äußeren Luftdruck (und den jeweiligen Schweredruck dazu), so können sich Dampfblasen auch innerhalb der Flüssigkeit bilden: sie siedet. Der Siedepunkt hängt deutlich vom Außendruck ab.

### 5.3.5 Dampfdruck und Dampfdichte

Tut man eine Flüssigkeit in einen luftdichten Topf, pumpt schnell die Luft heraus und schließt ihn dann, so verdampft die Flüssigkeit so lange, bis sich ein Gleichgewicht zwischen Dampf und Flüssigkeit eingestellt hat. Dann herrschen über dem Flüssigkeitsspiegel ein gewisser **Dampfdruck** und eine gewisse **Dampfdichte**. Beide hängen stark von der Temperatur ab. Pumpt man am Anfang die Luft gar nicht ab und schließt den Topf einfach so, ändert das für die Flüssigkeit nichts: Sie verdampft auch bei Anwesenheit von Luft so lange, bis sich die gleiche Dampfdichte und der gleiche Dampfdruck einstellt. Der Gesamtdruck im Topf ist dann natürlich höher, denn der Luftdruck kommt noch dazu.

Ihren Dampfdruck sucht eine Flüssigkeit unabhängig vom verfügbaren Volumen einzustellen; sie verdampft eben so lange, bis sie ihr Ziel erreicht hat. Das kann viel Zeit kosten, schließlich muss ja die nötige Verdampfungswärme besorgt werden. In der freien Natur wechselt die Temperatur im Laufe eines Tages schneller als Flüsse, Seen und Wälder mit dem Wasserdampfdruck nachkommen können. Zudem kann bei großem Dampfraum eine Flüssigkeit vollständig verdampfen, ohne den Gleichgewichtsdampfdruck erreicht zu haben.

Dampfdrücke steigen keineswegs linear mit der Temperatur an, sondern sehr viel steiler, nahezu exponentiell nämlich. Eine jede Flüssigkeit be-

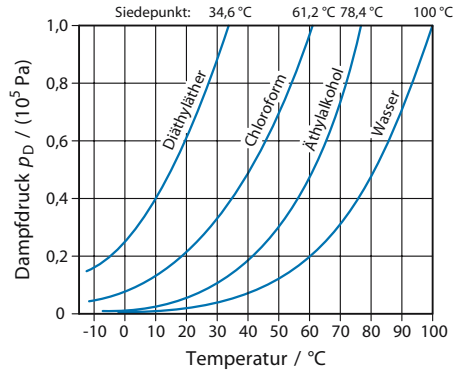


Abb. 5.17. Dampfdruckkurven einiger Flüssigkeiten

sitzt ihre eigene, für sie charakteristische **Dampfdruckkurve**; Abbildung 5.17 zeigt einige Beispiele.

#### Merke

Ein Dampfdruck steigt nahezu exponentiell mit der Temperatur.

Zum Dampfdruck  $p_D$  gehört eine **Dampfdichte**  $\rho_D$ , zu messen beispielsweise in  $\text{g/cm}^3$ . Sie muss gesondert bestimmt werden, denn auf das Gasgesetz kann man sich hier nicht verlassen: Dämpfe im Gleichgewicht mit ihrer Flüssigkeit sind keine idealen Gase. Für die wichtige Substanz Wasser steht eine Tabelle im Anhang.

Eine Flüssigkeit beginnt zu siedend, sobald ihr Dampfdruck den äußeren Luftdruck erreicht. Darum repräsentiert Wasser mit seinem **Siedepunkt** nur beim offiziellen Normaldruck von 1013 hPa den oberen Fixpunkt der Celsius-Skala. Auf der Zugs Spitze, also in 2960 m Höhe, siedet Wasser schon bei 90 °C, zu früh, um in 5 Minuten ein Hühnerei frühstücksweich zu kochen.

Grundsätzlich ist der Dampfdruck als solcher eine Kenngröße der Flüssigkeit; ein wenig hängt er aber auch von Beimengungen ab. Löst man z. B. Zucker in Wasser, so sinkt der Dampfdruck, und der Siedepunkt steigt. Wie beim Gefrierpunkt geht es auch hier nur um die Anzahldichte  $n$  der gelösten Moleküle, nicht um deren Art. Demnach gilt (in guter Näherung)

$$\text{Dampfdruckerniedrigung} \quad \Delta p_D \sim n.$$

Die Proportionalitätskonstante ist im Einzelfall abhängig vom Lösungsmittel und dem aktuellen Dampfdruck.

Bringt man eine Lösung zum Sieden, so dampft im Wesentlichen nur das Lösungsmittel ab; die Lösung wird immer konzentrierter, bis sie sich schließlich übersättigt und der gelöste Stoff auszukristallisieren beginnt. So gewinnt man seit Jahrhunderten Salz. Auch die Komponenten eines Flüssigkeitsgemisches verdampfen unterschiedlich leicht. Man kann sie durch **Destillation** voneinander trennen. Weinbrand lässt sich nur so, durch **Brennen** nämlich, herstellen; er besitzt Alkohol in höherer Konzentration, als die Hefe verträgt, die ihn produziert hat. Die Trennung gelingt allerdings nicht vollkommen. Der Alkohol, der im Kühler kondensiert, enthält auch nach wiederholter Destillation noch rund 4% Wasser (**azeotropisches Gemisch**).

Der Vollständigkeit halber muss hier erwähnt werden, dass auch Festkörper einen Dampfdruck haben, denn sonst könnten sie nicht sublimieren. Hiervon wird in ► Kap. 5.3.8 noch kurz die Rede sein.

### 5.3.6 Luftfeuchtigkeit

Wälder und Wiesen, Flüsse und Seen geben ständig große Mengen Wasserdampf an die Luft ab. Dessen Partialdruck bleibt meist unter dem zur lokalen Temperatur gehörenden Wasserdampfdruck  $p_D$ ; erreicht er ihn, so ist die Luft mit Wasserdampf *gesättigt*. Man nennt  $p_D$  deshalb auch **Sättigungsdampfdruck**. In den frühen Morgenstunden wird es draußen kühl, sodass der zugehörige Grenzwert  $p_D$  schon mal unter den tatsächlichen Partialdruck geraten kann. Dann ist die Luft übersättigt, der Wasserdampf möchte kondensieren. Dazu braucht er aber Kondensationskeime. Zuweilen findet er sie im Staub der Luft, dann gibt es Morgennebel; immer findet er sie an den Blättern der Pflanzen, dann fällt Tau. Nebeltröpfchen gewinnen Energie aus der Oberflächenspannung, wenn sie sich zu Regentropfen zusammenschließen.

#### Merke

Beim Sättigungsdampfdruck  $p_D$  stehen Flüssigkeit und Dampf im thermodynamischen Gleichgewicht.

Die Feuchtigkeit der Luft hat für das Wohlbefinden des Menschen große Bedeutung, aus zwei Gründen vor allem: Einmal verlangen die empfindlichen Lungenbläschen mit Wasserdampf gesättigte Luft; die Schleimhäute der Atemwege müssen das nötige Wasser liefern. Ist die Luft zu trocken, dann macht ihnen das Mühe und sie fühlen sich gereizt. Zum andern verlangt der Energiehaushalt des Menschen eine ständige Abgabe von Wärme an die Umgebung; dazu nutzt die Natur auch die Verdampfungswärme des Wassers, das von den Schweißdrüsen der Haut je nach Bedarf abgegeben wird. Die Verdampfung funktioniert aber nicht mehr, wenn die Luft schon mit Wasserdampf gesättigt ist. Feuchte Wärme empfindet der Mensch als unangenehme Schwüle. Beide Effekte hängen weniger an der tatsächlichen Dichte  $\rho$  des Wasserdampfes in der Luft als an ihrem Verhältnis zur Sättigungsdichte  $\rho_D$ , also an der sog. **relativen Luftfeuchtigkeit**  $\rho/\rho_D$ . 70–80% sind dem Menschen am zuträglichsten. Bei 100% beginnt das Nebelnässen. Manche Frisuren reagieren auf Luftfeuchtigkeit; **Haarhygrometer** nutzen diesen Effekt zur Messung. Sehr genau sind sie nicht.

#### Merke

Absolute Luftfeuchtigkeit = aktuelle Wasserdampfdichte.

Relative Feuchte =  $\frac{\text{aktuelle Wasserdampfdichte}}{\text{Sättigungsdampfdichte}}$ .

Wer sein Zimmer an kalten Wintertagen gut lüftet, treibt die Feuchtigkeit ins Freie: Wie in einer Destille strebt der Wasserdampf in das Gebiet niedrigsten Dampfdrucks, niedrigster absoluter Luftfeuchtigkeit. Den Verlust zu ersetzen, gelingt Verdunstungsschalen auf Heizkörpern nur unvollkommen. Ein Wohnraum braucht nicht wenig Wasser.

Unter den sog. **Normalbedingungen** von 1013 hPa und 0 °C befindet sich ein Gas im Normzustand. Ist es obendrein noch trocken, so erfüllt es die in der Physiologie gebräuchliche „Standardbedingung STPD“ (Standard Temperature Pressure Dry). Atemluft in der Lunge hält sich demgegenüber an die „Standardbedingung BTPS“ (Body Temperature Pressure Saturated): Körpertemperatur, Sättigung mit Wasserdampf, lokaler Luftdruck (nicht auf Meereshöhe reduziert!).

#### Merke

- Normalbedingung: 1013 hPa, 0 °C
- Standardbedingung STPD: 1013 hPa, 0 °C, trocken
- Standardbedingung BTPS: momentaner Luftdruck, 37 °C, mit Wasserdampf gesättigt.

#### Rechenbeispiel 5.12: Wasser in der Luft

- **Aufgabe.** Wie viel Wasser enthält die Luft eines Wohnraumes (30 m<sup>2</sup> Grundfläche, 2,7 m hoch) bei 20 °C und 75% relativer Luftfeuchtigkeit? (Tabelle im Anhang benutzen.)
- **Lösung.** Die Sättigungsdichte von Wasserdampf bei 20 °C beträgt  $\rho_D = 17,3 \text{ g/m}^3$ . Das Volumen des Raumes ist  $V = 81 \text{ m}^3$ . Also ist die Masse des Wassers:  $m = 0,75 \cdot \rho_D \cdot V = 1,05 \text{ kg}$ , entspricht also einem Liter.

### 5.3.7 Verdampfungsenthalpie

Um eine gewisse Menge Wasser zu verdampfen, braucht man eine bestimmte Energie. Man nennt sie **Verdampfungsenthalpie** und bezieht sie als spezifische Enthalpie auf die verdampfte Masse und als molare Enthalpie auf die verdampfte Stoffmenge. Mit 2,4 MJ/kg (bei Körpertemperatur) liegt Wasser wieder einmal ungewöhnlich hoch. Das hilft dem Menschen, wenn er seinen Wärmehaushalt durch Transpiration in Ordnung halten muss. Es sorgt auch für die, verglichen mit dem Kontinentalklima, gemäßigten Temperaturwechsel des Seeklimas: Jede Änderung der Wassertem-

peratur verlangt viel Verdampfungsenthalpie oder liefert viel Kondensationsenthalpie.

Warum verwendet man diese exotische Vokabel „Enthalpie“ statt der geläufigen „Wärme“? Ein Wechsel des Aggregatzustandes ist immer mit einer Änderung der Dichte verbunden, also einer Änderung des Volumens. Beim Schmelzen ist sie vernachlässigbar klein, beim Verdampfen aber keineswegs. Nun muss das neue Volumen gegen den Dampfdruck gebildet werden, was eine **Volumenarbeit** erfordert. Sie gehört nicht zur Verdampfungswärme im engeren Sinn, der sog. **inneren Verdampfungswärme**, ist aber in der gemessenen Verdampfungsenthalpie enthalten. Analoges gilt grundsätzlich für alle Phasenumwandlungen.

#### Merke

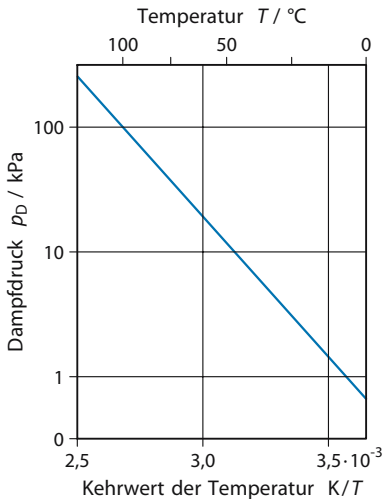
Verdampfungsenthalpie:  
innere Verdampfungswärme plus Volumenarbeit.

■ ■ ■ Wie die Diffusion und später die Dissoziation (► Kap. 5.2.4 und 6.7.1), gehört die Verdampfung zu den **thermisch aktivierten Prozessen**: Ein Molekül braucht, um die Flüssigkeit verlassen zu können, im Mittel eine Aktivierungsenergie  $w$ , die ihm die Temperaturbewegung liefern muss. Dem entspricht eine molare Verdampfungsenthalpie  $W = w \cdot N_A$ . Allen thermisch aktivierten Prozessen ist nun eine charakteristische Temperaturabhängigkeit gemeinsam. Sie wird durch den sog. Boltzmann-Faktor  $\exp(-w/kT) = \exp(-W/RT)$  beschrieben. Demnach gilt für den Dampfdruck

$$p_D(T) = p_0 \exp(-W/RT).$$

Hier ist  $p_0$  ein hypothetischer Dampfdruck bei unendlich hoher Temperatur (sie würde den Exponenten zu null, die e-Funktion zu eins machen). Die Verdampfungsenthalpie muss deshalb nicht selbst gemessen werden; sie lässt sich der Dampfdruckkurve entnehmen. Dazu empfiehlt sich eine Auftragung im **Arrhenius-Diagramm** (Swante Arrhenius, 1859–1927): logarithmisch geteilte Ordinate über dem Kehrwert der Temperatur längs der Abszisse. Wie ■ Abbildung 5.18 zeigt, bekommt man eine fallende Gerade. Deren Steigung ist zur Verdampfungsenthalpie proportional. Medizinisch gern genutzt wird die Verdampfungsenthalpie des Chloräthyls. Der Arzt hat es in Glasampullen, die mit einem Federventil verschlossen sind. Ein Druck auf dessen Hebel, und schon spritzt das Chlor-





■ **Abb. 5.18. Arrhenius-Diagramm** des Dampfdrucks von Wasser; die Steigung der Geraden entspricht einer molaren Verdampfungsenthalpie von 43 kJ/mol. Genaue Messungen über einen größeren Bereich liefern eine leicht gekrümmte Kurve: Mit steigender Temperatur nimmt die Verdampfungsenthalpie ein wenig ab (s. auch Tabelle im Anhang)

äthyl, vom eigenen Dampfdruck getrieben, in feinem Strahl heraus. An Luft verdunstet es rasch und entzieht seiner Umgebung die Verdampfungsenthalpie, die es dazu braucht. So kann man ein Furunkel leicht so weit abkühlen, dass die Nerven empfindungslos werden: einfaches Verfahren zu kurzfristiger örtlicher Betäubung.

### 5.3.8 Zustandsdiagramme

Thermodynamisch ist der „Zustand“ eines Gases durch seine **Zustandsgrößen** Druck  $p$ , Temperatur  $T$  und Molvolumen  $V_n$  vollständig beschrieben. Die Gasmenge gehört nicht zu den Zustandsgrößen und das reguläre, also nicht stoffmengenbezogene Volumen ebenfalls nicht. Zustandsgrößen sind nicht unabhängig voneinander; gibt man zwei vor, stellt sich die dritte ein. Den Zusammenhang beschreibt im Einzelfall eine **Zustandsgleichung**. Das Gasgesetz

$$p \cdot V_n = R \cdot T$$

ist die Zustandsgleichung der idealen Gase.

#### Merke

Zustandsgrößen: Druck  $p$ , Temperatur  $T$ , Molvolumen  $V_n$

Zustandsgleichung: Gleichung zwischen den Zustandsgrößen.

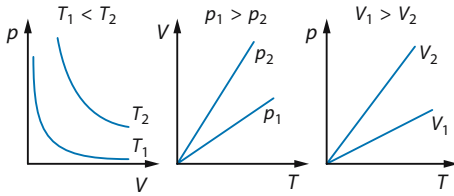
■ ■ ■ Nicht ganz so ideale Gase folgen der **Zustandsgleichung von van der Waals** (Johannes Diderik van der Waals, 1837–1923)

$$(p + a/V_n^2) \cdot (V_n - b) = R \cdot T.$$

Sie berücksichtigt mit der Materialkonstante  $a$  die anziehenden Kräfte, die auch zwischen Gasmolekülen auftreten und auf diese ähnlich wirken wie eine Erhöhung des äußeren Druckes. Der Einfluss wächst, wenn die Moleküle dichter zusammenrücken, wenn also das Molvolumen abnimmt. Andererseits steht dieses Molvolumen der thermischen Bewegung der Moleküle nicht voll zur Verfügung; sie sind ja keine ausdehnungslosen Punkte im Sinn der Mathematik, sondern kleine Kügelchen mit einem **Eigenvolumen**. Mit der zweiten Materialkonstante  $b$  wird es von  $V_n$  abgezogen. Mit wachsendem Molvolumen verlieren beide Korrekturglieder an Bedeutung: Das **van-der-Waals-Gas** nähert sein Verhalten immer mehr dem des idealen Gases an.

Gleichungen idealisieren. Wenn man mit ihnen die Realität nicht mehr gut genug beschreiben kann, zeichnet man einen Graphen, ein Diagramm. Ein **Zustandsdiagramm** muss den Zusammenhang zwischen drei Zustandsgrößen darstellen; es braucht ein dreidimensionales Koordinatenkreuz und liefert darin ein räumliches Modell. Das ist mühsam herzustellen und lässt sich auf dem Papier nur in perspektivischer Zeichnung wiedergeben. Darum weicht man gern in die sog. **Parameterdarstellung** aus: Man trägt im ebenen, zweiachsigen Koordinatenkreuz Kurven ein, zu denen jeweils feste Werte der dritten Größe als Parameter gehören. Als Beispiel diene das  $p$ - $V$ -Diagramm eines idealen Gases (■ Abb. 5.19, linkes Teilbild): Nach Aussage der Zustandsgleichung sind die **Isothermen**, die Kurven gleicher Temperatur also, Hyperbeln der Form  $p \sim 1/V_n$ . Ebenso gut könnte man im  $V$ - $T$ -Diagramm **Isobaren** eintragen, also Kurven konstanten Druckes (sie sind Geraden) oder im  $p$ - $T$ -Diagramm Kurven konstanten Volumens, **Iso-**





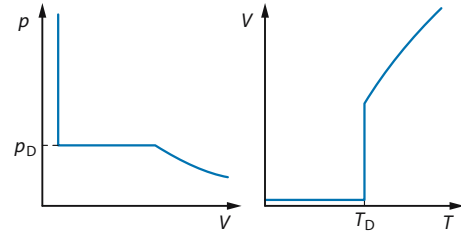
■ **Abb. 5.19.** Drei Parameterdarstellungen des Zustandsdiagramms idealer Gase: Isothermen im  $p$ - $V$ -Diagramm (links), Isobaren im  $V$ - $T$ -Diagramm (Mitte), Isochoren im  $p$ - $T$ -Diagramm. Solange die Achsen keine Zahlenwerte bekommen, ist es gleichgültig, ob man unter „Volumen“ das Volumen  $V$  einer abgeteilten Gasmenge versteht oder das spezifische Volumen  $V_s = V/m$  oder das stoffmengenbezogene (molare) Volumen  $V_n = V/n$

choren genannt (sie sind ebenfalls Geraden): Alle drei Diagramme der ■ Abb. 5.19 besagen dasselbe, und zwar dasselbe wie das Gasgesetz.

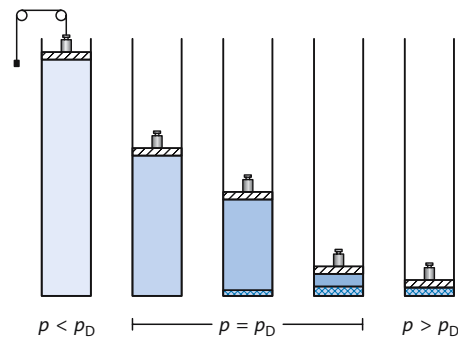
#### Merke

- Isobare: Kurve konstanten Drucks
- Isotherme: Kurve konstanter Temperatur
- Isochore: Kurve konstanten Molenvolumens

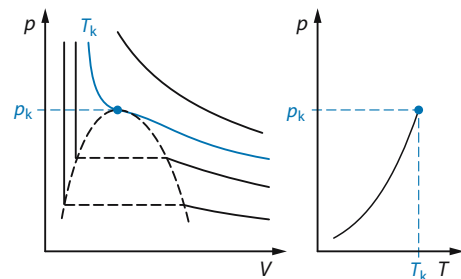
Überschreitet der Druck eines Gases den Dampfdruck der dazugehörigen Flüssigkeit, so beginnt die Kondensation: Viel Gasvolumen verschwindet, wenig Flüssigkeitsvolumen entsteht. Druck und Temperatur bleiben konstant; lediglich die Kondensationswärme muss abgeführt werden. Im **Koexistenzbereich** von Gas und Flüssigkeit kann eine vorgegebene Substanzmenge jedes angebotene Volumen dadurch ausfüllen, dass sie sich passend auf die beiden Aggregatzustände verteilt. Deren spezifische oder auch Molenvolumina bestimmen die Grenzen des Koexistenzbereiches ■ Abb. 5.21. Kondensation und Verdampfung erfolgen genau bei dem (temperaturabhängigen) Dampfdruck  $p_D$ : Hier ist die Isotherme zugleich Isobare, horizontal im  $p$ - $V$ -Diagramm (■ Abb. 5.22). Nach Abschluss der Kondensation existiert nur noch die flüssige Phase. Sie ist nahezu inkompressibel und dehnt sich bei Erwärmung nur geringfügig aus; entsprechend verläuft die Isotherme im linken Teilbild sehr steil und die Isobare im rechten sehr flach (■ Abb. 5.22).



■ **Abb. 5.20.** Verdampfung und Kondensation bedeuten isobaren und isothermen Wechsel des Volumens. Im Koexistenzbereich von flüssiger und gasförmiger Phase verläuft die Isotherme im  $p$ - $V$ -Diagramm demnach horizontal beim Dampfdruck  $p_D$  und die Isobare im  $V$ - $T$ -Diagramm vertikal beim Siedepunkt  $T_D$



■ **Abb. 5.21.** Koexistenzbereich. Entspricht der Stempeldruck  $p$  genau dem Dampfdruck  $p_D$ , so bleibt der Stempel bei jedem gewünschten Volumen innerhalb des Koexistenzbereiches stehen. Ein kleines Zusatzgewicht lässt den Dampf vollständig kondensieren, ein kleines Entlastungsgewicht die Flüssigkeit vollständig verdampfen



■ **Abb. 5.22.**  $p$ - $V$ -Diagramm der Phasenumwandlung. Mit steigender Temperatur und steigendem Dampfdruck engt sich der Koexistenzbereich (Grenze im linken Teilbild gestrichelt) immer mehr ein, bis er am kritischen Punkt verschwindet. Bei der kritischen Temperatur  $T_k$  und dem kritischen Druck  $p_k$  endet die Dampfdruckkurve (rechtes Teilbild)

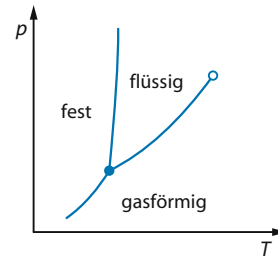
Nur beim Dampfdruck  $p_D$  können Gas und Flüssigkeit nebeneinander im thermodynamischen Gleichgewicht existieren. Überwiegt der Stempeldruck  $p$  auch nur minimal, so kondensiert der ganze Dampf, ist  $p$  auch nur ein wenig zu klein, so verdampft die ganze Flüssigkeit.

Es gibt nun einen sehr merkwürdigen Effekt. Erhöht man die Temperatur, so steigt der Dampfdruck, und zwar kräftig. Mit ihm steigt aber auch die Dampfdichte, spezifisches und Molenvolumen nehmen also ab. Bei der Flüssigkeit nehmen sie aber zu, denn die dehnt sich bei Erwärmung aus (wegen der geringen Kompressibilität kommt die Druckerhöhung nicht dagegen an). Folglich werden die Dichte der Flüssigkeit und die Dichte des Gases immer ähnlicher. Die Dichte ist es aber gerade, die Flüssigkeit und Gas voneinander unterscheiden. Bei einem bestimmten Temperaturwert verschwindet der Unterschied dann ganz, Flüssigkeit und Gas unterscheiden sich gar nicht mehr. Dies ist die sog. kritische Temperatur. Im  $p$ - $V$ -Diagramm wandern die Volumina von beiden Seiten her, aufeinander zu und engen den Koexistenzbereich immer mehr ein, bis er am **kritischen Punkt** ganz verschwindet: Die Dampfdruckkurve hat ein oberes Ende; zur kritischen Temperatur gehört auch ein **kritischer Druck** und ein **kritisches Molvolumen**. Darüber unterscheiden sich Dampf und Flüssigkeit nicht mehr, ihre Dichten sind gleich geworden: Die **kritische Isotherme** ( $T = T_k$ ) hat beim kritischen Druck  $p_k$  nur noch einen horizontalen Wendepunkt, den kritischen Punkt. Darüber besitzt sie kein horizontales Stück mehr. Dort lässt sich ein Gas nicht verflüssigen, es ist zum **permanenten Gas** geworden und wird mit steigender Temperatur einem idealen Gas immer ähnlicher (Abb. 5.22).

#### Merke

Im Koexistenzbereich existieren Flüssigkeit und Dampf nebeneinander. Er wird oben durch den kritischen Punkt begrenzt: Flüssigkeit und Dampf unterscheiden sich nicht mehr.

Analog zur Dampfdruckkurve lassen sich im  $p$ - $T$ -Diagramm Grenzkurven zwischen den anderen Aggregatzuständen zeichnen; sie markieren die Druckabhängigkeit des Schmelzpunktes



■ **Abb. 5.23. Phasendiagramm.** Die Grenzkurven der drei Phasenbereiche treffen sich im Tripelpunkt, nur dort können die drei Aggregatzustände nebeneinander (im thermodynamischen Gleichgewicht) existieren

und den Sublimationsdruck des Festkörpers. Alles wird im **Phasendiagramm** zusammengefasst, das schnelle Auskunft darüber gibt, unter welchen Bedingungen welche Aggregatzustände gegeben sind (Abb. 5.23). Alle drei Kurven treffen sich im **Tripelpunkt**, dem einzigen Punkt, in dem die drei Aggregatzustände gleichzeitig existieren, im thermodynamischen Gleichgewicht jedenfalls. Wenn an einem kalten Wintertag ein Bach, auf dem Eisschollen schwimmen, sichtbar dampft, befindet er sich nicht am Tripelpunkt, aber auch nicht im Gleichgewicht. Der Tripelpunkt des Wassers lässt sich so genau feststellen, dass er zum Fixpunkt der Kelvin-Skala erhoben wurde: 273,16 K; er liegt 0,01 K über dem Eispunkt.

#### Merke

Nur beim Tripelpunkt können alle drei Aggregatzustände nebeneinander existieren.

### 5.3.9 Absorption und Adsorption

Nicht nur Festkörper, auch Gase können sich in Flüssigkeiten lösen. Man spricht hier von **Absorption**. Das vielleicht bekannteste Beispiel liefert das Kohlendioxid in Bier, Sprudelwasser und Sekt. Die Löslichkeit ist begrenzt, sie nimmt mit steigender Temperatur ab. Schon vor dem Sieden perlt die vom Wasser absorbierte Luft auf und mit steigendem Partialdruck des Gases zu. Sektflaschen haben feierlich vertäute Korken, denn ihr Inhalt steht unter Druck. Der von Limonadenflaschen

mit prosaischem Kronenkorken tut das freilich auch. Lässt man den Druck entweichen, so ist die Lösung übersättigt und schäumt auf, nicht gerade explosionsartig, denn auch hier handelt es sich um einen Keimbildungsprozess, der seine Zeit braucht. Immerhin ist der Effekt interessant genug, um auch noch aus einem mittleren Wein ein festliches Getränk zu machen.

Die Konzentration des in der Flüssigkeit gelösten Gases ist in etwa proportional zum Partialdruck des Gases in der Luft. Dabei nimmt aber die Löslichkeit, also die Proportionalitätskonstante, wie schon gesagt, mit steigender Temperatur deutlich ab. Der Zusammenhang wird **Henry-Dalton-Gesetz** genannt und gern mit einer dimensionslosen Proportionalitätskonstante  $\alpha$  ausgedrückt:

$$c_{\text{gas}} = \frac{\alpha}{760} p_{\text{gas}}$$

Dabei ist  $c_{\text{gas}}$  die Konzentration in Milliliter Gas pro Milliliter Flüssigkeit und  $p_{\text{gas}}$  der Partialdruck in der Druckeinheit mmHg. Dem aufrechten Physiker graut etwas vor solch einer Formel, weil sie sich nicht an die SI-Einheiten hält und man eben sehr genau dazusagen muss, was gemeint ist. So sind die Milliliter Gas bei Normalbedingungen (Luftdruck, 0 °C) gemeint. Wenn man das alles weiß, ist die Formel aber ganz praktisch und deshalb bei Physiologen beliebt. Für Sauerstoff in Wasser z. B. beträgt  $\alpha$  0,031 bei 20 °C und 0,024 bei 37 °C.

#### Merke

Henry-Dalton-Gesetz: Konzentration des gelösten Gases ist proportional zum Partialdruck in der Luft.

Dieses Gesetz kann Sporttauchern durchaus gefährlich werden, wenn sie nämlich mit einem Atemgerät in größere Tiefen vorstoßen. Dort lastet der Schweredruck des Wassers auf ihnen. Sie müssen deshalb ihrer Lunge Atemluft von gleichem Druck zuführen; anders könnten sie ihren Brustkorb nicht heben. Das ist an sich unbedenklich, denn der Sauerstofftransport zu den Organen wird sowieso vom Hämoglobin besorgt und nicht etwa durch das im Blut absorbierte Gas. Ge-

fahr droht aber beim Auftauchen, wenn nämlich der Luftdruck in der Lunge dem Wasserdruck entsprechend zurückgenommen werden muss. Geschieht dies zu schnell, so wird das Blut übersättigt und scheidet Luftbläschen aus, die zu einer Embolie führen können. Ähnliches droht Astronauten, wenn ein plötzliches Leck in ihrer Kapsel den gewohnten Luftdruck zu schnell herabsetzt.

Gas- und Flüssigkeitsmoleküle können auch an der Oberfläche von Festkörpern festgehalten, wie man sagt, **adsorbiert** werden, besonders wirksam natürlich, wenn die Oberfläche groß, der Körper also feinkörnig porös ist. Als eine Art Allergietestsubstanz erfreut sich hier die **Aktivkohle** besonderer Beliebtheit, eine nachbehandelte Holz- oder Knochenkohle, die es bis auf 400 m<sup>2</sup>/g spezifische Oberfläche bringt. Der Arzt verordnet sie bei manchen Darmbeschwerden, um wenigstens die Symptome zu lindern.

#### Merke

Absorption: Lösung von Gasmolekülen in einer Flüssigkeit,  
Adsorption: Bindung von Gasmolekülen an Festkörperoberflächen.

## 5.4 Wärmehaushalt des Menschen

### 5.4.1 Konvektion

Wie jeder Warmblüter muss auch der Mensch seine Körpertemperatur gegen die meist kältere Umwelt verteidigen. Wale haben es besonders schwer: Sie leben in einem Medium mit relativ hoher Wärmeleitfähigkeit und Wärmekapazität und können sich nur durch eine mächtige Speckschicht vor lebensgefährlicher Auskühlung schützen. Landsäuger kommen mit weniger Speck aus. Sie stehen nur mit Luft in unmittelbarem Wärmekontakt; die aber bietet, wie alle Gase, nur vergleichsweise wenige Moleküle zu Wärmetransport und -speicherung an. Schwimmtvögel wie die Enten nutzen diese Eigenschaft der Gase aus: Sie gehen nicht unmittelbar mit warmem Bauch ins kalte Wasser, sondern packen ein wärmeisolierendes Luftpolsster dazwischen, eingeschlossen in sorgsam gefet-

tete und deshalb nicht benetzbare Federn. Warum trägt aber der Eisbär ein dickes Fell? Er kann darin doch nur die gleiche Luft einsperren, die ihn sowieso umgibt.

Wärme kann auch mit Materie transportiert werden. Der Heizkörper der Zentralheizung bietet ein gutes Beispiel für solche **Konvektion**: Die aufgewärmte Luft steigt ihrer geringeren Dichte wegen zur Decke, sinkt abgekühlt wieder herunter und kriecht über dem Boden zum Heizkörper zurück. Dadurch wird die Wärme sehr effektiv vom Heizkörper an die Luft übertragen. Was hier technisches Ziel ist, will der Eisbär unterbinden. Eben dazu dient sein Fell, und der Mensch zieht sich warm an.

Die Wirkung der freien thermischen Konvektion korrekt auszurechnen, ist nahezu unmöglich, dazu sind die Strömungsverhältnisse viel zu kompliziert. Unabhängig von den Details wird aber die Dichte  $j_Q$  des Wärmestromes im Großen und Ganzen proportional zur Differenz  $\Delta T$  der Temperaturen des Heizkörpers und der von der Konvektion noch nicht erfassten Luft sein. Das erlaubt, mit der Gleichung  $j_Q = h_{cv} \cdot \Delta T$  eine **Wärmeübergangskoeffizienten**  $h_{cv}$  zu definieren. Für Zimmerluft gibt es brauchbare Erfahrungswerte. Eine horizontale warme Fläche bringt es auf  $h_{cv} \sim 9 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ , eine vertikale auf  $h_{cv} \sim 5,5 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ .

### Merke

Wärmeübergang mit Konvektion:  
Wärmestromdichte

$$j_Q = h_{cv} \cdot \Delta T$$

mit Wärmeübergangszahl  $h_{cv}$ .

Die Gleichungen von Wärmeleitung und Wärmeübergang zusammen erlauben, die zweckmäßige Schichtdicke  $d$  von Fell oder Kleidung abzuschätzen. Die Oberflächentemperatur der Haut betrage  $T_H$ , die der Luft  $T_L$ ; an der Außenseite der Kleidung stelle sich  $T_x$  ein. Dieser Wert hängt von der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  der Kleidung ab; ist sie extrem hoch, so wird  $T_x \approx T_H$ , ist sie extrem klein, so folgt  $T_x \approx T_L$ . Auf jeden Fall verlässt ein Wärmestrom der Dichte

$$j_Q = \frac{\lambda}{d}(T_H - T_x)$$

die Körperoberfläche; er muss vollständig an die umgebende Luft weitergereicht werden:

$$j_Q = \alpha \cdot (T_x - T_L).$$

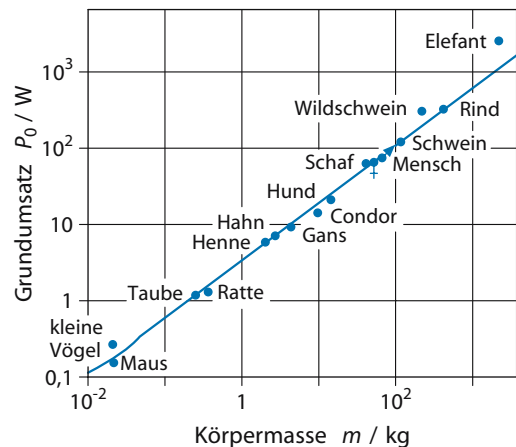
Danach hat  $T_x$  sich zu richten.

### Klinik

**Je größer, um so verfressener.** Ein Bernhardiner hat – wen wundert's – einen höheren **Grundumsatz**  $P_0$  als ein Zwergpinscher. Ganz naiv könnte man erwarten, dass  $P_0$  proportional zur Körpermasse  $m$  eines Warmblüters ansteigt und damit im Wesentlichen auch proportional zum Körpervolumen  $V$ , denn die mittlere Dichte aller Tiere entspricht so ungefähr der des Wassers. Nun muss aber die vom Körper entwickelte Wärme durch die Körperoberfläche  $A$  abgeführt werden. Man könnte also auch  $P_0 \sim A$  erwarten.  $A$  steigt aber nur proportional zu  $V^{2/3}$ , jedenfalls bei einander (im Sinne der Mathematik) „ähnlichen“ Körpern. Tatsächlich schlägt die Natur einen Mittelweg ein und entscheidet sich für

$$P_0 \sim m^{3/4}.$$

Wie **Abbildung 5.24** zeigt, gilt diese Beziehung erstaunlich genau, von der Maus bis zum Elefanten.



**Abb. 5.24.** Grundumsatz und Körpermasse folgen bei Warmblütern recht genau einem Potenzgesetz mit dem Exponenten  $3/4$

**Rechenbeispiel 5.13: Frierender Mensch**

► **Aufgabe.** Der Mensch hat eine Oberfläche von etwa  $1,5 \text{ m}^2$ . Wie groß wäre sein Wärmeverlust durch Konvektion, wenn er nackt in einem  $15^\circ\text{C}$  kalten Raum stünde?

► **Lösung.** Die Temperatur der Hautoberfläche wird nicht ganze  $37^\circ\text{C}$  sein, vielleicht nur  $33^\circ\text{C}$ . Dann ist ca.  $P = 5,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \cdot 1,5 \text{ m}^2 \cdot 8^\circ\text{C} = 66 \text{ W}$ . Das ist die Leistung einer Glühbirne.

**5.4.2 Temperaturstrahlung**

Siehe auch ► Kap. 7.3.3.

Vakuum unterbindet jeden Temperatureausgleich durch Wärmeleitung oder Konvektion; das gilt für die Doppelwand des Dewar-Gefäßes und für den Weltraum. Trotzdem bleibt eine Form des Wärmeaustausches möglich: der durch **Temperaturstrahlung** nämlich. Ohne Strahlung gäbe es auf der Erde kein Leben; seine Energiequelle ist die Sonne, durch den leeren Weltraum von ihm getrennt.

Wärme besteht im Wesentlichen aus der kinetischen Energie ungeordneter Molekülbewegungen und ist somit an Materie gebunden. Wärmeaustausch über Temperaturstrahlung durch das Vakuum setzt deshalb zweimalige Energieumwandlung voraus: Die Strahlungsquelle verliert Wärmeenergie, der Strahlungsempfänger gewinnt Wärmeenergie, unterwegs ist aber eine elektromagnetische Welle und deren Energie. Auch sichtbares Licht gehört zu diesen Wellen. Ausführlich behandelt werden sie im Kapitel „Optik“, entsprechend findet sich auch dort ein Kapitel über Temperaturstrahlung (► Kap. 7.3.3). Hier sei nur soviel vorweggenommen: Jeder Körper auf einer Temperatur über  $0 \text{ K}$  – und das heißt wirklich *jeder* Körper – strahlt Licht ab, wenn auch nicht notwendigerweise sichtbares. Erst von etwa  $700^\circ\text{C}$  aufwärts beginnt eine heiße Fläche für das menschliche Auge erkennbar zu glühen. Mit steigender Temperatur verschiebt sich das Spektrum der Strahlung zu kürzeren Wellen (**Wien-Verschiebungsgesetz**). Die gesamte Strahlungsleistung, integriert über alle Wellenlängen, wächst rapide mit der Temperatur an, proportional zu  $T^4$  nämlich (**Stefan-Boltzmann-Gesetz**).

Unsichtbare Temperaturstrahlung wird zuweilen auch Wärmestrahlung genannt. Wer sich dicht vor einen eisernen Kanonenofen setzt, dem leuchtet diese Bezeichnung höchst sinnfällig ein. Es handelt sich aber um elektromagnetische Wellen im infraroten Spektralbereich, also um Licht im weiteren Sinne.

**Merke**

Temperaturstrahlung („Wärmestrahlung“): Jeder Körper verliert Energie durch Abstrahlung von Licht (im weitesten Sinn des Wortes). Der Energiestrom wächst mit der vierten Potenz der Temperatur und verschiebt dabei seinen Schwerpunkt zu kürzeren Wellenlängen.

An wolkenlosen Sommertagen darf die Lufttemperatur nur „im Schatten“ gemessen werden, andernfalls wird das Thermometer zum Strahlungsempfänger und wandelt Sonnenlicht in Wärme um, die es nur dadurch wieder loswerden kann, dass es sie an die Luft weitergibt. Dazu ist aber ein Temperaturgefälle unerlässlich: Das Thermometer zeigt „zu viel“ an. Nur so sind manche Urlaubsberichte zu verstehen, die von  $50^\circ\text{C}$  erzählen. Man muss schon sehr viel trinken, um gegen echte Lufttemperaturen dieser Größe „anschwitzen“ zu können. Besonders empfindlich gegen Strahlung sind übrigens Thermometer mit dunkel gefärbtem und dadurch gut sichtbarem Alkohol. Metallisch reflektierendes Quecksilber weist demgegenüber den größten Teil der einfallenden Strahlungsleistung durch Spiegelung ab.

Jede Fläche hat gegenüber sichtbarem und unsichtbarem Licht ein

**Absorptionsvermögen**

$$\alpha = \frac{\text{absorbierte Strahlungsleistung}}{\text{einfallende Strahlungsleistung}}$$

und ein

**Reflexionsvermögen**

$$\rho = \frac{\text{reflektierte Strahlungsleistung}}{\text{einfallende Strahlungsleistung}}$$

Beide liegen zwischen 0 und 1 und hängen durchweg markant von der Wellenlänge ab. Im sichtbaren Spektralbereich macht dies die Welt

so bunt. Eine Ausnahme bildet der graue Körper mit dem Grenzfall des schwarzen Körpers ( $\alpha = 1$ ,  $\rho = 0$ ). Generell verlangt der Energiesatz:

$$\alpha + \rho = 1.$$

Eine völlig weiße Fläche ( $\alpha = 0$ ,  $\rho = 1$ ) reflektiert vollständig, wenn auch nicht regulär wie ein Spiegel, sondern mehr oder weniger diffus („Streuereflexion“).

Auch die Temperaturstrahlung reagiert auf  $\alpha$  und  $\rho$ ; sie muss es einem allgemeinen Prinzip zuliebe. Dieses besagt: Der Wert, auf den sich ein thermodynamisches Gleichgewicht (wenn überhaupt) einstellt, ist unabhängig von dem Weg, auf dem dies geschieht. Nun einigen sich zwei Körper, die Wärme durch Leitung untereinander austauschen können, mit Sicherheit am Ende auf eine gemeinsame Temperatur. Sind sie hingegen thermisch voneinander isoliert, tauschen sie also nur durch Temperaturstrahlung Energie aus, so muss das Strahlungsgleichgewicht trotzdem zum gleichen Ergebnis führen, auch wenn der eine Körper schwarz und der andere weiß ist. Der weiße absorbiert freilich so gut wie nichts von dem, was ihm der schwarze zustrahlt; folglich darf er auch so gut wie nichts abstrahlen, denn im Gleichgewicht muss er exakt die gleiche Strahlungsleistung abgeben wie aufnehmen. Maximales Emissionsvermögen für Temperaturstrahlung besitzt deshalb nur der schwarze Körper: Er sendet **schwarze Strahlung** aus, die ihm seine Bedeutung gibt. Umgekehrt sind Dewar-Gefäße üblicherweise verspiegelt, um nämlich einen Wärmeaustausch durch Strahlung so gut wie möglich zu unterbinden: Wer gut reflektiert, strahlt schlecht.

## Klinik

**Raucher strahlen weniger.** Auch die unsichtbare Temperaturstrahlung, ausgesandt von Körpern, die zum Glühen noch nicht heiß genug sind, ist Licht. Man kann mit ihr fotografieren, sofern man entsprechend sensibilisierte Filme verwendet (die man dann möglicherweise im Kühlschrank aufbewahren muss, um sie nicht schon mit der Strahlung der Zimmertemperatur zu belichten). ■ Abbildung 5.25 zeigt die Hand eines Menschen, fotografiert im Eigenlicht, und zwar vor und bald nach dem Genuss einer Zigarette: Nikotin verengt die Blutgefäße und senkt damit die Oberflächentemperatur der Haut. Umgekehrt macht sich eine Mandelentzündung durch erhöhte Temperaturstrahlung der entsprechenden Halspartie bemerkbar. Ein Wettersturz kann den passionierten Bergsteiger dazu zwingen, auf dem Gletscher zu übernachten. Dazu muss er sich warm einwickeln. Wolldecken sind schwer und belasten den Rucksack. Eine leichte, reflektierend metallisierte Kunststoffplane tut es auch. Für den ☞ **Wärmehaushalt** des Menschen spielt seine Eigenstrahlung eine wichtige Rolle. Für den Wärmehaushalt der Erde gilt dies erst recht; er lässt sich überhaupt nur durch Strahlung in sein Fließgleichgewicht bringen (► Kap. 5.5.2).



■ **Abb. 5.25. Thermogramm.** Hand eines Menschen im infraroten Licht ihrer eigenen Temperaturstrahlung. Die Thermogramme wurden im Abstand von zwei Minuten während des Rauchens einer Filterzigarette aufgenommen: Nikotin verengt die Blutgefäße und senkt mit der Durchblutung auch die Temperatur der Haut. (Aufnahmen von Prof. W. Stürmer, Erlangen)



**Rechenbeispiel 5.14: Der Mensch friert noch mehr**

► **Aufgabe.** Außer durch Konvektion verliert der nackte Mensch Wärme auch durch Strahlung. Wie viel?

► **Lösung.** Die meisten Menschen sind zwar nicht schwarz, aber doch in guter Näherung ein schwarzer Strahler. Die Stefan-Boltzmann-Gleichung kann also direkt angewendet werden:

$P = 1,5 \text{ m}^2 \cdot \sigma \cdot (306 \text{ K})^4 = 746 \text{ W}$ . Diese gewaltige Strahlungsleistung lässt den Menschen aber nur erkalten, wenn er einsam durch die Weiten des Weltalls schwebt. Das 15 °C kalte Zimmer strahlt ja auch auf ihn zurück, und zwar mit:  $P = 1,5 \text{ m}^2 \cdot \sigma \cdot (288 \text{ K})^4 = 585 \text{ W}$ . Nur die Differenz von 161 W lässt den Menschen frieren.

schwitzt in thermodynamisch wie physiologisch sinnvoller Weise. Zum echten Saunagenuss gehört jetzt aber ein kräftiger Guss kalten Wassers auf die heißen Steine. Uplötzlich ist die Luft mit Wasserdampf gesättigt und der Schweiß fließt in Strömen. Nur hilft das thermodynamisch nichts: Verdampfung ist nicht mehr möglich, Verdampfungsenthalpie kann nicht aufgebracht werden. Es kommt zum Wärmestau im Organismus. Seine Wärmekapazität muss ihn auffangen: Die Körpertemperatur steigt. Das erlaubt dann den letzten Saunagenuss: Wälzen im Schnee (die Skandinavier haben ihn). Einem stabilen Kreislauf kann man das alles zumuten, es trainiert und stärkt ihn möglicherweise sogar. Wer freilich in der Sauna bewusstlos wird, überlebt nur noch mit fremder Hilfe.

**5.4.3 Transpiration**

Energietransport durch Wärmeleitung, durch Konvektion und durch Temperaturstrahlung läuft immer nur von warm nach kalt. Wie hält der Mensch seine Körpertemperatur von 37 °C bei „fünfundvierzig Grad im Schatten“?

Er schwitzt, weniger vulgär ausgedrückt: er **transpiert**. Physikalischer ausgedrückt: Er hält seine Haut so feucht, dass er Wärme als Verdampfungsenthalpie loswerden kann. Wasser verdampft auch in heiße Luft hinein, vorausgesetzt, sie ist nicht schon mit Wasserdampf gesättigt. Darum ist die trockene Hitze der Wüste leichter zu ertragen als die Schwüle tropischer Regenwälder. Die relative Luftfeuchtigkeit (► Kap. 5.3.6) hat großen Einfluss auf die Verdampfungsgeschwindigkeit und damit auf den Wärmestrom, der durch das Schwitzen abgegeben werden kann. Wer sich freilich den Schweiß aus der Stirn wischt, vergeudet Verdampfungsenthalpie: Sie kühlt auch jetzt, aber nicht die Stirn, sondern das Taschentuch.

Nordländer provozieren den Schweißausbruch in der Sauna, und zwar zunächst in trockener Hitze. Auch wenn die kalte Außenluft mit Wasserdampf gesättigt sein sollte, mit steigender Temperatur steigt auch der Sättigungsdampfdruck. Weil aber der Partialdruck konstant bleibt, sinkt die relative Luftfeuchtigkeit. Der Mensch in der Sauna

**Rechenaufgabe 5.15: schwitzender Mensch bei 37 °C**

► **Aufgabe.** Bei einer Umgebungstemperatur von 37 °C kann sich der Mensch der Wärmeproduktion seines Grundumsatzes (mit einer Leistung von ca. 100 W, ► Abb. 5.26) nur noch durch Transpiration entledigen. Wie viel Wasser müsste er dazu am Tag ausschwitzen?

► **Lösung.** Ein Tag hat 86.400 Sekunden; ein Grundumsatz von 100 W entspricht also  $8,64 \cdot 10^6$  Joule pro Tag. Die Verdampfungsenthalpie von Wasser beträgt  $2,4 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ . Unser schwitzender Mensch muss also etwa 3,6 Liter Wasser verdampfen. Im Extremfall kann ein Mensch diese Menge sogar in zwei bis drei Stunden ausschwitzen. Die „normale“ Wasserabgabe durch Atmung und Wasserdiffusion aus der Haut beträgt 0,5 bis 0,8 Liter pro Tag.

**5.5 Wärmenutzung****5.5.1 Die Sonderstellung der Energieform „Wärme“**

Ob er es zugibt oder nicht, einen guten Teil seiner „Lebensqualität“ bezieht der moderne Mensch daraus, dass er mit Energie verschwenderisch umgehen darf, bereitwillig zur Verfügung gestellt beispielsweise von der Steckdose. Sie sitzt



am Ende eines verästelten Netzes von Kabeln und Fernleitungen, an dessen anderen Enden Generatoren der Kraftwerke elektrische Energie einspeisen. Getrieben werden die Generatoren zumeist von Turbinen, die Dampf aus kohle- oder ölbefeuerten Kesseln beziehen. Die chemische Energie des Brennstoffes wird zunächst in Wärme umgewandelt, danach in mechanische Energie und schließlich in elektrische, denn die lässt sich am leichtesten dort anliefern, wo sie verlangt wird.

Wichtiges Glied in der Kette ist die Turbine, die **Wärmekraftmaschine**, die Wärme in mechanische Energie umsetzt. Ungeachtet aller modernen, technischen Raffinessen kann diese Umsetzung grundsätzlich in folgendem Gedankenversuch geschehen: Man sperrt ein (am besten auch noch ideales einatomiges) Gas in einen aufrecht gestellten Zylinder und verschließt diesen oben mit einem gasdichten und reibungsfrei beweglichen Kolben. Technisch ist das zwar ein Widerspruch in sich, aber einen Gedankenversuch braucht das nicht zu stören. Erwärmt man jetzt das Gas (durch Zufuhr der Wärmemenge  $Q$  von außen), so dehnt es sich aus, vergrößert also sein Volumen um  $\Delta V$ . Der Kolben sorgt mit seiner Gewichtskraft  $F$  für einen konstanten Gasdruck  $p$ ; er wird um  $\Delta h$  angehoben und gewinnt dabei potentielle mechanische Energie

$$W = F \cdot \Delta h = p \cdot \Delta V,$$

die dann irgendwie weiterverwendet werden kann. Für das Prinzip der Wärmekraftmaschine ist nur wichtig: Wärme  $Q$  wird eingesetzt und mechanische Energie  $W$  kommt heraus. Mit welchem

**Wirkungsgrad**  $\eta = W/Q$ ?

Grundsätzlich kann man den Kolben festklemmen. Dann wird keine mechanische Energie geliefert und die zugeführte Wärme kommt allein der mit der thermischen Wimmelbewegung der Moleküle verbundenen *inneren Energie*  $\Delta U$  des Gases zugute:

$$Q_v = \Delta U = n \cdot c_v \cdot \Delta T.$$

$c_v$  ist die molare **Wärmekapazität bei konstantem Volumen**. Auch wenn man das Gas bei konstantem Druck erwärmt, verlangt die innere Energie ihren

Anteil  $\Delta U$ ; zusätzlich muss aber auch das Äquivalent der mechanischen Arbeit  $W$  zugeführt werden:

$$Q_p = \Delta U + W = n \cdot c_p \cdot \Delta T.$$

Die molare **Wärmekapazität bei konstantem Druck**  $c_p$  ist deshalb größer als  $c_v$ . Zwischenformen zwischen diesen beiden Grenzfällen sind grundsätzlich möglich; auf jeden Fall aber gilt

$$Q = \Delta U + W.$$

Die zugeführte Wärme  $Q$  muss sowohl den Anstieg  $\Delta U$  der inneren Energie decken als auch die abgegebene mechanische Energie  $W$ . Dies ist die Aussage des **1. Hauptsatzes der Thermodynamik**, aus heutiger Sicht wenig aufregend, formuliert er doch nur den Energiesatz für einen speziellen Fall. In der Mitte des 19. Jahrhunderts war das aber eine große Entdeckung, weil es die Natur eines „caloricum“ genannten Etwas aufdeckte, das ein Körper bei Erwärmung aufnahm.

#### Merke

1. Hauptsatz der Wärmelehre:

$$Q = \Delta U + W;$$

Wärme ist eine Form der Energie.

Durch rein theoretische Überlegungen lässt sich jetzt Folgendes zeigen. Eine Wärmekraftmaschine kann nur dann ständig Wärme in mechanische Energie umwandeln, wenn sie wiederholt bei einer oberen Temperatur  $T_o$  Wärmemengen  $Q_o$  aufnehmen und bei einer unteren Temperatur  $T_u$  kleinere Wärmemengen  $Q_u$  abgeben kann. Sie stellt dann die Differenz  $Q_o - Q_u$  als mechanische Arbeit  $W$  zur Verfügung. Für  $W$  gibt es aber eine obere Grenze, die kein noch so schlauer Erfinder überbieten kann. Es ist grundsätzlich nicht möglich, über den sog. **Carnot-Wirkungsgrad**

$$\eta_c = \frac{T_o - T_u}{T_o}$$

hinauszukommen (Sadi Carnot, 1796–1832). Auf der Erde kann eine Wärmekraftmaschine, welche auch immer, die untere Temperatur schwerlich unter die Umgebungstemperatur bringen:  $T_u \approx 300$  K. Andererseits wird bei 600 K der Dampfdruck

des Wassers schon unangenehm hoch. Das bedeutet:  $\eta_c \approx 50\%$ . Viel mehr ist aus einer Dampfturbine kaum herauszuholen.

■■■ Hinter dem Carnot-Wirkungsgrad steht der sog. **2. Hauptsatz der Thermodynamik**. Er hat eine ungeheure Tragweite. Dass es kein Perpetuum mobile gibt, sagt schon der Energiesatz, also auch der 1. Hauptsatz der Wärmelehre. Der 2. Hauptsatz stellt zusätzlich fest: Es gibt auch kein „Perpetuum mobile 2. Art“, das mechanische Energie liefert, indem es einem Körper ständig Wärme entzieht und nichts weiter tut. Das ist ein Jammer, denn ein Schiff, das den Ozean ein wenig abkühlt und mit der dem Wasser entzogenen Wärme seine Maschinen treibt, wäre nicht weniger erfreulich als eines mit einem echten Perpetuum mobile im Maschinenraum. Der 2. Hauptsatz sagt aber auch, dass Wärme immer nur zum Teil in mechanische (oder eine andere) Energie überführt werden kann, nie vollständig. Immer bleibt etwas Wärme übrig. Umgekehrt lässt sich aber jede andere Energie vollständig in Wärme umwandeln. Demnach muss der Anteil der Wärme an der gesamten Energie ständig zunehmen: Das Universum geht dem „Wärmetod“ entgegen. Besorgt braucht der Mensch deswegen nicht zu sein. Als das Sonnensystem vor rund 4 Milliarden Jahren entstand, war das Universum schon rund 10 Milliarden Jahre alt. Weitere 4 Milliarden Jahre wird die Sonne vermutlich noch weiterbrennen wie bisher; danach gibt es kein Leben mehr auf der Erde. Das Universum wird vermutlich sehr viel länger bestehen. Der Wärmetod kommt, wenn er denn kommt, langsam.

### 5.5.2 Zum Wärmehaushalt der Erde

Dass sich das Leben auf der Erde so entwickeln konnte, wie es sich entwickelt hat, verdankt es vor allem einer Größe, die sich dem Einfluss des Menschen entzieht, der **extraterrestrischen Solarkonstante**  $\varphi_s = 1,36 \text{ kW/m}^2$ . Sie ist die Flächendichte der gesamten Temperaturstrahlung, die durch die Oberflächentemperatur der Sonne im Abstand des Erdbahnradius angeliefert wird. Die Erde reflektiert einen Teil unmittelbar in den Weltraum zurück, ungefähr  $1 \text{ kW/m}^2$  kommt aber am Erdboden an und wird dort vor allem in Wärme umgesetzt, zum Teil vom Chlorophyll der Pflanzen zur **Photosynthese** verwendet, zu einem anderen Teil zum Verdampfen von Meerwasser. Dieses

kommt dann als Regen wieder herunter und kann auf seinem Rückweg zum Meer Wasserkraftwerke betreiben, die dem Menschen elektrische Energie liefern. Letzten Endes wird aber auch dieser Teil der Sonnenstrahlung zu Wärme. Wasserräder und Windmühlen befriedigen den Energiehunger der Menschen in den technisch entwickelten Ländern schon lange nicht mehr. Darum zapft man fossile Energiespeicher an, die Pflanzen und Fische vor Jahrtausenden in Form von Kohle, Erdöl und Erdgas angelegt haben. Hier treibt die Menschheit seit rund einhundert Jahren nackten Raubbau.

Die Photosynthese verwendet die Energie des Sonnenlichtes zum Aufbau komplizierter Moleküle, die mit ihrer chemischen Energie Nahrung für Mensch und Tier liefern. Zugleich wird Kohlendioxid ( $\text{CO}_2$ ) verbraucht und Sauerstoff ( $\text{O}_2$ ) erzeugt, den Mensch und Tier zum Atmen brauchen. Die Leistungsfähigkeit der Photosynthese ist groß, aber ebenso wenig unbegrenzt wie Solarkonstante und Erdoberfläche. Alles, was atmend  $\text{CO}_2$  produziert, muss auf die Dauer mit dem Sauerstoff auskommen, den die Pflanzen erzeugen. So gesehen kann sich die Menschheit nur auf Kosten der Tierwelt vermehren. Das Verfeuern fossiler Brennstoffe in Kraftwerken, Autos und Wohnraumheizungen verlangt einen zusätzlichen Anteil am Sauerstoff; Steppenbrände tun dies auch.

Das Gleichgewicht zwischen Erzeugung und Verbrauch von  $\text{O}_2$ , zwischen Verbrauch und Erzeugung von  $\text{CO}_2$  ist seit einigen Jahrzehnten erkennbar gestört: Der  $\text{CO}_2$ -Gehalt der Erdatmosphäre nimmt rasanter zu als je zuvor. Mit kaum absehbaren Folgen, denn  $\text{CO}_2$  ist ein wichtiger Vertreter der sog. „Klimagase“.

Nach dem 2. Hauptsatz wird aus der von der Erde nicht reflektierten Sonnenenergie, was immer im Einzelnen abläuft, schließlich und endlich Wärme. Sie darf nicht auf der Erde verbleiben, denn die würde sich sonst aufheizen. Loswerden kann der Erdball diese Energie nur dadurch, dass er sie in den Weltraum zurückstrahlt, aus dem sie kommt. Diese Abstrahlung wird durch die Klimagase behindert, glücklicherweise, denn ohne den dadurch bedingten **Treibhauseffekt** wäre es auf der Erde arg kalt. Nur darf man nicht über-

treiben. Das für das Leben auf der Erde so wichtige **Fließgleichgewicht** zwischen Zu- und Abstrahlung reagiert empfindlich: Zunahme des CO<sub>2</sub>-Gehaltes erhöht die Oberflächentemperatur, denn anders kann eine Behinderung der Abstrahlung nicht ausgeglichen werden. Dass dieser Prozess bereits läuft, wird kaum noch bezweifelt; nur über das Ausmaß darf man noch streiten.

5

In Kürze		
	Formel	Größe [Einheit]
<b>Absolute Temperatur</b>		
absolute Temperatur	$T = \text{Temperatur in } ^\circ\text{C} + 273,15 \text{ K}$	$T$ : absolute Temperatur [K, Kelvin]
Wärme ( $Q$ ) kinetische und Schwingungsenergie der Molekülbewegung		
Wärmekapazität	$C = \frac{Q}{\Delta T}$	$C$ : Wärmekapazität [J/K] $Q$ : Wärmemenge [J, Joule] $\Delta T$ : Temperaturänderung durch Zuführen von $Q$
Spezifische Wärmekapazität	$c = \frac{C}{m}$ Wärmekapazität bezogen auf die Masse	$C$ : spez. Wärmekapazität $\left[ \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right]$ $m$ : Masse [kg]
<b>Gasgesetz</b>		
Gasgesetz	$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$	$p$ : Druck [Pa] $V$ : Volumen [m <sup>3</sup> ] $n$ : Anzahl der Mole [mol] $Gaskonstante$ : $R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$
<b>Osmose</b> Druckdifferenz über eine semipermeable Membran		
Van 't-Hoff-Gleichung:	$\Delta p = \frac{n}{V} R \cdot T$ Druckdifferenz einer Lösung mit $n$ Mol aktiver Teilchen gegenüber dem reinen Lösungsmittel	
<b>Wärmeleitung und Diffusion</b>		
Der Wärmestrom (Teilchenstrom) ist proportional zum Temperaturgradienten (Konzentrationsgradienten).		
<b>1.Hauptsatz</b> (Energieerhaltungssatz)		
Energieerhaltungssatz	$Q = \Delta U + W$	$Q$ : Wärmemenge [J] $U$ : innere Energie [J] $W$ : mechanische Arbeit [J]

## Übungsfragen

(● leicht; ●● mittel; ●●● schwer)

- 1. Wenn ein Stahlband (Ausdehnungskoeffizient im Anhang) um die Erde gelegt würde, sodass es bei 20 °C gerade passt, wie viel würde es über der Erde schweben (überall gleicher Abstand) wenn man es auf 30 °C erwärmt?
- 2. Ein Gas befindet sich auf einer Temperatur von 0 °C. Auf welchen Wert muss man die Temperatur erhöhen, um die mittlere Geschwindigkeit der Moleküle zu verdoppeln?
- 3. Um welchen Faktor steigt der Druck eines in einem bestimmten Volumen eingeschlossenen Edelgases, wenn die mittlere kinetische Energie der Atome verdoppelt wird?
- 4. Unter Normalbedingungen wiegt ein Liter Luft 1,293 g. Wie groß ist die mittlere Molekülmasse?
- 5. Das beste im Labor erreichbare Vakuum ist etwa  $10^{-10}$  Pa. Wie viel Moleküle befinden sich dann etwa in einem Kubikzentimeter bei 20 °C?

## Dampfdruck

- 6. Wie groß ist der Luftdruck, wenn Wasser schon bei 90 °C kocht?
- 7. Es ist Winter und Sie sind in einem Raum bei 20 °C und 52% Luftfeuchtigkeit. Sie beobachten, dass das Fenster beschlägt. Welche Temperatur hat dann die Glasoberfläche höchstens? (Benutzen Sie die Wassertabelle im Anhang)

## Gasgesetz

- 8. Eine halbleere Sprudelflasche habe bei 20 °C einen Innendruck von 1,5 bar. Sie wird in die Sonne gestellt und die Temperatur steigt auf 50 °C. Auf etwa welchen Wert steigt der Druck in der Flasche?
- 9. Eine Gasmenge wird so weit abgekühlt, dass sich sowohl ihr Volumen als auch ihr Druck halbiert. Um welchen Faktor hat sich die absolute Temperatur vermindert?
- 10. Aus einer 50 l Druckflasche mit Helium werden Kinderluftballons aufgeblasen. Ursprünglich waren 28 bar in der Flasche, nach vielen Ballons sind nur noch 5 bar Druck auf der Flasche. Wie viel Prozent der ursprünglichen Gasmenge sind noch in der Flasche? Etwa wie viel Ballons (Durchmesser 30 cm) wurden aufgeblasen?
- 11. Ein Kühlschrank mit einem Volumen von 155 l hat eine Tür mit 0,32 m<sup>2</sup> Innenfläche, die offen steht. Der Kühlschrank ist abgeschaltet und deshalb ist es in ihm 20 °C warm bei 1 bar. Nun wird der Kühlschrank geschlossen und angeschaltet. Die Innentemperatur sinkt auf 7 °C. Angenommen, der Schrank ist luftdicht, welche Kraft braucht man, um die Tür wieder aufzureißen? Tatsächlich haben die Hersteller an das Problem gedacht und irgendwo ein kleines Loch zum Druckausgleich eingebaut. Wie viel Luft strömt durch dieses in den Kühlschrank?

## Wärmekapazität

- 12. Ein Tauchsieder habe eine elektrische Leistungsaufnahme von 350 W. Wie lange braucht er, um eine Tasse Suppe (250 ml) von 20 °C auf 50 °C zu heizen?
- 13. Es wird 1 Liter Wasser bei 0 °C mit 2 Liter Wasser bei 100 °C zusammengemischt. Welche Mischtemperatur stellt sich ein?
- 14. Um einen Kupferklotz von 20 °C auf 40 °C zu erwärmen, werden 2 kJ gebraucht. Wie groß ist seine Wärmekapazität?
- 15. Ein gepflegtes Bier soll mit 8 °C serviert werden. Ehe der Organismus die in ihm gespeicherte chemische Energie von 1,88 kJ/g verwerten kann, muss er es auf Körpertemperatur aufwärmen. Welcher Bruchteil des Brennwertes wird dafür gebraucht? Bier besteht im Wesentlichen aus Wasser.
- 16. Für die Reibungswärme des Blutstromes bringt das Herz des Menschen eine Pumpleistung  $P_0$  von ungefähr 1,6 W auf (s. Frage 13). Angenommen, es arbeite mit einem Nutzeffekt von 25%, welche Leistung  $P$  muss es dann von seiner Energiequelle anfordern? Weiter angenommen, es beziehe diese Leistung vollständig aus der Verbrennung von Glukose (Heizwert 17 kJ/g), welcher Massenstrom  $dm/dt$  von Glukose muss dann ständig angeliefert werden? Weiterhin angenommen, Glukose sei im Blut mit einer Massendichte  $c = 100$  mg/dl gelöst, mit welcher Blutstromstärke  $I$  muss sich das Herz mindestens selbst versorgen? Im letzten Schritt wird der Glukosestrom  $dm/dt$  per Diffusion durch eine Aderwand transportiert. Setzt man den Diffusionsweg  $\Delta x$  kurzerhand mit 0,1 mm an und die Glukosekonzentration im Gewebe des Herzmuskels der Einfachheit gleich null, welcher Konzentrationsgradient  $c'$  steht der Diffusion dann zur Verfügung? Messungen legen nahe, den Diffusionskoeffizienten  $D$  der Glukose im Muskelgewebe auf den runden Wert  $1 \cdot 10^{-6}$  cm<sup>2</sup>/s zu schätzen. Welche Diffusionsfläche  $A$  ist dann für die Versorgung des Herzens mindestens notwendig? Zweifelloos kann man mit derart groben Annahmen nur Größenordnungen herausfinden; es lohnt nicht, zu den Zehnerpotenzen auch noch Faktoren mit dem Taschenrechner zu bestimmen. Trotz aller Ungenauigkeit sollte man aber den Nutzen solcher Überschlagsrechnungen nicht unterschätzen.

## Osmose

- 17. Eine wässrige Salzlösung und reines Wasser sind durch eine semipermeable Membran getrennt, die die Salzionen nicht durchlässt. Auf welcher Seite steigt der Wasserspiegel?
- 18. Eine semipermeable Membran trennt einen Behälter mit reinem Lösungsmittel von einem zweiten mit einer Lösung. Die Temperatur beträgt 20 °C. Um wie viel erhöht sich der osmotische Druck, wenn die Konzentration der osmotisch wirksamen Teilchen um 0,2 mol/Liter erhöht wird?
- 19. Um welchen Faktor erhöht sich der osmotische Druck über einer semipermeablen Membran, wenn man die Temperatur von 0 °C auf 273 °C erhöht?

## Wärmeaustausch

•• 20. Die Erde erhält eine Leistung von ca.  $1000 \text{ W}$  pro Quadratmeter senkrecht angestrahlter Fläche von der Sonne und strahlt diese auch wieder in den Weltraum ab (die Erde ist im Gleichgewicht). Angenommen, die Erde ist ein schwarzer Strahler, was ergibt sich für eine mittlere Oberflächentemperatur der Erde? Bedenken Sie, dass immer nur die halbe Erde angestrahlt wird, aber die ganze Erde abstrahlt.

# Elektrizitätslehre

## 6.1 Die wichtigsten Messgrößen – 159

- 6.1.1 Strom, Spannung, Ladung – 159
- 6.1.2 Leistung und Energie – 162

## 6.2 Die wichtigsten Zusammenhänge – 163

- 6.2.1 Elektrischer Widerstand – 163
- 6.2.2 Das Ohm'sche Gesetz – 164
- 6.2.3 Stromwärme – 165
- 6.2.4 Kapazität – 166
- 6.2.5 Energie des geladenen Kondensators – 167

## 6.3 Wechselspannung – 168

- 6.3.1 Effektivwerte – 168
- 6.3.2 Kapazitiver Widerstand – 170

## 6.4 Elektrische Netzwerke – 171

- 6.4.1 Widerstände in Reihe und parallel – 171
- 6.4.2 Spezifischer Widerstand (Resistivität) – 173
- 6.4.3 Spannungsteiler – 174
- 6.4.4 Innenwiderstände – 176
- 6.4.5 Hoch- und Tiefpass – 177
- 6.4.6 Kondensatorentladung und e-Funktion – 178

## 6.5 Elektrisches Feld – 180

- 6.5.1 Der Feldbegriff – 180
- 6.5.2 Elektrisches Potential – 181
- 6.5.3 Das Potentialfeld – 183
- 6.5.4 Kräfte zwischen Ladungen – 186
- 6.5.5 Feld im Kondensator – 188
- 6.5.6 Energie des elektrischen Feldes – 189

## 6.6 Materie im elektrischen Feld – 190

- 6.6.1 Influenz und elektrische Abschirmung – 190
- 6.6.2 Der elektrische Strom – 191

- 6.6.3 Dielektrizitätskonstante (Permittivität) – 192
- 6.6.4 Das freie Elektron – 194
- 6.6.5 Ruhmasse und relativistische Masse – 197
- 6.6.6 Gasentladung – 198

## **6.7 Elektrochemie – 199**

- 6.7.1 Dissoziation – 199
- 6.7.2 Elektrolyte – 201

## **6.8 Grenzflächen – 203**

- 6.8.1 Membranspannung – 203
- 6.8.2 Galvani-Spannung – 205
- 6.8.3 Thermospannung – 206

## **6.9 Elektrophysiologie – 207**

- 6.9.1 Die Auswertung des EKG nach Einthoven – 207
- 6.9.2 Elektrische Unfälle – 209
- 6.9.3 Schutzmaßnahmen – 210

## **6.10 Magnetische Felder – 212**

- 6.10.1 Einführung – 212
- 6.10.2 Kräfte im Magnetfeld – 215
- 6.10.3 Erzeugung von Magnetfeldern – 217

## **6.11 Induktion – 219**

- 6.11.1 Einführung – 219
- 6.11.2 Transformatoren – 222
- 6.11.3 Selbstinduktion – 223
- 6.11.4 Induktiver Widerstand – 225

## **6.12 Elektrische Schwingungen – 226**

- 6.12.1 Der Schwingkreis – 226
- 6.12.2 Überlagerung von Schwingungen – 229
- 6.12.3 Geschlossene elektrische Feldlinien – 230
- 6.12.4 Der schwingende elektrische Dipol – 230



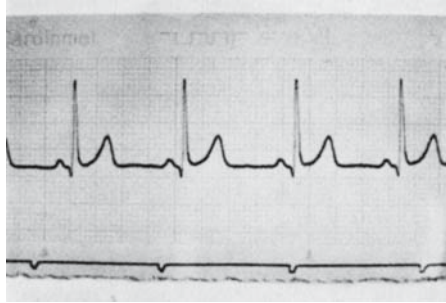
## ➤ ➤ Einleitung

Elektrische Energie ist heutzutage die handlichste aller Energieformen. Sie lässt sich vielseitig nutzen und nahezu überall bereithalten, sofern ein dichtes Netz von Kraftwerken, Überlandleitungen, Umspannstationen, Kabeln und Steckdosen erst einmal installiert worden ist. Allerdings kann der Mensch auch diesen technischen Komfort nur unter Gefahr für Leib und Leben nutzen: Die Verhütung elektrischer Unfälle verlangt permanente Aufmerksamkeit. Die Natur hat organisches Leben untrennbar mit elektrischen Erscheinungen verknüpft. Das ermöglicht Unfälle, aber auch segensreiche Geräte für Diagnose (Elektrokardiograph) und Therapie (Herzschrittmacher). Zwischen elektrischen und magnetischen Feldern besteht eine so enge Verbindung, dass der Magnetismus mit unter der Überschrift „Elektrizitätslehre“ besprochen werden kann.

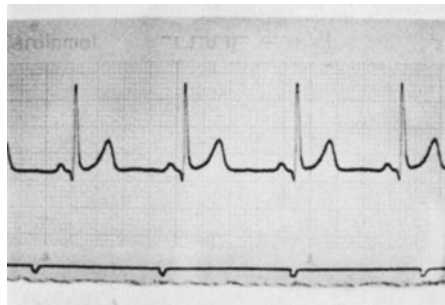
## 6.1 Die wichtigsten Messgrößen

Wo immer elektrische Erscheinungen quantitativ behandelt werden, spielen die drei Messgrößen elektrische Spannung, elektrischer Strom und elektrische Ladung wichtige Rollen.



### 6.1.1 Strom, Spannung, Ladung

Um ein **Elektrokardiogramm** (EKG) aufzeichnen zu können, muss der Arzt seinem Patienten mindestens drei Elektroden anschnallen, an beide Handgelenke und ein Fußgelenk, meist auch noch einige mehr auf die Brust. Alle werden durch elektrisch leitende Kupferlitzen mit dem Kardiographen verbunden. Wenn alles in Ordnung ist, zeichnen die Schreibstifte des Kardiographen mehrere Kurven auf seinen Registrierstreifen, von denen eine so aussieht wie die der  Abb. 6.1. Ihre medizinische Bedeutung braucht hier nicht behandelt zu werden. Jedenfalls zuckt der Schreibstift synchron zum Puls des Patienten. Offensichtlich ist das Herz nicht nur eine pulsierende Pumpe für das Blut, sondern auch eine pulsierende Quelle elektrischer Energie.

Wer sich Grundkenntnisse in einem ihm neuen Gebiet aneignen will, beginnt zweckmäßigerweise nicht mit so Kompliziertem.



■ **Abb. 6.1. Elektrokardiogramm** eines gesunden Menschen; unten Zeitmarken im Sekundenabstand, Pulsfrequenz demnach ca. 72/min = 1,2 Hz

Schraubt man ein Taschenlampenbirnchen in eine passende Fassung und verbindet man deren Klemmen durch Kupferdrähte mit den Polen einer Taschenlampenbatterie, so leuchtet das Lämpchen auf ( Abb. 6.2). Elektrotechniker beschreiben diesen einfachen Stromkreis mit einer **Schalt-skizze** nach Art der  Abb. 6.3. Das liegende Kreuz im Kreis steht für eine Glühlampe, die beiden ungleichen Querstriche entsprechen der Batterie, die Drähte werden durch gerade Linien repräsentiert. Weil es übersichtlicher ist, setzt man sie aus senkrechten und waagerechten Geraden zusammen, auch wenn die Drähte krumm und schief im Gelände liegen sollten. In der Skizze ist noch zusätzlich ein Schalter eingezeichnet. Öffnet man ihn, so erlischt die Glühlampe. In der fotografierten Schaltung würde man zu diesem Zweck einen der beiden Drähte an einem seiner beiden Enden abklemmen.

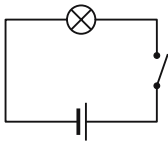
#### Merke

Ein **elektrischer Strom** fließt nur in einem geschlossenen Stromkreis, und er fließt nur, wenn eine **elektrische Spannung** im Kreis ihn dazu anhält.

Diese Formulierungen erwecken den Eindruck, als wisse man, dass in einem Stromkreis etwas „Elektrisches“ in ähnlicher Weise ströme wie beispielsweise Wasser in einer Wasserleitung oder Blut in den Adern eines Menschen. Ganz falsch ist dieser Eindruck ja auch nicht. Aber es hat vielen Forschern und vielen Technikern ungezählte Ar-



■ Abb. 6.2. Stromkreis. Batterie und Glühlampe als geschlossener Stromkreis



■ Abb. 6.3. Schaltskizze zur Schaltung von ■ Abb. 6.2

beitsstunden gekostet, um im Einzelnen herauszufinden, was da im Einzelfall strömt und es wird etlicher Seiten dieses Buches bedürfen, um wenigstens die wichtigsten Erkenntnisse vollständig darzustellen. An dieser Stelle kann soviel gesagt werden:

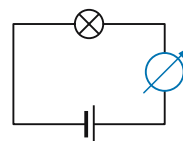
Ein elektrischer Leitungsstrom transportiert **elektrische Ladung**, und zwar dadurch, dass elektrisch geladene, submikroskopische Teilchen im Leiter entlang strömen, sog. **Ladungsträger**. Speziell im Metall sind das **Elektronen**, also die kleinsten und leichtesten unter den sog. **Elementarteilchen**, aus denen sich alle Materie der Welt zusammensetzt. Im Metall sind Elektronen als bewegliche Ladungsträger allemal vorhanden, ob nun ein Strom fließt oder nicht. Die Spannung der Batterie erzeugt sie nicht, sie setzt sie lediglich in Bewegung. Dabei treten aus dem einen Pol der Batterie ebenso viele Elektronen heraus und in das eine Ende des einen Drahtes hinein wie aus dem anderen Ende des anderen Drahtes heraus in den anderen Pol der Batterie hinein.

Wie misst man einen elektrischen Strom? Im Einzelnen kann dies hier noch nicht dargestellt werden. Als Experimentator darf man sich aber darauf verlassen, dass die Hersteller im Han-

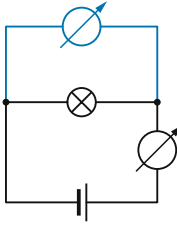
del erhältlicher Strommesser schon wissen, wie man brauchbare Instrumente herstellt und eicht. Im Internationalen Einheitensystem ist der elektrische Strom Basisgröße, bekommt die Basiseinheit **Ampère** = A (zu Ehren von André Marie Ampère, 1775–1836) und üblicherweise das Buchstabensymbol  $I$ . Zuweilen wird der Strom  $I$  auch **Stromstärke** genannt. Bei Spannungsmessern verlässt man sich ebenfalls auf den Fachhandel. Die elektrische Spannung bekommt die SI-Einheit **Volt** = V (zu Ehren von Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta, 1745–1827) und üblicherweise den Kennbuchstaben  $U$ .

Wer sich noch nicht auskennt, den mag überraschen, dass er in Laboratorien häufig sog. **Vielfachinstrumente** vorfindet, die nicht nur über mehrere Messbereiche verfügen, sondern sowohl Ströme als auch Spannungen zu messen vermögen. Wieso sie beides können, wird erst später klar. Folgendes überlegt man sich aber leicht: Ein **Strommesser** misst nur denjenigen Strom, der durch das Messwerk zwischen seinen beiden Anschlussklemmen hindurchläuft, das Instrument muss *im* Stromkreis liegen, mit Batterie und Glühlampe in Reihe (oder auch in Serie), wie in ■ Abb. 6.4. Dabei ist es gleichgültig, auf welcher Seite es sich im Stromkreis befindet, rechts oder links. Ein **Spannungsmesser** hingegen soll die Spannung der Batterie unbeeindruckt vom restlichen Stromkreis messen. Er muss parallel zu der Batterie und dem Lämpchen geschaltet werden (■ Abb. 6.5). Die Batterie hat eine Spannung zu liefern, damit der Strom fließen kann. Sie muss eine **Spannungsquelle** sein, aber ebenso auch eine **Stromquelle**.

Wenn ein Strom fließt, wird elektrische Ladung zwar transportiert, alles in allem aber nur im Stromkreis herumgeschoben. In Gedanken kann man sich an eine bestimmte Stelle des Kreises setzen und die dort in der Zeitspanne  $\Delta t$  vorbeigelaufene Ladung  $Q$  bestimmen. Sie wächst mit



■ Abb. 6.4. Ein Strommesser wird in Reihe mit dem „Verbraucher“ geschaltet



■ Abb. 6.5. Ein Spannungsmesser wird parallel zu Batterie und Glühlampe („Verbraucher“) geschaltet

der Stromstärke  $I$ . Bei zeitlich konstantem Strom  $I_0$  genügt einfache Multiplikation:

$$\text{elektrische Ladung } Q = I_0 \cdot \Delta t.$$

Ändert sich  $I$  mit der Zeit, muss integriert werden:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} I(t) \cdot dt.$$

Daraus folgt als SI-Einheit der Ladung die Amperesekunde  $\text{A} \cdot \text{s}$ . Sie wird auch **Coulomb** genannt (zu Ehren von Charles Augustin de Coulomb, 1736–1806) und C geschrieben.

#### Merke

Elektrischer Strom  $I$ , Basisgröße des Internationalen Einheitensystems, Einheit 1 Ampère = 1 A.

Elektrische Spannung  $U$ , abgeleitete Größe, Einheit 1 Volt = 1 V.

Elektrische Ladung  $Q = I_0 \cdot \Delta t$ , Einheit 1 Coulomb = 1 C = 1 A · s.

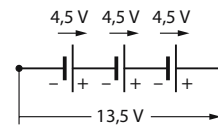
Elektrische Ladung wird immer von bestimmten Elementarteilchen in der Materie getragen, von Elektronen und Protonen. Diese sind auch die wichtigsten Bausteine der Atome. Der Betrag dieser Ladung ist für beide Elementarteilchen gleich und wird **Elementarladung**  $e_0$  genannt. Ihr Wert ist:

$$\text{Elementarladung } e_0 = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As.}$$

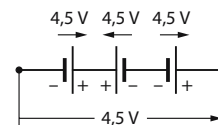
Dies ist zugleich die kleinste mögliche Ladungsmenge. Es wurden noch nie Bruchteile davon beobachtet.

In welcher Richtung fließt denn nun der Strom im Stromkreis herum, in welcher Richtung die Elektronen, mit dem Uhrzeiger oder gegen ihn? Schaut man eine Taschenlampenbatterie genau an, so findet man in der Nähe des einen Pols ein stehendes Kreuz, ein Pluszeichen; es markiert den sog. **Pluspol**. Dann versteht sich auch ohne Markierung, dass der andere Pol der Minuspol ist. Das ist Konvention, man hätte auch rote und grüne Punkte malen können. Man sagt nun ferner, im äußeren Teil des Stromkreises fließe der Strom vom Pluspol zum Minuspol, von Plus nach Minus. Auch das ist Konvention, und darum spricht man von der **konventionellen Stromrichtung**. Später hat sich nämlich herausgestellt, dass die Elektronen negative elektrische Ladung tragen und im Draht der konventionellen Stromrichtung entgegenströmen. Generell sieht man einen Stromkreis als „geschlossen“ an und muss darum sagen, nur außen fließe der Strom von Plus nach Minus, innerhalb der Spannungsquelle aber von Minus nach Plus.

Dass es nützlich ist, die Klemmen der Batterie mit den mathematischen Vorzeichen + und – zu bezeichnen, zeigt sich, wenn man mehrere Batterien elektrisch hintereinander schaltet, wenn man sie also in Reihe schaltet: Bei richtiger Polung, immer Plus an Minus, addieren sie ihre Spannungen (■ Abb. 6.6); liegt aber eine Batterie falsch herum (■ Abb. 6.7), so subtrahiert sie ihre Spannung von der Summe der anderen. Mathematisch ist ei-



■ Abb. 6.6. Batterien in Reihe. Drei Taschenlampenbatterien in Reihe geschaltet: Ihre Einzelspannungen  $U_0$  addieren sich zu  $U = 3U_0$



■ Abb. 6.7. Batterien in Reihe. Eine der drei Batterien liegt „verkehrt herum“; sie subtrahiert ihre Spannung von der Summenspannung der beiden anderen:  $U = 2 U_0 - U_0 = U_0$

ne Subtraktion aber nur eine Addition mit negativen Vorzeichen. Darum darf man die Gesamtspannung  $U$  einer Reihe hintereinander geschalteter Spannungsquellen als Summe der Einzelspannungen  $U_1, U_2$  usw. schreiben:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n = \sum_{i=1}^n U_i$$

An dieser Stelle sei die misstrauische Frage erlaubt: Haben denn nun Wirbeltierherz und Taschenlampenbatterie wirklich etwas miteinander zu tun? Kann man etwa ein EKG auch mit einem Vielfachinstrument beobachten? Kann man umgekehrt die Spannung einer Batterie mit einem Kardiographen überprüfen? Der Besitzer des Vielfachinstruments darf bedenkenlos das ihm zukommende Experiment ausführen und sich überzeugen: Es geht nicht. Der Besitzer des Kardiographen aber sei gewarnt: Möglicherweise muss sein kostbares Gerät anschließend zur Reparatur. Herz und Batterie haben schon etwas miteinander zu tun, nur liegen die Spannungen, die sie abgeben, um rund einen Faktor Tausend auseinander; der Vielfachmesser ist nicht empfindlich genug für das EKG und der Kardiograph zu empfindlich für die Batterie.

Im Bereich **Mikrovolt** ( $\mu\text{V}$ ) liegen die Signale, die Fernsehantennen aus dem Äther fischen; Muskelkontraktionen erzeugen **Millivolt** ( $\text{mV}$ ) bis Zehntelvolt. Einige Volt sind für den Menschen ungefährlich, solange sie über die Haut angelegt werden (und nicht etwa über einen Herzkatheter!). Die 220 V der Steckdose sind aber keineswegs mehr harmlos. Hochspannungsleitungen im Bereich **Kilovolt** ( $\text{kV}$ ) bekommen bereits Warnschilder. Überlandleitungen bevorzugen 340  $\text{kV} = 0,34 \text{ MV}$  (**Megavolt**); Berührung ist tödlich. Röntgenröhren werden nicht selten mit ähnlich hohen Spannungen betrieben. Blitze können es auf viele **Gigavolt** bringen.

## 6.1.2 Leistung und Energie

„Elektrizität“ ist vielseitig verwendbar. Man kann mit ihr eine Armbanduhr betreiben, seinen Schreibtisch beleuchten, Brot rösten, ein Zimmer heizen oder auch eine Schnellzuglokomotive

laufen lassen. Diese fünf Beispiele sind hier nach „steigendem Verbrauch“ aufgelistet, zuweilen „Stromverbrauch“ genannt. Was ist damit gemeint? Ausdrücklich sei betont: Der elektrische Strom fließt in einem geschlossenen Stromkreis. Er wird dabei nicht „verbraucht“. Häufig dient das Wort „Strom“ als Ersatz für die sprachlich unbequemere „elektrische Energie“. Auch Energie lässt sich nicht „verbrauchen“ in dem Sinn, dass sie verschwände; sie lässt sich aber umwandeln von einer Form in eine andere. Dabei ist elektrische Energie höherwertig, weil besser verwendbar als z. B. die Wärme der Zimmerluft, die man zwar aus elektrischer Energie gewinnen, aber nur schwer vollständig in sie zurückverwandeln kann. Letzten Endes ist eine derartige „Entwertung“ elektrischer Energie gemeint, wenn man von Energie- oder gar *Stromverbrauch* redet.

Eine anfahrende Lokomotive verlangt mehr Energie in kürzerer Zeit als eine leuchtende Glühbirne: Die oben aufgelisteten fünf Möglichkeiten sind nach steigender Leistung geordnet. Elektrische Leistung  $P$  wird immer dann umgesetzt, wenn bei einer Spannung  $U$  ein Strom  $I$  fließt;  $P$  ist zu beiden proportional: **elektrische Leistung**  $P = I \cdot U$  (Einheit 1 **Watt** = 1  $\text{W} = 1 \text{ V} \cdot \text{A}$ ). Wenn man die Spannungsquelle umpolt, wechselt auch der Strom sein Vorzeichen. Für die Leistung hat das an dieser Stelle keine Bedeutung: Als Produkt von  $U$  und  $I$  bleibt sie positiv. Minus mal Minus gibt Plus, sagt die Mathematik.

### Merke

Elektrische Leistung

$$P = U \cdot I$$

Einheit: 1 Watt = 1  $\text{W} = 1 \text{ V} \cdot \text{A}$ .

Die Typenschilder elektrischer Geräte können ein gewisses Gefühl für physikalische Leistung vermitteln. In einer Schreibtischlampe sind 100 W genug bis reichlich. Der Mensch vermag sie mit seiner Beinmuskulatur für eine Weile zu liefern. Er versagt aber beim Kilowatt ( $\text{kW}$ ) eines kleinen Heizlüfters. Kraftwerke werden heutzutage für Leistungen über 1000 Megawatt = Gigawatt =  $10^9 \text{ W}$  ausgelegt. Sinnesorgane wie Auge und Ohr sprechen, wenn sie gesund und ausgeruht sind, bereits auf

Signalleistungen von 1 Picowatt = 1 pW =  $10^{-12}$  W an.

Der Stromkunde muss dem Versorgungsunternehmen die **elektrische Energie**  $\Delta W_{\text{el}}$  bezahlen, nach den Überlegungen des ► Kap. 2.2.3 also das Zeitintegral der elektrischen Leistung  $P(t)$ .

#### Merke

Elektrische Energie (Leistung mal Zeit)

$$\Delta W_{\text{el}} = \int_{t_0}^{t_1} P(t) \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} U(t) \cdot I(t) \cdot dt.$$

Die Einheiten Volt und Ampere wurden so definiert, dass die elektrische Energieeinheit **Wattsekunde** mit dem **Joule** übereinstimmt.

#### Merke

1 Wattsekunde = 1 Joule = 1 Newtonmeter,  
1 Ws = 1 J = 1 Nm.

Diese Beziehung muss man sich merken. Auf jeden Fall braucht man sie, wenn man in irgendeiner Formel zwischen elektrischen und mechanischen Größen und ihren Einheiten hin- und herrechnen muss. Das kommt gar nicht so selten vor.

Für praktische Zwecke ist die Wattsekunde, ist das Joule unangenehm klein. Elektrizitätswerke rechnen in **Kilowattstunden** (1 kWh = 3,60 MJ) und verlangen derzeit dafür einen Arbeitspreis von ungefähr 8 Cent.

Der obige Vergleich der Einheiten für die Energie wirft nun allerdings die Frage auf, was Spannung mal Strom mal Zeit (also Spannung mal Ladung) denn mit Kraft mal Weg zu tun hat. Tatsächlich kann man sich den Stromfluss mechanisch vorstellen: Die Elektronen werden im Stromkreis von der Batterie herumgepumpt. Dabei muss ein Widerstand, der sich aus Stößen der Elektronen mit den Atomen im Metall ergibt, überwunden werden. Eine Kraft muss die Elektronen vorantreiben. Die Spannung ist sowohl ein Maß für diese elektrische Kraft, als auch ein Maß für den Weg, den die Elektronen zurücklegen. Genaueres zu diesen Vorgängen auf atomarer Ebene folgt in ► Kap. 6.5.1.

#### Rechenbeispiel 6.1: Wie viel ist ein Blitz wert?

► **Aufgabe.** Ein anständiger Blitz hat eine Spannung von vielleicht 1 GV, führt einen Strom der Größenordnung  $10^5$  A und dauert ungefähr 100  $\mu$ s an. Welche Energie setzt er ungefähr um und was wäre sie im Kleinhandel wert?

► **Lösung.** Wir nehmen einmal an, der Strom wäre über die ganze Zeit konstant. Das ist dann eine Energie:  $W = U \cdot I \cdot \Delta t = 10^9 \text{ V} \cdot 10^5 \text{ A} \cdot 10^{-4} \text{ s} = 10^{10} \text{ Ws} = 2800 \text{ kWh}$ . Das entspricht etwa 220 Euro, wenn man die Energie denn nutzen könnte.

## 6.2 Die wichtigsten Zusammenhänge

### 6.2.1 Elektrischer Widerstand

Welche Leistung ein Kunde seinem Elektrizitätswerk abnimmt, hängt allemal von der Spannung an der Steckdose ab: ohne Spannung weder Strom noch Leistung. Ist die Spannung aber vorhanden, dann entscheidet der Kunde selbst, insofern nämlich, als das Gerät, das er anschließt, einen bestimmten **Leitwert** besitzt, der einen Stromfluss erlaubt, oder, umgekehrt formuliert, dem Stromfluss einen bestimmten **Widerstand** entgegensetzt. Die beiden Worte dienen als Namen physikalischer Größen:

**elektrischer Widerstand**  $R = U/I$   
mit der Einheit 1 Ohm =  $1 \Omega = 1 \text{ V/A}$ ,

**elektrischer Leitwert**  $G = I/U$   
mit der Einheit Siemens =  $1/\Omega$ .

#### Merke

Elektrischer Widerstand

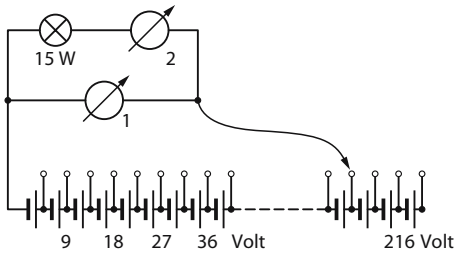
$$R = \frac{U}{I},$$

mit der Einheit 1 Ohm =  $1 \Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}$ ,  
elektrischer Leitwert

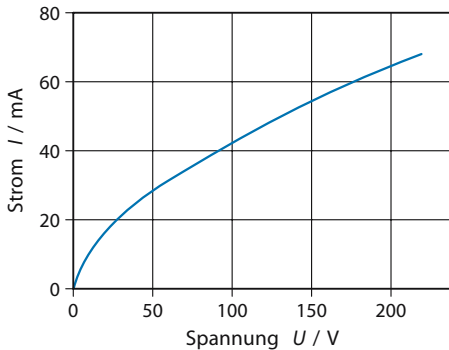
$$G = \frac{I}{U} = \frac{1}{R},$$

mit der Einheit 1 Siemens =  $\frac{1}{\Omega}$ .

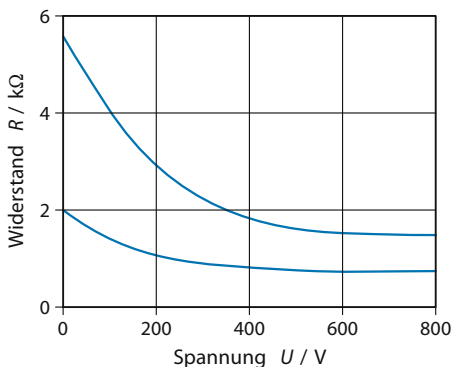
Es ist nicht üblich, aber durchaus möglich, eine Nachttischlampe (230 V, 15 W) mit Taschenlampenbatterien zu betreiben: 51 von ihnen, in Reihe



■ **Abb. 6.8. Kennlinie.** Schaltung zur Messung der Strom-Spannungs-Kennlinie einer Glühbirne (welches der beiden hier mit 1 und 2 bezeichneten Instrumente ist der Spannungsmesser?)



■ **Abb. 6.9. Strom-Spannungs-Kennlinie** einer Glühbirne (220–230 V, 15 W)



■ **Abb. 6.10. Widerstand des Menschen.** Grenzkurven der Widerstandskennlinien menschlicher Leichen; *obere Grenzkurve*: zarte Gelenke, trockene Haut; *untere Grenzkurve*: starke Gelenke, feuchte Haut

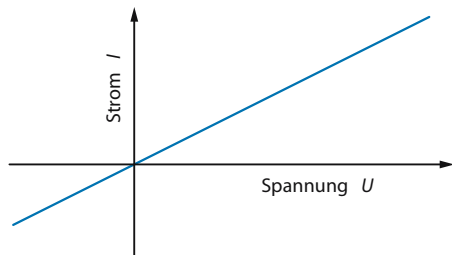
geschaltet, liefern 229,5 V. Das halbe Volt Unterspannung stört nicht. Für 15 W Leistung benötigt die Glühbirne, wie man leicht nachrechnet, 65 mA Strom. Das entspricht einem Widerstand von 3,5 k $\Omega$ . Nimmt man jetzt eine Taschenlampenbatterie nach der anderen heraus (■ Abb. 6.8), so gehen mit der Spannung auch Strom und Leistung zurück. Abbildung 6.9 zeigt die **Strom-Spannungs-Kennlinie** der Glühbirne. Mit steigender Spannung wird die Kurve immer flacher,  $I$  steigt weniger als proportional zu  $U$ : Der Leitwert nimmt ab, der Widerstand zu. Das muss nicht so sein. Bei lebenden Organismen kommt gerade das Umgekehrte häufig vor. Alle Menschen sind verschieden, und darum gibt es auch nicht *den* elektrischen Widerstand des Menschen; aber man kann doch Grenzwerte bestimmen, gemessen z. B. über großflächige Elektroden an beiden Handgelenken. Abbildung 6.10 zeigt das Ergebnis einer solchen Messung, durchgeführt an frischen Leichen. Vor einem Nachmessen an lebendigen Versuchspersonen sei dringend gewarnt! Die Ströme sind tödlich.

Beide Beispiele zeigen, dass der Widerstand sich mit der Spannung beziehungsweise dem Strom ändern kann. In wichtigen Fällen ist das aber nicht so, der Widerstand bleibt immer gleich. Davon handelt das nächste Kapitel.

## 6.2.2 Das Ohm'sche Gesetz

Auch wenn man es in einigen Büchern anders liest: Die Gleichung  $R = U/I$  ist die Definitionsgleichung des elektrischen Widerstandes und nicht das **Ohm'sche Gesetz**. Das verlangt nämlich die schnurgerade Strom-Spannungs-Kennlinie der ■ Abb. 6.11, also eine Proportionalität zwischen  $I$  und  $U$ , einen von  $U$  unabhängigen Widerstand  $R$ . Viele, vor allem technische Widerstände, wie sie in der Elektronik verwendet werden, erfüllen diese Bedingung; man bezeichnet sie deshalb als **ohmsche Widerstände**. Hier muss auf eine Besonderheit der deutschen Sprache aufmerksam gemacht werden: Sie verwendet die Vokabel „Widerstand“ sowohl für das Objekt, das man anfassen und in eine Schaltung einlöten kann, als auch für dessen physikalische Kenngröße  $R$ . Das er-





■ **Abb. 6.11. Ohmscher Widerstand.** Strom-Spannungskennlinie eines ohmschen Widerstandes; sie ist immer eine Gerade durch den Nullpunkt

laubt die Behauptung, ein Widerstand habe einen Widerstand. Die Angelsachsen können zwischen dem Gegenstand „resistor“ und der Größe „resistance“ sprachlich unterscheiden.

#### Merke

Das Ohm'sche Gesetz verlangt eine Proportionalität zwischen Strom und Spannung, also einen spannungsunabhängigen Widerstand.

Ohmsche Widerstände kommen in Technik und Laboratorium so häufig vor, dass manche Schulbücher so tun, als gäbe es nichts anderes. Metalldrähte etwa, ob nun gerade gespannt oder auf einen Keramikzylinder aufgewickelt, sind ohmsch, allerdings dabei abhängig von der Temperatur. Auch die Glühlampe hätte eine ohmsche Kennlinie, wenn sich der Glühfaden nicht erhitzte. In Schaltskizzen bekommt der Widerstand ein flaches Rechteck als Symbol (es erscheint zum ersten Mal in ■ Abb. 6.19); wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, ist damit ein ohmscher Widerstand gemeint.

Auch zwischen den Klemmen eines Vielfachinstruments liegt ein – meist ohmscher – (Innen-)Widerstand. Eben deshalb kann es Ströme wie Spannungen messen, denn zu jedem Strom gehört eine bestimmte Spannung und umgekehrt. Durch eine geeignete Anpassung der internen Schaltung im Instrument muss man nur für den richtigen Innenwiderstand sorgen (► Kap. 6.4.4).

### 6.2.3 Stromwärme

Elektrische Erscheinungen sind schnell. Wenn man das Licht im Wohnzimmer mit dem Schalter neben der Tür anknipst, leuchten die Glühlampen sofort auf. Das heißt aber nicht, dass beim Schalten Elektronen in den Startlöchern gestanden hätten und wie der Blitz zu der Lampe gerannt wären. Wozu auch? Marschbereite Elektronen finden sich überall im Metall, auch in den Glühlampen. Schnell war nur die Übermittlung des Marschbefehls; er läuft praktisch mit Lichtgeschwindigkeit den Draht entlang, vom Schalter zur Lampe.

Elektronen im Draht müssen sich mühsam zwischen dessen atomaren Bausteinen, den Ionen des jeweiligen Metalls, hindurchquälen. Da kommt es ständig zu Stößen, die einerseits den Bewegungsdrang der Elektronen dämpfen: Sie kommen nur einige Zehntel Millimeter pro Sekunde voran und keineswegs mit Lichtgeschwindigkeit. Andererseits fachen die Stöße die ungeordnete thermische Bewegung der um ihre Gitterplätze schwingenden Ionen an: Elektrische Energie wird laufend in thermische Energie, in Wärme, umgesetzt. Man bezeichnet sie als **Joule'sche Wärme** oder auch kürzer als **Stromwärme**. Von manchen „Verbrauchern“ wie Glühlampe, Heizkissen, Toaster wird nichts anderes erwartet. Sie sollen die ganze, der Steckdose entnommene elektrische Leistung  $P = U \cdot I$ , in Wärme umwandeln. Man darf sie auch auf den

Widerstand  $R$  beziehen; nach dessen Definition  $R = U/I$  gilt

$$P = I^2 \cdot R = U^2/R.$$

Beides ist grundsätzlich nicht auf ohmsche Widerstände beschränkt.

#### Merke

Stromwärme: durch elektrischen Strom entwickelte Wärme,  
Leistung  $P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$



**Klinik**

**Warm durch ⚡ Kurzwellenbestrahlung.** Wärme hilft bei Entzündungen und rheumatischen Schmerzen. Ein altes Hausmittel ist das Katzenfell (lokale Behinderung der Abgabe von Körperwärme), nützlich sind aber auch Wärmflaschen und Heizkissen (lokale Wärmezufuhr von außen) oder Bestrahlungen mit infrarotem Licht (lokale Erzeugung von Wärme aus Strahlungsenergie). In allen diesen Fällen muss der Patient aber die Wärme von der Oberfläche zum tiefer liegenden Ort des Geschehens transportieren, durch Wärmeleitung. Das bedeutet nicht nur Verluste, sondern auch eine besondere thermische Belastung der Haut. Man kann sie vermeiden, indem man den Patienten unmittelbar elektrisch heizt, an der richtigen Stelle Stromwärme entwickelt, allerdings nicht durch unmittelbaren Anschluss an die Steckdose. Nur mit beträchtlichem technischem Aufwand lässt sich erreichen, dass der Patient wirklich nur geheizt wird und ihm darüber hinaus nichts Böses geschieht. Das Verfahren heißt **Diathermie** oder auch **Kurzwellenbestrahlung** (► Kap. 6.9.2).

Unvermeidlich entwickeln auch Kabel und Zuleitungen Stromwärme. Für die Energiewirtschaft bedeutet das Verlustwärme, die aus ökonomischen Gründen so gut wie möglich vermieden werden muss. Eben deswegen stehen Überlandleitungen unter lebensgefährlich hohen Spannungen. Transportiert werden muss eine bestimmte Leistung  $P$ , weil sie von den „Stromabnehmern“ einer Stadt einfach verlangt wird. Je höher die Spannung  $U$  ist, mit der transportiert wird, umso kleiner kann der benötigte Strom  $I = P/U$  gehalten werden, umso kleiner auch die Verlustleistung  $P_v = I^2 \cdot R_L$ . Andersherum: einen umso größeren Leitungswiderstand  $R_L$  kann sich die Elektrizitätsgesellschaft noch leisten und umso weniger Kupfer muss sie in ihre Überlandleitungen investieren.

**Rechenbeispiel 6.2: Überlandleitung**

► **Aufgabe.** Eine kleine Großstadt verlange zu ihrer Energieversorgung eine elektrische Leistung von 100 MW. Welchem Gesamtstrom entspricht das in einer Überlandleitung von 380 kV? Wie groß darf der ohmsche Widerstand dieser Überlandleitung sein, wenn die Verlustleistung 1% der übertragenen Leistung nicht überschreiten soll?

► **Lösung.** Strom:

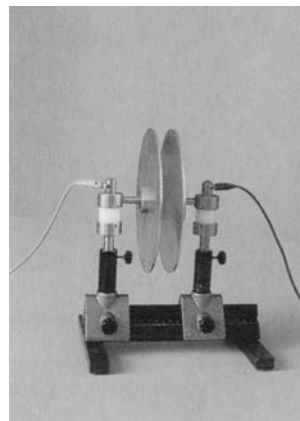
$$I = \frac{P}{U} = \frac{10^8 \text{ W}}{3,8 \cdot 10^5 \text{ V}} = 263 \text{ A.}$$

Bei 1% Verlustleistung (also  $10^6 \text{ W}$ ) ist der Widerstand:

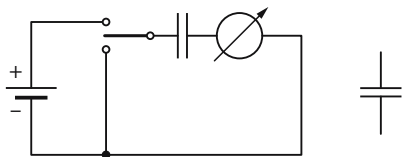
$$R_L = \frac{10^6 \text{ W}}{I^2} = 14,4 \, \Omega.$$

**6.2.4 Kapazität**

Zwei Metallplatten, auf kurzem Abstand elektrisch isoliert einander gegenübergestellt (► Abb. 6.12), bilden einen **Kondensator**. Was geschieht, wenn man ihn an eine Batterie legt? Ein Strom kann durch das isolierende **Dielektrikum** Luft zwischen den beiden Platten ja wohl nicht fließen. Ein Dauerstrom fließt auch wirklich nicht; man kann aber bei einem hinreichend empfindlichen Strommesser beobachten, wie dessen Zeiger kurz zur Seite zuckt, wenn man zum ersten Mal Spannung an den Kondensator legt. Schließt man die Platten anschließend wieder kurz, so zuckt das Instrument in der entgegengesetzten Richtung. Eine empfeh-



► Abb. 6.12. Plattenkondensator für den Hörsaal



■ **Abb. 6.13. Kondensator im Stromkreis.** Schaltung zur Beobachtung des elektrischen Verhaltens eines Kondensators – rechts sein Schaltzeichen

lenswerte Schaltung zeigt ■ Abbildung 6.13; sie benutzt einen **Wechselschalter**, der erlaubt, die linke Platte des Kondensators wahlweise an den positiven Pol der Batterie zu legen oder mit der rechten Platte kurzzuschließen.

Wenn der Zeiger eines Amperemeters ausschlägt, fließt ein Strom. Wenn er nur kurz gezuckt hat, ist der Strom auch nur für kurze Zeit geflossen, es hat sich um einen

$$\text{Stromstoß } \int I(t) \cdot dt$$

gehandelt, also um eine elektrische Ladung  $Q$ , wie in ► Kap. 6.1.1 besprochen. Sie wurde beim **Aufladen** an den Kondensator abgegeben und floss beim **Entladen** wieder zurück. Diese Ausdrucksweise ist verkürzt. Korrekt muss man sagen: Beim Aufladen (Wechselschalter oben) entzieht die Batterie der rechten Kondensatorplatte elektrische Ladung  $Q$  und drückt sie auf die linke Platte; beim Entladen (Wechselschalter unten) fließt  $Q$  wieder auf die rechte Platte zurück. Insgesamt enthält ein geladener Kondensator also genau soviel Ladung wie ein ungeladener, nur verteilt sie sich anders: Die Platte am Pluspol der Batterie hat positive Ladung bekommen, der anderen Platte wurde positive Ladung entzogen, sie trägt jetzt negative Ladung vom gleichen Betrag.

Kondensatoren sind wichtige Bauelemente der Elektronik. Ihr Äußeres verrät nicht viel von ihrem inneren Aufbau, sie haben aber prinzipiell die gleichen Eigenschaften wie der Luftkondensator von ■ Abb. 6.12. Nur sind sie stärker ausgeprägt und darum leichter zu untersuchen. Weiterhin hält die moderne Messelektronik Geräte bereit, die einen Stromstoß gleich über die Zeit integrieren, also die Ladung  $Q$  unmittelbar anzeigen. Damit lässt sich dann ohne große Mühe herausfinden: Die von einem technischen Kondensator

gespeicherte elektrische Ladung  $Q$  ist proportional zur Spannung  $U$ , auf die der Kondensator aufgeladen wurde. Als dessen Kenngröße definiert man dementsprechend die

$$\text{Kapazität } C = \frac{Q}{U}$$

mit der Einheit

$$1 \text{ Farad} = 1 \text{ F} = 1 \text{ C/V} = 1 \text{ A} \cdot \text{s/V}.$$

Hier muss man aufpassen: Das kursive  $C$  steht für die physikalische Größe Kapazität, das gerade  $C$  für die Einheit Coulomb. Das Farad ist eine recht große Einheit. Schon ein  $\mu\text{F}$  bedeutet einen ziemlich „dicken“ Kondensator, auch  $\text{nF}$  sind im Handel, während unvermeidliche und darum ungeliebte „Schaltkapazitäten“ zwischen den Drähten einer Schaltung zuweilen an  $\text{pF}$  herankommen.

#### Merke

Kapazität

$$C = \frac{Q}{U}$$

$$\text{Einheit: } 1 \text{ Farad} = 1 \text{ F} = 1 \frac{\text{C}}{\text{V}} = 1 \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V}}.$$

Weitere Formeln zur Kapazität finden sich in ► Kap. 6.5.5.

### 6.2.5 Energie des geladenen Kondensators

Mit der Ladungsverschiebung zwischen seinen beiden Platten bekommt der Kondensator vom Ladestrom Energie übertragen. Er speichert sie und liefert sie bei der Entladung wieder ab. Insofern verhält er sich ähnlich wie eine wieder aufladbare Batterie, arbeitet aber ohne dessen komplizierte Elektrochemie. Warum dann der Aufwand bei den Autobatterien? Könnte man sie durch die technisch einfacheren Kondensatoren ersetzen? Man kann es nicht, weil deren Kapazitäten nicht ausreichen.  $45 \text{ A} \cdot \text{h} = 162 \text{ kC}$  bei  $12 \text{ V}$  sind für einen Akku nichts Besonderes; ein Kondensator müsste dafür  $162 \text{ kC}/12 \text{ V} = 13,5 \text{ kF}$  aufbringen. Schon Kondensatoren mit einer Kapazität von „nur“ einem Farad sind technisch nicht leicht zu realisieren.

Zudem geht es weniger um die gespeicherte Ladung  $Q_0$  als um die gespeicherte Energie  $W_0$ . Beim Akku ließ sie sich leicht ausrechnen, weil er seine Klemmenspannung  $U_K$  konstant hält:

$$W_0 = U_K \cdot Q_0.$$

Beim Kondensator geht aber die Spannung mit der entnommenen Ladung zurück. Umgekehrt wächst  $U(Q)$ , der Kapazität  $C$  entsprechend, beim Aufladen proportional zu  $Q$  an, bis mit dem Endwert  $Q_0$  auch der Endwert  $U_0 = Q_0/C$  erreicht wird. Die gespeicherte Energie  $W$  kann man jetzt nur noch durch Integration bekommen:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{Q_0} U(Q) \cdot dQ = \int_0^{Q_0} \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{C} \int_0^{Q_0} Q \cdot dQ = \frac{Q_0^2}{2C} \\ &= \frac{1}{2} C \cdot U_0^2 = \frac{1}{2} U_0 \cdot Q_0 \end{aligned}$$

Die Integration bringt hier den Faktor  $\frac{1}{2}$  genau so herein, wie sie es in ► Kap. 2.1.3 beim freien Fall ( $s = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ ) und bei der Energie der gespannten Schraubenfeder tat ( $W = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x^2$ ). Die graphische Darstellung der ■ Abb. 6.14 macht den Faktor unmittelbar anschaulich.

#### Merke

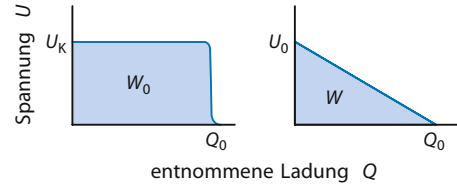
Im Kondensator gespeicherte Energie:

$$W = \frac{1}{2} U_0 \cdot Q_0 = \frac{1}{2} C \cdot U_0^2$$

#### Rechenbeispiel 6.3: Kurz aber heftig

► **Aufgabe.** Ein elektronisches Blitzgerät speichert die Energie für den Blitz in einem 150-µF-Kondensator mit einer Ladespannung von 200 V. Ein Blitz dauert etwa eine tausendstel Sekunde. Welche Leistung wird in dieser Zeit erreicht?

► **Lösung.** Die gespeicherte Energie beträgt moderate  $W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = 3,0 \text{ J}$ . Wegen der kurzen Blitzzeit entspricht das aber einer Leistung von 3000 W. Das ist der Vorteil des Kondensators als Energiespeicher: Er kann die Energie sehr schnell abgeben.

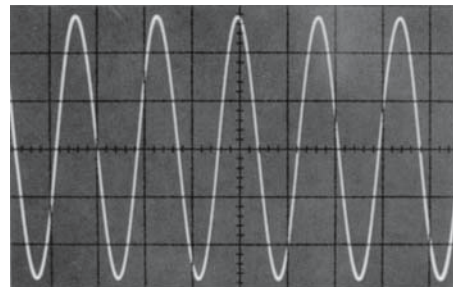


■ **Abb. 6.14. Vergleich Batterie – Kondensator.** Die Abhängigkeit der Spannung von der entnommenen Ladung bei einer Batterie und beim Kondensator (schematisch); die schraffierte Fläche entspricht der gespeicherten Energie

## 6.3 Wechselspannung

### 6.3.1 Effektivwerte

51 Taschenlampenbatterien in Reihe können einer Nachttischlampe gegenüber die Steckdose ersetzen; beide Spannungsquellen halten 230 V bereit. Ein Vielfachinstrument, auf den richtigen Spannungsmessbereich geschaltet, zeigt die Spannung der Batteriekette bereitwillig an. Legt man es aber im gleichen Messbereich an die Steckdose, so vibriert der Zeiger ungehalten um null herum. Der Grund: Die Steckdose liefert nicht wie eine Batterie zeitlich konstante Gleichspannung, sondern eine **Wechselspannung**. Deren Frequenz ist zu hoch, als dass der Spannungsmesser mit seinem trägen Messwerk zu folgen vermöchte. Ein Kathodenstrahloszillograph (► Kap. 6.6.4) kann den zeitlichen Verlauf der Spannung aber leicht auf seinen Bildschirm zeichnen; ■ Abbildung 6.15 zeigt das Resultat: Die Steckdose präsentiert eine sinusförmige Wechselspannung, Schwingungsdauer 20 ms



■ **Abb. 6.15. Wechselspannung** der Steckdose auf dem Bildschirm eines Oszillographen; Ordinatenmaßstab: 130 V/cm; Abszissenmaßstab: 11,9 ms/cm

(Frequenz demnach 50 Hz), Spannungsamplitude 325 V(!). Wieso darf das Elektrizitätswerk behaupten, es halte die Netzspannung auf 230 V?

Diese Angabe meint den sog. **Effektivwert**  $U_{\text{eff}}$  der Wechselspannung, definiert durch folgende Festlegung: In einem ohmschen Widerstand soll eine sinusförmige Wechselspannung  $U_{\text{eff}}$  im Mittel die gleiche Stromwärme erzeugen wie eine Gleichspannung  $U_0$  mit gleicher Maßzahl:

■ ■ ■ Beim ohmschen Widerstand  $R$  sind Strom und Spannung zueinander proportional:

$$I(t) = U(t)/R.$$

Zu einer sinusförmigen Wechselspannung

$$U(t) = U_s \sin(\omega t)$$

mit der Amplitude  $U_s$  gehört also der sinusförmige Wechselstrom

$$I(t) = I_s \sin(\omega t)$$

mit der Amplitude  $I_s = U_s/R$ . Strom und Spannung haben ihre Nulldurchgänge zu gleichen Zeitpunkten, zu denen dann auch keine Leistung umgesetzt wird. Dazwischen wechseln  $U$  und  $I$  ihre Vorzeichen gemeinsam; die Leistung bleibt positiv; Stromwärme wird immer nur entwickelt und niemandem entzogen.  $P(t)$  pendelt mit doppelter Frequenz zwischen 0 und ihrem Maximalwert

$$P_s = U_s \cdot I_s = U_s^2/R$$

(■ Abb. 6.16). Ihr Mittelwert liegt in der Mitte:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} P_s = \frac{1}{2} U_s^2/R.$$

Definitionsgemäß soll aber die Gleichspannung  $U_0$  in  $R$  die gleiche Leistung umsetzen:

$$\langle P \rangle = P(U_0) = U_0^2/R.$$

Daraus folgt  $U_0^2 = \frac{1}{2} U_s^2$  und damit ergibt sich die Effektivspannung zu:

$$U_{\text{eff}} = U_s / \sqrt{2}.$$

Das Elektrizitätswerk hat Recht: Zum Effektivwert  $U_{\text{eff}} = 230$  V der Wechselspannung gehört die Spannungsamplitude  $U_s = U_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2} = 325$  V. Die gleichen Überlegungen gelten übrigens auch für den Strom und seinen Effektivwert, also:

$$I_{\text{eff}} = I_s / \sqrt{2}$$

Der Definition entsprechend kann man vernünftigerweise nur bei sinusförmigen Wechselspannungen und -strömen von Effektivwerten reden. Kompliziertere zeitliche Abläufe lassen sich zwar im Prinzip als Überlagerung mehrerer Sinusschwingungen auffassen (► Kap. 4.1.5), aber in solchen Fällen muss man schon den ganzen Verlauf registrieren. Beim EKG interessiert ohnehin nur der zeitliche Verlauf der Spannung und nicht ihr Betrag; Elektrokardiographen werden gar nicht erst geeicht.

#### Merke

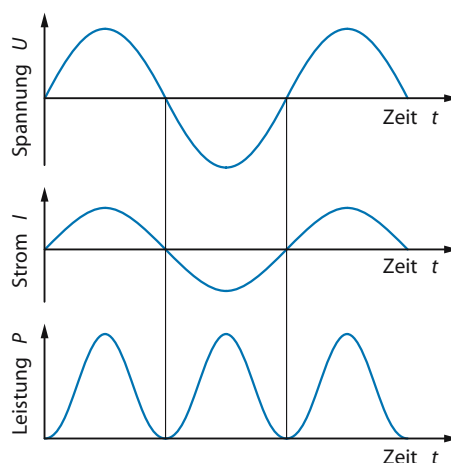
Sinusförmige Wechselspannung: Effektivwert

$$U_{\text{eff}} = U_s / \sqrt{2},$$

sinusförmiger Wechselstrom: Effektivwert

$$I_{\text{eff}} = I_s / \sqrt{2}.$$

Die Stromwärme einer an die Steckdose angeschlossenen Glühlampe wird pulsierend erzeugt, pulsierend mit einer Frequenz von 100 Hz (■ Abb. 6.16). Entsprechend pulsiert ihre Helligkeit. Das menschliche Auge ist zu träge, um diesem Flimmern zu folgen. Wenn man aber eine reflektierende Stricknadel im Schein der Lampe hin und her wedelt, sieht man hellere und dunklere Streifen. Deutlicher als Glühlampen zeigen Leucht-

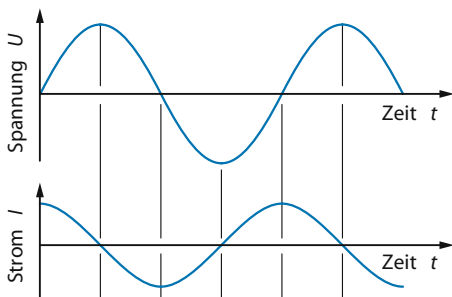


■ Abb. 6.16. Leistung des Wechselstroms. Zeitlicher Verlauf von Spannung  $U$ , Strom  $I$  und Leistung  $P$  bei einem ohmschen Widerstand

stoffröhren diesen Effekt einer **stroboskopischen Beleuchtung**, denn bei ihnen wird die Lichtentwicklung nicht durch die thermische Trägheit des Glühfadens nivelliert.

### 6.3.2 Kapazitiver Widerstand

Legt man eine Gleichspannung an einen ungeladenen Kondensator, so fließt ein kurzer Stromstoß; schließt man danach den Kondensator kurz, so fließt der Stromstoß wieder zurück, in Gegenrichtung also. Polt man jetzt die Spannungsquelle um, so fließt erneut ein Stromstoß zum Aufladen, jetzt aber in der gleichen Richtung wie der letzte Entladestromstoß. Schließt man noch einmal kurz, so fließt der Stromstoß wieder in der gleichen Richtung wie der erste. Dieses Spiel mit einem **Polwender** von Hand zu betreiben, ist langweilig. Eine Wechselspannung am Kondensator bewirkt Vergleichbares: Sie lädt und entlädt den Kondensator entsprechend ihrer Frequenz und löst damit einen frequenzgleichen Wechselstrom aus, einen **kapazitiven Strom**. Zumindest bei technischen Kondensatoren ist er sinusförmig wie die Spannung. Es besteht aber ein markanter Unterschied zum Wechselstrom durch einen ohmschen Widerstand: Der kapazitive Strom wird null, wenn der Kondensator mit dem einen oder anderen Vorzeichen voll geladen ist, also bei jedem Extremwert der Spannung. Umgekehrt hat der Strom seine Extremwerte immer dann, wenn der Kondensator leer und die Spannung null ist. Im ohmschen Fall waren  $U$  und  $I$  in Phase, beim Kondensator



■ Abb. 6.17. Kondensator im Wechselstromkreis. Beim Kondensator eilt der Wechselstrom der Wechselspannung um  $90^\circ$  oder  $\pi/2$  voraus

sind sie um  $90^\circ = \pi/2$  gegeneinander phasenverschoben, der kapazitive Strom eilt der Spannung voraus (■ Abb. 6.17).

Es kann nicht verwundern, dass der Effektivwert  $I_{\text{eff}}$  des kapazitiven Stromes dem Effektivwert  $U_{\text{eff}}$  der Spannung proportional ist. Es liegt darum nahe, auch einen **kapazitiven Widerstand** mit dem Betrag  $R_C = U_{\text{eff}}/I_{\text{eff}}$  zu definieren. Wie groß wird er sein? Hohe Kapazität  $C$  hat hohe Ladung zur Folge, hohe Kreisfrequenz  $\omega$  ein häufiges Umladen. Beides vergrößert den Strom und verringert den Widerstand: Der kapazitive Widerstand eines Kondensators hat den Betrag

$$R_C = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_s}{I_s} = \frac{1}{\omega \cdot C}.$$

■■■ Die Behauptung  $R_C = 1/(\omega C)$  mag einleuchten, sie muss aber durch quantitative Rechnung bestätigt werden. Definitionsgemäß ist die elektrische Ladung das Zeitintegral des Stromes:

$$\Delta Q = \int I(t) \cdot dt.$$

Daraus folgt rein mathematisch, dass der Strom der Differentialquotient der Ladung nach der Zeit ist:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}.$$

Die Ladung wiederum folgt der Wechselspannung  $U(t) = U_s \cdot \sin(\omega t)$  mit der Kapazität  $C$  als Faktor:

$$Q(t) = C \cdot U(t) = C \cdot U_s \cdot \sin(\omega t).$$

Ob man den Sinus oder den Kosinus schreibt, hat nur für die hier uninteressante Anfangsbedingung eine Bedeutung; ■ Abb. 6.17 ist für den Sinus gezeichnet. Differenziert ergibt er den Kosinus; die **Kettenregel der Differentiation** (► Kap. 4.1.2) liefert zusätzlich ein  $\omega$  als Faktor:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = I(t) = \omega \cdot C \cdot U_s \cdot \cos(\omega t) = I_s \cdot \cos(\omega t).$$

Sinus und Kosinus sind um  $90^\circ$  gegeneinander phasenverschoben. Wer will, darf deshalb auch

$$I(t) = I_s \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)$$

schreiben. Der Quotient  $U_s/I_s$  der beiden Spitzenwerte ist dem Quotienten  $U_{\text{eff}}/I_{\text{eff}}$  der beiden Effektivwerte und damit dem Betrag des Wechselstromwiderstandes  $R_C$  gleich:

$$R_C = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_s}{I_s} = \frac{1}{\omega \cdot C},$$

wie vermutet.

**Merke**

Betrag des kapazitiven Widerstandes

$$R_C = \frac{1}{\omega \cdot C},$$

Strom eilt Spannung um  $\pi/2$  voraus.

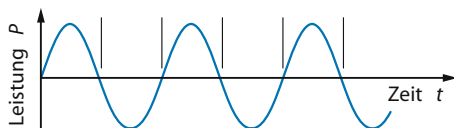
Die Phasenverschiebung zwischen Wechselspannung und kapazitivem Wechselstrom hat eine wichtige Konsequenz für die Leistung. In jeder Viertelschwingungsdauer, in der der Kondensator aufgeladen wird, haben Strom und Spannung gleiches Vorzeichen, positiv oder negativ. Folglich ist die Leistung positiv; die Spannungsquelle gibt Energie an den Kondensator ab. In den Viertelschwingungsdauern dazwischen wird der Kondensator entladen, Strom und Spannung haben entgegengesetztes Vorzeichen, die Leistung ist negativ, der Kondensator gibt die gespeicherte Energie wieder an die Spannungsquelle zurück (Abb. 6.18). Diese braucht also im zeitlichen Mittel gar keine Energie zu liefern, sie muss sie nur kurzfristig ausleihen. Insgesamt ist der kapazitive Strom (verlust-)leistungslos; man bezeichnet ihn als **Blindstrom**. Wie sich in ► Kap. 6.11.4 herausstellen wird, können Blindströme nicht nur mit Kondensatoren erzeugt werden.

Ohmsche und kapazitive Wechselströme stellen zwei Grenzfälle dar, mit den Phasenwinkeln  $\varphi_R = 0^\circ$  und  $\varphi_C = 90^\circ$  gegenüber der Spannung nämlich. In der Technik können Phasenwinkel dazwischen ebenfalls vorkommen. In solchen Fällen wird von Strom und Spannung nur die

$$\text{Wirkleistung } P_w = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi$$

tatsächlich umgesetzt.

Elektrizitätswerke haben Blindströme nicht gern. Sie müssen, wie jeder andere Strom auch, über die Fernleitungen hergebracht werden



■ **Abb. 6.18. Blindleistung** Beim Kondensator wechselt die Leistung bei Wechselstrom das Vorzeichen (Zeitmaßstab und Phasenlage entsprechen ■ Abb. 6.19)

und produzieren dort, wie jeder andere Strom auch, Verlustwärme. Energie, die dem Kunden berechnet werden könnte, liefern sie aber nicht. Großabnehmern wird darum der „Kosinus Phi“ nachgemessen und gegebenenfalls mit einem Zuschlag zum Arbeitspreis in Rechnung gestellt.

### Rechenbeispiel 6.4: Kapazitiver Widerstand

► **Aufgabe.** Welchen Wechselstromwiderstand hat ein Kondensator von  $1 \mu\text{F}$  gegenüber technischem Wechselstrom (50 Hz)?

► **Lösung.**  $R_C = \frac{1 \text{ Vs}}{314 \cdot 10^{-6} \text{ As}} = 3,2 \text{ k}\Omega$ .

## 6.4 Elektrische Netzwerke

### 6.4.1 Widerstände in Reihe und parallel

Der Schaltplan eines Fernsehempfängers zeigt eine verwirrende Vielfalt von Leitungen, Widerständen, Kondensatoren und allerlei anderen Schaltelementen. Freilich, der „Stromverteilungsplan“ vom Brustkorb eines Menschen mit dem Herzen als Batterie und einem Gewirr relativ gut leitender Blutgefäße und schlecht leitender Rippen sähe nicht einfacher aus. Zum Glück lässt sich das EKG auch ohne diesen Stromverteilungsplan auswerten. Wie kompliziert eine Schaltung aber auch immer aufgebaut sein mag, stets müssen sich Ströme und Spannungen an zwei im Grunde triviale Gesetze halten.

1. Strom wird nicht „verbraucht“, er fließt nur im Stromkreis herum. Treffen mehrere Leiter in einem Punkt, einem **Knoten**, zusammen, so müssen die einen gerade so viel Strom abführen wie die anderen heran. Wertet man die in konventioneller Stromrichtung zufließenden Ströme positiv und die abfließenden negativ, so schreibt sich die

$$\text{Knotenregel: } \sum_i I_i = 0,$$

sie wird auch **1. Kirchhoff-Gesetz** genannt.

2. Spannungen liegen nur zwischen zwei Punkten einer Schaltung; kein Punkt kann eine Spannung gegen sich selbst haben.

■ ■ ■ Lläuft man in einer **Masche** einer Schaltung (Abb. 6.19) einmal herum zum Ausgangspunkt zu-



rück, so müssen sich alle Spannungen, über die man hinweggelaufen ist, zu null addiert haben:

$$\text{Maschenregel: } \sum_i U_i = 0,$$

sie wird auch **2. Kirchhoff-Gesetz** genannt.

Bei der Anwendung der Maschenregel muss man aufpassen, dass man vorzeichenrichtig addiert. Alle Spannungen zählen, ob sie von Batterien herrühren, über geladenen Kondensatoren liegen oder als Spannungsabfälle über stromdurchflossenen Widerständen, bei denen es auf die Stromrichtung ankommt. Bezogen werden die Vorzeichen auf die Marschrichtung, mit der man seine Masche in Gedanken durchläuft; ob mit oder gegen den Uhrzeigersinn, ist letztlich egal, nur muss man bei der einmal gewählten Richtung bleiben. Dies klingt alles ein wenig abstrakt und kann auch auf sehr komplizierte Gleichungssysteme führen, wenn die Schaltung entsprechend kompliziert ist.

An dieser Stelle sollen nur zwei wichtige einfache Situationen betrachtet werden:

**Parallelschaltung von Widerständen.** In Abb. 6.20 liegen drei Widerstände parallel geschaltet an einer Batterie, nach deren Zeichenschema jeweils Plus oben und Minus unten sind. Es ist klar: der Gesamtstrom  $I_0$ , den die Batterie abgibt, verteilt sich auf die Widerstände:

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3.$$

Andererseits liegt an allen Widerständen die gleiche Batteriespannung  $U_0$ . Also ergibt sich:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_{\text{ges}}} = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U_0}{R_1} + \frac{U_0}{R_2} + \frac{U_0}{R_3}$$

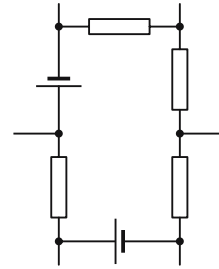
Der Gesamtwiderstand der Parallelschaltung ergibt sich also zu:

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

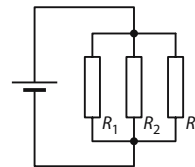
Man kann auch sagen: die Leitwerte addieren sich.

**Serienschaltung von Widerständen.** In Abb. 6.21 liegen die drei Widerstände in Reihe mit der Batterie. Der Strom läuft durch alle Widerstände mit gleicher Stärke  $I_0$ . Die Batteriespannung hingegen teilt sich auf die Widerstände auf gemäß:

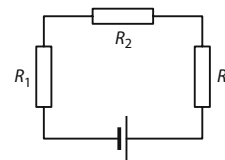
$$\begin{aligned} U_0 &= U_1 + U_2 + U_3 \\ &= I_0 \cdot R_1 + I_0 \cdot R_2 + I_0 \cdot R_3 = I_0 \cdot R_{\text{ges}}. \end{aligned}$$



■ Abb. 6.19. Masche im Schaltbild. Zur Maschenregel; flache Rechtecke sind die Symbolsymbole von Widerständen (meist als ohmsch angenommen)



■ Abb. 6.20. Parallelschaltung von drei Widerständen



■ Abb. 6.21. Serienschaltung (Reihenschaltung) von drei Widerständen

Der Gesamtwiderstand dieser Reihen- (oder Serien-)Schaltung ist also die Summe der Einzelwiderstände.

#### Merke

Parallelschaltung: Leitwerte addieren sich:

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

Serienschaltung: Widerstände addieren sich:

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$



**Rechenbeispiel 6.5: Ein Stromkreis**

► **Aufgabe.** Die Widerstände im Stromkreis in Abb. 6.35 mögen alle den gleichen Widerstand von  $2\ \Omega$  haben. Wie groß ist der Gesamtwiderstand? Welcher Strom fließt im Kreis? Welcher Strom fließt durch einen der parallelgeschalteten Widerstände? Welche Spannungen misst der eingeleitete Spannungsmesser an den Punkten 1 bis 4?

► **Lösung.** Die beiden parallelgeschalteten Widerstände haben einen Gesamtwiderstand von einem Ohm. Zusammen mit den beiden in Reihe geschalteten Widerständen ergibt sich der gesamte Widerstand zu  $5\ \Omega$ . Der Strom durch den Kreis ist also

$$I = \frac{U}{R} = \frac{6\ \text{V}}{5\ \Omega} = 1,2\ \text{A}.$$

Zwischen den beiden parallel geschalteten Widerständen teilt sich dieser Strom in gleiche Teile, also jeweils  $0,6\ \text{A}$  auf. Die Spannungen können nun gemäss  $U = R \cdot I$  berechnet werden. Zwischen 1 und 2 beziehungsweise 3 und 4 liegen  $2,4\ \text{V}$ , zwischen 2 und 3  $1,2\ \text{V}$ . Das Spannungsmessgerät misst also an den Punkten 1 bis 4:  $0\ \text{V}$ ,  $2,4\ \text{V}$ ,  $3,6\ \text{V}$  und  $6\ \text{V}$ .

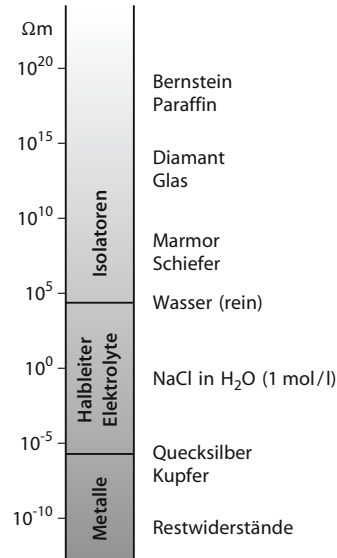
### 6.4.2 Spezifischer Widerstand (Resistivität)

Legt man vier gleiche Drahtstücke hintereinander, so addieren sich ihre Längen und ihre elektrischen Widerstände. Demnach leuchtet ein: Der Widerstand  $R$  eines homogenen Drahtes ist zu seiner Länge  $l$  proportional. Schaltet man die Drähte aber zueinander parallel, so addieren sich ihre Querschnittsflächen und ihre Leitwerte. Tatsächlich ist der Leitwert  $G = 1/R$  eines homogenen Drahtes proportional zu seiner Querschnittsfläche. Beides zusammen führt zu:

$$R = \rho \cdot l/A$$

mit dem **spezifischen elektrischen Widerstand**  $\rho$ , der kürzer Resistivität genannt wird. Ihm gebührt die SI-Einheit  $\Omega \cdot \text{m}$ . Sein Kehrwert heißt **elektrische Leitfähigkeit**  $\sigma$ .

$\sigma$  und  $\rho$  sind Materialkenngrößen der Substanz, aus der ein Leiter besteht. Sind sie konstant, d. h. unabhängig von der angelegten elektrischen Spannung, so erfüllt der Leiter das ohmsche Ge-



► **Abb. 6.22. Spezifische Widerstände.** Der Bereich vorkommender spezifischer Widerstände; der Restwiderstand ist der Tieftemperaturwiderstand vor Einsetzen der Supraleitung

setz, denn wenn sein spezifischer Widerstand nicht von der Spannung abhängt, so kann es sein Widerstand auch nicht.

Kaum eine andere physikalische GröÙe überdeckt einen so weiten messbaren Bereich: glatt 30 Zehnerpotenzen von den gut leitenden Metallen bis zu den guten Isolatoren (► Abb. 6.22). Dabei sind die Supraleiter noch nicht einmal mitgezählt: Deren spezifischer Widerstand fällt bei tiefen Temperaturen auf einen Wert, der sich experimentell von null nicht unterscheiden lässt. Außerhalb dieses Bereiches nimmt  $\rho$  bei praktisch allen Metallen mit der Temperatur  $T$  zu. Dies war der Grund für das nichtohmsche Verhalten der Glühlampe in ► Kap. 6.2.1: Mit steigender Spannung steigt der Strom, steigt die Entwicklung von Stromwärme, steigt die Temperatur und mit ihr der Widerstand.

#### Merke

Spezifischer Widerstand  $\rho$  und elektrische Leitfähigkeit  $\sigma = 1/\rho$  sind temperaturabhängige Kenngrößen elektrischer Leiter.

Den spezifischen Widerstand kann man zur Temperaturmessung benutzen – im Widerstandsthermometer, das meist aus einem dünnen, in Glas eingeschmolzenen Platindraht besteht. Oft werden auch Halbleiter zur Temperaturmessung verwendet. Bei ihnen sinkt aber der elektrische Widerstand mit steigender Temperatur.

Die große technische Bedeutung von Halbleitern (z. B. Silizium) beruht darauf, dass sich zum einen durch verschiedene chemische Zusätze der spezifische Widerstand über einen weiten Bereich einstellen lässt und zum anderen in Bauelementen wie Dioden und Transistoren auch noch von einer angelegten Spannung steuern lässt.

6

### Rechenbeispiel 6.6: Anschlussleitung

► **Aufgabe.** Die Anschlussleitung einer Stehlampe sei 4 m lang und habe einen „Kupferquerschnitt“ von  $0,75 \text{ mm}^2$  je Ader. Wie groß ist ihr Widerstand? (An den Anhang denken!)

► **Lösung.** Spezifischer Widerstand des Kupfers:  $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \text{ } \Omega\text{m}$ . Also ist der Widerstand (zwei Adern):

$$R = 2 \cdot \rho \cdot \frac{4 \text{ m}}{0,75 \text{ mm}^2} = 0,18 \text{ } \Omega$$

## 6.4.3 Spannungsteiler

Der elektrische Widerstand  $R$  eines homogenen Drahtes ist zu seiner Länge  $l$  proportional. Dabei zählt selbstverständlich nur die vom Stromkreis genutzte Länge; der Draht muss ja nicht an seinen Enden angeschlossen werden. Man kann ihn sogar auf einen isolierenden Träger aufwickeln und mit einem Schleifkontakt mit der Länge  $l$  auch  $R$  von Hand einstellen – nicht ganz kontinuierlich, sondern nur von Windung zu Windung. Aber bei ein paar hundert Windungen spielt das keine Rolle mehr. Man erhält so einen variablen **Schiebewiderstand** (Abb. 6.23). Ist der Träger ein Ring, wird das Wickeln etwas mühsamer, dafür kann der Schleifkontakt mit einem Drehknopf bewegt werden (Abb. 6.24).

Wer eine vorgegebene Spannung  $U_0$  halbieren will, legt sie in Reihe mit zwei gleichen Widerständen. Sind diese ohmsch, so teilen sie jede Gleich- oder Wechselspannung im Verhältnis

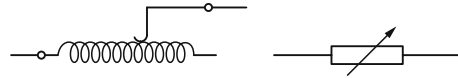


Abb. 6.23. Variabler Widerstand. Konstruktionsschema und Schaltzeichen



Abb. 6.24. Drehpotentiometer

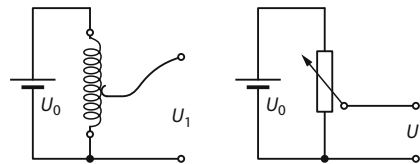


Abb. 6.25. Spannungsteiler (Potentiometer), Konstruktionsschema und Schaltskizze

1:1. Sind die Widerstände nicht gleich, so teilen sie die Spannung in ihrem Widerstandsverhältnis. Eine derartige Schaltung heißt **Spannungsteiler** oder auch **Potentiometer**. Der Schleifkontakt der Abb. 6.23 unterteilt den aufgewickelten Draht in zwei Bereiche, deren elektrische Widerstände  $R_1$  und  $R_2$  sich zum Gesamtwiderstand  $R_0$  addieren (Abb. 6.25). Alle Widerstände werden vom gleichen Strom  $I = U_0/R_0$  durchflossen; jeder verlangt für sich den Spannungsabfall

$$U_n = I \cdot R_n = U_0 \cdot R_n/R_0.$$

Demnach lässt sich durch Verschieben des Schleifkontaktes die Spannung  $U_1$  auf jeden beliebigen Wert zwischen 0 und  $U_0$  einstellen. Streng gilt das allerdings nur für den **unbelasteten Spannungsteiler**, denn wenn beispielsweise neben  $R_1$  noch ein Lastwiderstand  $R_x$  liegt (Abb. 6.26),

## Praktikum

## Elektrischer Widerstand, Gleichstromkreis

In der Regel geht es darum, elektrischen Widerstand zu ermitteln. Und zwar in zwei Varianten

## 1) Kennlinie

Im Versuch wird der Strom als Funktion der Spannung entweder mit einem x-y-Schreiber oder manuell aufgetragen. Beim ohmschen Widerstand ergibt das eine Gerade (■ Abb. 6.11), deren Steigung den Kehrwert des Widerstandes liefert. Bei nichtohmschen Widerständen ergibt sich eine gebogene Kurve (■ Abb. 6.9 und 6.10). Als nichtohmsche Widerstände können z. B. die Haut, Ionenleiter oder Elektrolyte (► Kap. 6.7.2) dienen.

Trägt man die Klemmenspannung  $U_K$  einer Batterie gegen den Strom im Stromkreis auf, so kann man aus der Steigung den Innenwiderstand der Batterie ermitteln (■ Abb. 6.30). Misst man bei dem Strom  $I$  die Klemmenspannung  $U_K$ , so ergibt sich der Innenwiderstand zu:

$$R_i = \frac{U_0 - U_K}{I}.$$

Die Leerlaufspannung liefert der Achsenabschnitt bei  $I = 0$ .

## 2) Wheatstone'sche Brücke

Dies ist eine antiquierte Methode, den Widerstandswert eines Widerstandes zu ermitteln, wenn drei andere Widerstandswerte bekannt sind. Die Methode stammt aus einer Zeit, als empfindliche Spannungsmessgeräte noch relativ niedrige Innenwiderstände hatten (Drehspulinstrumente), die die Messung verfälschten. Mit modernen elektronischen Spannungsmessern ist das kein Problem mehr. Die Kompensationsmethode nach

Wheatstone findet nur noch in Hochpräzisionsmessgeräten und dann durch Mikroprozessoren gesteuert Anwendung.

Zunächst soll betrachtet werden, wie eine unbekannte Spannung  $U_x$  in Kompensation gemessen wird. Die Schaltung bringt ■ Abb. 6.27: Die Spannung am Spannungsteiler und  $U_x$  stehen gegeneinander. Sind sie gleich, zeigt das Instrument (ein Strommesser) null an. Es braucht nicht geeicht zu sein, als **Nullinstrument** muss es ja nur die Null erkennen. Es darf aber auf hohe Empfindlichkeit geschaltet werden, wenn die Kompensation erst einmal ungefähr erreicht worden ist. Ein Vorteil des Messverfahrens liegt in seiner hohen Präzision, der andere darin, dass  $U_x$  stromlos gemessen wird.

Es ist nicht verboten, die Spannung  $U_x$  der Kompensationsschaltung aus einem zweiten Spannungsteiler zu beziehen und diesen an die gleiche Spannungsquelle zu legen wie den ersten auch. Man erhält dann die Wheatstone'sche Brücke, deren Schaltskizze traditionell als auf die Spitze gestelltes Quadrat gezeichnet wird, wie in ■ Abb. 6.28 (man muss das nicht tun). Das Brückeninstrument zeigt null, die Brücke ist abgeglichen, wenn beide Spannungsteiler die Batteriespannung  $U_0$  im gleichen Verhältnis unterteilen, wenn also die **Brückenbedingung**

$$R_1/R_2 = R_3/R_4$$

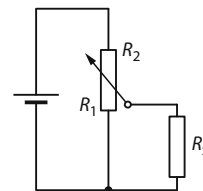
erfüllt ist. Kennt man drei Widerstände, so kann man den vierten ausrechnen.  $U_0$  wird dazu nicht einmal gebraucht.

dann zählt für die Spannungsteilung der Gesamtwiderstand der Parallelschaltung und der ist kleiner als  $R_1$ .

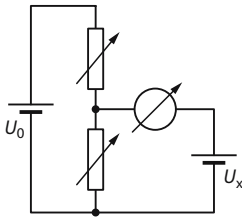
## Merke

Ein Spannungsteiler (Potentiometer) teilt die angelegte Spannung im Verhältnis der Widerstände:

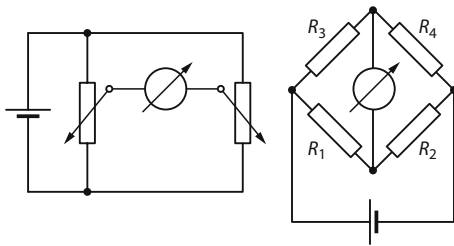
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U_0$$



■ Abb. 6.26. Belasteter Spannungsteiler. In sein Teilungsverhältnis geht die Parallelschaltung von  $R_1$  und  $R_x$  ein



■ **Abb. 6.27. Spannungsmessung in Kompensation.** Ein geeichter Spannungsteiler erzeugt mit Hilfe der bekannten Spannung  $U_0$  eine ebenfalls bekannte Teilspannung  $U'$ , und zwar so, dass sie die unbekannte Spannung  $U_x$  kompensiert: Das Instrument zeigt dann nichts an (Nullinstrument)

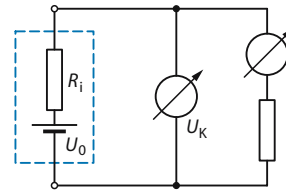


■ **Abb. 6.28. Die Wheatstone-Brücke** zur Präzisionsmessung von Widerständen; sie ist *abgeglichen*, wenn die *Brückenbedingung*  $R_1/R_2 = R_3/R_4$  erfüllt ist

#### 6.4.4 Innenwiderstände

Für die Autobatterie bedeutet das Anlassen des Motors Schwerarbeit. Sie meldet dies durch einen Rückgang ihrer Klemmenspannung: Alle eingeschalteten Lämpchen werden dunkler, solange der Anlasser läuft. Ursache ist der **Innenwiderstand**  $R_i$  der Batterie, bedingt durch deren Elektrochemie. Räumlich lässt er sich von der Spannungsquelle nicht trennen, auch wenn man ihn im **Ersatzschaltbild** abgesetzt von der (als widerstandslos angesehenen) Spannungsquelle zeichnet. An den „Draht“, der die beiden in ■ Abb. 6.29 elektrisch verbindet, kann man nicht herankommen. Der gestrichelte Kasten soll dies andeuten. Verlangt man jetzt von der Batterie einen Strom  $I$ , so erzeugt dieser über dem Innenwiderstand einen Spannungsabfall, sodass von der **Ursprungsspannung**  $U_0$  nur noch die

$$\text{Klemmenspannung } U_k = U_0 - I \cdot R_i$$



■ **Abb. 6.29. Innenwiderstand.** Der Innenwiderstand  $R_i$  einer Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung  $U_0$  setzt die Klemmenspannung  $U_k$  um den Spannungsabfall  $I \cdot R_i$  gegenüber  $U_0$  herab.  $U_0$  und  $R_i$  sind räumlich nicht voneinander getrennt; Zuleitungen erreichen nur die Klemmen (Ersatzschaltbild)

übrig bleibt. Messen lässt sich nur  $U_k$ ; diese Spannung stimmt aber im Leerlauf, d. h. bei hinreichend kleinem Strom, praktisch mit  $U_0$  überein. Die Ursprungsspannung wird deshalb auch **Leerlaufspannung** genannt.

#### Merke

Der Innenwiderstand  $R_i$  einer Spannungsquelle senkt bei Belastung mit dem Strom  $I$  die Klemmenspannung auf

$$U_k = U_0 - I \cdot R_i,$$

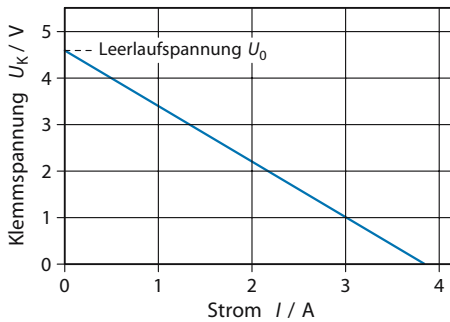
$U_0$  = Leerlaufspannung.

Schließt man die Klemmen einer Spannungsquelle kurz, so zwingt man die Klemmenspannung auf null; das gesamte  $U_0$  fällt über dem Innenwiderstand ab; die Batterie liefert den höchsten Strom, den sie überhaupt liefern kann, den

$$\text{Kurzschlussstrom } I_K = U_0/R_i.$$

Im Leerlauf wie im Kurzschluss gibt die Batterie keine Leistung nach außen ab: im Leerlauf nicht, weil kein Strom fließt, im Kurzschluss nicht, weil sie ihre volle Leistung im Innenwiderstand verheizt. Keine Spannungsquelle hat Kurzschluss gern. Elektrizitätswerke schützen sich durch **Sicherungen** gegen ihn: Sie schalten den kurzgeschlossenen Stromkreis kurzerhand ab. Taschenlampenbatterien können das nicht, sie senken ihre Klemmenspannung (■ Abb. 6.30). Ist der Innenwiderstand ohmsch, so fällt  $U_k$  linear mit  $I$  ab.

Technische Spannungsquellen werden auf kleine Innenwiderstände gezüchtet: Sie sollen ihre



■ **Abb. 6.30. Innenwiderstand einer Batterie.** Gemessenes Absinken der Klemmspannung einer Taschenlampenbatterie bei Belastung

Spannung konstant halten, von der Last so unabhängig wie möglich. Der Fernsehempfänger darf nicht wegen Unterspannung ausfallen, weil die Nachbarin in ihrer Küche drei Kochplatten eingeschaltet hat. Demgegenüber ist das Herz des Menschen primär als Blutpumpe konstruiert und nur nebenbei als Spannungsquelle für das EKG. Sein Innenwiderstand ist so hoch, dass die Konstrukteure von Elektrokardiographen an ihn denken müssen. Vielfachmessinstrumente (► Kap. 6.2.2) können Strom wie Spannung messen, weil der Widerstand zwischen ihren Anschlussbuchsen den einen nicht ohne die andere zulässt. Mit seinem Innenwiderstand darf ein Messgerät die **Belastbarkeit** einer Spannungsquelle nicht überfordern; er muss groß gegenüber deren Innenwiderstand sein. Will man mit dem Vielfachmessinstrument hingegen einen Strom messen, so soll sein Innenwiderstand verglichen mit allen Widerständen im Stromkreis sehr klein sein, denn es wird ja selbst in den Stromkreis hineingeschaltet und soll den Strom nicht reduzieren.

#### Merke

Der Innenwiderstand eines Spannungsmessers muss groß gegenüber dem Innenwiderstand der Spannungsquelle sein.

Der Innenwiderstand eines Strommessers muss klein gegenüber allen Widerständen im Stromkreis sein.

Bei den üblichen digitalen Multimetern braucht man sich meist keine Gedanken über deren Innenwiderstände zu machen. Im Spannungsmessbereich liegt er bei einigen Megaohm und im Strommessbereich bei einigen Mikroohm. Nur wenn noch die alten analogen Instrumente mit Zeiger verwendet werden, muss man aufpassen, denn dort hat man es mit Kiloohm beziehungsweise Milliohm zu tun.

#### Rechenbeispiel 6.7: Schwächelnde Batterie

► **Aufgabe.** Wie groß ist der Innenwiderstand der Batterie von ■ Abb. 6.28?

► **Lösung.** Der Innenwiderstand ist der Betrag der Steigung der Geraden im Diagramm. Dieser berechnet sich zu:

$$R_i = \frac{U_0}{I_{\max}} = \frac{4,5 \text{ V}}{3,8 \text{ A}} = 1,2 \, \Omega.$$

Das ist für eine Taschenlampenbatterie ein recht großer Innenwiderstand. Die Batterie ist schon ziemlich leer. Eine frische Batterie bringt es auf ca.  $0,3 \, \Omega$ .

### 6.4.5 Hoch- und Tiefpass

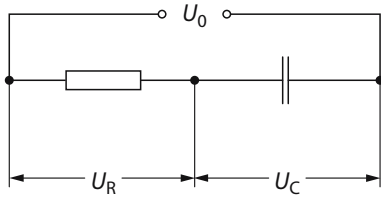
Auch die Serienschaltung von Widerstand und Kondensator, **RC-Glied** genannt (■ Abb. 6.31), bildet einen Spannungsteiler. Er ist aber frequenzabhängig, denn der Wechselstromwiderstand der Kapazität  $C$  nimmt umgekehrt proportional zu  $f$  und  $\omega$  ab:

$$R_C = 1/(\omega C) = (2\pi \cdot f \cdot C)^{-1}$$

(► Kap. 6.3.2). Hohe Frequenzen erscheinen deshalb vorwiegend über dem ohmschen Widerstand  $R_R$ :

$$U_R > U_C \text{ wegen } R_R > R_C$$

und tiefe vorwiegend über dem Kondensator. Für den, der nur  $U_R$  elektronisch weiterverarbeitet, ist das RC-Glied ein **Hochpass**, und ein **Tiefpass** für den, den nur  $U_C$  interessiert. Die Grenze zwischen „hoch“ und „tief“ liegt bei der Frequenz  $f^*$ , für die  $U_R$  und  $U_C$  gleich werden, freilich nicht gleich der halben angelegten Wechselspannung  $U_0$ . Die



■ Abb. 6.31. RC-Glied als frequenzabhängiger Spannungsteiler: Wirkung als Tiefpass bei Abgriff von  $U_C$  über dem Kondensator; Wirkung als Hochpass bei Abgriff von  $U_R$  über dem Widerstand

## 6

Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung beim Kondensator hat

$$U_R(f^*) = U_C(f^*) = 0,707 U_0$$

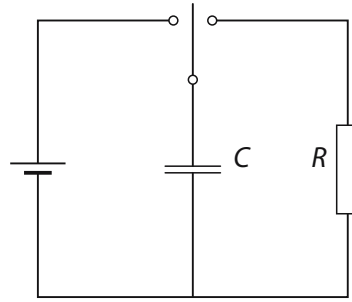
zur Folge. Legt man ein Frequenzgemisch  $U(t)$  an das RC-Glied, so erscheint  $U_C(t)$  als „geglättet“, weil es von den Zappeleien der hohen Frequenzen befreit ist. Eben dies ist die Wirkung eines Tiefpasses.

#### Klinik

**Tiefpass im Bauch.** Passverhalten ist nicht auf elektrische Schaltungen begrenzt. Die Aorta wirkt wegen ihrer Windkesselfunktion gegenüber dem periodisch wechselnden Blutdruck als Tiefpass: Wie ■ Abb. 3.23 in ► Kap. 3.3.7 gezeigt hat, sinkt der Blutdruck während der Diastole zwar in der Herzkammer auf nahezu null ab, nicht aber in der Aorta. Erst recht in der Bauchaorta erscheint der **Druckverlauf** als deutlich „geglättet“.

### 6.4.6 Kondensatorentladung und e-Funktion

In der Schaltung der ■ Abb. 6.32 wird der Kondensator momentan aufgeladen, wenn man den Wechselschalter nach links legt. Legt man ihn anschließend nach rechts, so entlädt sich die Kapazität  $C$  des Kondensators über den ohmschen Widerstand  $R$ . Die zugehörige Mathematik lässt sich zunächst leicht hinschreiben. Kondensator und Widerstand bilden eine Masche (► Kap. 6.4.1);



■ Abb. 6.32. Entladung eines Kondensators über einen ohmschen Widerstand; sie führt zur e-Funktion

folglich verlangt die Maschenregel zu jedem Zeitpunkt  $t$ :

$$U_C(t) + U_R(t) = 0$$

oder

$$U_C(t) = -U_R(t).$$

Ohne Batterie ist die Batteriespannung Null.

Andererseits gilt für den von der Ladung  $Q(t)$  des Kondensators gelieferten Entladungsstrom

$$I(t) = \frac{d}{dt} Q(t) = \frac{d}{dt} (C \cdot U_C(t)) = C \cdot \frac{d}{dt} U_C(t)$$

und ferner

$$U_R(t) = R \cdot I(t) = R \cdot C \cdot \frac{d}{dt} U_C(t),$$

also auch

$$\frac{d}{dt} U_C(t) = -\frac{1}{R \cdot C} U_C(t).$$

Jetzt wird die Mathematik schwieriger, denn dies ist eine Differentialgleichung. Von der Schwingungsdifferentialgleichung des ► Kap. 4.1.2 unterscheidet sie sich nur um einen winzig kleinen Punkt (denn Buchstaben dürfen in der Mathematik ausgetauscht werden): Bei den Schwingungen ging es um den *zweiten* Differentialquotienten  $\frac{d^2}{dt^2} x(t)$  der Auslenkung  $x(t)$  nach der Zeit, hier geht es um den *ersten* zeitlichen Differentialquotienten  $U_C(t)$ . Der Unterschied ist folgenswer. Die Gleichung verlangt, die Spannung  $U_C(t)$  solle mit einer Geschwindigkeit  $U_C(t)$  abfallen, die zu ihr selbst proportional ist. Dass diese Forderung nicht von Schwingungen erfüllt werden kann, sieht man auf den ersten Blick. Die Funktion, die das schon nach der ersten Differentiation tut, muss eigens

erfunden werden: Es ist die **Exponentialfunktion**, von der schon in ► Kap. 1.5.2 die Rede war. Per definitionem gilt

$$\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x) = \int_{-\infty}^x \exp(\chi) d\chi,$$

denn eine Funktion, die bei der Differentiation sich selbst ergibt, tut dies bei der Integration auch. Wenn  $\exp(x)$  von der Zeit  $t$  abhängen soll, hat  $t$  im Exponenten zu erscheinen. Weil dieser aber dimensionslos sein muss, geht das nur zusammen mit einem Faktor, der auch  $1/\tau$  heißen kann und negativ sein darf. Daraus folgt aber wegen der Kettenregel der Differentiation (► Kap. 4.1.2)

$$\frac{d}{dt} \exp(-t/\tau) = -\frac{1}{\tau} \exp(-t/\tau).$$

Die Differentialgleichung der Kondensatorentladung lässt sich also mit dem Ansatz

$$U_C(t) = U_0 \cdot \exp(-t/\tau)$$

lösen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U_C(t) &= U_0 \cdot \frac{d}{dt} \exp(-t/\tau) \\ &= -\frac{U_0}{\tau} \exp(-t/\tau) = -\frac{1}{\tau} U_C(t). \end{aligned}$$

Demnach sind  $1/\tau$  und  $1/(R \cdot C)$  gleich. Somit gilt für die **Zeitkonstante  $\tau$  der Kondensatorentladung**

$$\tau = R \cdot C.$$

#### Merke

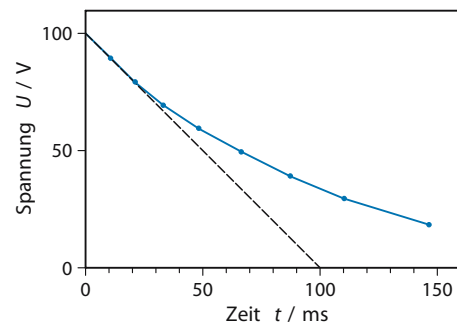
Kondensatorentladung:

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

Zeitkonstante  $\tau = R \cdot C$

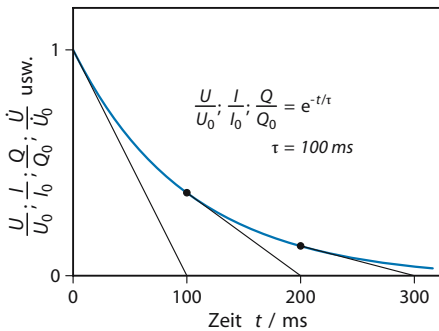
Die Exponentialfunktion ist in gewissem Sinn die wichtigste mathematische Funktion in der Physik, vielleicht sogar in der ganzen Natur. Wem sie nach der soeben vorgeführten etwas formalen Herleitung immer noch ein bisschen unheimlich vorkommt, dem soll sie am Beispiel der Kondensatorentladung etwas anschaulicher, dafür aber nur halbquantitativ erläutert werden. Angenommen, ein Kondensator von  $1 \mu\text{F}$  ( $C$ ) wird auf  $100 \text{ V}$  ( $U_0$ )

aufgeladen; er enthält dann  $0,1 \text{ mC}$  Ladung ( $Q_0$ ). Überbrückt man seine Kondensatorplatten mit  $100 \text{ k}\Omega$  ( $R$ ), so beginnt die Entladung mit einem Strom von  $1 \text{ mA}$  ( $I_0$ ). Flösse dieser Strom konstant weiter, so wäre der Kondensator nach  $100 \text{ ms}$  leer. Diese Zeitspanne entspricht genau der Zeitkonstanten  $\tau$  des  $RC$ -Gliedes. Tatsächlich nimmt  $I_0$  aber schon in der ersten Millisekunde  $1 \mu\text{C}$  an Ladung mit, immerhin  $1\%$  von  $Q_0$ . Damit sinkt die Spannung am Kondensator um  $1\%$  gegenüber  $U_0$  ab auf  $99 \text{ V}$ . Dadurch verringert sich aber auch der Entladestrom um  $1\%$  auf  $0,99 \text{ mA}$ . Er braucht jetzt  $1,01 \text{ ms}$ , um das zweite Mikroculomb aus dem Kondensator herauszuholen. Nach dieser Zeit sind Ladung, Spannung und Strom auf  $98\%$  ihrer Ausgangswerte abgefallen, sodass für das dritte  $\mu\text{C}$  schon  $1,02 \text{ ms}$  gebraucht werden, für das zehnte  $1,105 \text{ ms}$  und für das zwanzigste  $1,22 \text{ ms}$ ; die Entladung wird immer langsamer. Nach dieser Vorstellung könnte man ihren Verlauf als Polygonzug aus lauter kleinen Geraden zusammensetzen, wie ► Abb. 6.33 es andeutet. Tatsächlich bleibt der Entladestrom freilich in keiner Millisekunde konstant; deshalb hält sich die echte Entladung an die  $e$ -Funktion. Sie ist eine glatte, gebogene Kurve, deren Funktionswerte numerisch ausgerechnet werden müssen, ein ermüdendes Geschäft für den Menschen, eine Zehntelsekundenarbeit für den Taschenrechner. Den Graphen der fallenden  $e$ -Funktion zeigt ► Abbildung 6.34 (wie auch schon früher ► Abb. 1.19). Ihr folgen beim  $RC$ -Glied Ladung  $Q(t)$ , Spannung  $U(t)$ , Strom  $I(t)$  und alle ihre Änderungsgeschwindigkeiten, d. h.



► Abb. 6.33. Polygonzug als Annäherung an die  $e$ -Funktion (Einzelheiten im Text)





■ **Abb. 6.34. e-Funktion der Kondensatorentladung:** Jede zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t_0$  angelegte Tangente trifft die Abszisse um die Zeitkonstante  $\tau$  nach  $t_0$

$$U(t) = U_0 \exp(-t/\tau),$$

$$Q(t) = Q_0 \exp(-t/\tau),$$

$$I(t) = I_0 \exp(-t/\tau)$$

usw.

Für jede dieser Größen zielt die (negative) Anfangssteigung ihres Graphen an der Abszisse auf die Zeitkonstante  $\tau$ , in der die Größe selbst allerdings erst auf den e-ten Teil ihres Ausgangswertes abfällt (■ Abb. 6.34). Die Zeitspanne  $\tau$  darf auch mitten in die laufende Entladung hineingelegt werden: In der Spanne zwischen den Zeitpunkten  $t_0$  und  $(t_0 + \tau)$  fällt jede der genannten Größen auf den e-ten Teil desjenigen Wertes ab, den sie zum Zeitpunkt  $t_0$  besaß. Formal kann dieser Tatbestand durch die Gleichung

$$U(t_0) = e \cdot U(t_0 + \tau)$$

beschrieben werden. Bei solchen Formeln muss man aufpassen, sonst verwechselt man möglicherweise den Funktionswert  $U(t_0 + \tau)$  mit dem (sinnlosen) Produkt  $U(t_0 + \tau)$ , das  $U \cdot t_0 + U \cdot \tau$  betrüge.

### Rechenbeispiel 6.8: Zeitkonstante

► **Aufgabe.** Welcher Widerstand muss in einem RC-Glied zu einem Kondensator mit  $C = 2 \mu\text{F}$  hinzugeschaltet werden, um die Zeitkonstante  $\tau = 0,4 \text{ s}$  herauszubekommen?

► **Lösung.**  $R = \frac{\tau}{C} = \frac{0,4 \text{ s}}{2 \cdot 10^{-6} \text{ As/V}} = 200 \text{ k}\Omega$ .

## 6.5 Elektrisches Feld

### 6.5.1 Der Feldbegriff

Damit durch einen Metalldraht ein Strom fließt, muss man ihn an eine Spannungsquelle anschließen. Zwischen den Drahtenden muss eine Spannung herrschen, die den Strom vorantreibt. Von alleine fließt er nicht, weil die Ladungsträger (Elektronen) auf ihrem Weg durch den Draht immer wieder mit den Atomen zusammenstoßen, dadurch auch Energie übertragen und den Draht aufwärmen (Stromwärme, ► Kap. 6.2.3). Fast jede mechanische Bewegung wird von einem Reibungswiderstand behindert, so auch diese. Irgendwie muss also die Spannungsquelle Kräfte auf jedes Leitungselektron ausüben, die dieses vorantreiben.

Es hat zwei Jahrhunderte gedauert, um diese Kräfte zu verstehen und zu beschreiben. Die Kräfte, die den Strom vorantreiben, sind **elektrische Kräfte** zwischen Ladungen und manchmal auch **magnetische Kräfte** zwischen bewegten Ladungen. Wer vorsichtig ist, spricht von „elektrostatischen“ und von „magnetischen“ Kräften und fasst beide unter dem Stichwort **elektromagnetische Kräfte** zusammen. Unter den Bedingungen des Alltags sind diese Kräfte sehr viel kleiner als die Gravitation; darum hat man sie erst so spät entdeckt. Alle genannten Kräfte wirken auf Distanz, die betroffenen Körper brauchen sich nicht zu berühren. Die Kraft der Gravitation, die Schwerkraft, hält die Planeten auf ihren Bahnen um die Sonne; magnetische Kräfte drehen auf der ganzen Erde Kompassnadeln in Nord-Süd-Richtung; elektrostatische Kräfte ziehen kilometerlange Blitze aus Wolken. Man bezeichnet sie alle als **Fernkräfte**.

Fernkräften haftet etwas Unheimliches an. Wie macht es die Sonne, durch den leeren Raum und über große Distanzen, die Erde anzuziehen? Da leuchtet es doch eher ein, dass die Kraft auf die Erde von etwas abhinge, was sie an ihrem Aufenthaltsort vorfindet. Um eben dies zu erreichen, hat die Physik ihren Begriff **Feld** eingeführt, das Gravitationsfeld für die Anziehung zwischen Massen, das elektrische Feld für die elektrostatischen Kräfte zwischen Ladungen und das magnetische Feld für die magnetischen Kräfte zwischen be-

wegen Ladungen. Allerdings muss man nun den leeren Raum verpflichten, physikalische Felder zu tragen, und beispielsweise Folgendes behaupten: Jede elektrische Ladung umgibt sich mit einem elektrischen Feld; ein elektrisches Feld ist ein Raumzustand, von dem auf eine elektrische Ladung  $Q$  eine Kraft ausgeübt wird. Die Stärke dieser Kraft  $\vec{F}_C$  hängt von der Stärke des Feldes, der **elektrischen Feldstärke**  $\vec{E}$  ab:

$$\vec{F}_C = Q \cdot \vec{E}.$$

Die elektrische Kraft  $\vec{F}_C$  wird auch **Coulomb-Kraft** genannt. Die Feldstärke  $\vec{E}$  ist im Allgemeinen ortsabhängig.

#### Merke

Eine elektrische Ladung ist von einem elektrischen Feld umgeben.

Ein elektrisches Feld ( $\vec{E}$ ) ist ein Raumzustand, in dem auf eine zweite elektrische Ladung ( $Q$ ) eine Coulomb-Kraft ( $\vec{F}_C$ ) ausgeübt wird:

$$\vec{F}_C = Q \cdot \vec{E},$$

elektrische Feldstärke  $\vec{E}$ , Einheit: V/m.

■ ■ ■ Die Gleichung  $\vec{F}_C = Q \cdot \vec{E}$  bietet eine Möglichkeit,  $\vec{E}$  zu messen: Man besorgt sich eine bekannte *Probeladung*  $Q$ , bringt sie dorthin, wo man  $\vec{E}$  kennen möchte, und misst  $\vec{F}_C$ . Ein wenig muss man dabei aufpassen.  $Q$  ist ja selbst von einem elektrischen Feld umgeben, das sich dem ursprünglichen Feld überlagert. Darum braucht man sich aber nicht zu kümmern: Die Kraftgleichung meint dasjenige Feld  $\vec{E}$ , das am Ort der Handlung herrschte, bevor die Probeladung kam.

In dem Metalldraht, durch den ein Strom fließt, herrscht also ein elektrisches Feld, das auf die Leitungselektronen eine Coulomb-Kraft ausübt und sie damit vorantreibt. Je höher die elektrische Feldstärke, umso höher der elektrische Strom. Was hat aber nun die elektrische Feldstärke mit der elektrischen Spannung  $U$  zwischen den Drahtenden zu tun?

Im einfachen Fall eines Metalldrahtes kann davon ausgegangen werden, dass im Draht ein homogenes Feld herrscht, mit konstantem Betrag  $E$  der Feldstärke und der Richtung von  $\vec{E}$  immer in

Richtung des Drahtes. Dann gilt für einen Draht der Länge  $l$ :

$$U = l \cdot E.$$

Durch die Einheit der Feldstärke V/m wird eine solche Beziehung zwar nahe gelegt, aber natürlich nicht bewiesen. Im übernächsten Kapitel wird dieser Zusammenhang deutlicher.

Die in speziellen Situationen auch noch wirkenden magnetischen Felder und Kräfte bekommen ihren eigenen Abschnitt im Buch (► Kap. 6.10).

■ ■ ■ In der Mechanik ist der Feldbegriff nicht so nützlich wie in der Elektrizitätslehre. Deshalb wurde dort nicht von einem Gravitationsfeld gesprochen. Die Fallbeschleunigung  $g$  ist aber nichts anderes als der Betrag der Gravitationsfeldstärke an der Erdoberfläche:  $F_G = m \cdot g$ .

#### Rechenbeispiel 6.9: Fotokopierer

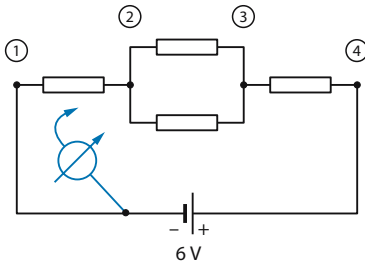
► **Aufgabe.** In einem Fotokopierer oder Laserdrucker wird das Schriftbild zunächst als Muster positiver Ladungen auf einer Trommel aus Halbleitermaterial eingepreßt. Leicht negativ geladene Toner-(Farb-)Partikel werden dann von diesen Ladungen auf die Trommel gezogen und anschließend durch Abrollen mechanisch auf das Papier übertragen. Nehmen wir an, dass die Partikel eine Masse von  $9 \cdot 10^{-16}$  kg haben und im Mittel 20 Überschusselektronen als negative Ladung tragen (das bedeutet  $q = 20 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$  As). Welches Feld muss die Trommel am Ort des Toners erzeugen, um eine zuverlässige Kraft von mindestens zweimal dem Eigengewicht der Tonerpartikel aufzubringen?

► **Lösung.** Für das minimale Feld gilt  $q \cdot E = 2 \cdot m \cdot g$ , wobei die Ladung der Tonerpartikel  $q = 32 \cdot 10^{-19}$  As ist. Das ergibt:

$$\begin{aligned} E &= \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-16} \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2}{32 \cdot 10^{-19} \text{ As}} \\ &= 5,5 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{As}} = 5500 \frac{\text{V}}{\text{m}}. \end{aligned}$$

### 6.5.2 Elektrisches Potential

Einem Radiobastler wird es nur selten gelingen, die Schaltung eines komplizierten Verstärkers, die er sich gekauft hat, so sorgfältig nachzubauen



■ Abb. 6.35. Zur Herleitung des Begriffes „Potential“ (Einzelheiten im Text)

6

en, dass sein Gerät auf Anhieb funktioniert. Im Allgemeinen muss er sich zunächst einmal auf Fehlersuche begeben. Hierfür gibt es bewährte Verfahren. Eines besteht darin, das eine „Bein“ eines Spannungsmessers z. B. an den Minuspol der Batterie zu legen und mit dem anderen verschiedene Knotenpunkte der Schaltung nacheinander abzutasten. In guten Schaltskizzen ist eingetragen, welche Spannung man jeweils zu erwarten hat. Abweichungen geben dann Hinweise auf Schaltungsfehler. Hierfür ein vereinfachtes Beispiel: Vier gleiche Widerstände hängen an einer Batterie von 6,0 V, wie es Abbildung 6.35 zeigt. Berührt man mit dem freien Ende des Spannungsmessers nacheinander die Punkte 1 bis 4, so hat man die Anzeigen 0 V, 2,4 V, 3,6 V und 6,0 V zu erwarten.

Nach diesem Verfahren lässt sich jedem Punkt einer an ihre Spannungsquelle angeschlossenen Schaltung ein **elektrisches Potential** zuordnen, gemessen in der Einheit Volt. Die Differenz der Potentiale zu beiden Seiten eines Widerstandes entspricht genau der Spannung, die über ihm liegt. Auf den ersten Blick könnte man meinen, der Unterschied zwischen Spannung und Potential bestehe darin, dass eine Spannung immer nur zwischen zwei Punkten auftritt, während das Potential jedem Punkt für sich allein zukommt. Hierin liegt insofern ein Trugschluss, als sich das Potential erst angeben lässt, wenn zuvor das Bezugspotential – willkürlich – festgelegt worden ist. Im Beispiel der ■ Abb. 6.35 wird es auf den Minuspol der Batterie bezogen. Nimmt man stattdessen den Pluspol, so verschieben sich alle Potentiale um  $-6\text{ V}$ , werden also negativ; nur Punkt 4 geht

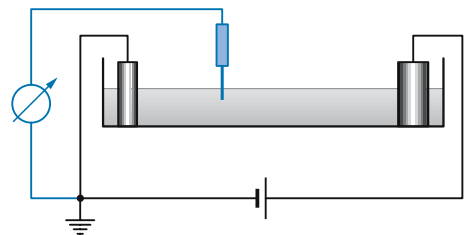
auf  $\pm 0\text{ V}$ . Alle Potentialdifferenzen bleiben dagegen unverändert erhalten.

### Merke

Ein Potential ist die Spannung zwischen Messpunkt und Bezugspunkt.

Dem irdischen Experimentator bietet sich ein schier selbstverständliches Bezugspotential an: das des Erdbodens. Zumindest dort, wo sie feucht ist, leitet die Erde so gut, dass dank der großen Stromquerschnitte nennenswerte Spannungen nicht auftreten können; folglich liegen alle Erdpunkte in der Welt praktisch auf gleichem Potential, der Elektriker redet von der „Erde“. In sorgfältig eingerichteten Messlaboratorien (und vielen Operationssälen! ► Kap. 6.9.3) holt man dieses Erdpotential dadurch herein, dass man eine große Metallplatte im Grundwasser des Erdbodens vergräbt und von ihr ein stabiles Kupferkabel zur Schalttafel führt. Von dort aus kann man die Messgeräte dann „erden“.

Elektronische Schaltungen sind (so gut wie) immer an irgendeiner Stelle geerdet, es muss nicht der Minuspol der Spannungsquelle sein. In der Schaltskizze wird ein Erdungspunkt durch ein besonderes Schaltzeichen markiert (■ Abb. 6.36). Mehrere Punkte mit dem Erdzeichen liegen auf dem gleichen Potential und stehen darum untereinander in gut leitender Verbindung. Von ihnen aus werden üblicherweise alle anderen Potentiale gemessen.



■ Abb. 6.36. Elektrolytischer Trog. Zwischen den Metallelektroden baut die Spannungsquelle im Elektrolyten (Wasser mit gelöstem Leitsalz) ein elektrisches Feld auf, dessen Potentialverteilung mit Spannungsmesser und Potentialsonde punktweise ausgemessen werden kann. Links unten: Schalt-symbol der Erdung

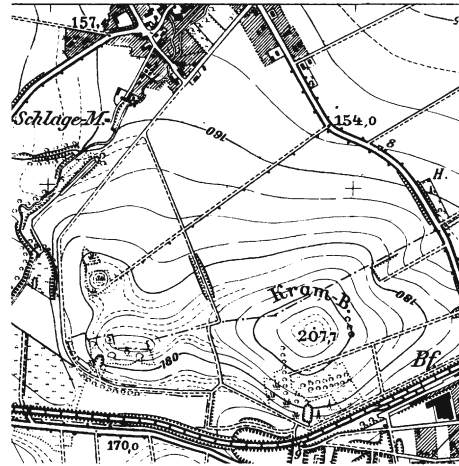
### 6.5.3 Das Potentialfeld

Elektrische Felder können im leeren Raum, in Nichtleitern und in Leitern existieren. Nimmt man als Leiter einen flüssigen Elektrolyten, so verschafft man sich die elegante Möglichkeit, elektrische Felder als **Potentialfelder** auszumessen, etwa das Feld einer Batterie, die versehentlich in ein Aquarium gefallen ist. Diese Situation wäre nicht einmal gekünstelt. Sie ähnelt der des Herzens als Spannungsquelle im (elektrisch leitenden) Brustkorb eines Menschen.

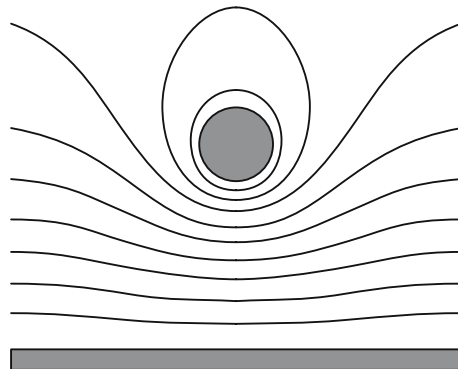
Für den Anfang empfiehlt es sich, statt eines Aquariums eine flache Wanne zu benutzen und Elektroden mit senkrechten Grenzflächen in sie einzusetzen (■ Abb. 6.36), denn damit reduziert sich das grundsätzlich räumliche Problem zu einem ebenen. In die Wanne wird Wasser gefüllt, dem man durch Zusatz von Kochsalz oder Kupfersulfat eine hinreichend hohe elektrolitische Leitfähigkeit gibt. Ähnlich wie bei einem Netzwerk kann man jetzt mit einem hochohmigen Spannungsmesser und einer in den Elektrolyten eingetauchten **Potentialsonde** die Spannungen zwischen der geerdeten Elektrode und jedem Punkt im **elektrolytischen Trog** messen und so die Potentialverteilung kartographieren. Landmesser verbinden in ihren Karten Punkte gleicher Höhe über dem Meeresspiegel durch **Höhenschichtlinien** (■ Abb. 6.37). Ganz analog verbindet man Punkte gleichen elektrischen Potentials mit **Äquipotentiallinien**. ■ Abbildung 6.38 zeigt ein ausgemessenes Beispiel.

Es ist nicht schwer, Äquipotentiallinien rein qualitativ zu zeichnen. Metallelektroden haben im Vergleich zum Elektrolyten hohe Leitfähigkeit und erlauben darum keine ernsthaften Spannungsabfälle: Die Grenzen der Elektroden sind Äquipotentiallinien. Weiterhin bemühen sich benachbarte Potentiallinien, so gut es geht, zueinander parallel zu laufen. Man braucht also nur einen glaubhaften Übergang von der Begrenzung der einen Elektrode zu der Begrenzung der anderen zu skizzieren.

Im räumlichen Aquarium treten an die Stelle der Linien **Äquipotentialflächen**, auszumessen mit einer punktförmigen, also gleich hinter der freien Spitze isolierten Potentialsonde. Auch in der fla-



■ Abb. 6.37. Landkarte mit Höhenschichtlinien. Geschlossene bezeichnen Hügel wie den Kram-Berg. Das Gelände ist umso steiler, je dichter die Linien beieinander liegen. (Grundlage: topographische Karte 1:25.000, Blatt 4425 Göttingen; Druck mit Genehmigung des Niedersächsischen Landesverwaltungsamtes – Landesvermessung – vom 26.2.1974)



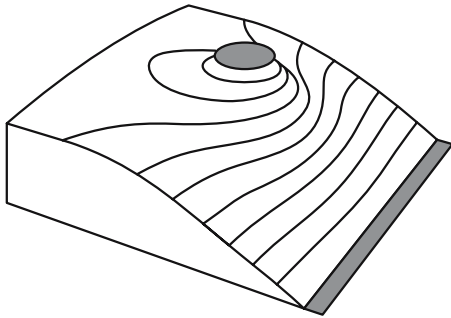
■ Abb. 6.38. Äquipotentiallinien, in einem flachen elektrolytischen Trog mit einer Potentialsonde ausgemessen

chen Wanne gibt es genau genommen nur Äquipotentialflächen; weil sie aber senkrecht stehen, erscheinen sie dem Blick von oben perspektivisch verkürzt als Linien.

Hügel im Gelände werden auf der Landkarte durch ringförmig geschlossene, konzentrische Höhenschichtlinien dargestellt. Auf der Seite der steileren Flanke liegen die Linien dichter. Vor kritischen Gefällstrecken auf der Straße warnen Verkehrsschilder (■ Abb. 6.39), und zwar unter An-



■ Abb. 6.39. Gefälle. Verkehrsschild vor einer Gefällstrecke; Angabe des Gefälles in Prozent, d. h. in m/m

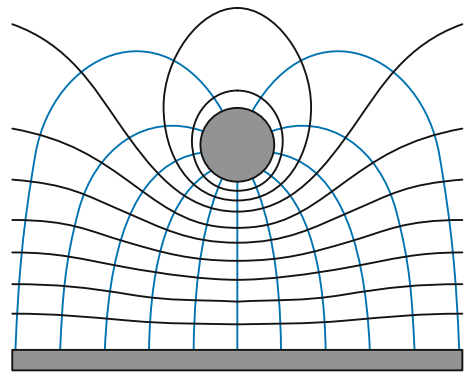


■ Abb. 6.40. Potentialgebirge. Perspektivische Zeichnung des Potentialgebirges von ■ Abb. 6.38

gabe des Gefälles in Prozent, d. h. in m/m (nämlich Meter Höhenunterschied durch Meter horizontaler Entfernung). Man kann dieses Gefälle den Höhenlinien der Karte entnehmen. Ganz analog darf man auch die elektrischen Potentiallinien als „Höhenschichtlinien“ eines „Potentialgebirges“ ansehen und dieses Gebirge in Gips modellieren; ■ Abbildung 6.40 zeigt das Gebirge des elektrolytischen Trogges zu ■ Abb. 6.38 als perspektivisch gezeichnetes Beispiel. Wie beim geographischen Berg gilt auch beim Potentialberg: je dichter die Linien, desto steiler das Potentialgefälle (jetzt in V/m zu messen). Längs der Linien ist das Potential konstant, sein Gefälle gleich null. Konsequenterweise herrscht quer zu den Linien steilstes Gefälle. Für jeden Punkt im Trog lassen sich Richtung und Steilheit die-

ses größten Gefälles angeben: Es ist die elektrische Feldstärke  $\vec{E}$ .

In Richtung des elektrischen Feldes fließt der (konventionelle) Strom im Elektrolyten. Man kann seine Stromfäden nachzeichnen: Sie müssen immer senkrecht auf den Äquipotentialflächen stehen, also auch senkrecht auf den Elektroden. Sie können sich nicht überschneiden, denn sonst müsste ein Punkt am Hang nach zwei Richtungen zugleich „stärkstes Potentialgefälle“ besitzen. Die Stromfäden entsprechen den sog. **Feldlinien**, mit denen sich auch komplizierte Felder anschaulich darstellen lassen. In ■ Abb. 6.41 sind sie in blauer Farbe zu den Potentiallinien der ■ Abb. 6.38 hinzugezeichnet. Sie markieren aber nur die Richtung des Feldes; sie ist zugleich die Richtung der elektrischen Kraft auf eine positive Probeladung. Insofern darf man auch von einem **Kraftfeld** sprechen. Über den Betrag der Feldstärke sagt ein Feldlinienbild nur qualitativ etwas aus: Dort, wo sich die Feldlinien drängen, drängen sich auch die Potentialflächen, dort herrscht ein vergleichsweise starkes Feld. Zuweilen spricht man in diesem Zusammenhang von der „Feldliniendichte“, als könne man sie in „Feldlinien pro Quadratzentimeter“ messen und damit ein Maß für den Betrag der Feldstärke bekommen. Das stimmt aber nicht, denn es bleibt einem jeden überlassen, wie dicht er seine Feldlinien zeichnen will. Auf jeden Fall existiert das Feld auch zwischen ihnen.



■ Abb. 6.41. Potentiallinien und Feldlinien. Elektrodenanordnung der ■ Abb. 6.38 mit Potentiallinien (schwarz) und Feldlinien (blau)

**Klinik**

**Potentiallinien auf dem Rücken.** Die letztlich das  $\oplus$ EKG auslösenden, vom Herzen stammenden, pulsierenden Äquipotentialflächen im Brustkorb lassen sich nicht ausmessen. Man müsste ja mit einer Potentialsonde im Patienten herumfahren. Die Flächen treffen aber auf die Körperoberfläche und schneiden die Haut in Linien, die man für eine ganz bestimmte Zacke im EKG abtasten und aufzeichnen kann, weil sich die Potentialverteilung periodisch wiederholt. ■ Abbildung 6.42 zeigt ein Beispiel: Der „Herzdipol“ liegt schräg im Brustkorb, seine Achse zielt in die Zentren der geschlossenen Potentiallinien.

**Merke**

Feldlinien stehen senkrecht auf Äquipotentialflächen.

Der Verlauf von Feld- und Potentiallinien hängt nur von der Form der Elektroden ab, nicht von den Spannungen zwischen ihnen und nicht von der Leitfähigkeit  $\delta$  des Elektrolyten. Felder gibt es auch im Vakuum. Einfluss haben allerdings Einschlüsse im Elektrolyten: Feldlinien weichen isolierenden Einschlüssen aus, Potentialflächen gut leitenden Einschlüssen (■ Abb. 6.43).

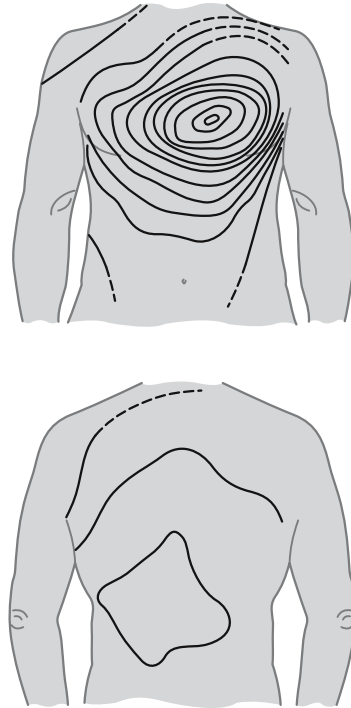
■■■ Der Vektor  $\vec{E}$  zeigt in die Richtung des größten Potentialgefälles. Mathematisch nennt man so etwas einen **Gradienten** und schreibt

$$\vec{E} = -\text{grad } U.$$

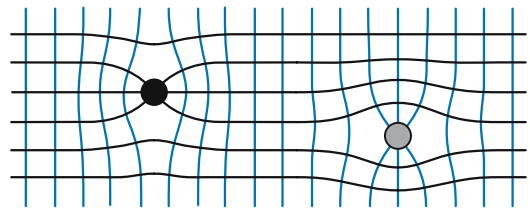
Hier handelt es sich um eine besondere Form der Differentiation, die zu einem Vektor führt. Die Umkehrung ist das sog. **Linienintegral**. Es wird längs eines Weges  $\vec{s}$  ausgeführt, der im Grundsatz beliebig krumm sein darf. Im elektrischen Feld liefert er die Potentialdifferenz  $\Delta U$  zwischen zwei Punkten  $\vec{s}_1$  und  $\vec{s}_2$ :

$$\Delta U = \int_{\vec{s}_1}^{\vec{s}_2} \vec{E}(\vec{s}) \cdot d\vec{s}.$$

Dabei spielt es keine Rolle, auf welchem Wege man von  $\vec{s}_1$  nach  $\vec{s}_2$  kommt. Das ist aber eine Spezialität des Potentialfeldes; es gilt nicht generell für alle Linienintegrale.



■ Abb. 6.42. Potential auf der Haut. Äquipotentiallinien zu einem bestimmten Zeitpunkt im Herzzyklus, gezeichnet auf die Körperoberfläche des Patienten (nach K. Rothschild in Landois-Rosemann)



■ Abb. 6.43. Isolierender Einschluss. Feldlinien (blau) und Potentiallinien (schwarz) um einen gut leitenden (rechts) und einen isolierenden Einschluss (links)

Oft darf man sich die Mathematik dadurch erleichtern, dass man kurzerhand und skalar

$$E = -dU/dx$$

und als Umkehrung

$$\Delta U = \int_{x_1}^{x_2} E(x) dx$$



schreibt. Man behält dann gewissermaßen im Hinterkopf:  $x$  hat die Richtung einer Feldlinie.

**Merke**

Elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = -\text{grad } U; \text{ Betrag } E = -dU/dx.$$

Eine positive Probeladung  $Q$  möchte der Feldstärke  $\vec{E}$  folgen. Zwingt man sie,  $\vec{E}$  entgegenzugehen, so kostet das die mechanische Arbeit

$$\Delta W = -\int_{x_1}^{x_2} F(x) \cdot dx = -Q \int_{x_1}^{x_2} E(x) \cdot dx = Q \cdot \Delta U$$


Die Probeladung gewinnt sie als potentielle Energie, die bei Rückkehr wieder abgeliefert werden kann. Daher der Name „Potential“. Der Nullpunkt darf bei jeder potentiellen Energie willkürlich definiert werden. Beim Potential gilt dasselbe. Für Potential- und Energiedifferenzen spielt der Nullpunkt keine Rolle.

**Merke**

Befindet sich eine Ladung  $Q$  auf dem elektrischen Potential  $U$ , so besitzt sie die potentielle Energie

$$W_{\text{pot}} = Q \cdot U.$$

**Rechenbeispiel 6.10: Elektrolytischer Trog**

► **Aufgabe.** Nehmen wir an, zwei benachbarte Äquipotentiallinien in  Abb. 6.38 repräsentieren einen Potentialunterschied von 2 V. Wie groß ist dann die Spannung zwischen den Elektroden? Angenommen, die Abbildung zeigt den Trog in Originalgröße, welchen Wert hat in etwa die Feldstärke an der unteren Elektrode?

► **Lösung.** Zwischen den Elektroden sind 9 Äquipotentiallinien und 10 Zwischenräume, also eine Spannung von 20 V. Der Abstand zwischen der unteren Elektrode und der ersten Äquipotentiallinie beträgt etwa 3,5 mm. Das entspricht einer Feldstärke von

$$E = \frac{2 \text{ V}}{0,0035 \text{ m}} = 571 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

**6.5.4 Kräfte zwischen Ladungen**

Setzt man zwei punktförmige Ladungen nebeneinander, so stoßen sie sich entweder ab oder sie ziehen sich an. Es gibt nämlich zwei verschiedene Sorten von Ladungen, positive und negative, entsprechend kann auch die Ladungsmenge  $Q$  positiv oder negativ sein. „Gleich und Gleich gesellt sich gern“ gilt hier gerade nicht; gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, Ladungen mit verschiedenen Vorzeichen ziehen sich an. Die Kräfte zwischen ihnen sind umso stärker, je kürzer der Abstand  $r$  zwischen ihnen ist. Ganz ähnlich wie beim Gravitationsgesetz gilt für die **Coulomb-Kraft** zwischen zwei Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$ :

$$F_C = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}.$$

Hier erscheint die

**Elektrische Feldkonstante**

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A} \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{m}}.$$

Sie ist eine Naturkonstante. Dass in der obigen Gleichung noch ein Faktor  $1/4\pi$  eingefügt ist, erweist sich in späteren Formeln als praktisch.

Die Kräfte liegen parallel zur Verbindungslinie zwischen den Ladungen und weisen bei ungleichnamigen Ladungen aufeinander zu, bei gleichnamigen voneinander weg.

**Merke**

Coulomb-Gesetz:

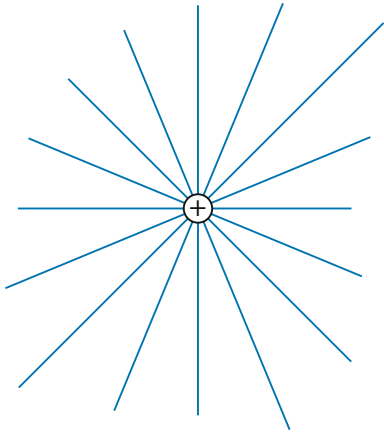
Zwischen zwei Punktladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  im Abstand  $r$  herrscht die Coulomb-Kraft

$$F_C = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}.$$

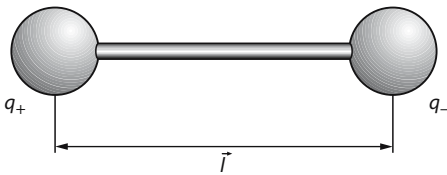
Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an.

Im Bild der elektrischen Felder sagt man, die eine Ladung (zum Beispiel  $Q_1$ ) erzeugt ein elektrisches Feld und auf die andere Ladung wirkt in diesem Feld eine Kraft. Die felderzeugende Ladung ist immer die, die die Kraft ausübt, die man betrachten will. Ist die felderzeugende Ladung  $Q_1$  allein auf der Welt, so laufen die Feldlinien **radial** auseinander.





■ **Abb. 6.44. Punktladung.** Die Feldlinien einer Punktladung, notwendig zur Berechnung der Coulomb-Kraft zwischen zwei Ladungen



■ **Abb. 6.45. Dipol.** Schematische Darstellung eines Dipols mit dem Dipolmoment  $\vec{p} = q \cdot \vec{l}$

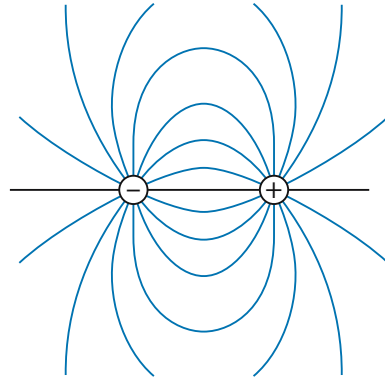
der (■ Abb. 6.44), und die Potentialflächen bilden konzentrische Kugeln um  $Q_1$ . Die Feldstärke im Abstand  $r$  hat den Betrag:

$$E = \frac{F_C}{Q_2} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2}.$$

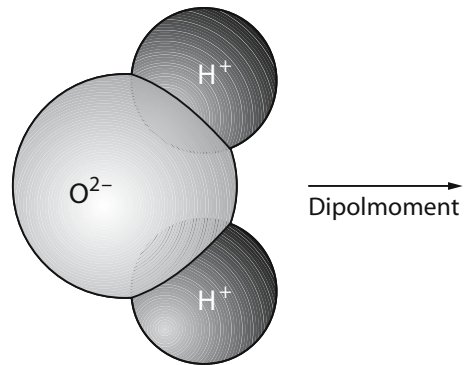
Zwei ungleichnamige Ladungen mit gleichem Betrag  $q$ , die auf irgendeine Weise im Abstand  $\vec{l}$  voneinander gehalten werden, nennt man einen **Dipol** und ordnet ihnen das

$$\text{Dipolmoment} \quad \vec{p} = q \cdot \vec{l}$$

zu (■ Abb. 6.45). Der Verbindungsstab wird auf Druck beansprucht, denn die beiden Ladungen ziehen sich an. Ihr Feldlinienbild suggeriert dies geradezu (■ Abb. 6.46). Viele elektrisch neutral, also ungeladen wirkende Moleküle, wie z. B. das des Wassers, erweisen sich als Dipole (■ Abb. 6.47). In



■ **Abb. 6.46. Die Feldlinien des Dipols** suggerieren die Anziehung ungleichnamiger Ladungen



■ **Abb. 6.47. Wassermolekül, schematisch**

einem äußeren elektrischen Feld versucht ein Dipol, sich parallel zu dessen Feldlinien zu stellen, denn auf seine beiden Ladungen wirkt ein

$$\text{Drehmoment} \quad \vec{T} = \vec{l} \times \vec{F} = q \cdot \vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Hier wird stillschweigend vorausgesetzt, dass  $\vec{l}$  klein genug ist, um beide Ladungen das gleiche  $\vec{E}$  spüren zu lassen. Aber auch im inhomogenen Feld richtet sich ein Dipol aus. Dann wirkt auf ihn zusätzlich eine resultierende Kraft, die ihn in den Bereich mit höherer Feldstärke zieht (■ Abb. 6.48). Folge: Schwimmen in einer wässrigen Lösung Ionen herum, z. B. die des NaCl, so bilden die Wassermoleküle **Hydrathüllen** (► Kap. 5.3.3); um die  $Na^+$ -Ionen drängeln sie sich mit dem O-Atom voran, um die  $Cl^-$ -Ionen umgekehrt.

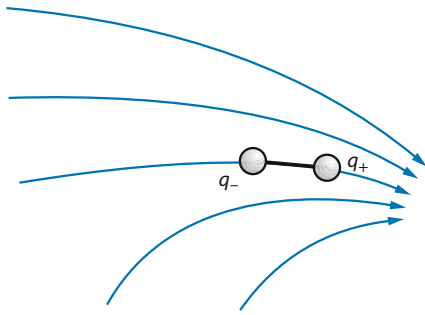


Abb. 6.48. Dipol im inhomogenen Feld

6

### Merke

Zwei entgegengesetzt gleiche Ladungen  $+q$  und  $-q$  im Abstand  $\vec{l}$  bilden einen elektrischen Dipol mit dem Dipolmoment

$$\vec{p} = q \cdot \vec{l}.$$

Dipol im elektrischen Feld:

Drehmoment  $\vec{T} = \vec{p} \times \vec{E}$ ,  
resultierende Kraft in Richtung steigender  
Feldstärke.

### Rechenbeispiel 6.11: Die Pyramiden hochheben

► **Aufgabe.** Ein Stück Tafelkreide enthält etwa  $10^{21}$  Moleküle. Angenommen, wir könnten jedem hundertsten Molekül ein Elektron entziehen und diese Elektronen einem zweiten Stück Tafelkreide zuführen. Mit welcher Kraft würden sich die beiden Stücke anziehen, wenn sie ein Meter voneinander entfernt wären? (Ein Elektron trägt die Elementarladung  $e_0 = 1,6 \cdot 10^{-19}$  As).

► **Lösung.** Die Ladung auf einem Stück Kreide wäre 1,6 As. Dann ist die Kraft:

$$F_C = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(1,6 \text{ As})^2}{(1 \text{ m})^2} = 2,3 \cdot 10^{10} \text{ N}.$$

Das reicht locker, um die Pyramiden in Ägypten hochzuheben. Die Größe dieser Kraft verhindert zugleich, dass sie praktisch auftritt: Es gelingt nicht, ein Kreidestück tatsächlich derart aufzuladen.

### Rechenbeispiel 6.12: Gewaltige Energie

► **Aufgabe.** Unsere beiden Stück Tafelkreide ziehen sich an. Wie viel Arbeit können sie leisten, wenn wir sie vom Abstand 1 m auf 0,5 m zusammenrücken lassen?

► **Lösung.** Für die Arbeit gilt gemäß letztem Kapitel:  $\Delta W = Q \cdot \Delta U$ . Wir denken uns also die eine Kreide bewegt im durch die andere Kreide erzeugten Potential. Die Potentialdifferenz zwischen einem Meter Abstand und einem halben Meter Abstand beträgt:

$$\Delta U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{0,5 \text{ m}} - \frac{1}{1 \text{ m}} \right) = 1,44 \cdot 10^{10} \text{ V}.$$

Damit ergibt sich die Arbeit zu  $\Delta W = 2,3 \cdot 10^{10} \text{ J} = 6,4 \cdot 10^3 \text{ kWh}$ . Das ist in etwa der halbe Jahresbedarf einer Familie an elektrischer Energie.

## 6.5.5 Feld im Kondensator

So leicht sich Feld- und Potentiallinien qualitativ zeichnen lassen, die quantitative Rechnung erfordert einen mathematischen Aufwand, der nur in besonders einfachen Fällen einfach bleibt. Ein solch einfacher Fall ist der flache Plattenkondensator (Abb. 6.12). Im fast **homogenen Feld** laufen die Feldlinien parallel zueinander geradewegs von einer Elektrode zur anderen; die Potentiallinien stehen senkrecht auf ihnen, also parallel zu den Elektroden (Abb. 6.49). Marschiert man längs einer Feldlinie von links nach rechts, so wächst das Potential  $U$  linear an, mit konstanter Steigung also, und zwar von null bis zur Batteriespannung  $U_0$ . Die Länge der Feldlinien entspricht dem Plattenabstand  $d$ . Demnach betragen Potentialgefälle und Feldstärke

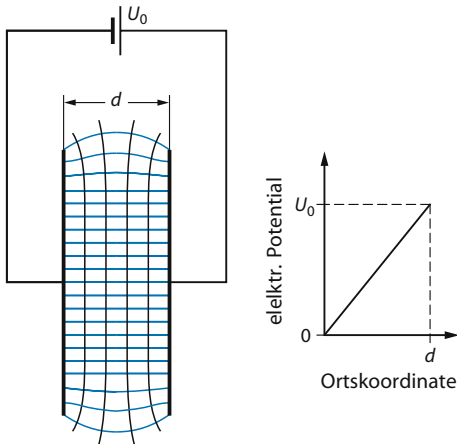
$$E_{\text{hom}} = U_0/d,$$

wie schon im Metalldraht.

### Merke

Homogenes elektrisches Feld im flachen Plattenkondensator:  $\vec{E}_0 = \text{konstant}$ ;  
Betrag  $E = U/d$ .

Erzeugt wird dieses Feld von den positiven und negativen Ladungen auf den Metallplatten. Je



■ **Abb. 6.49. Kondensator.** Feldlinien (blau) und Schnitte von Potentialflächen (schwarz) im weitgehend homogenen Feld eines Plattenkondensators und der dazugehörige Verlauf des Potentials auf einer geraden Feldlinie

mehr Ladung auf den Platten, je dichter die Ladungen auf den Platten gedrängt, umso größer die Feldstärke. Es leuchtet ein, dass die Feldstärke wohl proportional zu der Flächendichte  $Q/A$  der Ladungen auf den Platten mit der Fläche  $A$  ist. Tatsächlich ergibt eine genaue Rechnung, die hier nicht vorgeführt werden kann:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{A}.$$

Mit dieser Beziehung kann nun auch die Kapazität des Kondensators aus seiner Geometrie berechnet werden:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 \cdot E \cdot A}{E \cdot d} = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}.$$

Die Kapazität ist also umso größer, je größer die Plattenfläche und je kleiner der Plattenabstand. Dies verwundert nicht.

Zum Glück der Hersteller von Kondensatoren gibt es Isolatoren, die für technische Zwecke weit besser geeignet sind als Luft. Sie haben die (an dieser Stelle noch nicht erklärbare) Eigenschaft, die Kapazität eines Plattenkondensators um einen Faktor  $\varepsilon$  gegenüber einem Luftkondensator gleicher Abmessung zu vergrößern:  $C = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot A/d$ . Die Zahl  $\varepsilon_r$  ist eine Materialkenngröße des Dielektrikums, sie wird **Dielektrizitätszahl** genannt. Werte um 3 sind keine Seltenheit.

Wie Abbildung 6.49 zeigt, ist das Feld im Plattenkondensator am Rand nicht ganz homogen. Insofern gelten alle Beziehungen auch nur näherungsweise. Am Rand dringt das Feld etwas in den Außenraum außerhalb der Platten. Im Außenraum ist das Feld aber sehr klein, da sich die Felder der negativen Ladungen auf der einen Platte und die der positiven Ladungen auf der anderen Platte außen aufheben. Von außen betrachtet ist der Kondensator elektrisch neutral.

### Rechenbeispiel 6.13: Große Platten

► **Aufgabe.** Welche Plattenfläche müsste ein Luftkondensator haben, wenn er bei 1 mm Plattenabstand 1  $\mu\text{F}$  Kapazität haben soll?

► **Lösung.** Fläche

$$A = \frac{C \cdot d}{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0} = \frac{10^{-6} \text{ As/V} \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1,0 \cdot 8,9 \cdot 10^{-12} \text{ C/Vm}} = 110 \text{ m}^2.$$

## 6.5.6 Energie des elektrischen Feldes

Im ► Kap. 6.2.5 wurde die im Kondensator gespeicherte Energie berechnet. Es hat sich als sehr nützliche und wichtige Vorstellung erwiesen, dass diese Energie im elektrischen Feld im Kondensator gespeichert ist. Man sagt also: Dort, wo ein elektrisches Feld ist, ist auch Energie. Auch der ansonsten „leere“ Raum, der keine Materie enthält, kann doch Energie enthalten, sofern dort ein elektrisches Feld herrscht. Diese zunächst etwas merkwürdige Vorstellung wird erst plausibel, wenn man schon einmal im Vorgriff auf die Optik an elektromagnetische Wellen (also Licht) denkt. Diese bestehen aus elektrischen und magnetischen Feldern und pflanzen sich durch den leeren Raum fort. Jeder, der schon einmal die Erwärmung seiner Hand gespürt hat, wenn er sie nah an eine Glühlampe hält, weiß, dass Licht Energie transportiert, eben durch den leeren Raum. Und dies kann ja nur sein, wenn in diesen elektrischen und magnetischen Feldern Energie steckt. Beschreiben kann man das mit einer **Energiedichte** (Energie pro Volumen) des Feldes. Für das elektrostatische Feld können wir die Energiedichte  $w$  mit Hilfe der Formeln für den Kondensator ausrechnen:

Die Energie im geladenen Kondensator ist:

$$W = \frac{1}{2} U \cdot Q.$$

Diese steckt im Feld mit der Feldstärke:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{Q}{A}.$$

Dieses Feld herrscht nur im Inneren des Kondensators zwischen den Platten. Das ist bei einer Plattenfläche  $A$  und einem Plattenabstand  $d$  ein Volumen von:

$$V = A \cdot d.$$

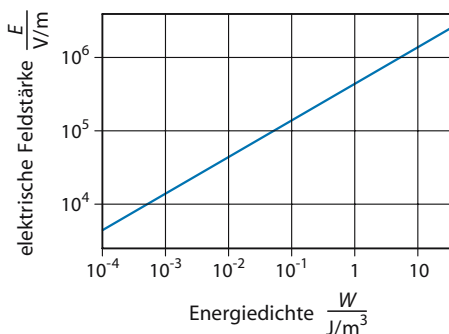
Also ergibt sich für die Energiedichte des Feldes im Kondensator:

$$\begin{aligned} w &= \frac{W}{V} = \frac{\frac{1}{2} U \cdot Q}{A \cdot d} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{Q}{A} \cdot \frac{U}{d} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot E \cdot \frac{U}{d} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2, \end{aligned}$$

denn es ist  $E = U/d$ . Ist noch ein Isolator mit einer Permittivität  $\varepsilon_r$  zwischen den Platten, so wird diese Energiedichte noch etwas modifiziert:

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2.$$

Die Energie im Feld steigt also quadratisch mit der Feldstärke (■ Abb. 6.50)



■ **Abb. 6.50. Energie des Feldes.** Zusammenhang zwischen Energiedichte und Feldstärke bei einem elektrischen Feld in Luft ( $\varepsilon_r = 1,00$ ); zur Sicherheit sei daran erinnert, dass Wattsekunde und Joule gleich sind; das Diagramm endet bei der Durchbruchfeldstärke trockener Luft

## 6.6 Materie im elektrischen Feld

### 6.6.1 Influenz und elektrische Abschirmung

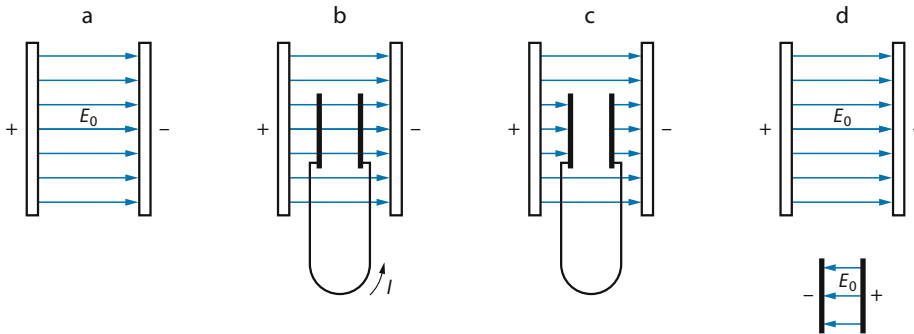
Wenn ein Körper nach außen elektrisch neutral erscheint, so heißt dies nicht, dass er keine elektrischen Ladungen enthielte, sondern nur, dass sich bei ihm positive und negative Ladungen gerade kompensieren. Elektrische Ströme transportieren Ladungen. In elektrischen Leitern müssen deshalb interne Ladungsverschiebungen möglich sein; besonders leicht sind sie es in den gut leitenden Metallen. Das macht es möglich, zwei Metallplatten entgegengesetzt aufzuladen, ohne sie mit einer Spannungsquelle in Berührung zu bringen.

Ganz ohne Spannungsquelle geht es natürlich nicht. Sie wird aber nur gebraucht, um zwischen zwei großen Kondensatorplatten ein elektrisches Feld  $E_0$  zu erzeugen (■ Abb. 6.51a). Bringt man jetzt zwei kleinere Platten in dieses Feld, so geschieht so lange nichts, wie sie nicht leitend miteinander verbunden werden. Dann aber folgen die verschiebbaren Ladungen den Coulomb-Kräften. Sie erzeugen im Drahtbügel einen Strom (■ Abb. 6.51b), der gerade so lange anhält, bis beide Platten auf gleichem Potential angekommen sind, bis also kein Feld mehr zwischen ihnen liegt (■ Abb. 6.51c). Anders ausgedrückt: Die Ladungen auf den kleinen Platten erzeugen ein Gegenfeld exakt in der Größe, dass es das Hauptfeld  $E_0$  kompensiert. Das Gegenfeld besteht zwischen den Platten weiter, wenn man sie aus dem Hauptfeld herauszieht (■ Abb. 6.51d). Diese Ladungstrennung durch ein äußeres elektrisches Feld nennt man **Influenz**.

#### Merke

Influenz: Ladungstrennung durch ein äußeres elektrisches Feld.

Die Platten des Luftkondensators müssen beim Influenzversuch nur das äußere Feld liefern. Im Übrigen sind sie unbeteiligt, sie verlieren insbesondere auch keine Ladung. Nun kann es nicht verboten sein, die beiden kleinen Platten, nachdem man sie aus dem Luftkondensator entfernt hat, wieder



■ **Abb. 6.51a–c. Der Influenzversuch**, schematisch. In das (nicht notwendigerweise homogene) Feld  $E_0$  (a) werden zwei elektrisch leitend verbundene kleine Platten gebracht (b). Folge: Ladungstrennung im Feld  $E_0$ , bis beide Platten auf gleichem Potential liegen und zwischen ihnen kein Feld mehr besteht (c). Trennt man die Platten im Feld und zieht man sie heraus in den feldfreien Außenraum, so steht jetzt zwischen ihnen ein Feld mit dem Betrag  $E_0$ , aber in entgegengesetzter Richtung

elektrisch zu verbinden. Dann fließt ein Stromstoß, der Stromwärme erzeugt. Erlaubt die Influenz etwa, ein Perpetuum mobile zu konstruieren? Keineswegs! Wenn man die Platten aus dem Feld herausholt, muss man mit seinen Muskeln gegen elektrostatische Kräfte anarbeiten.

Solange beim Influenzversuch die beiden kleinen Platten elektrisch miteinander verbunden sind, herrscht zwischen ihnen kein Feld, gleich-

gültig, was außen geschieht. Das gilt erst recht für den Innenraum einer Blechdose: Mit ihrer Hilfe kann man empfindliche Messinstrumente von störenden elektrischen Feldern **abschirmen**. Die Dose darf Löcher haben, sie darf sogar zu einem Käfig aus Maschendraht degenerieren (**Faraday-Käfig**). Ein äußeres Feld reicht dann zwar ein wenig durch die Maschen hindurch, aber eben doch nicht sehr weit. Das Deutsche Museum in München besitzt einen derartigen Käfig, groß genug, einen sitzenden Menschen aufzunehmen. Er wird zwischen die Elektroden einer Hochspannungsanlage gehängt: Meterlange Entladungen schlagen oben und unten in den Käfig hinein (■ Abb. 6.52). Der Mensch darin registriert dies nur optisch und akustisch; elektrisch spürt er nichts, denn er sitzt ja im feldfreien Raum. Wehe nur dem, der eine neugierige Nase durch die Maschen nach außen steckt!



■ **Abb. 6.52. Faraday-Käfig** zum Abschirmen eines Menschen vom Feld einer Hochspannungsanlage

## 6.6.2 Der elektrische Strom

In einem Kupferdraht spaltet jedes Atom ein Elektron aus seiner Hülle ab. Das Kristallgitter wird also von positiven Kupferionen gebildet. Die abgegebenen Elektronen können zwischen ihnen „quasi frei“ herumlaufen; richtig frei sind sie ja nicht, weil sie den Draht nicht verlassen dürfen (zumindest nicht so ohne weiteres). Diese quasi-freien Elektronen sorgen für die hohe elektrische Leitfähigkeit der Metalle.

Zunächst einmal führen die Elektronen eine Art Wimmelbewegung aus; sie ist statistisch gleichmäßig auf alle Raumrichtungen verteilt und kompensiert sich deshalb im Mittel zu null. Sobald aber längs des Drahtes ein elektrisches Feld erscheint, laufen sie ihm nach, genauer: Sie laufen ihm entgegen, ihrer negativen Ladung wegen. Dabei transportieren sie aber ihre eigene negative Ladung und tragen so einen Strom in Richtung des elektrischen Feldes.

### Merke

Metalle transportieren einen Strom durch bewegliche Elektronen.

Im Draht bewegen sich die Elektronen wie der Löffel im Sirup: unter starker Reibung. Deshalb folgen sie der angelegten Spannung, d. h. der Coulomb-Kraft des angelegten Feldes  $E$ , nicht beschleunigt, sondern mit einer konstanten

**Driftgeschwindigkeit**  $v_d = \mu \cdot E$

(die Größe  $\mu$  wird **Beweglichkeit** genannt). Diese Driftgeschwindigkeit ist übrigens erstaunlich klein: einige zehntel Millimeter pro Sekunde, natürlich abhängig vom Strom.

Der Strom  $I$  ist zu  $v_d$  proportional, aber auch zur Anzahl  $N$  der beweglichen Elektronen, bzw. zu deren Anzahldichte  $n = N/V$ . Für den Strom  $I$  kommt am Ende heraus

$$I = e_0 \cdot n \cdot A \cdot \mu \cdot E.$$

Hierin ist  $e_0$  die Elementarladung, also die von den Elektronen getragene Ladungsmenge und  $A$  die Querschnittsfläche des Drahtes.

■ ■ ■ Herleitung: In der Zeitspanne  $\Delta t$  laufen alle Elektronen den Weg  $\Delta s = v_d \cdot \Delta t = \mu \cdot E \cdot \Delta t$  weit. An einer bestimmten Stelle des Drahtes kommen dabei alle  $\Delta N = n \cdot A \cdot \Delta s$  Elektronen vorbei, die dazu weniger als  $\Delta s$  marschieren mussten. Sie haben mit der Ladung  $\Delta Q = \Delta N \cdot e_0$  den Strom  $I = \Delta Q / \Delta t$  transportiert:

$$I \cdot \Delta t = e_0 \cdot \Delta N = e_0 \cdot n \cdot A \cdot \Delta s = e_0 \cdot n \cdot A \cdot v_d \cdot \Delta t \\ = e_0 \cdot n \cdot A \cdot \mu \cdot E \cdot \Delta t.$$

Nun muss nur noch  $\Delta t$  herausgekürzt werden

Nun gilt bei einem Draht mit der Länge  $l$  und der Querschnittsfläche  $A$  ganz allgemein  $I = G \cdot U$  (► Kap. 6.2.1), für den Leitwert  $G = \sigma \cdot A / l$  (► Kap. 6.4.2), somit für die Leitfähigkeit

$$\sigma = I / U \cdot l / A = I / A \cdot l / U.$$

Strom  $I =$  Leitfähigkeit  $\sigma \cdot$  Querschnittsfläche  $\cdot$  Feldstärke  $E$ ,

Dabei halten sich die Metalle als Elektronenleiter an die einfache Beziehung

$$\sigma = e_0 \cdot n \cdot \mu.$$

Für Elektrolyte muss sie ein wenig modifiziert werden (► Kap. 6.7.2).

### Rechenbeispiel 6.15: Elektronen im Fernseher

► **Aufgabe.** Im Elektronenstrahl in einem Fernseher fließt typisch ein Strom von 100 mA. Wie viel Elektronen pro Sekunde sind das?

► **Lösung.**

$$I = 0,1 \text{ A} = \frac{N \cdot e_0}{1 \text{ s}}.$$

Dann ist die Zahl der Elektronen pro Sekunde

$$N = 0,1 \text{ As} / e_0 = 6,2 \cdot 10^{17}.$$

## 6.6.3 Dielektrizitätskonstante (Permittivität)

Ein leitender Gegenstand schirmt ein äußeres Feld ab, weil die beweglichen Leitungselektronen sich so verteilen, dass im Inneren des Leiters kein Feld mehr herrscht, es sei denn, er ist an eine Spannungsquelle angeschlossen und es fließt ein dauernder Strom. Aber auch im Isolator befinden sich viele Ladungen: die positiv geladenen Atomkerne und die negativ geladenen Elektronen in der Hülle. Wie reagieren sie auf ein äußeres Feld? Sie wollen eigentlich das Gleiche tun wie die Leitungselektronen im Metall, aber sie können ihr Atom nicht verlassen. Aber sie können sich doch ein bisschen verschieben. Die Folge ist eine Unsymmetrie in den Atomen: Sie bekommen ein elektrisches Dipolmoment (► Kap. 6.5.4). Im Isolator liegen dann lauter in gleicher Weise ausgerichtete Dipole nebeneinander (► Abb. 6.53). Weil das äußere Feld Ladungen innerhalb der Atome, Molekü-

le, Molekülkomplexe verschoben hat, nennt man das **Verschiebungspolarisation** und sagt, der Isolator sei polarisiert. Maß dafür ist die so genannte Polarisation  $\vec{P}$ , die als Dipolmomentdichte, also Dipolmoment pro Volumen, definiert ist (sie wird in ► Kap. 6.10.5 gebraucht).

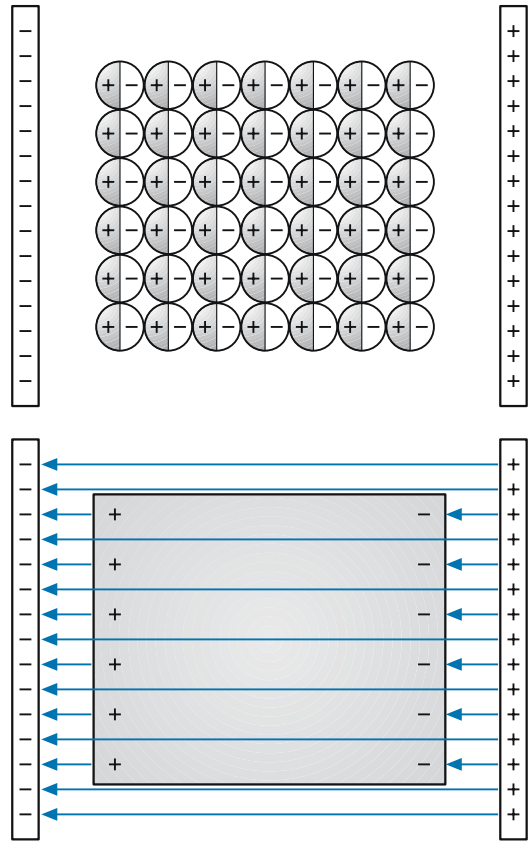
Hat die Polarisation Auswirkungen auf das Feld im Inneren des Isolators? Ja, das Feld wird zwar nicht völlig abgeschirmt wie im Metall, aber es wird abgeschwächt.

Hier muss nun einmal genau gesagt werden, was mit „Feld im Isolator“ oder „Feld im Metall“ eigentlich gemeint ist. Macht man sich ganz klein und setzt sich zum Beispiel zwischen Atomkern und Hülle, so beobachtet man dort natürlich immer ein sehr starkes Feld, da man zwischen der positiven Ladung des Kerns und der negativen Ladung der Hülle quasi wie in einem Kondensator sitzt. Als Ganzes ist das Atom aber neutral, außerhalb des unpolarisierten Atoms ist kein Feld. Mittelt man also das Feld über größere Längen (etwa einen Mikrometer), so ist es im unpolarisierten Material null. Wenn über das Feld in einem Material gesprochen wird, ist immer dieses über viele Atome gemittelte Feld gemeint.

Beindet sich der Isolator in einem äußeren Feld  $\vec{E}_0$ , so herrscht im Inneren zunächst auch dieses Feld. Die zu Dipolen polarisierten Atome umgeben sich aber zusätzlich alle mit einem Dipolfeld. Denkt man sich den Isolator zwischen zwei Kondensatorplatten (► Abb. 6.53), so verursacht die Polarisation in der Summe an den Oberflächen des Isolators effektive Oberflächenladungen, negative gegenüber der positiv geladenen Kondensatorplatte, positive gegenüber der negativen Kondensatorplatte. Diese Oberflächenladungen erzeugen ein dem äußeren Feld  $\vec{E}_0$  entgegengesetztes Feld, sodass die Feldstärke  $\vec{E}$  im Inneren des Isolators kleiner ist als das äußere Feld. In den meisten Materialien ist die Polarisation und damit auch das Feld im Inneren proportional zum äußeren Feld:

$$\vec{E}_0 = \epsilon_r \cdot \vec{E}.$$

Die Proportionalitätskonstante ist die schon erwähnte **relative Dielektrizitätskonstante**  $\epsilon_r$  (DIN-gerecht heißt diese Konstante **Permittivität**, die alte Bezeichnung wird aber noch häufig verwendet). Die Dielektrizitätskonstante ist eine Mate-



► **Abb. 6.53. Zur Polarisation:** In dem durch die geladenen Platten erzeugten Feld werden aus den Atomen Dipole (oben). Dies führt zu Oberflächenladungen am Isolator, die das Feld im Inneren abschwächen (unten)

rialkenngröße des Isolators. Bei gängigen Kunststoffen liegt sie meist zwischen 2 und 5. Dieser Faktor hilft den Herstellern von Kondensatoren, die metallisch beschichteten Folien zu Paketen aufzuwickeln. Denn befindet sich zwischen den Kondensatorplatten ein Isolator mit der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon_r$ , so ist das Feld im Kondensator um diesen Faktor abgeschwächt und damit auch die Spannung zwischen den Platten entsprechend kleiner. Das bedeutet aber eine um den Faktor  $\epsilon_r$  größere Kapazität  $C = Q/U$  (► Kap. 6.5.5).

Grundsätzlich muss das äußere Feld die atomaren oder molekularen Dipole nicht unbedingt selbst erzeugen. Sie können, wie im Wasser (► Kap. 6.5.4), von vornherein vorhanden sein und sich nur deswegen nach außen nicht so



fort bemerkbar machen, weil ihre Dipolmomente ständig in ungeordneter thermischer Bewegung sind. Ein äußeres Feld kann diesem Durcheinander aber eine gewisse Vorzugsrichtung geben, mit steigender Feldstärke immer ausgeprägter. Man nennt diesen Mechanismus **Orientierungspolarisation**. Diese führt zu deutlich höheren Werten der Dielektrizitätszahl. Wasser bringt es auf  $\epsilon_r = 80$ .

### Merke

Durch Polarisation wird das elektrische Feld in Isolatoren abgeschwächt. Verschiebungspolarisation: Feld erzeugt durch Influenz molekularer Dipole, Orientierungspolarisation: Feld richtet polare Moleküle aus.

■ ■ ■ Es gibt noch weitere mit der Polarisation zusammenhängende Effekte. Technisch wichtig sind Isolatoren, die polarisiert werden, wenn man sie mechanisch belastet, sie also z. B. zusammendrückt. Man nennt diesen Effekt **Piezelektrizität** („Piëzo...“ ausgesprochen). Geläufig ist er vielleicht aus Feuerzeugen, die das Brenngas dadurch entzünden, dass mit einem Schnappmechanismus auf einen piezoelektrischen Würfel geschlagen wird. Aufgrund der plötzlichen Polarisation entsteht eine so hohe Spannung, dass ein Funke überschlägt. Ein Effekt wie die Piezelektrizität funktioniert immer in beiden Richtungen: Wird an ein piezoelektrisches Material ein äußeres Feld angelegt, so zieht es sich zusammen, als wäre es gedrückt worden. Dies benutzt man gern, um extrem kleine Verrückungen extrem präzise auszuführen. Beim sog. **Tunnelmikroskop** tastet eine feine Spitze die zu untersuchende Oberfläche kontrolliert in Schritten ab, die kleiner sein können als Atomabstände.

### Rechenbeispiel 6.16: Oberflächenladung

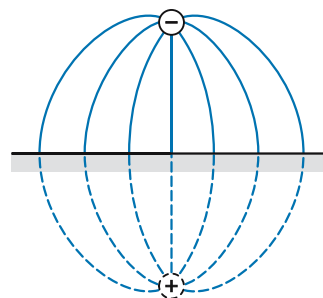
► **Aufgabe.** Ein Plattenkondensator sei mit einer Ladung von  $10^{-5}$  C aufgeladen. Zwischen den Platten befinde sich ein Isolator mit  $\epsilon_r = 2$ . Wie groß ist die effektive Oberflächenladung auf dem Isolator?

► **Lösung.** Der Isolator schwächt das Feld zwischen den Platten auf die Hälfte ab. Dazu muss die Hälfte der Ladungen auf den Platten durch entsprechende Gegenladung auf der Isolatoroberfläche kompensiert werden. Also beträgt diese Oberflächenladung  $5 \cdot 10^{-6}$  C.

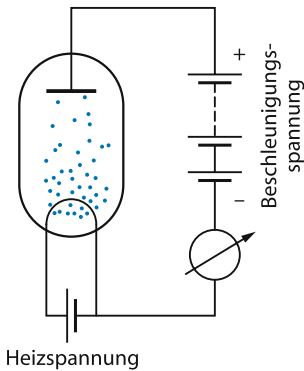
## 6.6.4 Das freie Elektron

Grundsätzlich kann ein Leitungselektron sein Metall verlassen. Man muss ihm dabei aber helfen, denn wenn es in seiner thermischen Bewegung ins Freie stößt, beeinflusst es unter der Oberfläche durch Verschieben von Artgenossen eine Gegenladung, deren Coulomb-Kraft den Ausreißer festhält (■ Abb. 6.54). Dem Elektron geht es ähnlich wie dem verdampfungswilligen Molekül von ► Kap. 5.3.4, nur wird es von elektrischen Kräften zurückgezogen und nicht von zwischenmolekularen. Um wegzukommen, müssen beide Energie mitbringen, das Molekül mehr als die Verdampfungswärme, das Elektron mehr als seine **Austrittsarbeit**. Thermische Energie ist immer gut.

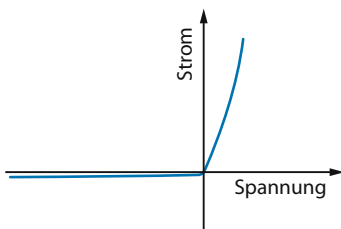
Die Austrittsarbeiten der Metalle liegen so hoch, dass man sie meist schon zum Glühen bringen muss, wenn man Elektronen in nennenswerter Anzahl herausholen möchte. Man spricht darum von **Glühemission**. In Zimmerluft hat man freilich wenig davon, denn dort fängt das erstbeste Gasmolekül ein „verdampftes“ Elektron ab und bildet mit ihm ein negatives Ion. Man setzt darum seinen emittierenden Draht in einen evakuierten Glaskolben und bringt ihn elektrisch zum Glühen. Mit in die Glaswand eingeschmolzen ist eine zweite Elektrode, die kalt bleibt (■ Abb. 6.55). Legt man an sie eine positive Spannung gegenüber dem Draht, so fließt ein Strom, getragen von freien Elektronen im an sich isolierenden Vakuum; polt man um, fließt allenfalls ein Leckstrom wegen unvollständiger Isolation – experimentel-



■ **Abb. 6.54. Zur Entstehung der Bildkraft:** Ein Elektron vor einer Metallplatte beeinflusst Gegenladungen auf deren Oberfläche, von denen es angezogen wird, als säße eine positive Bildladung spiegelbildlich im Metall



■ Abb. 6.55. Schema einer Vakuumdiode. Eine Heizspannung bringt den Draht der Kathode zum Glühen, sodass Elektronen aus ihm austreten können. Strom fließt nur, wenn die kalte Elektrode als Anode positiv gepolt ist



■ Abb. 6.56. Strom-Spannungs-Kennlinie eines Gleichrichters; es muss keine Vakuumdiode sein

ler Nachweis für die negative Ladung der Elektronen, die nur die heiße Elektrode in hinreichender Anzahl verlassen können und nicht die kalte (■ Abb. 6.56). Die Vakuumdiode ist ein **Gleichrichter** (und wurde als solcher auch eifrig genutzt, bis die Halbleiterdioden aufkamen). Generell bezeichnet man eine Elektrode, die am negativen Pol der Spannungsquelle liegt, als **Kathode**, die andere als **Anode**:

#### Merke

Ein freies Elektron musste, um sein Metall verlassen zu können, zuvor die Austrittsarbeit aufgebracht haben, z. B. mit thermischer Energie („Glühemission“).

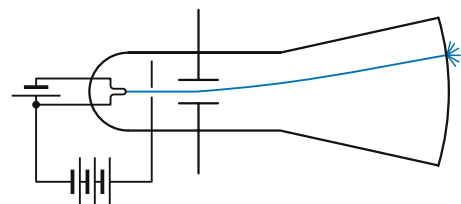
Anode: positive Elektrode

Kathode: negative Elektrode

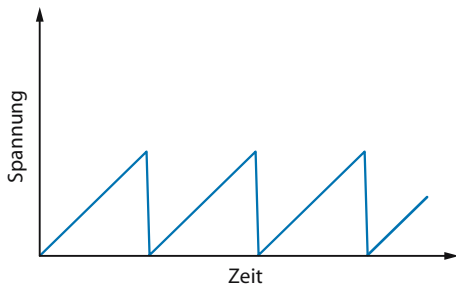
Normalerweise emittiert die Kathode ihre Elektronen gedankenlos nach allen Seiten. Durch geschickte Konstruktion mit Leitblechen auf passenden Potentialen kann man aber erreichen, dass ein scharf gebündelter Strahl durch ein feines Loch im Anodenblech die **Elektronenkanone** verlässt, z. B. in den feldfreien Raum einer konisch sich erweiternden Vakuumröhre hinein (■ Abb. 6.57). Die Geschwindigkeit der Elektronen in diesem Strahl wird durch die Spannung  $U_A$  zwischen Kathode und Anode bestimmt. Ein Elektron verliert auf seinem Weg von der Kathode zur Anode die potentielle Energie  $W_{\text{pot}} = e_0 \cdot U_A$  und setzt diese in kinetische Energie um.

Belegt man jetzt den Boden des Glaskolbens mit einem geeigneten Leuchtstoff, so wird die Auftreffstelle der Elektronen durch **Elektrolumineszenz** für das Auge sichtbar. Dabei darf sich der Leuchtstoff nicht negativ aufladen; seine Leitfähigkeit muss ausreichen, die ankommenden Elektronen ohne störenden Spannungsabfall abzuleiten.

Auch frei im Strahl fliegende Elektronen reagieren auf ein elektrisches Feld: Schießt man sie quer durch einen geladenen Kondensator, so werden sie zur Seite abgelenkt, in Richtung auf die positive Elektrode (■ Abb. 6.57). Legt man eine Wechselspannung an den Kondensator, folgt ihr der Strahl momentan und malt in periodischer Wiederholung einen Strich auf den Leuchtschirm. Das kann so schnell erfolgen, dass der Ablauf vom menschlichen Gesichtssinn nicht mehr aufgelöst wird. Darum sieht man auch den gleichen statischen Strich, wenn der Elektronenstrahl nicht mit einer sinusförmigen Wechselspannung, sondern mit einem sog. **Sägezahn** abgelenkt wird (■ Abb. 6.58): Der Lichtpunkt läuft jetzt mit konstanter Geschwindigkeit z. B. von links nach rechts



■ Abb. 6.57. Röhre eines Kathodenstrahloszillographen, schematisch (Einzelheiten im Text)



■ Abb. 6.58. Zeitablenkung eines Oszillographen: „Sägezahn“

6

über den Leuchtschirm und springt dann rasch in die Ausgangslage zurück.

Lässt man den Elektronenstrahl noch durch einen zweiten Kondensator mit vertikalem elektrischem Feld hindurchlaufen, kann man ihn zusätzlich nach oben und unten auslenken. Der Lichtpunkt zeichnet jetzt getreulich einen Graphen vom zeitlichen Ablauf der Spannung an den vertikalen Ablenkplatten. Er liefert dem Auge ein stehendes Bild, wenn sich dieser Spannungsverlauf periodisch wiederholt, wenn der Sägezahn getriggert ist, d. h. immer an der gleichen Stelle der Periode startet, und wenn alles zusammen schnell genug abläuft: Die Elektronenröhre hat sich zur Braun-Röhre eines **Kathodenstrahloszillographen** gemauert. Dieser dient der Registrierung rasch ablaufender Vorgänge, die über passende Messwandler in synchrone elektrische Spannungen umgesetzt worden sind. Weil die Ablenkplatten weit höhere Spannungen verlangen als Messwandler üblicherweise anbieten, wird einem Oszillographen zumindest für die vertikale Y-Ablenkung ein einstellbarer Verstärker eingebaut, der meist gleich in der resultierenden Empfindlichkeit für die Auslenkung des Lichtpunktes auf dem Schirm geeicht ist, also z. B. in der Angabe: „10 mV/cm“. Auch die horizontale X-Ablenkung kann einen solchen Verstärker bekommen, wenn nämlich der Zusammenhang zwischen zwei beliebigen, aber elektrisch messbaren Größen dargestellt werden soll. Oft liegt hier aber ein fest eingebauter Sägezahngenerator für geeicht einstellbare Zeitablenkungen (z. B. „3 ms/cm“).

Der gute alte Kathodenstrahl-Oszillograph wird zunehmend durch digitale Instrumente er-

setzt. Das sind im Prinzip Computer, die den Spannungsverlauf mit einem **Analog-Digital-Wandler** aufnehmen und auf einem Bildschirm darstellen. Solche Geräte sind viel handlicher und erlauben, die Bilder auch zu speichern und digital zu bearbeiten.

#### Merke

Oszillograph: Gerät zur Registrierung (auch rasch) veränderlicher elektrischer Spannungen.

■■■ Legt man an beide Plattenpaare Sägezähne, horizontal einen schnellen (20 kHz) und vertikal einen langsamen (25 Hz), so schreibt der Leuchtpunkt 25-mal in der Sekunde ein rechteckiges Feld mit 800 waagerechten Zeilen voll. Das Auge sieht eine gleichmäßig leuchtende Fläche, flimmerfrei, wenn sie nicht zu hell ist. Nun kann man in der Kathodenstrahlröhre die Stärke des Elektronenstrahls willkürlich und schnell verringern und so dunkle Punkte in das helle Feld setzen. Richtig gesteuert ergeben sie ein Bild, das dem Auge auch bewegt erscheinen kann: Prinzip der Bildröhre vom Fernsehgerät und Computermonitor. Dort geschieht die Ablenkung des Elektronenstrahls allerdings magnetisch (► Kap. 6.10.2).

Hier ist ein rasanter technischer Wandel im Gange. Zunehmend werden Monitore als LCD-Displays gefertigt. Diese funktionieren völlig anders: Eine sehr dünne Schicht aus Flüssigkristallen befindet sich zwischen zwei Glasplatten, die mit einem sehr feinen, durchsichtigen Elektrodenraster beschichtet sind. Flüssigkristalle drehen die Polarisationssebene von Licht (► Kap 7.4.1) in Abhängigkeit vom elektrischen Feld, in dem sie sich befinden, verschieden stark. Damit kann die Lichtdurchlässigkeit der Flüssigkristallschicht Bildpunkt für Bildpunkt elektrisch gesteuert werden. Beleuchtet man das ganze von hinten, so kann ein Bild entstehen. Soll es auch noch bunt sein, so muss man, ähnlich wie bei der Farbbildröhre, noch eine fein gerasterte Farbfolie überlegen. Solche Bildschirme sind flach, energiesparend und wahrscheinlich bald auch billiger als die Bildröhre. Dann wird es viel weniger freie Elektronen auf der Welt geben.

## Praktikum

## Oszillograph

Der Oszillograph dient zum Darstellen von schnellen Zeitverläufen.

Mit dem Oszillographen, dessen Bedienung Sie im Praktikum erlernen sollen, will man irgendetwas Sinnvolles messen, in der Regel eine Zeit. Es gibt drei beliebte Varianten:

**Kondensatorentladung** (► Kap. 6.4.5 und 6.4.6): Wenn man alles richtig gemacht hat bekommt man eine e-Funktion (► Kap. 1.5.2) auf den Bildschirm, die es auszuwerten gilt.

Sie vermessen den **Wechselstromwiderstand** (Impedanz, ► Kap. 6.3.2, 6.11.3, 6.11.4, 6.12.1) einer Schaltung mit Kondensator und/oder Spule und ohmschem Widerstand.

Sie vermessen einen **Schalllaufzeitunterschied** zur Demonstration der Funktionsweise eines bildgebenden Ultraschallgerätes (► Kap. 4.3.4).

## 6.6.5 Ruhemasse und relativistische Masse

Auch einfache Oszillographen können periodische Vorgänge im Frequenzbereich Megahertz noch anstandslos registrieren. Dazu muss ihr Lichtpunkt an die hunderttausendmal in der Sekunde über den vielleicht 10 cm breiten Leuchtschirm laufen, mit einer Geschwindigkeit von ca. 10 km/s und beim Rücksprung zwischen zwei Durchläufen noch erheblich schneller. Elektronen macht das nichts aus; sie sind klein und fix.

Die Geschwindigkeit, mit der ein freies Elektron bei der Anode ankommt, hängt von seiner Masse  $m_e$  und der Anodenspannung  $U_A$  ab. Im homogenen Feld  $E$  unterliegt es der konstanten Kraft  $F = e_0 \cdot E$  und „fällt“ wie ein Apfel vom Baum, nämlich mit konstanter Beschleunigung  $a$  zur Anode hinüber:

$$a = \frac{e_0}{m_e} E.$$

Grundsätzlich könnte man  $m_e$  durch Laufzeitmessungen bestimmen. Es gibt elegantere Verfahren, die allerdings nur die **spezifische Ladung**  $e_0/m_e$  des Elektrons messen. Aber die Elementarladung

$e_0$  ist ja genau bekannt. In entsprechenden Tabellen findet man:

$$\text{Elektronenmasse } m_e = 9,1066 \cdot 10^{-31} \text{ kg.}$$

Viel ist das nicht, in der handfesten Materie des menschlichen Alltags findet man aber auch kein leichteres Elementarteilchen als das Elektron.

Wenn ein Elektron aus der Glühkathode ausgetreten ist, besitzt es gegenüber der Anode die potentielle Energie  $W_{\text{pot}} = e_0 \cdot U_A$ . Was es noch an Restenergie aus seiner thermischen Bewegung mitbringt, spielt meist keine Rolle. Auf dem Weg zur Anode setzt es  $W_{\text{pot}}$  in kinetische Energie um. Dort angekommen, wird es abgebremst und liefert die Energie als Wärme und, wenn die Anodenspannung hoch genug war, auch in Form von Röntgenstrahlen ab. So funktioniert eine Röntgenröhre.

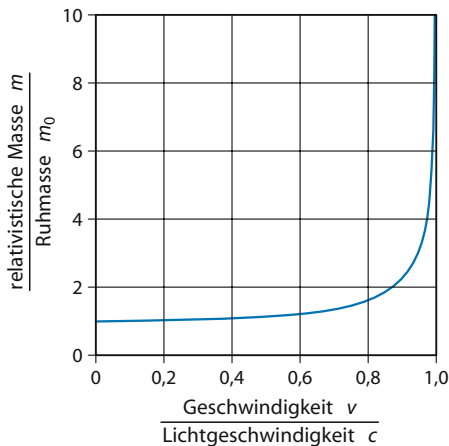
Auf den Energiesatz ist Verlass: Wenn eine Röntgenröhre mit 300 kV Anodenspannung betrieben wird, dann kommen die Elektronen mit 300 keV auf der Anode an. Rechnet man jetzt aber mit der Gleichung  $W_{\text{kin}} = m_e \cdot v_e^2/2$  die Auftreffgeschwindigkeit  $v_e$  aus, so rechnet man falsch. Heraus kämen nämlich  $3,25 \cdot 10^8$  m/s. Die Natur erlaubt aber keinem materiellen Teilchen, die

$$\text{Lichtgeschwindigkeit } c \sim 3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

zu erreichen oder gar zu überschreiten. Die Konsequenzen aus diesem Naturgesetz hat Albert Einstein in seiner **Relativitätstheorie** gezogen. Elektronen akzeptieren sie als selbstverständlich, aber dem Menschen erscheinen sie grotesk, solange er sich noch nicht an sie gewöhnt hat. In seiner Welt kommen ja nur im Vergleich zu  $c$  ausgesprochen kümmerliche Geschwindigkeiten vor. Das gilt auch noch für die astronomischen Geschwindigkeiten im Sonnensystem.

Was kann ein Elektron machen, wenn es die Lichtgeschwindigkeit fast schon erreicht hat, die Relativitätstheorie also keine nennenswerte Beschleunigung mehr erlaubt, wenn andererseits aber die Kraft eines elektrischen Feldes weiterhin an ihm zieht? Es hat keine andere Möglichkeit, als nach der Gleichung

$$\text{Kraft} = \text{Masse} \cdot \text{Beschleunigung}$$



■ **Abb. 6.59. Relativistische Masse.** Nach der Relativitätstheorie wächst die relativistische Masse  $m$  eines Körpers mit der Ruhmasse  $m_0$  bei steigender Geschwindigkeit  $v$  zunächst nur geringfügig, dann aber so steil an, dass keine noch so hohe und noch so lang andauernde beschleunigende Kraft den Körper über die Lichtgeschwindigkeit  $c$  bringen kann

seine Masse zu erhöhen, um so die Beschleunigung klein zu halten. Das heißt nicht, dass es auch dicker wird und schließlich walnussgroß durch die Gegend fegt; es geht nur darum, dass Kraft und Beschleunigung nicht länger zueinander proportional bleiben können. Immerhin, die physikalische Größe „Masse“ ist nicht ganz so stabil, wie sie bisher erschien. Man unterscheidet deshalb zwischen der **Ruhmasse**  $m_0$  bei kleinen Geschwindigkeiten ( $v \ll c$ ) und der **relativistischen Masse**  $m$  bei hohen ( $v \gg c$ ). Den Zusammenhang zeigt Abbildung 6.59.

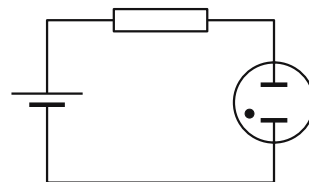
### 6.6.6 Gasentladung

Ist das Vakuum in der Kathodenstrahlröhre nicht sehr gut, dann kommt kein Elektron bis zur Anode durch, ohne unterwegs ein paar Mal mit einem Gasmolekül zusammenzustoßen. Dabei kann es eingefangen werden, worauf sich ein negatives Ion bildet, das, rund vier Zehnerpotenzen schwerer als das Elektron, langsam auf die Anode zu-steuert. Ist das Elektron beim Stoß aber schnell genug, dann kann es ein neues Elektron aus dem Molekül herausschlagen. Dazu muss die kineti-

sche Energie des stoßenden Elektrons größer sein als die **Ionisierungsarbeit** des Moleküls (sie liegt, abhängig von der Art des Gases, bei einigen eV). Die Folgen dieser **Stoßionisation** sind dramatisch: Das erste Elektron setzt sich nach dem Stoß erneut, weil vom Feld gezogen, in Bewegung, das herausgeschlagene aber auch. Beide können wieder ionisieren; dann sind sie schon zu viert, nach dem nächsten Stoß zu acht, sie vermehren sich explosionsartig: Eine Elektronenlawine bricht los. Der Strom wächst entsprechend einer e-Funktion mit positivem Exponenten, die Wärmeentwicklung tut dies auch. Wird die Lawine nicht rechtzeitig gebremst, so zerstört sie die Elektronenröhre.

Die Lawine der **Gasentladung** ist leicht zu bremsen, z. B. dadurch, dass man als Spannungsquelle keine Batterie benutzt, sondern einen aufgeladenen Kondensator. Dann steht nur eine begrenzte elektrische Ladung, eine begrenzte elektrische Energie zur Verfügung. Läuft der Kondensator leer, so brechen Spannung, Feld und Stoßionisation zusammen. Fotografen nutzen diesen Effekt als **Elektronenblitz**: Eine Gasentladung sendet Licht aus; sie erzeugt angeregte Ionen und Moleküle, die in ihren Grundzustand zurückkehren und dabei Licht emittieren (► Kap. 7.5.2).

Man kann die Elektronenlawine auch mit einem Vorwiderstand bändigen (■ Abb. 6.60). Sobald die Entladung zündet und Strom fließt, verlangt der Widerstand eine Spannung, die er nur der Entladungsröhre entziehen kann. Damit reduziert er mit dem dort herrschenden elektrischen Feld auch die kinetische Energie, die Elektronen zwischen zwei Stößen auf sammeln können. Die Stoßionisation geht genau so weit zurück, dass jedes von einem Ion eingefangene Elektron ersetzt wird und nicht mehr: Die Gasentladung brennt



■ **Abb. 6.60. Glimmlampe** (Gasentladungslampe) im Dauerbetrieb; ein Schutzwiderstand verhindert Lawine und Kurzschluss (der Punkt im Schaltzeichen deutet das verdünnte Gas an)

und leuchtet stabil. Nach diesem Prinzip arbeiten die bescheidenen **Glimmlampen**. Ihr „Stromverbrauch“ ist so gering, dass die meisten Elektrizitätszähler ihn gar nicht bemerken. Anspruchsvoller sind die bunten Röhren der Leuchtreklamen. Ihre Farben charakterisieren das verwendete Gas: Neon leuchtet rot, Natriumdampf gelb, Quecksilberdampf in hellem Blau. Er emittiert zusätzlich unsichtbares ultraviolettes Licht, das die Haut des Menschen bräunen und in seinem Auge Entzündungen auslösen kann. **Leuchtstoffröhren** überführen das ultraviolette Licht durch Fluoreszenz in den sichtbaren Spektralbereich.

Mit gängigen Feldstärken kann die bisher besprochene **selbständige Gasentladung** nur bei einem schwachen Vakuum von einigen Hektopascal brennen. Ist es zu gut, unterbleibt die Entladung, weil die Elektronen zu wenige Stoßpartner treffen; ist es zu schlecht, so stoßen die Elektronen bereits, ehe sie die zur Ionisation notwendige kinetische Energie ansammeln konnten. Mit Gewalt geht es natürlich immer: In Zimmerluft (ca. 1000 hPa und 20 °C) kommt es bei der **Durchbruchfeldstärke** von etwa 3 MV/m zur Entladung. Steigert man die Temperatur, so wird ein immer größerer Teil der Ionisationsenergie thermisch geliefert; das erleichtert die Stoßionisation. Auf diesem Wege kann man in Luft einen **Lichtbogen** brennen lassen, etwa zwischen zwei Kohlestäben (sie schmelzen nicht): Die Bogenentladung verheizt genügend Leistung auf hinreichend kleinem Raum. Bogenlampen leuchten blendend hell. Sie brauchen aber einen Vorwiderstand oder etwas anderes, das den Strom begrenzt.

#### Merke

Selbständige Gasentladung: Freie Elektronen lösen durch Stoßionisation eine Elektronenlawine aus. Strombegrenzung ist erforderlich.

Wenn Gasdichte und Feldstärke eine Stoßionisation nicht mehr erlauben, bleiben freie Elektronen nicht lange frei; sie werden eingefangen, zumeist von neutralen Molekülen. Wurden die Elektronen zuvor von neutralen Molekülen abgespalten, so bilden sich jetzt Ionenpaare. Auch sie verschwinden, indem sie die ausgetauschten Elektronen wie-

der zurücktauschen. Dazu müssen sie sich jedoch erst einmal treffen; ihre **Rekombination** braucht Zeit. Das macht aber eine **unselbständige Gasentladung** möglich, unselbständig, weil sie einen äußeren Prozess braucht, der ständig Ionenpaare bildet und gegen die Rekombination auf stationärer Anzahl hält. Dazu genügt schon die chemische Oxidation in einer Flamme: Stellt man eine brennende Kerze zwischen die Platten eines hinreichend großen Luftkondensators, so bricht dessen Spannung sofort zusammen (sofern die Spannungsquelle abgeklemt worden war).

#### Merke

Unselbständige Gasentladung: Ionen werden durch hohe Temperatur, chemische Reaktion, ionisierende Strahlung usw. erzeugt.

## 6.7 Elektrochemie

### 6.7.1 Dissoziation

Luft ist ein Isolator. Die ionisierende Strahlung aus der Umwelt bringt ihr keine wesentliche Leitfähigkeit. Reines Wasser isoliert ebenfalls, wenn auch bei weitem nicht so gut. Mit seinem spezifischen Widerstand in der Größenordnung Megohm steht es an der Grenze zwischen Leitern und Isolatoren (► Kap. 6.4.2). Es ist aber gar nicht einfach, Wasser rein darzustellen und rein zu erhalten. In Kontakt mit Luft nimmt es einige Gasmoleküle auf (Henry-Dalton-Gesetz). Luft besteht im Wesentlichen aus Stickstoff (zwei Drittel) und Sauerstoff (ein Drittel). Beide wirken sich auf die Leitfähigkeit des Wassers nicht nennenswert aus, wohl aber eines der Spurengase, obwohl es nur mit 0,3% vertreten ist: Kohlendioxid. Einige der gelösten  $\text{CO}_2$ -Moleküle lagern ein  $\text{H}_2\text{O}$  an und bilden damit Kohlensäure  $\text{H}_2\text{CO}_3$ . Deren Moleküle zerfallen aber sofort in zwei positiv geladene Wasserstoffionen  $\text{H}^+$  und ein doppelt negativ geladenes Carbonat-Ion  $\text{CO}_3^{2-}$ . Jedes  $\text{H}^+$ -Ion lagert sofort ein  $\text{H}_2\text{O}$ -Molekül an und bildet ein  $\text{H}_3\text{O}^+$ -Ion. Das hat aber nur in Sonderfällen Bedeutung, weshalb man ruhig weiter von positiv geladenen Wasserstoffionen spricht.



Einen derartigen Zerfall eines Moleküls in einige Bestandteile – sie müssen nicht elektrisch geladen sein – bezeichnet man als **Dissoziation**. Der Vorgang läuft auch umgekehrt; die Bestandteile können wieder zum Molekül rekombinieren. Zwischen Dissoziation und Rekombination stellt sich ein Gleichgewicht ein und bestimmt den Quotienten aus Anzahlen, Anzahldichten oder Stoffmengen-dichten, also kurz den Konzentrationen  $c_D$  der dissoziierten und  $c_0$  der ursprünglich vorhandenen Moleküle. Er heißt

$$\text{Dissoziationsgrad } x_D = c_D/c_0$$

und ist eine dimensionslose Zahl zwischen 0 und 1 (keine bzw. vollständige Dissoziation). Moleküle werden durch Bindungsenergie zusammengehalten; für die Dissoziation muss deshalb eine Dissoziationsenergie aufgebracht werden. Sie entstammt normalerweise der thermischen Energie: Der Dissoziationsgrad steigt mit wachsender Temperatur, oftmals freilich kaum erkennbar, wenn nämlich  $x_D$  die Eins fast schon erreicht hat.

#### Merke

Den Zerfall eines Moleküls in Bestandteile bezeichnet man als Dissoziation, den entgegengesetzten Vorgang als Rekombination. Die Bestandteile können Ionen sein, müssen es aber nicht.

$$\text{Dissoziationsgrad } x_D = c_D/c_0.$$

Dahinter steckt das **Massenwirkungsgesetz**. Jedes Lehrbuch der Chemie behandelt es ausführlich. Für ein Molekül AB, das sich aus den Bestandteilen A und B zusammensetzt und in sie zerfällt, besagt es

$$\frac{c(A) \cdot c(B)}{c(AB)} = K(T)$$

(hier bedeutet  $c(AB)$  die Konzentration der undissoziiert gebliebenen Moleküle, also nicht die Konzentration  $c_0$  der ursprünglich vorhandenen, die im Nenner des Dissoziationsgrades steht). Die temperaturabhängige **Massenwirkungskonstante**  $K(T)$  ist eine Kenngröße der (Zerfalls- und Rekombinations-)Reaktion.

Ein Molekül Kohlensäure spaltet zwei positive Wasserstoffionen ab; dafür trägt das Carbonat-Ion zwei negative Elementarladungen. Die Stoffmengen-dichten (Molaritäten)  $c_n$  unterscheiden sich also um einen Faktor 2:

$$c_n(H^+) = 2 c_n(CO_3^{2-}).$$

Für die Dichten der Elementarladungen gilt das nicht, denn die Elektroneutralität bleibt bei der Dissoziation selbstverständlich gewahrt. Deshalb spricht man zuweilen neben der Molarität einer Lösung auch von ihrer **Normalität**, bei der doppelt geladene, also zweiwertige Ionen doppelt zählen, dreiwertige dreifach usw.

Bei Wasser tritt diese Komplikation nicht auf; es dissoziiert in  $H^+$ -Ionen und  $OH^-$ -Ionen, beide einwertig, beide einfach geladen. Die hohe Resistivität ist Folge eines geringen Dissoziationsgrades:  $x_D(H_2O) \approx 1,9 \cdot 10^{-9}$  bei 25 °C. In einem solchen Fall lässt sich das Massenwirkungsgesetz vereinfachen, weil dessen Nenner, die Konzentration der undissoziierten Moleküle, praktisch konstant bleibt und darum in die Massenwirkungskonstante hineinmultipliziert werden kann:  $K^*(T) = c_0 \cdot K(T)$ . Für Wasser bei Zimmertemperatur kommt

$$c_n(H^+) \cdot c_n(OH^-) \approx 10^{-14} \text{ (mol/l)}^2$$

heraus, also

$$c_n(H^+) = c_n(OH^-) \approx 10^{-7} \text{ mol/l.}$$

In „neutralem“ Wasser liegen die Stoffmengen-dichten beider Ionensorten bei ziemlich genau  $10^{-7} \text{ mol/l}$ : „pH 7“. Als **pH-Wert** bezeichnet man den negativen dekadischen Exponenten der Maßzahl der Wasserstoffionenkonzentration zur Einheit Mol/Liter.

In einer Flüssigkeit können mehrere Massenwirkungsgesetze gleichzeitig gelten. Löst man Ätznatron NaOH in Wasser, so dissoziiert es nach seinem eigenen Massenwirkungsgesetz vollständig in  $Na^+$ - und  $OH^-$ -Ionen. Damit greift es aber in das Massenwirkungsgesetz der Wasserdissociation ein. Wenn  $c_n(OH^-)$  steigt (z. B. auf  $10^{-5} \text{ mol/l}$ ), geht  $c_n(H^+)$  zurück, im Beispiel auf  $10^{-9} \text{ mol/l}$ : pH 9, die Lösung ist eine Lauge. Umgekehrt dissoziiert HCl in  $H^+$  und  $Cl^-$ , erhöht also  $c_n(H^+)$  auf beispielsweise  $10^{-3} \text{ mol/l}$  und drängt dementspre-



chend  $c_n(\text{OH}^-)$  auf  $10^{-11}$  mol/l zurück: pH 3, die Lösung reagiert sauer.

### Merke

pH-Wert: negativer dekadischer Logarithmus der Wasserstoffionenkonzentration  $c_n(\text{H}^+)$  in mol/l;  
 pH < 7: sauer,  $c_n(\text{H}^+)$  groß,  
 pH = 7: neutral,  $c_n(\text{H}^+) = 10^{-7}$  mol/l,  
 pH > 7: alkalisch,  $c_n(\text{H}^+)$  klein.

## 6.7.2 Elektrolyte

Ionen im Wasser folgen einem von außen angelegten Feld ähnlich wie Elektronen im Draht. Beide müssen sich zwischen neutralen Molekülen hindurchdrängeln, bewegen sich also wie unter starker Reibung. Folglich driften auch die Ionen mit konstanter, zur Feldstärke proportionaler Geschwindigkeit, sodass sich für sie ebenfalls eine **Beweglichkeit** definieren lässt. Sie bekommt meist den Buchstaben  $u$  statt des bei Elektronen üblichen  $\mu$ . Die Ionen machen ihre Wirtsflüssigkeit zum **Elektrolyten**, sie geben ihm eine elektrische, eine **elektrolytische Leitfähigkeit**.

### Merke

Elektrolytische Leitung: Stromtransport durch Ionen.

Ionen gibt es in vielerlei Arten und mit beiderlei Vorzeichen. Die positiven Ionen laufen zur Kathode und heißen darum **Kationen**, die negativen laufen zur Anode und heißen darum **Anionen**. Dies ist ehrwürdiger chemischer Sprachgebrauch; der Physiker muss sich merken, dass er hier mit der Vorsilbe *kat* nicht so ohne weiteres das negative Vorzeichen der Kathode verbinden darf. Der Stromtransport kann von Kationen und Anionen in gleicher Weise übernommen werden: Die konventionelle Stromrichtung fragt nicht, ob negative Ladungsträger ihr entgegen oder positive zu ihr parallel laufen. Alle Ionensorten addieren grundsätzlich ihre Beiträge zur elektrolytischen Leitfähigkeit:

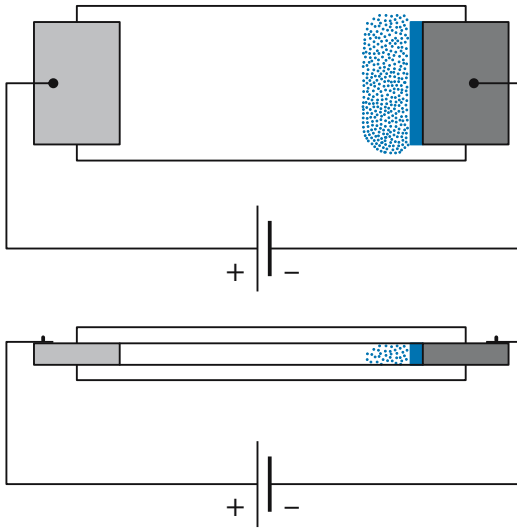
$$\sigma = e_0 \cdot \sum_i z_i \cdot n_i \cdot u_i$$

Diese Formel berücksichtigt, dass verschiedene Ionensorten (durch die Laufzahl  $i$  gekennzeichnet) unterschiedliche Beweglichkeiten  $u$ , unterschiedliche Anzahldichten  $n$  und unterschiedliche Ladungen  $q$  haben können – die **Wertigkeit**  $z$  entspricht der Anzahl der Elementarladungen eines Ions unabhängig vom Vorzeichen:  $\pm q = z \cdot e_0$ . Das  $u$  liegt weit unter dem  $\mu$  der Elektronen im Metall und steigt mit der Temperatur. Vom Modell her ist das verständlich: Ionen sind weit dicker als Elektronen, sie schwimmen wie Fremdkörper in einem Medium, dessen Zähigkeit mit wachsender Temperatur abnimmt.

### Merke

Anionen laufen zur Anode, sind also negativ geladen;  
 Kationen laufen zur Kathode, sind also positiv geladen.

Die elektrolytische Leitung durch Ionen ist immer mit einem Materietransport verbunden. Man kann unmittelbar zusehen, wie die negativen  $\text{MnO}_4^-$ -Ionen des Kaliumpermanganats im Feld laufen. Hierzu setzt man eine etwa 1 mm dicke Wasserschicht zwischen zwei Glasplatten, die an den Enden durch zwei schmale Streifen Fließpapier auf Abstand gehalten werden. Dort sitzen auch die Elektroden, die an eine Batterie angeschlossen sind. Tränkt man zuvor den einen Papierstreifen mit Permanganatlösung, so wandert aus ihm eine violette Wolke mit gerader Front in das klare Wasser, sofern er Kathode ist (Abb. 6.61). Die Wolke macht kehrt, wenn man die Spannung umpolt. Das Marschkommando des elektrischen Feldes breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit aus, die Marschkolonnen der Ionen gehorcht momentan, aber die Marschgeschwindigkeit bleibt so gering, dass man sie leicht mit Lineal und Stoppuhr bestimmen kann. So lässt sich wenigstens bei „bunten“ Ionen die Beweglichkeit leicht ermitteln. Kennt man sie, so kann man sie auch zur qualitativen chemischen Analyse heranziehen – beliebtes Verfahren in manchen Bereichen der organi-



■ Abb. 6.61. Ionenwanderung, schematisch (Einzelheiten im Text)

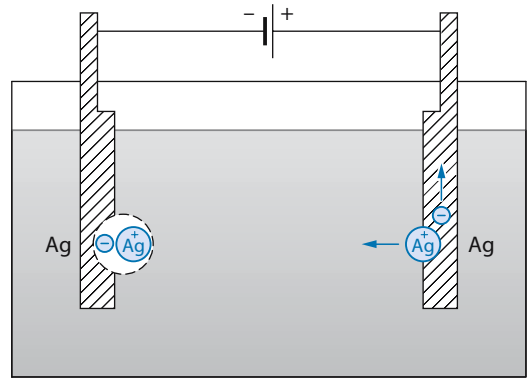
schen Chemie (**Elektrophorese**). Man tränkt einen langen Streifen Fließpapier mit einem neutralen Elektrolyten, malt ihm quer einen Strich der zu untersuchenden Flüssigkeit auf und legt ein elektrisches Feld an. Die bunten Ionen marschieren ab und sind nach einiger Zeit, ihren Beweglichkeiten entsprechend, mehr oder weniger weit gekommen. In analogem Verfahren können dissoziierende Medikamente mit elektrischen Feldern durch die Haut eines Patienten transportiert werden (**Ionophorese**).

#### Merke

Elektrolytische Leitung ist mit dem Transport chemischer Stoffe verbunden.

Nur selten besteht ein Stromkreis allein aus Elektrolyten; fast immer sind Messinstrumente, Widerstände und Kabel, sind metallische Leiter mit im Spiel. Das erfordert Elektroden, an deren Oberfläche der Leitungsmechanismus wechselt: Die quasifreien Elektronen des Metalls müssen auf Ionen umsteigen und umgekehrt. Damit sind allemal elektrochemische Prozesse verbunden, in schier unüberschaubarer Vielfalt.

Ein besonders einfaches Beispiel liefern zwei Silberelektroden in einer wässrigen Lösung von



■ Abb. 6.62. Elektrolyse. Elektrolytische Abscheidung von Silber aus wässriger Lösung von Silbernitrat.  $\text{Ag}^+$ -Ionen gehen bei der Anode in Lösung und werden an der Kathode abgeschieden, während die entsprechende Ladung als Elektronenstrom durch den Metalldraht fließt

$\text{AgNO}_3$  (Silbernitrat); es dissoziiert praktisch vollständig in  $\text{Ag}^+$  und  $\text{NO}_3^-$ . Im Endeffekt läuft der Stromtransport so ab, als werde er nur von den  $\text{Ag}^+$ -Ionen getragen (■ Abb. 6.62). Vorhanden sind sie auch im Metall der Elektroden; bei der Anode können sie den Kristallverband verlassen und in den Elektrolyten hineinschwimmen. Sie werden dazu von der Spannungsquelle ermutigt, die ja der Anode Elektronen entzieht, sodass diese versuchen muss, auch positive Ladungen loszuwerden. Umgekehrt schließen sich  $\text{Ag}^+$ -Ionen der Lösung dem Kristallgitter der Kathode an, weil sie hier von Elektronen erwartet werden, die der Leitungsstrom im Draht inzwischen angeliefert hat.

Elektroneutralität im Elektrolyten muss gewahrt bleiben: Die Anzahlen gelöster Anionen ( $\text{NO}_3^-$ ) und gelöster Kationen ( $\text{Ag}^+$ ) ändern sich insofern nicht, als für jedes Silberion, das an der Anode in Lösung geht, ein anderes an der Kathode abgeschieden wird. Dazu läuft eine Elementarladung durch den Draht. Das Experiment bestätigt die Erwartung des Modells: Es besteht eine strenge Proportionalität zwischen der Masse  $\Delta m$  des elektrolytisch abgeschiedenen Silbers und der vom Elektronenstrom transportierten Ladung  $\Delta Q$ . Am Transport waren  $N$  Ionen mit der Einzelmasse  $m_M$  und der Einzelladung  $z \cdot e_0$  beteiligt:

$$\Delta m = N \cdot m_M \text{ und } \Delta Q = N \cdot z \cdot e_0.$$

Es ist also nicht schwer, die Atommasse  $m_M$  elektrolytisch zu bestimmen und danach durch Division mit der Avogadro-Konstanten  $N_A$  die molare Masse  $M$  auszurechnen. Wer sich nur für  $M$  interessiert, kann von vornherein stoffmengenbezogen rechnen und statt der Elementarladung die

**Faraday-Konstante**  $F = N_A \cdot e_0 = 96484 \text{ C/mol}$

verwenden:

$$M = z \cdot F \cdot \Delta m / \Delta Q.$$

Hinter diesen Überlegungen stehen die beiden **Faraday-Gesetze**. Das erste besagt: Die abgeschiedene Masse ist zur transportierten Ladung proportional; das zweite: Die abgeschiedene Masse ist zur molaren Masse der Ladungsträger proportional.

■ ■ ■ Wenn man es genau nimmt, kommen für  $m_M$  und  $M$  Mittelwerte heraus, weil die beteiligten Ionen ein und derselben Art nicht unbedingt gleiche Massen haben müssen; an ihnen können verschiedene **Isotope** eines chemischen Elements beteiligt sein (s. hierzu ► Kap. 8.2.2).

#### Merke

1. Faraday-Gesetz:  $\Delta m \sim \Delta Q$ ,
  2. Faraday-Gesetz:  $\Delta m \sim M$ ,
- $\Delta m$  = elektrolytisch transportierte Masse,  
 $\Delta Q$  = elektrisch transportierte Ladung,  
 $M$  = molare Masse der Ionen.

Nur selten liegen die Verhältnisse so einfach wie beim Silbernitrat, wo einwertige Metallionen ohne ernsthafte Schwierigkeiten bei der Anode in Lösung gehen und bei der Kathode abgeschieden werden. Im Allgemeinen kommt es an den Elektroden zu mehr oder weniger komplizierten chemischen Reaktionen. Die **elektrolytische Zersetzung** reinen Wassers funktioniert wegen dessen geringer Leitfähigkeit  $\sigma$  nur sehr langsam. Setzt man NaCl als **Leitsalz** zu, so steigt  $\sigma$ ; der Strom, wird aber nicht von den  $H^+$ - und  $OH^-$ -Ionen des Wassers getragen, sondern von denen des Leitsalzes. Trotzdem perlt an der Kathode Wasserstoff ( $H_2$ ) auf und an der Anode Sauerstoff ( $O_2$ ), und

zwar der Formel  $H_2O$  entsprechend im Stoffmengen- und Volumenverhältnis 2:1. Dies zu erklären, ist Sache der Chemie.

## 6.8 Grenzflächen

### 6.8.1 Membranspannung

Die Membran der roten Blutkörperchen ist selektiv-permeabel: Sie lässt die Moleküle des Wassers hindurch, hält aber beide Ionensorten des NaCl zurück. Sind die Flüssigkeiten auf ihren beiden Seiten nicht isotonisch, so diffundiert das Wasser seinem eigenen Konzentrationsgefälle nach in die konzentriertere Lösung hinein, baut dort einen osmotischen Überdruck  $\Delta p_{\text{osm}}$  auf und brems damit seinen Diffusionsstrom (► Kap. 5.2.5).

Demgegenüber ist die Membran, die eine Nervenfaser umhüllt, „ionensensitiv“: Sie lässt die eine Ionensorte hindurch und die mit dem anderen Vorzeichen nicht. Wieder diffundieren die Teilchen, die es können, ihrem Konzentrationsgefälle nach; diesmal tragen sie aber elektrische Ladung und bauen mit ihr eine **Membranspannung**  $U_M$  auf, die jetzt die Diffusion brems. Freilich kann die Membran der Nervenfaser noch viel mehr: Sie unterscheidet z. B.  $K^+$ -Ionen und  $Na^+$ -Ionen trotz gleicher Ladung; sie kann sogar aktiv „pumpen“, d. h. unter Energieaufwand Ionen gegen deren Konzentrationsgefälle auf ihre andere Seite bringen und so unterschiedliche Konzentrationen aufbauen – und sie kann alle diese Fähigkeiten auf Kommando kurzfristig und vorübergehend so ändern, wie das für den Transport eines Nervensignals, für das „Feuern“ eines Nerven, von ihr verlangt wird. Dahinter stecken die sog. „Ionenkanäle“ lebender Membranen, die, Mitte der 70er-Jahre entdeckt, in ihrer Vielfalt die Forschung noch für längere Zeit beschäftigen werden. Wer nur die Membranspannung studieren will, hält sich darum besser an eine der technisch hergestellten leblosen Membranen, die der Fachhandel in allerlei Varianten bereithält.

Eine solche **ionenselektiv-permeable** Membran lässt von einer Kochsalzlösung die positiven Natriumionen hindurch, nicht aber die negativen Chlorionen. Die im Konzentrationsgefälle vor-

gepreschten  $\text{Na}^+$ -Ionen sammeln sich in dünner Schicht hinter der Membran, festgehalten von den Coulomb-Kräften der  $\text{Cl}^-$ -Ionen, die sich notgedrungen vor der Membran sammeln müssen. Die Situation ähnelt der eines geladenen Plattenkondensators.

Wie das  $\Delta p$  der Osmose ist auch die Membranspannung  $U_M$  eine Folge der selektiven Permeabilität der Membran und der unterschiedlichen Konzentrationen in den Lösungen auf ihren beiden Seiten. Man spricht deshalb auch vom **Konzentrationspotential**  $U_M$ . Allerdings hängt es nicht wie  $\Delta p$  von der Konzentrationsdifferenz ab, sondern vom Konzentrationsverhältnis, genauer: von dessen Logarithmus. Dies besagt die **Nernst-Formel**:

$$U_M = \frac{k \cdot T}{z \cdot e_0} \ln(c_1 / c_2) = \frac{R \cdot T}{z \cdot F} \ln(c_1 / c_2).$$

Diese Schreibweise liefert nur den Betrag der Membranspannung; das Vorzeichen überlegt man sich leicht: Auf welcher Seite der Membran sammeln sich welche Ionen? Da die Formel nur nach dem Verhältnis der Konzentrationen fragt, spielt es keine Rolle, ob man Anzahl-, Stoffmengen- oder Massendichten einsetzt.

Verwundern mag auch, dass die Ionenladung, ohne die es keine Membranspannung gäbe, unter dem Bruchstrich erscheint; doppelt geladene Ionen liefern, wenn sie von der Membran durchgelassen werden, nur die halbe Membranspannung. Wer sich an die nötige Mathematik herantraut, erkennt, dass es anders gar nicht sein kann.

■■■ Quer zur Membran (Ortskoordinate  $x$ , Dicke  $d$ ) existiert für die Ionen, die durchgelassen werden, ein Konzentrationsgefälle  $dc/dx$  – weil es nur um den Betrag von  $\Delta U$  gehen soll, braucht sich die Rechnung um Vorzeichen nicht zu kümmern. Zum Gefälle gehört die Diffusionsstromdichte

$$j_D = D \cdot dc/dx$$

(► Kap. 5.2.4). Sie ist eine *Teilchenstromdichte* mit der Einheit  $\text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$  und soll im Gleichgewicht kompensiert werden von der elektrisch erzeugten *Teilchenstromdichte*

$$j_E = u \cdot c(x) \cdot E = u \cdot c(x) \cdot dU/dx$$

(zu der die elektrische Stromdichte  $j_E \cdot z \cdot e_0$ ) gehört, weil jedes Teilchen die Ladung  $z \cdot e_0$  trägt (s. auch

► Kap. 6.7.2). Gleichsetzen und Auflösen nach  $dU$  führt zu

$$dU = \frac{D}{u} \frac{dc}{c}$$

Man erhält  $U$  durch Integration über die Dicke der Membran, auf deren beiden Seiten die Teilchendichten  $c_1$  und  $c_2$  herrschen:

$$U = \frac{D}{u} \int_{c_1}^{c_2} \frac{dc}{c} = \frac{D}{u} \ln(c_1 / c_2)$$

Hinter dem letzten Gleichheitszeichen steht reine Mathematik; ganz allgemein führt die Integration über  $1/x$  zu  $\ln x$ . Diffusionskonstante  $D$  und Beweglichkeit  $u$  sind eng miteinander verwandt; generell gilt  $D/u = kT/(ze_0)$ , was hier nicht ausführlich nachgewiesen werden soll. Setzt man dies ein, so bekommt man die Nernst-Formel.

Es macht etwas Mühe, den Faktor  $R \cdot T/(z \cdot F)$  aus Tabellenwerten auszurechnen. Da sich biologische Prozesse aber immer in der Nähe der Zimmertemperatur abspielen, lohnt es, sich den hierfür zuständigen Zahlenwert zu merken und dabei zugleich noch vom natürlichen Logarithmus auf den etwas bequemereren dekadischen überzuwechseln:

$$U_M = \frac{1}{z} 59 \text{ mV} \cdot \lg(c_1 / c_2)$$

Je Zehnerpotenz, je Dekade im Konzentrationsverhältnis liefern einwertige Ionen bei Zimmertemperatur ungefähr 59 mV Membranspannung. Real existierende Membranen liefern meist ein paar Millivolt weniger. An den Logarithmus muss man sich gewöhnen: Eine Verzehnfachung des Konzentrationsverhältnisses bringt keineswegs einen Faktor 10 in der Membranspannung, sondern nur ein Plus von 59 mV.

#### Merke

Membranspannung (Nernst-Formel):

$$U_M = \frac{R \cdot T}{z \cdot F} \ln(c_1 / c_2)$$

und speziell bei Körpertemperatur und einwertigen Ionen

$$U_M \approx 59 \text{ mV} \lg(c_1 / c_2).$$

### 6.8.2 Galvani-Spannung

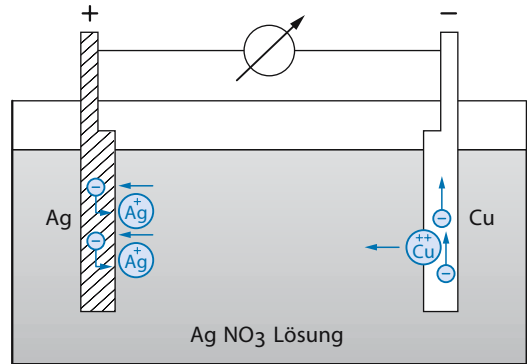
Das Entstehen einer Konzentrationsspannung lässt sich, wie das vorige Kapitel gezeigt hat, recht gut verstehen, zumindest qualitativ. Eine zuverlässige Messung macht schon mehr Mühe. Das Messinstrument verlangt allemal metallische Zuleitungen und damit metallische Elektroden in den beiden Kammern des Elektrolyten. Auch an deren Oberflächen bilden sich Potentialunterschiede aus, im Grunde nach dem gleichen Schema: **Grenzflächenspannungen** treten immer dort auf, wo von den zwei Sorten von Ladungsträgern, die wegen der Elektroneutralität ja mindestens vorhanden sein müssen, die eine leichter durch die Phasengrenze hindurchkommt als die andere.

Ein Beispiel gibt das Silberblech in der Silbernitratlösung. Das Metall besitzt  $\text{Ag}^+$ -Ionen und Elektronen, der Elektrolyt ebenfalls  $\text{Ag}^+$ -Ionen und dazu  $\text{NO}_3^-$ -Ionen. Aus chemischen Gründen können nur die Silberionen aus der einen Phase in die andere überwechseln; die Elektronen dürfen das Metall nicht verlassen und die negativen Ionen nicht die Lösung. Folglich baut sich eine **Galvani-Spannung** zwischen Elektrode und Elektrolyt auf. Sie hat einen beträchtlichen Schönheitsfehler: Man kann sie nicht messen, und zwar prinzipiell nicht! Dazu wäre ja eine zweite Elektrode in der Nitratlösung nötig. Besteht sie ebenfalls aus Silber, so entwickelt sie die gleiche Galvani-Spannung, aber in entgegengesetzter Richtung, und lässt für das Messinstrument nichts übrig – besteht sie aus einem anderen Metall, so bildet dies seine eigene Galvani-Spannung aus und das Instrument bekommt nur die Differenz. Das ist interessant genug, misst aber keine der beiden Galvani-Spannungen für sich allein.

#### Merke

Kontaktspannung (Kontaktpotential, Galvani-Spannung):  
elektrische Grenzflächenspannung zwischen zwei Leitern; nur Differenzen sind messbar.

Die Differenz zweier (oder auch mehrerer) Galvani-Spannungen erscheint als Klemmenspannung eines **galvanischen Elementes**, z. B. einer Ta-



■ Abb. 6.63. Beispiel eines galvanischen Elementes (Einzelheiten im Text)

schenlampenbatterie. Ein im Modell übersichtliches, praktisch freilich bedeutungsloses Beispiel geben ein Silber- und ein Kupferblech, leitend durch einen Draht miteinander verbunden und gemeinsam eingetaucht in eine wässrige Lösung von Silbernitrat (■ Abb. 6.63). In diesem Fall liegen die Galvani-Spannungen so, dass Kupferionen stark in die Lösung hineindrücken und ihrer zweifach positiven Ladung wegen doppelt so viele Silberionen verdrängen, günstigenfalls in deren Elektrode hinein. Insgesamt muss die Elektroneutralität ja gewahrt bleiben. Dabei laufen Elektronen im Draht vom Kupfer zum Silber und können dort Arbeit leisten. Für den Außenkreis ist das Kupferblech negativer Pol, für den Elektrolyten positiver. In der Praxis läuft dieser Versuch freilich meist so ab, dass sich das verdrängte Silber unmittelbar auf dem Kupferblech abscheidet. Ist dieses schließlich voll versilbert, so tritt keine Spannung mehr zwischen den Elektroden auf: Die Klemmenspannung geht also rasch gegen null. Die Technik muss Systeme finden, bei denen sich derartige unerwünschte Reaktionen unterdrücken lassen. Immer ist die technische Verwirklichung, die auf vielerlei Nebenbedingungen Rücksicht zu nehmen hat, weit komplizierter als ihr physikalisches Prinzip.

Wer verdrängt eigentlich wen aus der Lösung? Dies ist eine Frage an die Chemie. Primär geht es um die positiven Kationen, die relativ leicht durch die Phasengrenze zwischen Elektrode und Elektrolyt hindurchtreten können; wer verdrängt

wird, lädt seine Elektrode notwendigerweise positiv auf, bringt sie also auf eine positive Spannung gegenüber der anderen Elektrode. Im Leerlauf und unter normalisierten Bedingungen gibt diese Spannung Antwort auf die eingangs gestellte Frage. Danach kann man alle Ionensorten in eine **Spannungsreihe** ordnen, für deren Zahlenwerte freilich eine gemeinsame Bezugselektrode vereinbart werden muss. Aus hier nicht zu erörternden Gründen hat man sich auf die **Wasserstoffelektrode** geeinigt, repräsentiert durch ein von gasförmigem Wasserstoff umspültes, oberflächenpräpariertes Platinblech – auch der Wasserstoff bildet ja Kationen. Die Position in der Spannungsreihe legt fest, wie **edel** ein Metall ist; Gold und Silber liegen obenan. In der Elektrochemie gilt, dass der Unedle den Edleren verdrängt. Man soll daran keine philosophischen Betrachtungen knüpfen, dem Grundsatz getreu, in kein Wort mehr „hineinzugeheimnissen“ als hineindefiniert wurde.

Galvani-Spannungen lassen sich nicht vermeiden, auch nicht bei den Sonden, mit denen z. B. Aktionspotentiale von Nervenfasern gemessen werden. In manchen Fällen genügt es, wenn die Grenzflächenspannungen der Sonden lediglich für die Dauer des Experiments konstant bleiben; dann kommt man mit einfachen Platindrähtchen aus. Wenn aber mehr verlangt wird, muss man zu eigens für bestimmte Zwecke entwickelten **Normalelektroden** greifen. Die „Kalomel-Elektrode“ beispielsweise ist darauf gezüchtet, die Wasserstoffionenkonzentration nicht zu bemerken, im exakten Gegensatz zur „Glaselektrode“. Die Spannung zwischen beiden erlaubt, pH-Werte elektrisch zu messen. Wie man das erreicht, ist Sache der Experten; dem Anwender bleibt nicht mehr als sich strikt an die mitgelieferte Gebrauchsanweisung zu halten.

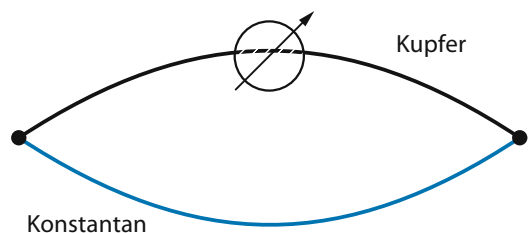
Alle Potentialmessungen mit Normalelektroden setzen stillschweigend voraus, dass sich die Elektrode während der Messung nicht verändert. Das ist nicht so selbstverständlich, wie dies auf den ersten Blick erscheinen mag. Die Elektrode muss ja ein Messinstrument versorgen, dessen Innenwiderstand nicht unendlich groß sein kann, das also einen Strom verlangt. Zu diesem gehört notwendigerweise eine elektrochemische Reakti-

on an der Elektrode, die grundsätzlich die Galvani-Spannung beeinflussen kann.

### 6.8.3 Thermospannung

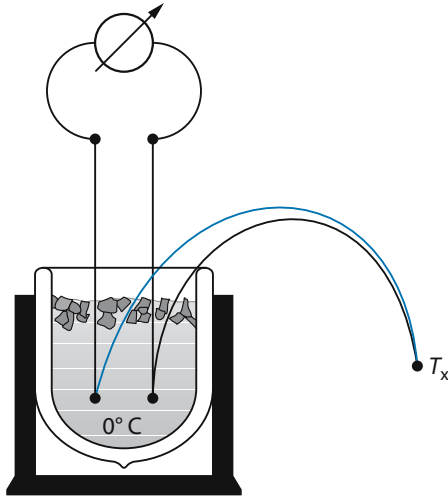
Auch bei Metallkontakten kann nur eine Sorte von Ladungsträgern leichtfüßig die Grenzfläche überqueren: die Elektronen. Die Ionen sitzen auf ihren Plätzen im Kristallgitter fest. Folglich entsteht auch hier eine Galvani-Spannung. Weil sie nicht gemessen werden kann, kümmert man sich meist nicht weiter um sie. Streng genommen liegt aber ein geerdeter Kupferdraht auf einem anderen Potential als ein geerdeter Silberdraht. Streng genommen liegen auch die kupfernen Klemmen eines Messinstruments auf einem anderen Potential als der Messingbügel, mit dem sie einmal kurzgeschlossen sein mögen. Trotzdem fließt kein Strom, denn alle Galvani-Spannungen im Kreis addieren sich zu null. Dafür sorgt schon der Energiesatz: Würden sich die Spannungen nicht aufheben, würde ein Strom fließen und Stromwärme entwickeln. Woher sollte die Energie kommen?

Grenzflächenspannungen ändern sich freilich mit der Temperatur. Hängt man deshalb an die Klemmen eines empfindlichen Spannungsmessers zwei Kupferdrähte und verbindet man ihre Enden mit einem Draht aus Konstantan (■ Abb. 6.64), so schlägt das Instrument aus, sobald die beiden **Lötstellen** (sie müssen nicht wirklich verlötet sein) auf unterschiedliche Temperaturen gebracht werden. Das Instrument misst die **Thermospannung**, ein von den beiden Metallen abhängiges Maß für die Temperaturdifferenz. Der Energiesatz ist da-



■ Abb. 6.64. Schema des Thermoelements. Befinden sich die beiden Lötstellen auf unterschiedlichen Temperaturen, so heben sich die beiden Galvani-Spannungen nicht auf. Die Differenz wird vom Instrument als Thermospannung angezeigt





■ **Abb. 6.65. Temperaturmessung.** Messung der Temperatur mit einem in °C eichbaren Thermoelement: Die Vergleichslötstelle wird durch Eiswasser auf 0 °C gehalten. Das Instrument darf über eine lange Leitung angeschlossen werden (Fernthermometer)

mit zufrieden und der 2. Hauptsatz der Wärmelehre auch: Die heiße Lötstelle nimmt sowieso Wärme vom Messobjekt auf und leitet sie längs des Drahtes zur kalten weiter; da fällt auch ein bisschen Energie für die Stromwärme im Spannungsmesser mit ab. Steckt man jetzt die eine Lötstelle in ein mit Eiswasser gefülltes Dewar-Gefäß, so bekommt man ein genaues und schnelles Thermometer, das sich in Grad Celsius eichen lässt. Es kann sogar Fernthermometer spielen, denn der Spannungsmesser darf auch über ein langes Kabel angeschlossen werden (■ Abb. 6.65).

#### Merke

Ein Thermoelement nutzt die Temperaturabhängigkeit der Kontaktspannung zur Temperaturmessung.

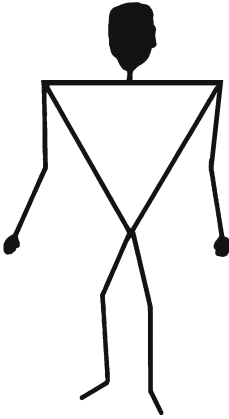
## 6.9 Elektrophysiologie

### 6.9.1 Die Auswertung des EKG nach Einthoven

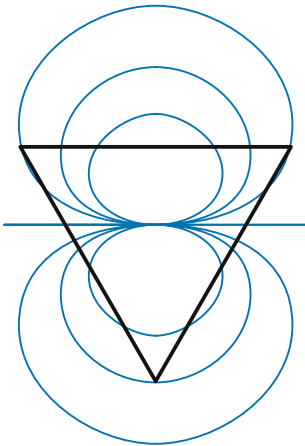
Das schlagende Herz ist eine pulsierende Quelle elektrischer Spannungen. Man darf es als eine kleine Batterie im Brustkorb ansehen, die allerdings Position und Spannung im Laufe eines Herzzyklus ständig wechselt und den Wechsel periodisch wiederholt. Man kann sie formal als pulsierenden elektrischen Dipol ansehen. Wäre er obendrein noch klein und läge er in einem weit ausgedehnten Elektrolyten mit homogener Leitfähigkeit, so umgäbe er sich in jedem Augenblick mit einem anderen elektrischen Feld, dessen Grundtyp aber stets dem der ■ Abb. 6.46 mit verschwindend kleiner Dipollänge entspricht. Das stimmt so gewiss nicht, aber der Einfachheit halber sei es einmal angenommen. Bei der Aufnahme eines **EKG** liegt der Patient still auf einem Ruhebett: Befände sich die Achse des Herzdipols in der Körperebene, so läge sie jetzt horizontal. Das stimmt nicht, wie ■ Abb. 6.42 ja gezeigt hat, aber der Einfachheit halber sei es einmal so angenommen. Die Elektroden zum Kardiographen werden dem Patienten an Hand- und Fußgelenke geschnallt. Wären seine Extremitäten dünne, gut leitende Drähte, so übernahmen sie jeweils von einem Punkt in den Schultergelenken und im Zentrum des Beckens das Potential, das vom Herzen an diesen Punkten angeliefert wird, und führten es zum Kardiographen. Dem ist nicht so, aber der Einfachheit halber sei es einmal angenommen. Bei einem normal gebauten Menschen bilden Schultergelenke und Becken ein gleichschenkeliges Dreieck; es ist kein gleichseitiges Dreieck, aber das wäre einfacher und darum sei es angenommen. Schließlich sitzt das Herz etwas nach links verschoben im Brustkorb, also nicht genau im Zentrum des gleichseitigen Dreiecks. Das wäre aber einfacher und darum sei auch dies angenommen. Vom Patienten verbleibt nach alldem ein flaches Strichmännchen (■ Abb. 6.66).

Sinn aller Annahmen ist, dass man jetzt so tun darf, als produziere das Herz ein ungestörtes Dipolfeld nach Art der ■ Abb. 6.46, von dem drei Potentiale zum Kardiographen abgeleitet wer-



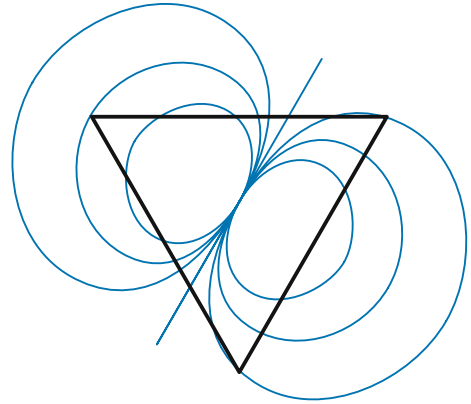


■ **Abb. 6.66. Der Patient als Dreieck.** Reduktion des Patienten zum gleichseitigen Dreieck mit fadenförmigen Extremitäten zur Auswertung des EKG nach Einthoven

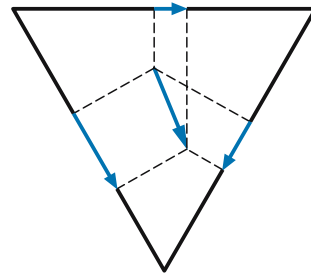


■ **Abb. 6.67. Einthoven-Dreieck.** Potentialverteilung eines vertikalen Dipols: Zwischen den Schultergelenken tritt keine Spannung (Potentialdifferenz) auf

den aus Punkten, die symmetrisch um den Dipol liegen, mit diesem in einer Ebene. Zeigte nun die Achse dieses Dipols exakt vom Kopf zu den geschlossenen Füßen, so dürfte zwischen den Elektroden an den Handgelenken keine Spannung auftreten: Aus Symmetriegründen lägen ihre Ableitungspunkte ja immer auf gleichen Potentiallinien (■ Abb. 6.67). Da in Wirklichkeit aber eine Spannung auftritt, muss der Dipol gedreht sein (■ Abb. 6.68). Seine Lage bestimmt man dadurch, dass man längs der Seiten des **Einthoven-Dreiecks** (■ Abb. 6.69) zentrierte Pfeile aufträgt, deren



■ **Abb. 6.68. Einthoven-Dreieck.** Bei schräg liegendem Dipol kommt es zu einer Spannung zwischen den Schultergelenken



■ **Abb. 6.69. Zur Auswertung des EKG** (Einzelheiten im Text)

Längen proportional zu den zwischen den entsprechenden Elektroden gemessenen Spannungen sind, und die Pfeile als senkrechte Projektionen des gesuchten Dipolmomentvektors auf die Dreiecksseiten auffasst. Das wäre in aller mathematischen Strenge korrekt, wenn all die eingangs gemachten Annahmen wirklich zuträfen.

Es mag verwundern, dass die Auswertung eines EKG nach Willem Einthoven (1860–1927) trotz der kühnen Annahmen verwendbare Ergebnisse liefert, etwa über die Verlagerung des Herzens durch Atembewegungen. Aber die Natur folgt quantitativen Gesetzen; eine auch nur grob interpretierende Messung ist allemal besser als gar keine Messung. Kritisch würde es freilich, wollte jemand behaupten, sein Herz führe bei jedem Schlag einen doppelten Looping aus, bloß weil der Summenvektor seines nach Einthoven ausgewerteten EKG dies tut. Wer Modelle benutzt, muss ihre Grenzen kennen.

## 6.9.2 Elektrische Unfälle

Im Elektrolyten, also auch im Menschen, transportieren elektrische Ströme nicht nur Ladung, sondern auch Materie. Das führt zu Konzentrationsverschiebungen in den Körperzellen, die aber harmlos sind, solange sie sich in den von der Natur vorgesehenen Grenzen halten. Schließlich darf der Mensch sein eigenes EKG nicht spüren. Geringfügige Störungen werden auch dann stillschweigend überspielt, wenn eine äußere Spannung der Auslöser war. Starke Störungen können aber leicht zu Dauerschäden führen und sogar zum Tod. Auf jeden Fall tun sie weh.

Besondere Gefahr droht dem Herzen. Seine Funktion verlangt eine koordinierte Kontraktion aller seiner Muskelfasern in der Systole und eine ebenso koordinierte Erschlaffung danach. Beides hat nach dem Kommando des Steuerzentrums zu erfolgen, das den Puls regelt. Fällt die Koordination aus, so kann es zu meist tödlichem **Herzflimmern** kommen; es lässt sich elektrisch auslösen. Gefährlich sind demnach vor allem Ströme, deren Bahnen von Hand zu Hand quer durch den Brustkorb laufen. Wer im Laboratorium mit ungeschützten hohen Spannungen zu tun hat, hält darum nach alter Expertenregel immer eine Hand fest in der Hosentasche, denn dann geht ein Schlag allenfalls von der anderen Hand in den Fuß und nicht ganz so dicht am Herzen vorbei. Robuste Elektriker prüfen zuweilen mit Zeige- und Mittelfinger, ob „Strom in der Leitung ist“. Zumal mit öligen Händen kann das gut gehen, weil kein lebenswichtiges Organ im Stromkreis liegt. Wer einen elektrischen Schlag bekommt, unterbricht meist durch seine Schreckreaktion den Stromkreis. Wer aber einen defekten Tauchsieder voll umfasst, dessen Hand verkrampft sich möglicherweise so, dass er nicht wieder loslassen kann.

Ausgelöst werden elektrische Unfälle von Spannungsquellen; die physiologische Wirkung rührt aber vom Strom her – folglich hat der Widerstand im Stromkreis erhebliche Bedeutung und mit ihm die Frage: Wie kommt der Strom von dem spannungsführenden Metallteil durch das Unfallopfer zur Erde? Dicke Schuhsohlen, weiche Teppiche, Holz-, Kunststoff- und Fliesenböden mögen hier manches Schlimme schon gemil-

dert haben. Die feuchten Kacheln des Badezimmers sind da weniger gut. Wer aber großflächig geerdet in der Badewanne sitzt, muss alle elektrischen Geräte meiden; schon der kleinste Isolationsfehler im Griff eines Haartrockners kann gefährlich werden. Bis 0,4 mA braucht man nichts zu befürchten; ab 100 mA muss man aber mit dem Schlimmsten rechnen.

### Merke

Wechselstrom von 50 Hz:

<0,4 mA: keine spürbare Wirkung

0,4–4 mA: geringe, aber merkliche Wirkung

5–25 mA: erhebliche Störungen

25–80 mA: Bewusstlosigkeit, reversibler Herzstillstand

>100 mA: Verbrennungen, Herzstillstand

Welche Spannungen gehören zu diesen Strömen? Das hängt sehr vom Einzelfall ab. Eine gewisse Abschätzung erlaubt aber die Widerstandskennlinie des menschlichen Körpers, die in [Abb. 6.10](#) gezeigt worden ist. Steckdosen sind keineswegs harmlos!

### Klinik

**Hochfrequenz ist ungefährlicher.** Wer mit technischer Wechselspannung Silber elektrolytisch abzuscheiden versucht, wird enttäuscht: Was sich an einer Elektrode während einer Halbwelle abscheidet, geht in der nächsten wieder in **Lösung**. In dieser Beziehung sind lebende Organismen empfindlicher, aber bei hinreichend hohen Frequenzen werden selbst stärkere Ströme auch für sie ungefährlich. Übrig bleibt dann nur die Entwicklung von Joule-Wärme. Dies ist das Ziel der **Diathermie**, also der **Kurzwellenbestrahlung**: Der Patient kommt als „Dielektrikum“ zwischen die Platten eines Kondensators, und der influenzierte Wechselstrom entwickelt Wärme dort, wo sie medizinisch gebraucht wird. Sie muss nicht wie beim Heizkissen mühsam durch die Haut herangeschleppt werden.

### 6.9.3 Schutzmaßnahmen

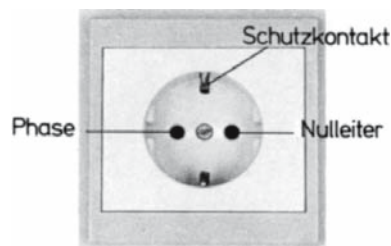
Schaltskizzen idealisieren. Sie tun so, als bestünden die gezeichneten elektrischen Verbindungen aus widerstandslosen Leitern; sie tun vor allem so, als seien diese Leiter gegeneinander vollkommen isoliert. Tatsächlich vagabundieren aber in jeder praktisch ausgeführten Schaltung unbeabsichtigte **Leckströme** herum; in den Wänden einer Wohnung können sie etliche Milliampere betragen und bei schadhafte n Geräten lebensgefährlich werden. Die moderne Elektrifizierung der Haushalte ist nur zu verantworten, wenn strenge Sicherheitsvorschriften konsequent eingehalten werden. Beim Einsatz elektrischer Geräte in der Arztpraxis gilt das in erhöhtem Maße und bei operativen Eingriffen in Herznähe erst recht.

Vor einer Taschenlampenbatterie braucht man sich nicht zu schützen. Man darf ihre Brauchbarkeit sogar dadurch überprüfen, dass man seine Zunge zwischen die Kontaktbleche hält: Schmeckt es sauer, ist die Batterie noch in Ordnung. Bei 4,5 V kann man sich das leisten. Spannungen bis 24 V mit den Händen anzufassen, bedeutet für den Menschen im Allgemeinen keine ernstliche Gefahr; sie sind sogar für Puppenstuben und Modelleisenbahnen zugelassen. Das gilt aber nur für Zuleitungen an den „Körperstamm“, nicht für Körperhöhlen oder gar das Körperinnere (und für die sehr niederohmige Erdung in der Badewanne ebenfalls nicht). Einen Haushalt kann man mit 24 V leider nicht versorgen. Schon dem Toaster müssten 20 Ampere angeliefert werden, über ein dickes und unhandlich steifes Kabel.

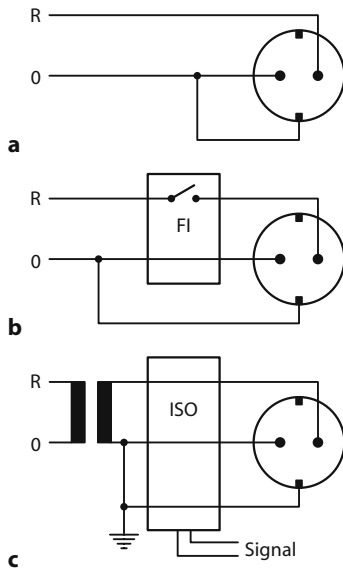
Die 230 V der Steckdose sind alles andere als harmlos. Auf jeden Fall darf man den Spannung führenden **Phasenleiter** nicht versehentlich berühren können. Er muss sorgfältig gegen das Gehäuse eines elektrischen Gerätes isoliert sein – kein Problem, wenn das Gehäuse selbst zuverlässig isoliert. In kondensierendem Wasserdampf (Haartrockner im Badezimmer) tut es das nicht unbedingt. Da man nicht wissen kann, welche der beiden Litzen **Nullleiter** ist, welche Spannung führt (ob der Netzstecker nämlich so oder anders herum in der Steckdose steckt), müssen beide Leitungen vom Gehäuse elektrisch getrennt sein. Für den Haus-

gebrauch genügt die sog. „Betriebsisolierung“, in Sonderfällen wird eine zusätzliche „Schutzisolierung“ verlangt. Auf jeden Fall ist damit ein leiten des Gehäuse im Potential zunächst einmal frei. Wer es berührt, muss etwaige Leckströme möglicherweise über seinen Körper an die Erde abführen, insbesondere die bei Wechselspannungs betrieb unvermeidlichen kapazitiven Leckströme; Streukapazitäten zwischen Schaltung und Gehäuse lassen sich nicht völlig unterbinden. In den Anfängen der Elektrifizierung hat man sich damit zufrieden gegeben. Schließlich sorgt der „Verband Deutscher Elektrotechniker“ mit seinem VDE-Prüfzeichen dafür, dass nur einwandfreie Geräte in den Handel kommen. Dass sie auch nach jahrelangem Gebrauch einwandfrei bleiben, dafür muss freilich der Kunde selbst sorgen. Kommt es zu einem Kabelbruch, fällt das Gerät aus; kommt es zu einem Isolationsfehler beim Phasenleiter, kann das Gerät lebensgefährlich werden.

Dieses Risiko geht man heute nicht mehr ein. Seit etlichen Jahren haben alle Steckdosen und Stecker einen dritten Kontakt, den **Schutzkontakt** (■ Abb. 6.70). Er wird vor der Steckdose (vom Kraftwerk aus gesehen) mit dem Nullleiter elektrisch verbunden (■ Abb. 6.71a), hinter dem Stecker mit dem Gehäuse des Gerätes. Damit liegt dieses berührungssicher auf Erdpotential. Kapazitive und andere Leckströme führt der Schutzleiter zuverlässig ab. Wird aber die Isolation des Phasenleiters ernsthaft beschädigt, so gibt es Kurzschluss über den Schutzleiter und die Sicherung vor der Steckdose „fliegt heraus“. Ein Kabelbruch im Schutzleiter führt zu der Situation, die anfangs noch allgemein akzeptiert wurde. Erst



■ Abb. 6.70. Schukodose mit Anschlüssen für Phase, Nullleiter und Schutzkontakt; Phase und Nullleiter können vertauscht sein



■ **Abb. 6.71a–c. Die Funktionen des Schutzkontakts (SK):** Im Haushalt ist der Schutzkontakt mit dem Nullleiter (0) verbunden (a); ein Isolationsfehler des Phasenleiters (R) führt zum Kurzschluss. Der Fehlerstrom-Schutzschalter (FI) unterbricht die Stromversorgung, wenn die Differenz zwischen den Strömen in Phasen- und Nullleiter einen Grenzwert überschreitet (b). Das Erdschlussüberwachungsgerät (ISO) gibt ein Warnsignal, wenn der Isolationswiderstand zwischen Phasen- und Erdleiter einen Grenzwert unterschreitet (c)

Kabelbruch *plus* Isolationsfehler werden gefährlich; man nennt das **doppelte Sicherheit**.

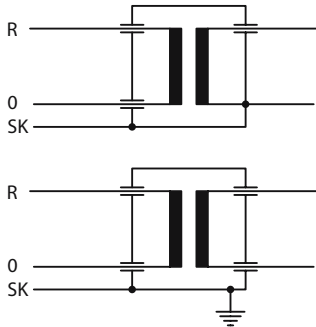
Tritt dieser doppelte Fehler tatsächlich ein, so bekommt man bei Berührung des Gehäuses einen elektrischen Schlag und zieht normalerweise die Hand instinktiv zurück, bevor Ernsthaftes geschieht. Die Elektroden des Elektrokardiographen werden dem Patienten aber fest angeschnallt – er kann sie nicht loslassen. Das erfordert eine genauere Begrenzung der Leckströme. Dafür sorgt ein **Fehlerstromschutzschalter** („FI-Schutzschalter“), der vor der Steckdose fest installiert wird. Elektrisch liegt er hinter der Verbindung von Schutz- und Nullleiter (■ Abb. 6.71b). Der FI-Schutzschalter vergleicht die beiden Ströme in Phasen- und Nullleiter miteinander; im Idealfall müssen sie gleich sein. Besteht eine Differenz, so kann sie harmlos über den Schutzleiter abgeflossen sein, möglicherweise aber auch nicht ganz so harmlos über den Patienten. Wird ein

Grenzwert überschritten (meist 30 mA), so unterbricht der Schutzschalter die Stromversorgung der Steckdose(n) und schaltet so die angeschlossenen elektrischen Geräte ab.

Der FI-Schutzschalter bemerkt freilich keine Fehlerströme, die der Arzt möglicherweise einschleppt, wenn er seinen Patienten berührt. Um das zu verhindern, müssen beide in vergleichbarer Weise geerdet sein. Der Patient ist dies dadurch, dass eine der ihm angeschnallten Elektroden in leitender Verbindung mit dem Gehäuse steht, das seinerseits über Stecker und Steckdose am Nullleiter hängt. Der Arzt braucht mit keiner speziellen Erdleitung verbunden zu sein; es genügt, alle Geräte in seiner Reichweite, also Heizkörper, Wasserhähne, Schränke usw., ausdrücklich mit dem Nullleiter in oder vor der Steckdose zu verbinden – und das Gehäuse des Kardiographen auch (für den Fall eines Kabelbruchs in seinem Nullleiter nämlich). Man nennt das **Potentialausgleich**.

Besonders kritisch wird es bei operativen Eingriffen in der Nähe des Herzens – und hierzu gehört bereits das Einschieben eines Herzkatheters durch die Vene. So etwas sollte nur in speziell geschützten Räumen geschehen, in denen die gesamte Stromversorgung über einen „Trenntransformator“ läuft: Nur dessen Primärspule hängt am Netz, die Sekundärspule ist zunächst einmal erdfrei und kann deshalb unabhängig vom Nullleiter des Netzes besonders sorgfältig nach dem Prinzip des Potentialausgleichs geerdet werden. Für Sicherheit sorgt jetzt ein **Erdschlussüberwachungsgerät** („ISO-Wächter“, ■ Abb. 6.71c), das hinter dem Trenntransformator den Widerstand des Phasenleiters gegen Erde laufend kontrolliert. Unterschreitet dieser Widerstand einen Grenzwert, so gibt der ISO-Wächter ein Warnsignal, schaltet aber nicht ab, damit er den Eingriff des Arztes nicht von sich aus abrupt unterbricht.

Anspruchsvollere elektrische Geräte führen ihre Stromversorgung über einen **Netztransformator**, der wie ein Trenntransformator wirkt. Normalerweise ist ein „Bein“ seiner Sekundärspule fest mit dem Gehäuse verbunden; damit liegt dann auch der Patient an einer Stelle auf dem Potential des Schutzleiters. Es hat zuweilen etwas für sich, den Patienten nicht auf diese Weise zu er-



■ **Abb. 6.72. Trenntrafo.** Der „Anwendungsteil“ eines elektrischen medizinischen Geräts ist durch einen Netztransformator von der Steckdose elektrisch getrennt, normalerweise aber über das Gehäuse mit dem Schutzkontakt (SK) verbunden (oben). Für das Verfahren des „Floating Input“ muss er aber elektrisch frei sein (unten)

den, sondern über die eine oder andere Kunstschaltung oder auch gar nicht. Im letzten Fall kann er dem Potential des ihn berührenden Arztes folgen, ohne einen Ableitstrom führen zu müssen, wenn dieses vom Erdpotential abweicht. Dafür muss dann der elektrische Ausgang des Gerätes erdfrei bleiben. Das ist technisch leicht zu erreichen (■ Abb. 6.72). Dieses **Floating-input-Verfahren** ist freilich kein Allheilmittel, denn allzu gut ist der Patient gegenüber seinem Bett ja nicht isoliert, schon gar nicht kapazitiv.

Bleibt zusammenzufassen: Alle Maßnahmen zur elektrischen Sicherheit haben dafür zu sorgen, dass ungewollte Ableitströme und Berührungsspannungen gewisse Grenzwerte nicht überschreiten.

#### Merke

Obere Grenzwerte für Ableitströme  
 Gehäuse: 500  $\mu\text{A}$   
 Patient:  
 extrakardial (EKG): 100  $\mu\text{A}$   
 intrakardial (Katheter): 10  $\mu\text{A}$   
 Obere Grenzwerte für Spannungen:  
 am Körperstamm: 24 V  
 in Körperhöhlen: 6 V  
 am Herzen: 10 mV

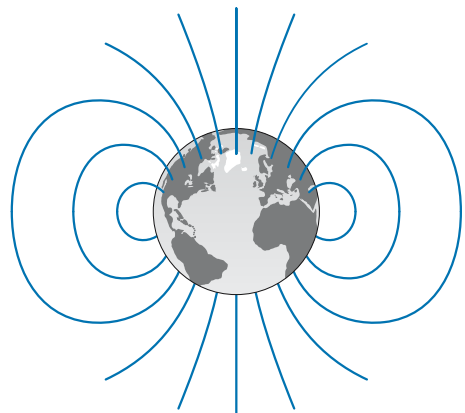
## 6.10 Magnetische Felder

### 6.10.1 Einführung

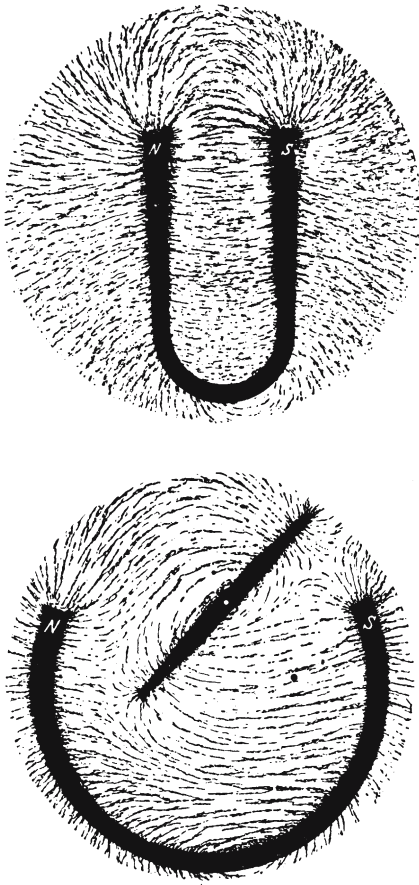
Schon im Mittelalter navigierten Kapitäne und Seeräuber nicht nur nach der Sonne und den Gestirnen, sondern auch nach dem Kompass, also einem kleinen Stabmagneten, der sich einigermaßen zuverlässig in Nord-Süd-Richtung einstellt, wenn man ihm erlaubt, sich reibungsarm um eine vertikale Achse zu drehen. Er tut dies als kleiner magnetischer Dipol im großen Magnetfeld der Erde (■ Abb. 6.73). Ganz analog würde sich ein elektrischer Dipol einstellen (► Kap. 6.5.4), wenn die Erde ein entsprechendes elektrisches Feld besäße. Wie dieses kann auch ein **magnetisches Feld** mit Hilfe von Feldlinien dargestellt werden; eine Kompassnadel stellt sich nach Möglichkeit zu ihnen parallel. Nur laufen sie nicht von plus nach minus, sondern von Nord nach Süd – Bezeichnungen dürfen frei vereinbart werden. Die noch genauer zu definierende **magnetische Feldstärke** ist auf jeden Fall ein Vektor. Auch in magnetischen Feldern ziehen sich ungleichnamige Pole an, stoßen sich gleichnamige ab.

#### Merke

Magnetische Felder können wie elektrische Felder qualitativ durch Feldlinien dargestellt werden.



■ **Abb. 6.73. Magnetfeld der Erde**



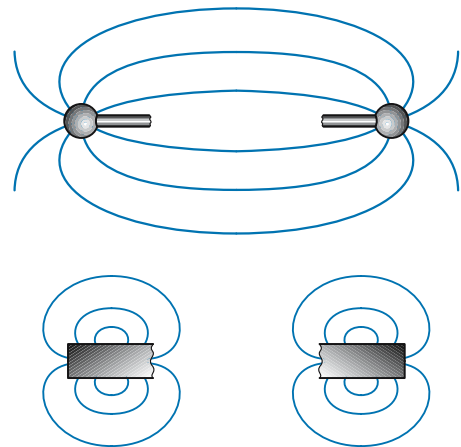
■ Abb. 6.74. Magnetische Feldlinien lassen sich mit Eisenfeilspänen sichtbar machen: Hufeisenmagnet ohne und mit Kompassnadel (nach R.W. Pohl)

Einigermaßen kräftige Magnetfelder kann man sichtbar machen. Man legt einen glatten Karton beispielsweise auf einen Hufeisenmagneten und streut Eisenfeilspäne darüber. Wenn man durch vorsichtiges Klopfen ein wenig nachhilft, ordnen sich die Späne zu einer Art Feldlinienbild; legt man noch eine Kompassnadel dazu, so meint man zu „sehen“, wie die Feldlinien versuchen, die Nadel als magnetischen Dipol in Feldrichtung zu drehen (■ Abb. 6.74).

Ein Magnetfeld ist ein Raumzustand, in dem auf einen magnetischen Dipol ein Drehmoment ausgeübt wird. Analoges kann man vom elektrischen Feld ebenfalls behaupten. Die dort übliche Formulierung vom „Raumzustand, in dem auf ei-

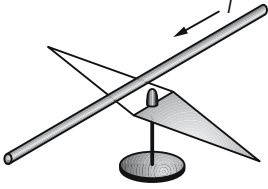
ne elektrische Ladung eine Kraft ausgeübt wird“, darf man freilich nicht auf das Magnetfeld übertragen, und zwar aus folgendem Grund: Ein makroskopischer elektrischer Dipol besteht aus zwei entgegengesetzt geladenen Kugeln, die von einem isolierenden Stab auf Distanz gehalten werden. Zerbricht man den Stab, kann man die beiden Ladungen im Prinzip beliebig weit auseinander ziehen; man muss nur die dazu nötige Arbeit gegen die Coulomb-Kraft aufbringen. Zerbricht man hingegen einen makroskopischen magnetischen Dipol, also einen Stabmagneten, so bekommt man zwei kleinere magnetische Dipole, beide vollständig mit Nord- und Südpol ausgestattet (■ Abb. 6.75). Es gibt keine magnetischen Einzelladungen im Sinne der elektrischen, die z. B. durch Ionen repräsentiert werden können.

Kompassnadeln reagieren nicht nur auf Magnete, sie reagieren auch auf elektrische Ströme: Sie stellen sich so gut, wie es ihre Lagerung erlaubt, quer zum Draht (■ Abb. 6.76). Tatsächlich umgibt sie ein Strom mit kreisförmig-konzentrischen magnetischen Feldlinien, die weder Anfang noch Ende haben (■ Abb. 6.77); sie hüllen den stromdurchflossenen Draht wie ein Schlauch ein.). Für den Umlaufsinn der Feldlinien gibt es eine **Rechte-Hand-Regel**.



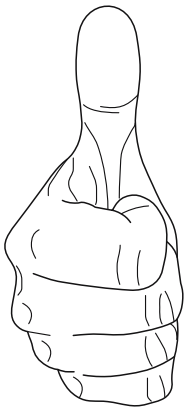
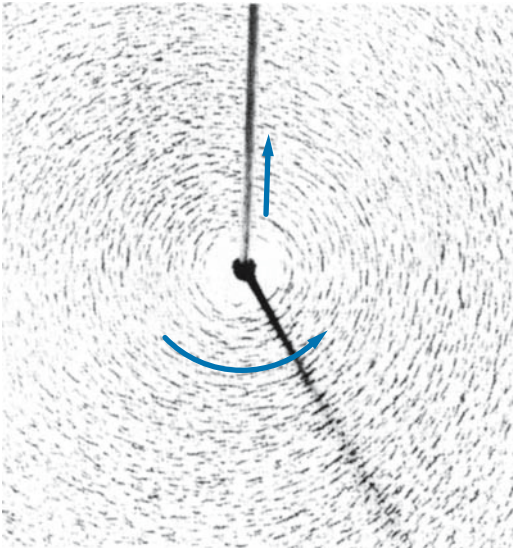
■ Abb. 6.75. Dipole. Bricht man einen elektrischen Dipol auseinander, so bekommt man zwei Monopole; bricht man einen magnetischen Dipol (Stabmagneten) auseinander, so bekommt man zwei kleine Dipole





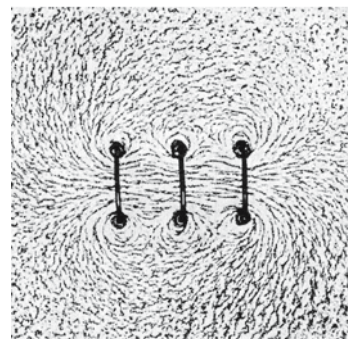
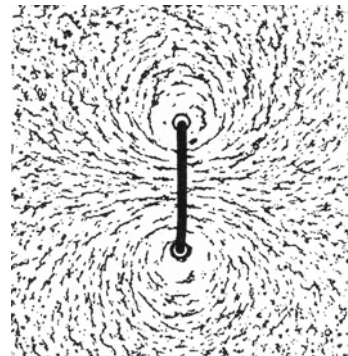
■ Abb. 6.76. **Magnetische Kraft.** Eine Kompassnadel stellt sich quer zu einem elektrischen Strom  $I$

6



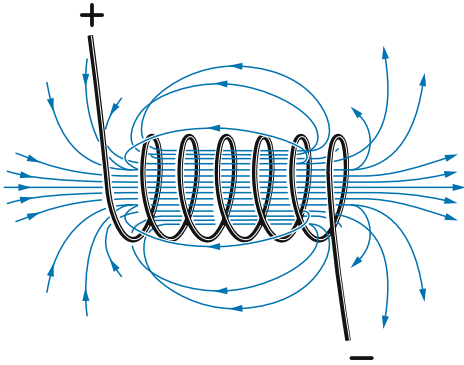
■ Abb. 6.77. **Gerader Draht.** Ein stromdurchflossener Leiter umgibt sich mit ringförmig geschlossenen magnetischen Feldlinien, hier durch Eisenfeilspäne sichtbar gemacht (nach Orear). Für den Umlaufsinn der Feldlinien gibt es eine Rechte-Hand-Regel: Strom in Richtung des Daumens, Feldlinien in Richtung der gekrümmten Finger.

Stellt man parallel zum ersten Draht einen zweiten, der aber in Gegenrichtung vom Strom durchflossen wird, so überlagern sich die beiden Ringsysteme; sie verstärken sich im Gebiet zwischen den Drähten und kompensieren sich mehr oder weniger im Außenraum. Man kann auch gleich einen einzigen Draht zur Schleife biegen; sein Feld ähnelt dem eines kurzen Stabmagneten – nur kann man jetzt gewissermaßen in dessen Inneres blicken. Setzt man einige solcher Schleifen, parallel geschaltet und von gleichen Strömen durchflossen, hintereinander, so wird der „Stabmagnet“ länger (■ Abb. 6.78): Viele kleine, parallel orientierte Dipole geben einen großen. Setzt man die Schleifen dicht genug und macht man die Reihe lang gegenüber dem Durchmesser, so laufen die Feldlinien im Inneren praktisch parallel: Sie liefern ein homogenes magnetisches Feld in Längsrichtung der Schleifenreihe (■ Abb. 6.79). Im Außenraum ergibt sich das gleiche Feld wie



■ Abb. 6.78. **Stromschleife.** Magnetfeld einer Stromschleife und von drei in gleicher Richtung von Strom durchflossenen Schleifen (nach R.W. Pohl)





■ **Abb. 6.79. Spule.** Im Innern einer gestreckten Spule herrscht ein homogenes Magnetfeld (nach Gerthsen)

bei einem entsprechend geformten Permanentmagneten. Im Innenraum gilt das auch, aber wie die Feldlinien im Inneren eines Permanentmagneten verlaufen, lässt sich nur mit sehr trickreichen Messverfahren herausfinden.

Alle Beispiele zeigen: Magnetische Feldlinien bilden immer in sich geschlossene Schleifen, ganz anders als elektrische Feldlinien, die immer auf elektrischen Ladungen starten oder enden. Dies liegt eben daran, dass es keine magnetischen Ladungen gibt.

#### Merke

Magnetische Feldlinien bilden immer geschlossene Schleifen.

#### Wo ist Norden?

► **Frage.** Der Nordpol einer Kompassnadel zeigt nach Norden. Wo also liegt der Nordpol des Erdmagnetfeldes?

► **Antwort.** In der Antarktis, also am Südpol; denn der Nordpol eines Magneten wird vom Südpol des anderen angezogen und umgekehrt. Dass Atlanten ihn in die Arktis verlegen, ist zwar physikalisch falsch, aber trotzdem sinnvoll: man müsste sonst zu viel erklären.

### 6.10.2 Kräfte im Magnetfeld

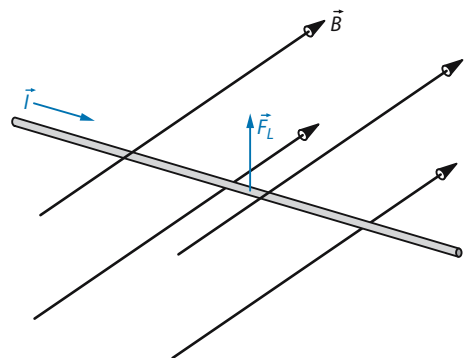
Wenn der Stabmagnet „Kompassnadel“ auf das Magnetfeld der Erde reagiert, dann reagiert auch eine stromdurchflossene Spule auf eine andere stromdurchflossene Spule und sogar ein einzelner stromdurchflossener Draht auf einen anderen. Auf welchem technischen Weg die Magnetfelder entstehen, kann schließlich keinen grundsätzlichen Unterschied ausmachen. Die einfachste Geometrie bekommt man, wenn man einen horizontalen Draht quer zu einem ebenfalls horizontalen, homogenen Magnetfeld spannt. Schickt man jetzt einen Gleichstrom durch den Draht, so versucht er, nach oben oder unten aus dem Feld herauszukommen. Auf ihn wirkt eine vertikale Kraft, die **Lorentz-Kraft** genannt wird (■ Abb. 6.80), die nicht nur zur Stärke des Magnetfeldes  $B$  und zum Strom  $I$  proportional ist, sondern auch zur Länge  $l$ , mit der sich der Draht im Feld befindet, sei es, weil er nicht länger ist, sei es, weil das Feld nicht weiter reicht. Der Zusammenhang für die Beträge ist in diesem Fall denkbar einfach:

$$F_L = I \cdot l \cdot B$$

Verläuft der Draht allerdings unter einem Winkel  $\alpha$  schräg zum Feld, so kommt noch ein Sinus herein:

$$F_L = I \cdot l \cdot B \cdot \sin \alpha$$

Ganz allgemein wird die Lorentz-Kraft durch das Kreuzprodukt beschrieben, das über die Rech-



■ **Abb. 6.80. Lorentz-Kraft.** Auf einen vom Strom  $I$  durchflossenen Draht, der quer im Magnetfeld  $B$  liegt, wirkt eine zu beiden senkrechte Kraft  $F$

te-Hand-Regel (► Kap. 1.4) auch gleich die Richtung eindeutig festlegt:

$$\text{Lorentz-Kraft } \vec{F}_L = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

Da diese Gleichung den Strom  $\vec{l}$  zum Vektor erennt, kann sie die Drahtlänge  $l$  nur als skalaren Faktor werten. Die Größe  $\vec{B}$  ist ein Maß für die Stärke des magnetischen Feldes; sie bekommt den Namen **magnetische Flussdichte** und die Einheit  $\text{Vs/m}^2 = \text{T}$  (Tesla).

Warum nennt man  $\vec{B}$  nicht „magnetische Feldstärke“? Man tut es zuweilen, und vielleicht setzt sich diese Bezeichnung mit der Zeit offiziell durch. Historisch wurde der Name aber an eine zu  $\vec{B}$  proportionale und im Vakuum als Vektor parallelergerichtete Größe  $\vec{H}$  mit der Einheit A/m vergeben. Diese Größe ist für das ingenieurmäßige Rechnen von Bedeutung.

■ ■ ■ Unter bestimmten technisch wichtigen Bedingungen sind  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  immer proportional gemäß

$$\vec{B} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot \vec{H};$$

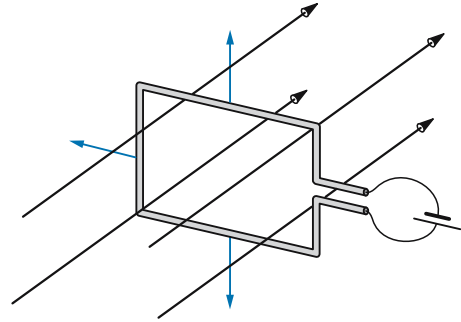
dabei ist  $\mu_0$  eine magnetische Feldkonstante und  $\mu_r$  eine Materialkonstante für magnetische Materialien, die *relative Permeabilität*. Liegt diese Proportionalität vor, so ist es gleichgültig, ob man die Gesetzmäßigkeiten des Magnetismus mit  $\vec{B}$  oder mit  $\vec{H}$  formuliert. Im allgemeinen Fall aber ist  $\vec{B}$  die eigentliche magnetische Feldgröße. Deshalb wird die Stärke magnetischer Felder allgemein in Tesla angegeben.

#### Merke

Kraft auf Strom im Magnetfeld: Lorentz-Kraft

$$\vec{F}_L = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}.$$

Biegt man den Draht zu einer rechteckigen Schleife, drehbar um eine horizontale Achse gelagert, so dreht er sich bis in die Stellung der ■ Abb. 6.81. Dann hört die Bewegung auf: Alle Leiterteile stehen jetzt senkrecht zum Feld, die Kräfte möchten die Leiterschleife auseinander ziehen; das verhindert aber ihre mechanische Festigkeit. Schaltet man den Strom kurz vor Erreichen dieser Stellung ab und kurz danach in Gegenrichtung wieder ein, so dreht sich die Schleife dank ihrer mechanischen Trägheit über den Totpunkt hinweg und dann unter Kraftwirkung im



■ Abb. 6.81. Kraft auf Leiterschleife. Eine um eine horizontale Achse drehbare Leiterschleife dreht sich bei Stromfluss bis in die gezeichnete Stellung

alten Drehsinn weiter. Nach diesem Prinzip arbeiten viele Elektromotoren: Ein mit der Achse fest verbundener Polwender schaltet den Strom in der Schleife immer im richtigen Moment auf Gegenrichtung um. Zur Verstärkung der Kraft wird der Draht in vielen Windungen zu einer Drehspule gewickelt und bekommt auch noch einen Weichkern.

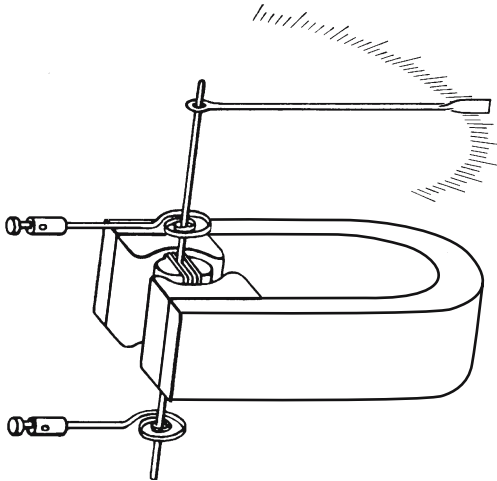
■ ■ ■ Die Drehspule bildet einen stromabhängigen magnetischen Dipol. Analog zum elektrischen Dipol ordnet man ihm ein sog. **magnetisches Moment**  $\vec{m}$  zu, ein magnetisches Dipolmoment also, und schreibt für das wirkende Drehmoment

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}.$$

Gibt man einer Drehspule mit Spiralfedern eine Ruhelage vor und setzt sie quer in ein Magnetfeld, so wird sie zum Strommesser: Mit wachsendem  $I$  wächst ihr Dipolmoment, mit diesem das Drehmoment, mit diesem der Auslenkwinkel. So arbeiten alle anzeigenden **Drehspulinstrumente** (■ Abb. 6.82). Primär reagiert ein solches Instrument auf die Kraft, die ein stromdurchflossener Leiter im Magnetfeld erfährt, also auf Strom; es kann aber zum Spannungsmesser umgeichtet werden, weil der Widerstand der Drehspule bekannt und ohmsch ist.

Fließt ein Strom im Metalldraht, so wandern Elektronen. Auch ein Strahl freier Elektronen, z. B. in einer Fernsehbildröhre, bedeutet einen Strom, auf den die Lorentz-Kraft wirkt. In der Tat wird der Elektronenstrahl in einer Fernsehbildröhre mit Magnetfeldern gesteuert. Die Formel für die Lorentz-Kraft auf ein einzelnes Elektron lautet:

$$\vec{F}_L = e_0 \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$



■ Abb. 6.82. Drehspulinstrument. Ein starker Hufeisenmagnet erzeugt mit Polschuhen und zylinderförmigem Weich-eisenkern ein konstantes Magnetfeld, das im Wesentlichen radialsymmetrisch auf die Achse der Drehspule zuläuft. Diese ist reibungsarm in Spitzen gelagert und wird von zwei Spiralfedern gehalten, die zugleich als Stromzuführungen dienen (nach Gerthsen)

Hierbei ist  $e_0$  die Elementarladung des Elektrons und  $\vec{v}$  seine Geschwindigkeit. Weil hiernach die Lorentz-Kraft immer senkrecht auf der Geschwindigkeit steht, wird ein Elektronenstrahl in einem homogenen Magnetfeld auf eine Kreisbahn abgelenkt und irgendwelche anderen frei fliegenden geladenen Teilchen (Ionen) auch. Aus dem Durchmesser der Kreisbahn lässt sich die Masse des Teilchens bestimmen. Zu diesem Zweck hat die Technik komfortable **Massenspektrometer** entwickelt, die auf geschickte Weise die Ablenkung geladener Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern kombinieren.

Was aber ist mit der Kompassnadel, die dieses Kapitel eingeleitet hat? Offensichtlich übt das Magnetfeld der Erde ein Drehmoment auf sie aus. Folglich muss sie ein magnetisches Moment besitzen. Das können ihr nur die Atome gegeben haben, aus denen sie besteht. Normalerweise sind es Atome des Elementes Eisen.

### 6.10.3 Erzeugung von Magnetfeldern

Die einfachste Anordnung, mit der man ein Magnetfeld erzeugen kann, ist ein einfacher, stromdurchflossener Draht. Die Magnetfeldlinien laufen in konzentrischen Kreisen um ihn herum (■ Abb. 6.77). Nachmessen zeigt, dass für die Stärke des Magnetfeldes im Abstand  $r$  vom Draht gilt:

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi \cdot r}$$

Das Feld wird also mit wachsendem Abstand schwächer.  $\mu_0$  ist die

**magnetische Feldkonstante:**

$$\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/Am}$$

Der Umlaufsinn des Feldes folgt der Schraubenregel: Dreht man eine Schraube mit Rechtsgewinde im Umlaufsinn, so windet sich die Schraube in Stromrichtung.

Wickelt man den Draht zu einer Spule auf, so addieren sich die Felder der einzelnen Schleifen, wie es die ■ Abb. 6.78 und 6.79 anschaulich machen. Das Feld im Inneren einer langen zylindrischen Spule ist homogen und hat die Stärke:

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N \cdot I}{l}$$

Dabei ist  $N$  die Windungszahl und  $l$  die Länge der Spule.  $\mu_r$  ist die relative Permeabilität eines eventuell vorhandenen Eisenkernes in der Spule, von dem gleich noch die Rede sein wird.

Wie aber kommt ein Permanentmagnet zu seinem Feld? Das müssen die Atome, üblicherweise Eisenatome, aus denen er besteht, liefern. Um genau zu verstehen, wie sie das tun, müsste man Quantenphysik betreiben. In einem ganz einfachen klassischen Bild ist die Vorstellung erlaubt, die Elektronen der Atomhülle kreisen um den Atomkern, bildeten also einen atomaren Ringstrom. Dieser erzeugt dann ein Magnetfeld wie eine Spule.

Diese atomaren Ringströme können außerordentlich groß werden und das Feld einer Spule erheblich verstärken. Schraubt man einen Elektromotor auseinander, so stellt man fest, dass alle Spulen in ihm um Eisenkerne gewickelt sind. Eisen ist ein **ferromagnetisches Material**, das das magnetische Feld in der Spule um einen Faktor  $\mu_r$  verstärkt, der **relative Permeabilität** heißt und bei gu-

■ Tabelle 6.1. Vergleich der Felder

Elektrisches Feld	Magnetisches Feld
Wird durch Ladungen erzeugt	Wird durch Ströme erzeugt
Feldlinien beginnen an positiven und enden an negativen Ladungen	Feldlinien bilden geschlossene Ringe um Ströme
Kraft auf Ladungen	Kraft auf bewegte Ladungen (Ströme)
Die Coulomb-Kraft steht parallel zu den Feldlinien und hängt an $\vec{E}$	Die Lorentz-Kraft steht senkrecht zu den Feldlinien und hängt an $\vec{B}$

ten Materialien einen Wert von 1000 bis 10.000 annehmen kann. Erst diese enorme Verstärkung des magnetischen Feldes und damit der Lorentz-Kräfte macht kleine und preiswerte Elektromotoren möglich. Der Kernspintomograph (► Kap. 8.2.1), bei dem der Patient in ein hohes Magnetfeld gebracht werden muss, kann diesen Verstärkungseffekt leider nicht nutzen, da ja der Patient in die Spule muss. Unter anderem auch deshalb ist das Gerät so teuer.

Oft wird das magnetische Feld mit dem elektrischen verglichen und dabei die Ähnlichkeiten herausgestellt. Aber eigentlich sind die Felder recht verschieden. Die ■ Tabelle 6.1 vergleicht die Felder miteinander.

■■■ Es wurde schon über Substanzen mit höchst unterschiedlichen magnetischen Eigenschaften gesprochen. Eine Kompassnadel stellt einen permanenten magnetischen Dipol dar; einmal aufmagnetisiert behält sie ihre **Magnetisierung** (weitgehend) bei – Substanzen dieser Art bezeichnet man als **harte Ferromagnetika** (auch wenn sie gar kein Eisen enthalten). Die Eisenfeilspäne, die auf glattem Karton Feldlinienbilder produzierten, liefern ebenfalls kleine, aber durchaus makroskopische magnetische Dipole, dies aber nur, solange sie sich in einem äußeren Magnetfeld befinden; im feldfreien Raum verlieren sie (weitgehend) ihre Magnetisierung – Substanzen dieser Art nennt man **weiche Ferromagnetika**. Der glatte Karton hingegen diente nur als mechanische Unterlage; im Vergleich zu den Ferromagneten darf man ihn als **unmagnetisch** ansehen. So ganz ist er das freilich nicht.

Atome bestehen aus einem kleinen Kern, der von einer vergleichsweise großen Elektronenhülle umgeben ist. Auch wenn das Bild nicht genau stimmt, darf man zuweilen so tun, als kreisten die Elektronen in dieser Hülle um den Kern herum wie Planeten um eine Sonne. Ein kreisendes Elektron repräsentiert aber einen elektrischen Kreisstrom und damit einen elementaren magnetischen Dipol. Dabei gibt es nun zwei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten. Die verschiedenen Elektronen einer Hülle können ihre Kreisbahnen so legen, dass sich ihre magnetischen Dipolmomente kompensieren und sich nur in einem äußeren Feld mehr oder weniger ausrichten; dann ist das Atom als Ganzes unmagnetisch, kann aber magnetisiert werden – solche Substanzen nennt man **diamagnetisch**. Die Kompensation kann aber auch von vornherein nicht gelingen; dann besitzt das einzelne Atom ein magnetisches Moment, das nur deswegen makroskopisch nicht in Erscheinung tritt, weil die thermische Bewegung die Richtungen aller Dipole ständig durcheinander wirbelt; ein äußeres Feld kann sie aber ausrichten – solche Substanzen nennt man **paramagnetisch** (elektrische Analogie wäre die Orientierungspolarisation – ► Kap. 6.6.3). Paramagnetische Atome geben beispielsweise die Signale, die bei der NMR-Tomographie (► Kap. 8.2.1) beobachtet werden.

Ob diamagnetisch, ob paramagnetisch – die Magnetisierung durch ein äußeres Feld bleibt gering. Manche paramagnetischen Atome richten sich aber spontan im Feld ihrer Nachbarn aus und bilden dann im Kristall Domänen gleichgerichteter Magnetisierung. Solange viele Domänen durcheinander liegen, macht sich auch das zunächst nach außen kaum bemerkbar. In einem äußeren Feld wachsen aber die Domänen mit „richtig gerichteter“ Magnetisierung auf Kosten der anderen. Das geht relativ leicht, denn kein Atom braucht dafür seinen Gitterplatz zu verlassen. Die Magnetisierung ist kräftig und kann bis zur vollständigen Ausrichtung, bis zur **Sättigung** steigen. Je mehr Magnetisierung nach Abschalten des äußeren Feldes übrig bleibt, desto „härter“ ist das Ferromagnetikum. Freilich steht die thermische Bewegung der Domänenbildung entgegen; oberhalb seiner **Curie-Temperatur** wird jeder Ferromagnet zum Paramagneten.

Das magnetische Feld im Innern einer gestreckten Spule ist homogen, variabel und berechenbar, aber es ist schwer zugänglich: Die Spule steht im Wege. Vollends unzugänglich wird es, wenn man zur Erhöhung der Flussdichte einen **ferromagnetischen** „Weichenkern“ mit hoher Permeabilität einschiebt (aus magnetisch, nicht mechanisch weichem Eisen): Jetzt kann man nur noch im äußeren Streufeld experimentieren.

Aber auch dieses Feld lässt sich homogen machen, wenn man nämlich den Eisenkern zu einem U biegt und seinen Schenkeln **Polschuhe** aufsetzt, die sich auf kurzem Abstand mit planparallelen Oberflächen gegenüberstehen. Das Magnetfeld läuft, soweit ihm das irgend möglich ist, im Bereich hoher Permeabilität, also im Eisen. An den Polschuhen hilft es ihm aber nichts, es muss in die Luft übertreten und nun bei  $\mu_r = 1$  eine vergleichsweise hohe magnetische Feldstärke erzeugen. Schneidet man die Polschuhe schräg an, so lassen sich auch Felder mit definierter Inhomogenität erzeugen.

### Rechenbeispiel 6.16: Luftspule

► **Aufgabe.** Eine Spule habe 1000 Windungen, sei 10 cm lang und werde von einem Strom von 10 A durchflossen. Welche magnetische Flussdichte ergibt sich im Inneren?

► **Lösung.**

$$B = \mu_0 \frac{1000 \cdot 10 \text{ A}}{0,1 \text{ m}} = \mu_0 \cdot 10^5 \frac{\text{A}}{\text{m}} = 0,126 \text{ T}.$$

### Rechenbeispiel 6.17: Motor aus Draht und Luft

► **Aufgabe.** Wir wollen einmal abschätzen, was ein Elektromotor ohne Eisen schaffen kann. Wir nehmen die Anordnung der [Abb. 6.88](#) und setzen sie in das eben berechnete Magnetfeld. Statt einer Leiterschleife nehmen wir eine rechteckige Spule mit 1000 Windungen und den Abmessungen 10 cm in Drehachsenrichtung und 5 cm senkrecht zur Drehachse. Welche Kräfte und welches Drehmoment wirken maximal auf diese Drehspule, wenn 1 A hindurchfließt?

► **Lösung.** Die Lorentz-Kraft auf einen achsparallelen Teil der Spule beträgt 1000-mal die Kraft auf einen einzelnen Leiter:

$$F_L = 1000 \cdot 0,1 \text{ m} \cdot 1 \text{ A} \cdot 0,126 \text{ T} = 13 \text{ N}.$$

Das maximale Drehmoment ist dann

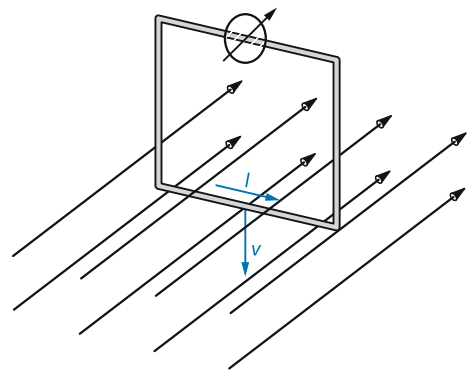
$T = 5 \text{ cm} \cdot 13 \text{ N} = 0,65 \text{ Nm}$ . Das schafft ein Mechaniker mit seinem Schraubenschlüssel mit Leichtigkeit. Eine Straßenbahn bekommt man damit nicht in Bewegung. Deshalb findet sich in einem Elektromotor immer ferromagnetisches Eisen, das das Feld verstärkt.

## 6.11 Induktion

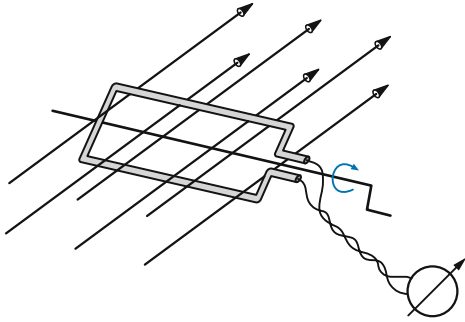
### 6.11.1 Einführung

Für die Lorentz-Kraft hat nur die Bewegung der Ladungsträger Bedeutung, nicht deren Ursache. Liegt sie, wie im vorigen Kapitel besprochen, in einem elektrischen Feld, das die Elektronen einen Draht entlang zieht, so weichen sie im Magnetfeld quer zum Draht aus und nehmen ihn mit; Resultat ist eine mechanisch nachweisbare Kraft. Denkbar wäre aber auch dies: Man bewegt den Draht „von Hand“ quer zu sich selbst durch das Magnetfeld, nimmt also die Elektronen mechanisch mit. Wieder weichen sie quer zu Feld und Bewegung aus, diesmal also in Längsrichtung des Drahtes, und sammeln sich an seinem Ende. Resultat ist eine Spannung und, wenn der Leiterkreis außerhalb des Feldes geschlossen ist, ein elektrischer Strom ([Abb. 6.83](#)).

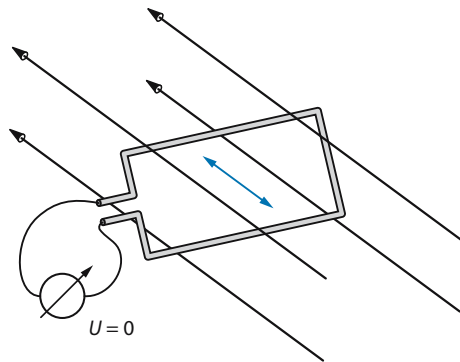
Die Vorhersage des Modells lässt sich leicht experimentell bestätigen. Mit der drehbaren Leiterschleife, die in [Abb. 6.81](#) verwendet wurde, kann man den Versuch sogar periodisch wiederholen; man ersetzt die Spannungsquelle durch einen Spannungsmesser und dreht die Schleife mit einer Handkurbel ([Abb. 6.84](#)). Ergebnis ist eine Wechselspannung. Nach diesem Prinzip arbeiten die Generatoren der Elektrizitätswerke in aller Welt. Wer freilich die Schleife nicht dreht, son-



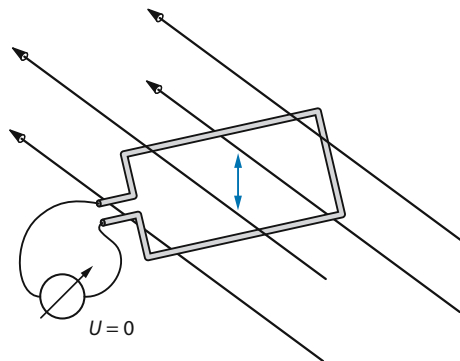
► **Abb. 6.83. Induktion.** Bewegt man einen Draht mit der Geschwindigkeit  $v$  quer zu einem Magnetfeld (das hier nach hinten weist), so wird an seinen Enden eine Spannung induziert. Ist der Leiterkreis außerhalb des Magnetfeldes geschlossen, so fließt ein Strom  $I$ .



■ **Abb. 6.84. Generator.** Dreht man eine Leiterschleife im Magnetfeld wie gezeichnet, so wird eine Wechselspannung induziert



■ **Abb. 6.85. Zur Induktion.** Keine Spannung wird induziert, wenn man die Schleife parallel zum Magnetfeld bewegt



■ **Abb. 6.86. Zur Induktion.** Keine Spannung wird induziert, wenn man die Schleife parallel zu sich selbst in einem homogenen Magnetfeld verschiebt

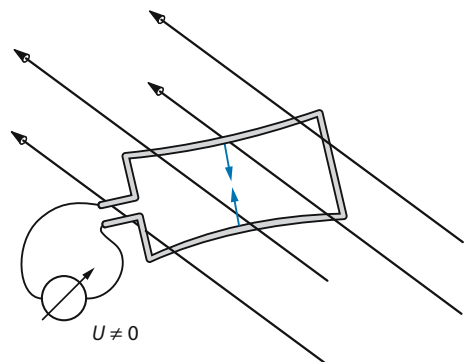
dern nur in Richtung der Feldlinien parallel verschiebt (■ Abb. 6.85), der darf keine Spannung erwarten: Für die Lorentz-Kraft zählt ja nur eine Bewegungskomponente quer zum Feld.

Es mag auf den ersten Blick überraschen, aber auch dann, wenn man die komplette Drahtschleife quer zum Feld verschiebt (■ Abb. 6.86), bekommt man keine Spannung, jedenfalls so lange nicht, wie man im homogenen Teil des Magnetfeldes verbleibt. Eine genauere Überlegung besagt: Wohl zieht die Lorentz-Kraft die Elektronen im oberen und im unteren Horizontaldraht der Schleife zur Seite, aber beide Male in der gleichen geographischen Richtung; im Umlaufsinn der Maschenregel stehen die Spannungen darum gegeneinander und heben sich, da ihre Beträge gleich sind, auf. Im inhomogenen Feld tun sie dies nicht; sie sind ja nicht gleich.

Denkbar wäre schließlich noch, dass man die beiden in Frage stehenden Drahtstücke in entgegengesetzten Richtungen verschiebt (■ Abb. 6.87); das geht nur mit Gewalt, weil man die Schleife verbiegen muss. Immerhin liegen die Lorentz-Kräfte in diesem Fall geographisch entgegengesetzt und addieren die von ihnen erzeugten Spannungen in der Masche.

Die Ergebnisse der fünf Gedankenversuche, die man alle praktisch ausführen kann, lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

- Schleife rotiert, Feld homogen oder inhomogen – Resultat: Wechselspannung,
- Schleife gleitet parallel zum Feld, homogen oder inhomogen – Resultat: keine Spannung,



■ **Abb. 6.87. Zur Induktion.** Spannung wird induziert, wenn man die Leiterschleife im Magnetfeld verbiegt



- Schleife gleitet quer zum homogenen Feld – Resultat: keine Spannung,
- Schleife gleitet quer zum inhomogenen Feld – Resultat: Spannung,
- Schleife wird verformt, Feld homogen oder inhomogen – Resultat: Spannung.

Frage: Gibt es einen übergeordneten Gesichtspunkt, der die beiden spannungsliefernden Fälle von den anderen unterscheidet?

Es gibt ihn. Eine Spannung tritt immer dann auf, wenn der **magnetische Fluss**  $\Phi$ , der die Schleife durchsetzt, sich ändert. Der magnetische Fluss ist, grob gesprochen, die Zahl der Feldlinien, die durch die Schleife hindurchtreten. Mathematisch präziser ist er das Skalarprodukt aus der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$  und der Fläche  $\vec{A}$ , die von der Schleife umrandet wird:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \alpha$$

Hier ist diese Fläche als Vektor angegeben. Dieser Vektor soll senkrecht auf der Fläche stehen und sein Betrag ist der Flächeninhalt.  $A$  ist der Winkel zwischen dem Flächenvektor und den Magnetfeldlinien. Steht  $\vec{B}$  senkrecht auf der Fläche, sind  $\vec{B}$  und  $\vec{A}$  also parallel, so ist dieses Skalarprodukt einfach gleich dem Produkt der Beträge  $B$  und  $A$ :  $\Phi = B \cdot A$ .

Dreht die Schleife aber im Magnetfeld um den Winkel  $\alpha$ , so wird  $\Phi$  kleiner – von der tatsächlichen Fläche zählt ja nur die Komponente, die quer im Feld steht und wirklich von ihm durchsetzt wird. Rotiert die Schleife, wie im ersten Fall, so ändert sich der magnetische Fluss also periodisch. Im vierten Fall bleibt  $A$  konstant, aber  $B$  nicht, und im fünften Fall wird  $A$  gewaltsam verändert.

Diese Deutung verleitet zu einer kühnen Hypothese: Wenn es nur auf eine Änderung des wirksamen Flusses  $\Phi$  ankommt, dann muss man eine Spannung auch ohne jede mechanische Bewegung induzieren können, indem man eine **Induktionsschleife** zwischen die Windungen einer Magnetspule schiebt und den Spulenstrom ein- oder ausschaltet. In der Tat: Das Experiment bestätigt diese Erwartung! Genaue Messungen führen zum **Induktionsgesetz**:

$$\text{induzierte Spannung } U_{\text{ind}} = d\Phi/dt$$

(oft steht hier in Lehrbüchern ein negatives Vorzeichen. Dies ist nur eine Frage der Vorzeichenkonvention).

#### Merke

Induktionsgesetz: In eine Leiterschleife induzierte Spannung

$$U_{\text{ind}} = d\Phi/dt$$

Magnetischer Fluss  $\Phi$ : „Zahl der Feldlinien durch die Leiterschleife“

Das ist die in eine einzelne Leiterschleife induzierte Spannung. Eine Spule mit  $N$  Windungen besteht aus  $N$  solcher Leiterschleifen hintereinander, in sie wird also die  $N$ -fache Spannung induziert:

$$\text{Spule: } U_{\text{ind}} = N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

Sind die Enden der Induktionsspule über einen Widerstand leitend miteinander verbunden, so gehört zu der induzierten Spannung auch ein

#### Rechenbeispiel 6.18: Generator aus Luft und Draht

► **Aufgabe.** Die in Rechenbeispiel 6.17 als Motor betrachtete Anordnung kann auch als Generator gedacht werden, der eine Wechselspannung liefert. Wie groß ist ihr Maximalwert, wenn die Rechteckspule mit einer Winkelgeschwindigkeit von  $\omega = 100 \text{ s}^{-1}$  rotiert?

► **Lösung.** Die Querschnittsfläche der Spule beträgt  $A = 0,1 \text{ m} \cdot 0,05 \text{ m} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ . Der magnetische Fluss durch diesen Querschnitt variiert mit dem Drehen der Spule gemäß  $\Phi = B \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t)$ . Die Zeitableitung ist nach Kettenregel

$$\frac{d}{dt} \Phi = \omega \cdot B \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t).$$

Die maximale Flussänderung ist also

$$\begin{aligned} (d\Phi/dt)_{\text{max}} &= \omega \cdot B \cdot A \\ &= 100 \text{ s}^{-1} \cdot 0,126 \text{ T} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \\ &= 0,063 \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} = 0,063 \text{ V}. \end{aligned}$$

Da die Drehspule 1000 Windungen hat, ist die induzierte Spannung tausendmal so groß: 63 V. Richtige Generatoren mit Eisenkern können etliche tausend Volt liefern.

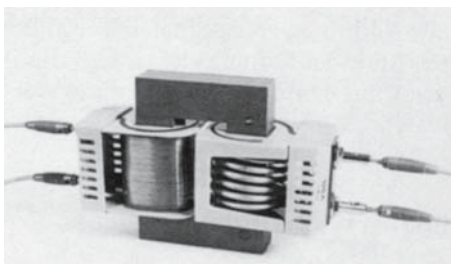


Strom und als Produkt beider eine in Stromwärme umgesetzte elektrische Leistung. Sie muss, dem Energiesatz entsprechend, von demjenigen aufgebracht werden, der beispielsweise die Spule im Magnetfeld dreht. Dies fällt ihm umso schwerer, je höher der Leitwert des Widerstandes ist: Durch Induktion kann mechanische Energie in elektrische umgewandelt werden, unmittelbar und ohne Zeitverzögerung. Darin liegt die Aufgabe der Elektrizitätswerke und ihr Problem zugleich: Sie können elektrische Energie nicht auf Vorrat halten; die Turbine, die den Generator dreht, muss jederzeit just diejenige Leistung an ihn abliefern, die alle Verbraucher zusammen am anderen Ende der Leitung elektrisch verlangen (plus Leitungs- und Reibungsverluste).

### 6.11.2 Transformatoren

Wer die Spule eines Elektromagneten mit Wechselspannung füttert, bekommt ein magnetisches Wechselfeld, in das er nur eine zweite Spule hineinzuhalten braucht, um in ihr eine frequenzgleiche Wechselspannung induziert zu erhalten. Die Spannung wird umso größer ausfallen, je mehr Windungen die Sekundärspule hat und je vollständiger sie vom magnetischen Fluss der Primärspule durchsetzt wird. Um eine vorgegebene Wechselspannung auf einen anderen Effektivwert zu transformieren, wickelt man am besten beide Spulen auf die Schenkel eines geschlossenen Eisenkerns (▣ Abb. 6.88).

Es leuchtet auf den ersten Blick ein, dass der Effektivwert  $U_s$  der in der Sekundärspule indu-



▣ Abb. 6.88. Experimentiertransformator, mit windungsreicher Primärspule (links) und windungsarmer Sekundärspule (rechts) zur Erzeugung hoher Ströme bei kleiner Spannung

zierten Wechselspannung proportional zu deren Windungszahl  $N_s$  ist. Keineswegs auf den ersten Blick leuchtet freilich ein, dass  $U_s$  zur Windungszahl  $N_p$  der Primärspule umgekehrt proportional ist. Eine korrekte Begründung erfordert mehr Aufwand als die damit gewinnbare Erkenntnis rechtfertigt – Hinweise gibt das nächste Kapitel. Jedenfalls erlaubt ein **Transformator**, Wechselspannungen nicht nur herabzusetzen (das könnte ein Spannungsteiler ja ebenfalls), sondern auch herauf. Das Übersetzungsverhältnis zwischen Primärspannung  $U_p$  und Sekundärspannung  $U_s$  entspricht dem Verhältnis der Windungszahlen  $N_p$  und  $N_s$ :

$$\frac{U_s}{U_p} = \frac{N_s}{N_p},$$

genau allerdings nur, wenn die ohmschen Widerstände der Spulen vernachlässigt werden.

Da die elektrische Leistung  $P = U \cdot I$ , die in den Transformator hinein geht auch wieder herauskommen muss, gilt für die Ströme an Primär- und Sekundärseite gerade das umgekehrte:

$$\frac{I_s}{I_p} = \frac{N_p}{N_s}$$

#### Merke

Übersetzungsverhältnis des Transformators:

$$\frac{U_s}{U_p} = \frac{N_s}{N_p}$$

#### Rechenbeispiel 6.20: Hoher Strom aus der Steckdose

► **Aufgabe.** Der Transformator in ▣ Abb. 6.95 habe primärseitig 500 Windungen und sekundärseitig 5 und werde an die Steckdose (230 V) angeschlossen. Welche Spannung ergibt sich etwa auf der Sekundärseite und welcher Strom kann sekundärseitig gezogen werden, bevor die 16-A-Sicherung hinter der Steckdose herausfliegt?

► **Lösung.** Das Windungsverhältnis ist 100:1. An der Sekundärseite ist die Spannung etwa 2,3 V und der Strom kann bis ca. 1500 A steigen. Es ist ein schöner Vorlesungsversuch mit diesem Trafo einen dicken Eisennagel durchzuschmelzen.

Steckdosen liefern Wechselstrom, weil mit Gleichspannung keine Transformatoren betrieben werden können. Die sind aber nach dem heutigen Stand der Technik unerlässlich für die allgemeine Versorgung mit elektrischer Energie. Nur sie erlauben den Umspannwerken, die Leistung, die eine Stadt mit 230 V umsetzen will, aus der Fernleitung mit 340 kV zu beziehen, also mit rund einem Tausendstel des Stromes und rund einem Millionstel an Leitungsverlusten durch Stromwärme.

### 6.11.3 Selbstinduktion

Fließt durch eine Spule ein Strom, so erzeugt dieser ein Magnetfeld in der Spule und damit auch einen magnetischen Fluss durch die Spule. Ändert sich dieser Strom, so ändern sich auch das Magnetfeld und der Fluss. Ein sich ändernder magnetischer Fluss induziert aber eine Spannung in die Spule, auch dann, wenn die Spule selbst den Fluss verursacht. Hier heißt sich die Spule sozusagen in den eigenen Schwanz. Das nennt man dann **Selbstinduktion**. Mathematisch sieht das so aus: Das Feld in der Spule ist:

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N \cdot I}{l}.$$

Der Fluss durch die Spule ist dieses Feld mal der Querschnittsfläche  $A$  der Spule. Die induzierte Spannung ist dann:

$$U_{\text{ind}} = N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = N \cdot \frac{A \mu_0 \mu_r N}{l} \frac{dI}{dt} = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Die Abkürzung  $L$  nennt man die **Induktivität** der Spule mit der Einheit: 1 Vs/A = 1 H (Henry).

#### Merke

Selbstinduktion: Induktion einer Spule auf sich selbst

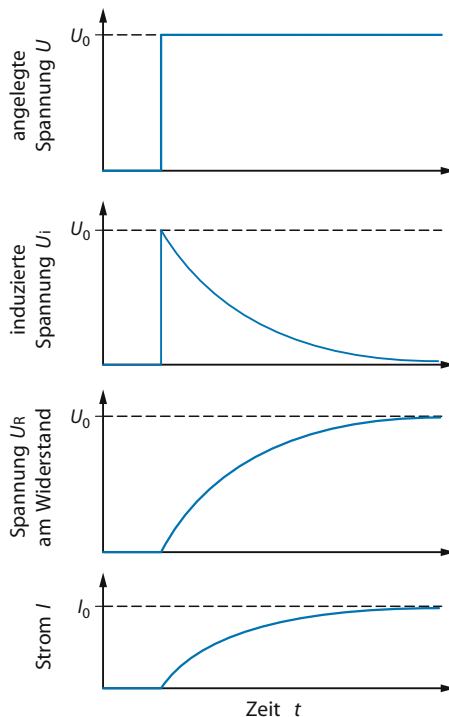
$$U_{\text{ind}} = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

$L$  = Induktivität der Spule

Nun hat eine Spule auch immer einen ohmschen Widerstand  $R$ . Die gesamte Spannung an der Spule ist immer die Summe aus der induzierten Spannung und dem Spannungsabfall  $U_R$  am ohmschen Widerstand:

$$U_0 = U_R + U_{\text{ind}} = R \cdot I + L \frac{dI}{dt}$$

Wird nun die Spannung  $U_0$  zum Beispiel einer Batterie an die Spule gelegt, so kann  $U_{\text{ind}}$  diese Batteriespannung  $U_0$  nicht überschreiten, sonst hätten wir gerade ein Perpetuum mobile erfunden, das die Batterie aus dem Nichts auflädt. Wenn aber  $U_{\text{ind}}$  einen Höchstwert nicht überschreiten kann, dann können es die Anstiegsgeschwindigkeiten des Flusses und des Stromes  $dI/dt$  auch nicht. Folglich steigt der Strom beim Einschalten mit begrenzter Geschwindigkeit an. Wenn er aber steigt, dann verlangt der Spulenwiderstand  $R$  einen mit der Zeit wachsenden Anteil an der Batteriespannung  $U_0$  als Spannungsabfall  $U_R$ . Für  $U_{\text{ind}}$  bleibt immer weniger übrig,  $dI/dt$  muss immer kleiner werden. Wen wundert es, dass auch hier die Exponentialfunktion ihre Hand im Spiel hat, wie Abbildung 6.89 zeigt. Durch die **Selbstin-**



■ **Abb. 6.89. Selbstinduktion.** Die Batteriespannung  $U_0$  teilt sich so in induzierte Spannung  $U_i(t)$  und Ohm-Spannungsabfall  $U_R(t)$  auf, dass der Strom  $I(t)$  träge auf seinen Endwert  $I_0$  zuläuft (schematische Skizze, nicht maßstabsgerecht)

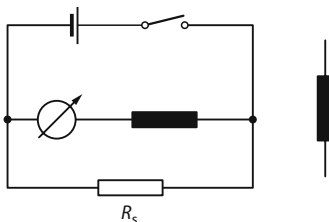
duktion wird der elektrische Strom *träge*, der Induktionsvorgang wirkt seiner Ursache entgegen (Lenz'sche Regel).

■ ■ ■ Die Energie, die  $I$  und  $U_R$  zusammen im Widerstand der Spule umsetzen, wird Joule'sche Wärme, nicht aber die Energie, die zu  $I$  und  $U_{\text{ind}}$  gehört: Sie findet sich im magnetischen Feld wieder. Ganz analog zum elektrischen besitzt auch ein magnetisches Feld der Stärke  $B$  eine

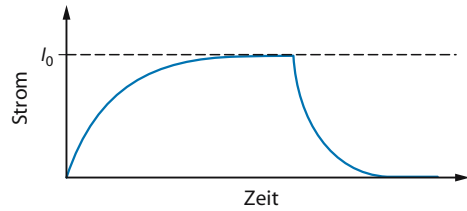
$$\text{Energiedichte } w = \frac{1}{\mu_r \cdot \mu_0} B^2.$$

Die dazu gehörende Energie wird beim Abschalten eines Magnetfeldes frei; für große Elektromagneten ist das durchaus ein Problem. Schaltet man nämlich den Spulenstrom plötzlich ab, so versucht die Selbstinduktion auch jetzt, ihre eigene Ursache zu behindern, den Abbau des Feldes also – das heißt aber, dass sie jetzt die Batteriespannung unterstützt. Dem sind aber keine Grenzen nach oben gesetzt: Möglicherweise reicht die induzierte Spannung aus, einen Lichtbogen über dem Schalter zu zünden, der diesen zerstört – aber das Magnetfeld (zunächst) erhält. Große Elektromagnete können nur langsam abgeschaltet werden.

Wer die Trägheit des Stroms als Folge der Selbstinduktion beobachten will, dem sei die Schaltung der ■ Abb. 6.90 empfohlen. Hier muss zwar die Batterie neben dem Strom durch die Spule auch noch einen zweiten durch den Schutzwiderstand  $R_s$  liefern, das Instrument misst ihn aber nicht mit. Der allein gemessene Strom in der Spule steigt nach dem Einschalten so träge an, wie er es ohne den Schutzwiderstand auch täte; jetzt kann man aber den Schalter gefahrlos öffnen. Für die Spule wird der Stromkreis ja nicht unterbrochen,



■ Abb. 6.90. Schaltung zur Beobachtung der Selbstinduktion. Der Schutzwiderstand  $R_s$  gestattet die allmähliche „Entladung“ der Induktionsspule nach Öffnen des Schalters. Rechts: Schaltzeichen eines Elements mit (merklicher) Induktivität



■ Abb. 6.91. Trägheit des Stromes. In der Schaltung der ■ Abb. 6.90 steigt der Strom nach Schließen des Schalters träge auf seinen Endwert und fällt nach Öffnen mit kürzerer Zeitkonstanten wieder ab

sie kann sich über den Schutzwiderstand „entladen“. Vom Instrument angezeigt, fließt der Strom noch eine Weile „träge“, nämlich in der alten Richtung, weiter (■ Abb. 6.91).

Wenn man in ■ Abb. 6.90 den Schalter öffnet, so muss von diesem Moment an die selbstinduzierte Spannung  $U_i$  ganz allein den Strom nicht nur durch die Spule, sondern auch durch den Schutzwiderstand treiben. Sind beide Widerstände ohmsch und addieren sie sich zum Gesamtwiderstand  $R$ , so gilt zu jedem Zeitpunkt  $t$ :

$$U_{\text{ind}}(t) + R \cdot I(t) = 0.$$

$U_{\text{ind}}(t)$  hängt aber über  $L$  an  $dI/dt$ . Daraus folgt

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot I(t)$$

Mit anderen Buchstaben ist diese Differentialgleichung schon häufiger aufgetaucht, zuletzt bei der Kondensatorentladung in ► Kap. 6.4.6. Deshalb kann die zugehörige e-Funktion leicht hingeschrieben werden:

$$I(t) = I_0 \cdot \exp(-t/\tau)$$

mit der Zeitkonstanten  $\tau = L/R$ .

#### Merke

$RL$ -Glied aus Spule und Widerstand:

$$I(t) = I_0 \cdot \exp(-t/\tau)$$

$\tau = L/R$  = Zeitkonstante;

„Trägheit des elektrischen Stromes“

**Schneller runter**

► **Frage.** Warum fällt in ■ Abb. 6.91 der Strom mit kürzerer Zeitkonstanten ab als er zuvor angestiegen ist?

► **Antwort.** In der Anstiegszeitkonstanten steht nur der ohmsche Widerstand der Spule (wenn wir die Innenwiderstände von Batterie und Strommesser vernachlässigen können). In der Zeitkonstanten für den Stromabfall steht auch noch  $R_s$ .

**6.11.4 Induktiver Widerstand**

Verlangt man von einer Spule ohne ohmschen Widerstand, aber mit der Induktivität  $L$ , dass sie einen Wechselstrom

$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

führt, dann verlangt sie ihrerseits eine von einem Generator anzuliefernde Wechselspannung,

$$U_g(t) = U_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi),$$

die der auf sich selbst induzierten Spannung  $U_{\text{ind}}$  entspricht. Nach den Überlegungen des vorigen Kapitels gilt

$$\begin{aligned} U_g &= U_{\text{ind}}(t) = L \cdot \frac{dI(t)}{dt} \\ &= \omega \cdot L \cdot I_0 \cos(\omega \cdot t) = \omega \cdot L \cdot I_0 \sin(\omega \cdot t + \pi/2) \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum Kondensator führt die Spule einen um  $90^\circ$  **nachhinkenden** Wechselstrom, nämlich eine dem Strom **voreilende** Wechselspannung. Analog zum kapazitiven Widerstand  $R_C$  eines Kondensators (► Kap. 6.3.2) lässt sich demnach für die Spule ein **induktiver Widerstand**  $R_L$  definieren:

$$R_L = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{U_0}{I_0} = \omega \cdot L$$

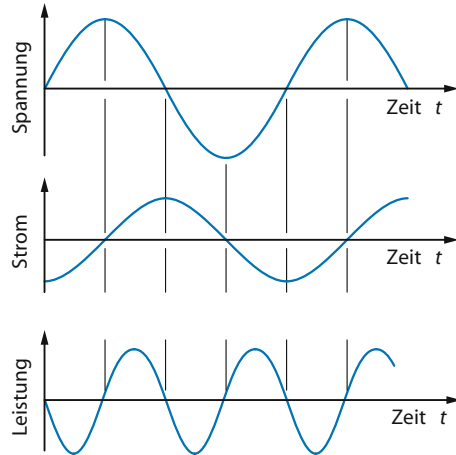
Er steigt mit der Kreisfrequenz  $\omega$  der Wechselspannung an, hat also gerade den entgegengesetzten Frequenzgang wie  $R_C$ .

**Merke**

Induktiver Widerstand

$$R_L = \omega \cdot L.$$

Der Strom hinkt der Spannung um  $90^\circ$  nach.



■ **Abb. 6.92. Blindleistung.** Bei rein induktiver Last läuft die Spannung dem Strom um  $90^\circ$  voraus; im zeitlichen Mittel fließt ein leistungsloser Blindstrom (vgl. ■ Abb. 6.17 und 6.18)

Weiterhin führt ein rein induktiver Widerstand wie ein kapazitiver einen im zeitlichen Mittel leistungslosen Blindstrom: Er entzieht der Spannungsquelle für eine Viertelschwingungsdauer Energie, um das Magnetfeld aufzubauen, und liefert sie in der nächsten Viertelschwingungsdauer aus dem zerfallenden Magnetfeld wieder zurück (■ Abb. 6.92). Allerdings lassen sich nur für relativ hohe Frequenzen Spulen wickeln, deren ohmscher Widerstand klein gegenüber dem induktiven ist. Wird aber in merklichem Umfang Stromwärme entwickelt, so bekommt die Spannungsquelle nur einen Teil der in der letzten Viertelschwingung abgegebenen Energie in der nächsten wieder zurück. Die Folge ist ein Phasenwinkel  $\varphi < 90^\circ$  und eine

$$\text{Wirkleistung } P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi.$$


Beim Transformator hat die Belastung der Sekundärspule Einfluss auf den Phasenwinkel und damit auf die Leistungsaufnahme im Primärkreis. Die Formel für die Wirkleistung gilt übrigens allgemein, also auch für Kondensatoren mit Leckwiderständen. Bei rein ohmscher Last ist  $\varphi = 0$  und somit  $\cos(\varphi) = 1$ .


Schaltungstechnisch stellen Kondensator und Spule Wechselstromwiderstände mit gegenläufigem Frequenzgang und Phasenverschiebung dar.

Schaltet man beide irgendwie mit ohmschen Widerständen zusammen, so erhält man eine Schaltung mit einem Wechselstromwiderstand (**Impedanz**), der einen komplizierten Frequenzgang hat und bei dem auch die Phasenverschiebung frequenzabhängig wird.

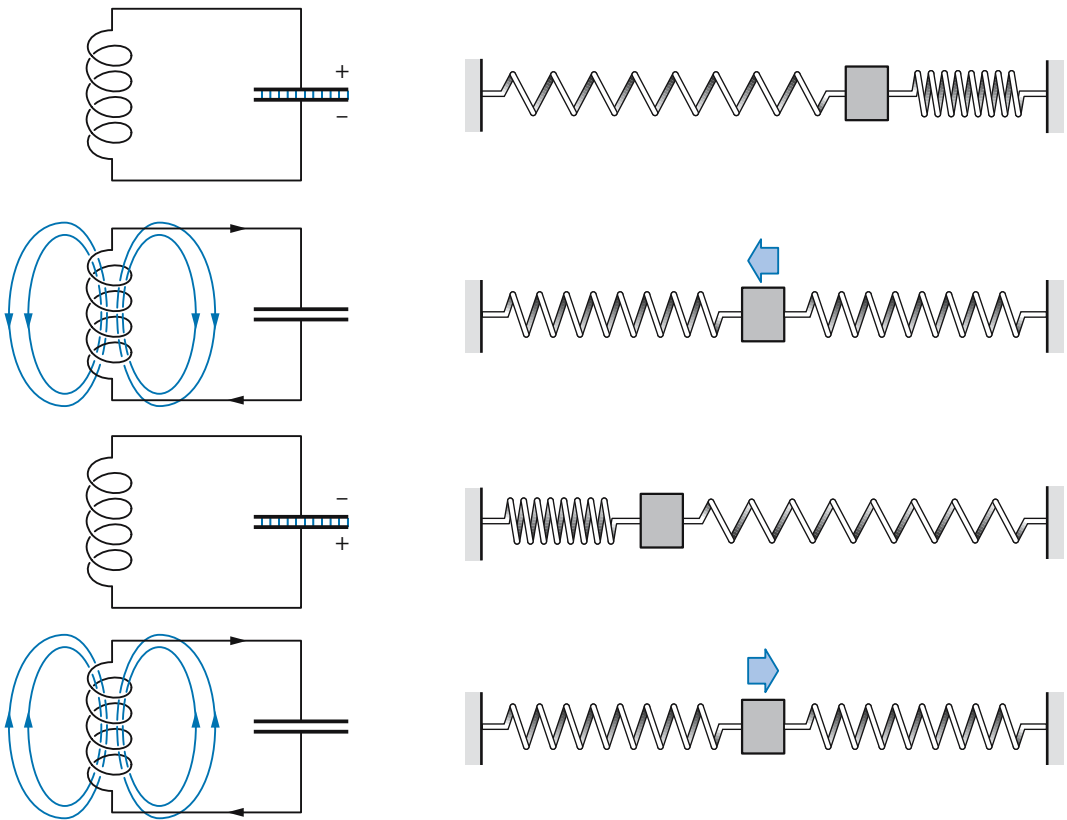
## 6.12 Elektrische Schwingungen


### 6.12.1 Der Schwingkreis

Eine besonders interessante Situation ergibt sich, wenn eine Spule und ein Kondensator zusammengeschaltet werden. Dann entsteht ein schwingungsfähiges Gebilde, ein **elektrisches Pendel** sozusagen. Wie dieses Schwingungen ausführen kann, soll anhand der  Abb. 6.93 erläutert wer-

den, und zwar zunächst nur mit den linken Teilbildern. Die rechten dienen dann später dem Vergleich mit dem mechanischen Federpendel von  Kap. 4.1.2.

Zunächst soll der Kreis noch unterbrochen und der Kondensator von außen auf eine bestimmte Spannung  $U_0$  aufgeladen sein. Schließt man jetzt den Stromkreis (1. Teilbild), so entlädt sich der Kondensator. Wäre die Spule nur ein verschwindend kleiner ohmscher Widerstand, so gäbe es einen kurzen und kräftigen Stromstoß – und alles wäre vorbei. Hierzu gehörte aber ein sehr steiler Anstieg des Stroms auf hohe Werte, unmittelbar gefolgt von einem kaum weniger steilen Abfall; dagegen wehrt sich die Spule mit ihrer Selbstinduktion aber ganz entschieden. Im dem Moment, in dem die Spule angeschlossen wird, übernimmt sie die volle Spannung  $U_0$ , die der Kondensator



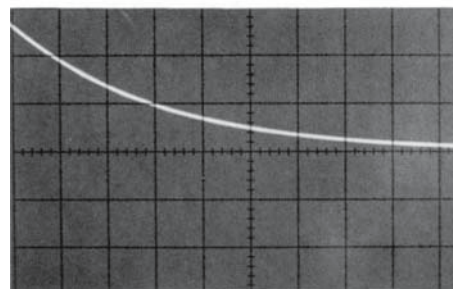
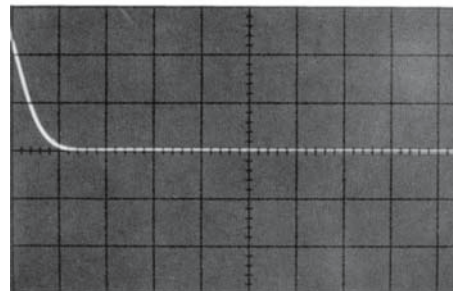
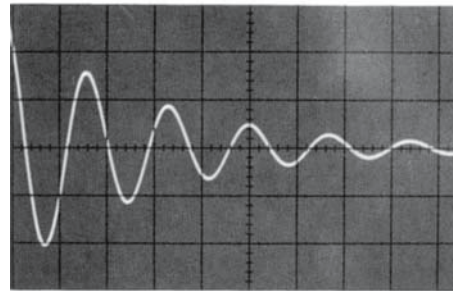
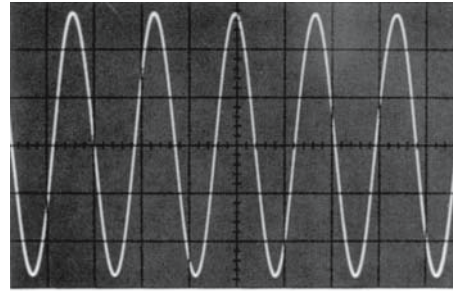
 **Abb. 6.93. Elektrischer Schwingkreis in Analogie zum Federpendel**, Einzelheiten im Text. Beim Schwingkreis pendelt die Energie zwischen dem  $E$ -Feld im Kondensator und  $B$ -Feld in der Spule hin und her

sator ja zunächst noch hat. Damit erlaubt sie dem Strom eine ganz bestimmte, durch ihren Selbstinduktionskoeffizienten  $L$  begrenzte Anstiegsgeschwindigkeit  $\frac{dI}{dt} = U_0 / L$ . Dementsprechend entlädt sich der Kondensator und ist nach einer Weile leer. Von ihm aus könnte alles vorbei sein, aber wieder erhebt die Spule Einspruch: Sie hat inzwischen ein Magnetfeld aufgebaut (2. Teilbild), das nicht einfach und folgenlos wieder zerfallen kann. Es verlangt, dass der Strom noch eine Weile in der alten Richtung weiter fließt, schwächer werdend, aber immerhin. Damit wird der Kondensator aber wieder aufgeladen. Ist das Magnetfeld verschwunden, hat der Kondensator seine alte Spannung, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen (3. Teilbild). Jetzt muss die Spule einen Strom in Gegenrichtung erlauben; hat sich der Kondensator erneut entladen, ist auch das Magnetfeld wieder vorhanden, aber in umgekehrter Richtung (4. Teilbild). Um zerfallen zu können, erzwingt es in der Spule wieder einen Strom, der den Kondensator auflädt – just bis in die Situation, die zu Beginn vorlag: Der **Schwingkreis** hat eine volle Schwingung absolviert.

Die Analogie zum mechanischen Federpendel (■ Abb. 4.1) zeigen die rechten Teilbilder der ■ Abb. 6.93; es ändert nichts am Prinzip, dass hier die Pendelmasse zwischen zwei Schraubenfedern eingespannt ist: Sie addieren lediglich ihre Federkonstanten. Wie der Vergleich zeigt, entspricht die Spannung  $U_C$  am Kondensator der Auslenkung  $x$  des Federpendels, die Energie  $W_E$  des elektrischen Feldes der potentiellen Energie  $W_{\text{pot}}$  in den Federn und die Energie  $W_B$  des magnetischen Feldes in der Spule der kinetischen Energie  $W_{\text{kin}}$  der Pendelmasse. Es kann kaum überraschen, dass dann auch Kapazität  $C$  und Federkonstante  $D$  einerseits sowie Induktivität  $L$  und Masse  $m$  des Pendelkörpers andererseits einander entsprechen. Wer dies nicht glauben will, kann den mathematischen Beweis im nächsten Kapitel nachlesen.

### Merke

Ein elektrischer Schwingkreis besteht aus Kondensator und Spule (Kapazität und Induktivität).



■ **Abb. 6.94. Dämpfung.** Spannung am Kondensator eines elektrischen Schwingkreises; die Figuren sind vom Bildschirm eines Speicheroszillographen abfotografiert. Von oben nach unten: ungedämpfte Schwingung, gedämpfte Schwingung, aperiodischer Grenzfall, Kriechfall



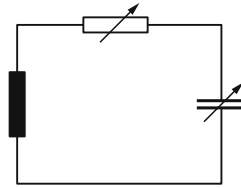
Grundsätzlich sollte der Schwingkreis rein sinusförmige Schwingungen konstanter Amplitude ausführen (■ Abb. 6.94, oberstes Teilbild). Das kann er freilich nur, wenn er nirgendwo Wärme entwickelt und (wie sich später noch herausstellen wird) keine elektromagnetische Welle abstrahlt. Tatsächlich geht ihm Schwingungsenergie verloren, die Spannungsamplitude am Kondensator wird von Mal zu Mal kleiner: Die Schwingung ist **gedämpft** (2. Teilbild). Durch einen variablen Widerstand im Kreis lässt sich die Dämpfung einstellen. Erhöht man sie, so kann die Schwingung ganz unterbleiben (**aperiodischer Grenzfall**, 3. Teilbild) und schließlich in den exponentiellen Abfall der Kondensatorentladung des reinen  $RC$ -Gliedes übergehen (**Kriechfall**, letztes Teilbild).

Elektrische Schwingungen lassen sich recht bequem mit einem Oszillographen beobachten und mit variablen Schwingkreisen erzeugen. Die Prinzipschaltung eines solchen Schwingkreises mit einstellbarer Frequenz und Dämpfung zeigt ■ Abbildung 6.95. Aus technischen Gründen hält man die Induktivität der Spule meist unverändert oder schaltet sie in groben Stufen. Die einzelnen Kurven der ■ Abb. 6.94 sind so entstanden und von einem Speicheroszillographen ab fotografiert worden.

Auch ein gedämpfter elektrischer Schwingkreis kann – ganz analog zum mechanischen Pendel – ungedämpfte freie Schwingungen ausführen, wenn man über eine **Selbststeuerung** immer wieder im richtigen Augenblick die verloren gegangene Energie nachliefert. Dazu zweigt man z. B. von der Induktionsspule eine kleine Hilfsspannung ab und gibt sie auf die Steuerelektrode eines Transistors. Wenn dies phasenrichtig geschieht, kann die vom Transistor geschaltete Spannungsquelle den Kondensator jeweils im rechten Moment auf die volle Ausgangsspannung aufladen. Dann ist die Schwingung zwar nicht exakt sinusförmig, bei kleiner Dämpfung spielt die Abweichung aber keine Rolle. Die Frequenz der freien Schwingung liegt bei

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}},$$

Dies ist die Eigenfrequenz des elektrischen Schwingkreises.



■ Abb. 6.95. Schwingkreis. Prinzipschaltung eines Schwingkreises mit variablem „Drehkondensator“ zur Einstellung der Frequenz und variablem Widerstand zur Einstellung der Dämpfung

### Merke

Elektrischer Schwingkreis: Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}.$$

■ ■ ■ Die Analogie zwischen mechanischen und elektrischen Schwingungen lässt sich mathematisch begründen: Beide halten sich an dieselbe Differentialgleichung, wenn auch mit unterschiedlichen Buchstaben und entsprechend unterschiedlichen physikalischen Bedeutungen.

Beim reibungslosen mechanischen Federpendel löst die Auslenkung  $x(t)$  eine rücktreibende und darum negative Kraft

$$F(x) = -D \cdot x(t)$$

aus ( $D$  = Federkonstante). Diese Kraft beschleunigt die Pendelmasse  $m$  nach dem Grundgesetz der Mechanik

$$a(t) = \frac{d^2}{dt^2} x(t) = \frac{F(t)}{m} = -\frac{D}{m} \cdot x(t).$$

Das ist die einfachste Form der Schwingungsdifferentialgleichung

Lädt man einen Kondensator auf die Spannung  $U(t)$ , so enthält er die elektrische Ladung

$$Q(t) = C \cdot U(t)$$

( $C$  = Kapazität). Weil sich die Ladung mit der Zeit  $t$  ändert, fließt der Strom

$$I(t) = \frac{d}{dt} Q(t).$$

Da der einfache Schwingkreis keine Batterie enthält, ist die Summe der Spannung am Kondensator und der Spannung an der Spule (Induktivität  $L$ ) gleich null:

$$\frac{Q(t)}{C} + L \cdot \frac{d}{dt} I(t) = \frac{Q(t)}{C} + L \cdot \frac{d^2}{dt^2} Q(t) = 0.$$

Auch dies ist die Schwingungsdifferentialgleichung, jetzt in der Form



$$\frac{d^2}{dt^2} Q(t) = -\frac{1}{L \cdot C} \cdot Q(t),$$

So wie im Fall des Federpendels die Eigenfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

war, ist sie also für den Schwingkreis

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}.$$

### Rechenbeispiel 6.20: Radiobastler

► **Aufgabe.** Ein Radiobastler möchte einen Schwingkreis für den UKW-Bereich herstellen, also für ca. 100 MHz. Er besitzt einen Kondensator von 25 pF. Die Spule will er mit dünnem Draht auf einen Bleistiftstummel wickeln (3 cm lang, 7,5 mm Durchmesser). Wie viele Windungen braucht er?

► **Lösung.** Der Schwingkreis soll mit

$$\omega = 2\pi \cdot 10^8 \text{ s}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

schwingen. Also brauchen wir ein

$$L = \frac{1}{(\omega^2 \cdot C)} = \frac{1}{(3,95 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-2} \cdot 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ F})}$$

$$= 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ H} = \mu_r \cdot \mu_0 \cdot N^2 \cdot A / l.$$

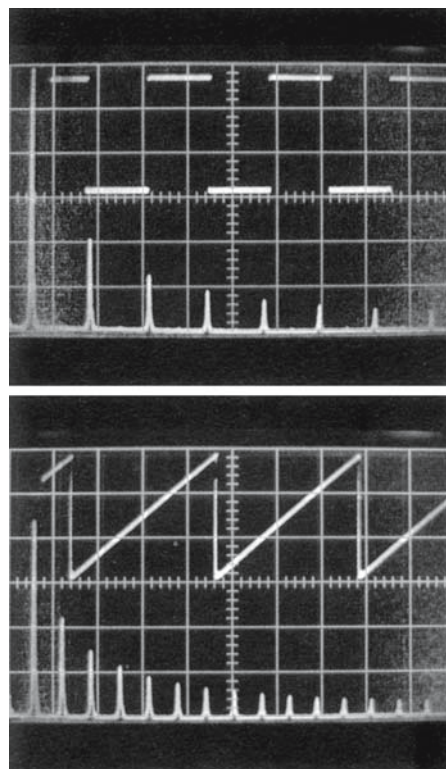
Der Bleistift ist nicht ferromagnetisch, also  $\mu_r = 1$ . Die Querschnittsfläche ist  $A = \pi \cdot (\frac{1}{2} \cdot 7,5 \text{ mm})^2 = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$ . Dann gilt für die Zahl der Windungen:  $N^2 = L \cdot l \cdot \mu_0 \cdot A = 52,7$ , also  $n = 7,3$ .

## 6.12.2 Überlagerung von Schwingungen

Legt man einen Sinusgenerator an den Eingang eines Oszillographen, so erscheint bei richtig eingestellter Zeitablenkung eine saubere Sinuskurve auf dem Bildschirm, etwa dem obersten Teilbild der ■ Abb. 6.94 entsprechend. Elektronisch macht es wenig Mühe, die Signale mehrerer Sinusgeneratoren zu addieren und gemeinsam auf den Oszillographen zu geben. Er malt dann die Überlagerung der Schwingungen auf seinen Bildschirm. Alles, was in ► Kap. 4.1.5 vom Modell her zu diesem Thema überlegt worden ist, lässt sich im elektrischen Beispiel relativ einfach experimentell nachvollziehen bis hin zur **Fourier-Synthese** einer komplizierten Schwingung aus ihren **Harmonischen**.

Das Umgekehrte, die **Fourier-Analyse** mit Amplitude und Phasenwinkel, überträgt man am bes-

ten einem klug programmierten und digital rechnenden Computer. Interessiert man sich aber nur für das **Spektrum**, kann man also auf die Phasenwinkel verzichten, dann erweist sich der abstimmbare Schwingkreis mit geringer Dämpfung und entsprechend schmaler Resonanzkurve als nützlich. Mit seiner Hilfe filtern übrigens Radioapparate und Fernsehempfänger genau diejenige Information aus dem von der Antenne angelieferten Wellensalat heraus, die der „eingestellte“ Sender bei seiner nur ihm zugeteilten Sendefrequenz abstrahlt. Eine **Frequenzanalysator** genannte undurchsichtige „Blackbox“ stimmt ihren Schwingkreis selbständig durch und gibt die analysierte Schwingung zusammen mit dem Spektrum auf den Bildschirm des Oszillographen. ■ Abb. 6.96 gibt zwei Beispiele. Allerdings muss der Herstel-

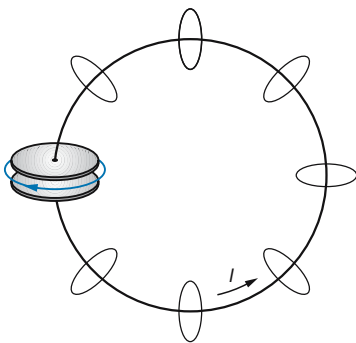


■ **Abb. 6.96. Fourier-Analyse.** Zwei Spektren elektrischer Schwingungen, geliefert von einem elektronischen Frequenzanalysator; bei der Rechteckschwingung (1. Teilbild) treten nur ungerade Vielfache der Grundfrequenz auf, beim Sägezahn (2. Teilbild) alle ganzzahligen Vielfachen, stets mit abnehmender Amplitude

ler des Geräts einen Kompromiss zwischen Trennschärfe auf der Frequenzskala und Schnelligkeit der Analyse schließen.

### 6.12.3 Geschlossene elektrische Feldlinien

Schwingkreise für hohe Frequenzen kommen mit kleinen Kapazitäten und Induktivitäten aus; möglicherweise genügen der Spule schon wenige Windungen. Noch höhere Frequenzen erreicht man ganz ohne Spule. Auch ein zum Kreis gebogener Draht, der zwei Kondensatorplatten verbindet, hat eine Induktivität, denn stromdurchflossen umgibt er sich mit einem Schlauch magnetischer Feldlinien (■ Abb. 6.97), die auf ihn eine Spannung induzieren, sobald sich Feldstärke und Flussdichte zeitlich ändern. Sie tun dies notwendigerweise, wenn sich der Kondensator entlädt, denn dann bleibt der Strom ja nicht konstant. Was geschieht mit dem schlauchförmigen Magnetfeld bei den Kondensatorplatten? Es endet dort nicht, es weitet sich lediglich auf: Obwohl zwischen den Kondensatorplatten kein Strom fließt, herrscht dort ein schlauchförmiges Magnetfeld! Es wird dadurch hervorgerufen, dass sich im Kondensator das elektrische Feld mit einer Änderungsgeschwindigkeit  $dE/dt$  der elektrischen Feldstärke zwischen den Platten ändert. Demnach haben  $I$  und  $dE/dt$  die gleiche Wirkung: Ein Strom umgibt sich mit geschlossenen magnetischen Feldli-



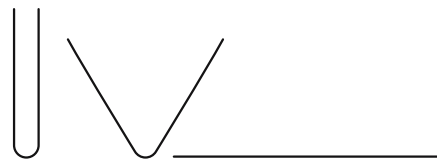
■ **Abb. 6.97. Elektrische Induktion.** Der Draht, der die Platten eines geladenen Kondensators verbindet, umgibt sich, solange der Strom fließt, mit einem Schlauch geschlossener magnetischer Feldlinien; das sich ändernde elektrische Feld im Dielektrikum des Kondensators tut dies auch

nien, ein sich änderndes elektrisches Feld tut das auch.

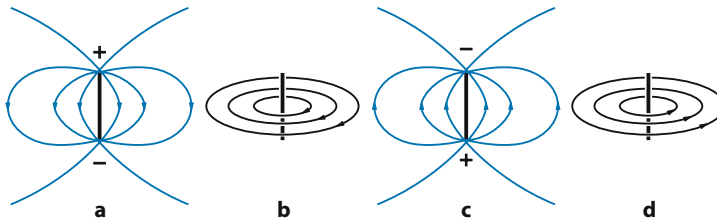
Auch wenn man dies nicht auf den ersten Blick sieht: Diese Erscheinung ist analog zur magnetischen Induktion (► Kap 6.11.1). Magnetische Induktion bedeutet nämlich, dass ein sich änderndes magnetisches Feld sich mit einem elektrischen Feld umgibt. Dieses elektrische Feld ist die Ursache für die induzierte Spannung in einer Leiterschleife, die man um das Magnetfeld herumlegt. Magnetische Induktion findet aber auch ohne Leiterschleife statt, eben in Gestalt dieses ringförmigen elektrischen Feldes. Und hier zeigt sich noch etwas Neues: Elektrische Feldlinien müssen nicht immer, wie bisher behauptet, auf einer positiven Ladung beginnen und auf einer negativen Ladung enden; sie können auch genau wie magnetische Feldlinien geschlossene Kreise bilden. Das tun sie aber eben nur dann, wenn sie von einem sich ändernden Magnetfeld erzeugt werden.

### 6.12.4 Der schwingende elektrische Dipol

Will man die Eigenfrequenz eines Schwingkreises erhöhen, so muss man Kapazität und Induktivität verringern. Gegebenenfalls kann man auf die Induktionsspule ganz verzichten, wie das vorige Kapitel ja gezeigt hatte: Auch der Drahtbügel, der zwei Kondensatorplatten verbindet, besitzt eine Induktivität. Wenn man mit der Frequenz noch weiter hinauf will, muss man den Kondensator verkümmern lassen: Zwei parallele Drähte haben immer noch eine Kapazität gegeneinander. Auch eine Haarnadel bildet einen Schwingkreis, obwohl man Kondensator und Spule nicht mehr so recht voneinander trennen kann. Wem die Frequenz immer noch nicht hoch genug ist,



■ **Abb. 6.98. Haarnadel.** Auch eine Haarnadel bildet noch einen Schwingkreis; die Eigenfrequenz lässt sich weiter erhöhen, wenn man die Haarnadel aufbiegt



■ Abb. 6.99. Schwingender Dipol, Einzelheiten im Text

dem bleibt als letztes Mittel, die Haarnadel aufzubiegen (■ Abb. 6.98). Mehr als strecken kann man sie allerdings nicht. Die höchstmögliche Eigenfrequenz besitzt ein Leiter vorgegebener Länge in der Form des geraden Drahtes. Er vermag als elektrischer Dipol elektrisch zu schwingen.

Abbildung 6.99 zeigt grobschematisch die Situationen nach jeweils einer Viertelschwingung des Dipols. In ■ Abb. 6.99a ist der Dipol gerade durch eine äußere Spannungsquelle aufgeladen worden; es existiert ein inhomogenes elektrisches Feld zwischen seinen Hälften. Dieses Feld löst aber einen Strom aus, der wegen der Selbstinduktion nur ein wenig träge ansteigen kann. Dabei baut er ein konzentrisches Magnetfeld auf. Nach einer Viertelschwingungsdauer ist das  $E$ -Feld verschwunden und das  $B$ -Feld auf seinem Maximum (■ Abb. 6.99b). Von nun an bricht es seinerseits zusammen und zwingt den Strom, in der alten Richtung weiterzulaufen und den Dipol mit entgegengesetztem Vorzeichen wieder aufzuladen. Ist das  $B$ -Feld verschwunden, so kehrt das neue  $E$ -Feld die Stromrichtung um (■ Abb. 6.99c), verschwindet (■ Abb. 6.99d) und wird vom weiterfließenden Strom in der ursprünglichen Richtung wieder aufgebaut: Ist die Ausgangssituation (von Dämpfungsverlusten einmal abgesehen) wieder erreicht, so ist eine volle Schwingung abgelaufen. Die zugehörige Zeit  $T$  wird von der Dipollänge  $l$  und der Lichtgeschwindigkeit  $c$  bestimmt; es gilt

$$T = 2 \cdot l/c.$$

Erst die Überlegungen des nächsten Kapitels können diese etwas überraschende Beziehung verständlich machen.

Grundsätzlich dürfte dieses nächste Kapitel hier unmittelbar und ohne neue Überschrift angeschlossen werden, denn wenn ein elektrischer Dipol schwingt, dann strahlt er auch eine elek-

tromagnetische Welle ab. Ein schmaler Spektralbereich dieser Wellen hat aber für den Menschen eine ganz besondere Bedeutung: Sein wichtigstes Sinnesorgan reagiert auf elektromagnetische Wellen mit Wellenlängen von etwa einem halben Mikrometer. Vor allem Gesichtssinn und **sichtbares Licht** vermitteln ihm das Bild, das er sich von seiner Umwelt macht; Grund genug, dem Licht ein eigenes großes Kapitel „Optik“ zu widmen.

#### Rechenbeispiel 6.22: Handy-Antenne

- **Aufgabe.** Der Handy-Funkverkehr spielt sich bei einer Frequenz von etwa 1 GHz ab. Was ist dann die optimale Sendeantennenlänge?
- **Lösung.** 1 GHz entspricht einer Periodendauer von  $10^{-9}$  s. In dieser Zeit legt das Licht 0,3 m zurück. Die optimale Länge des strahlenden Dipols beträgt also etwa 15 cm.

In Kürze		
	Formel	Größen [Einheit]
Stromkreis		
Strom	$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$	$\Delta Q$ : pro Zeit strömende Ladungsmenge [A · s = C, Coulomb] t: Zeit [s]
Widerstand	$R = \frac{U}{I}$	R: Widerstand [Ω, Ohm] U: Spannung [V, Volt] I: Strom [A, Ampère]
Ohm'sches Gesetz	in vielen Fällen ist R unabhängig von U bzw. I	
Reihenschaltung	$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$ Strom I durch alle Widerstände gleich. Spannung z. B. an R <sub>1</sub> : $U_1 = \frac{R_1}{R_{\text{ges}}} \cdot U_0$	R <sub>ges</sub> : Gesamtwiderstand [Ω] U <sub>1</sub> : Spannung am Widerstand R <sub>1</sub> [V] U <sub>0</sub> : Spannung am Gesamtwiderstand
Parallelschaltung	$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$ Spannung U an allen Widerständen gleich. Strom I <sub>1</sub> z.B. durch R <sub>1</sub> : $I_1 = \frac{R_{\text{ges}}}{R_1} \cdot I_0$	R <sub>ges</sub> : Gesamtwiderstand [Ω] I <sub>1</sub> : Strom durch R <sub>1</sub> [A] I <sub>0</sub> : Strom durch R <sub>ges</sub>
Leistung	$P = U \cdot I = R \cdot I^2$	P: Leistung [W = Watt] U: Spannung [V] I: Strom [A] R: Widerstand [Ω]
Kondensator		
Kapazität	$C = \frac{Q}{U}$	C: Kapazität $\left[\frac{\text{As}}{\text{V}} = \text{F, Farad}\right]$ Q: Ladung auf dem Kondensator [A · s] U: Spannung am Kondensator [V]
Energie im Kondensator	$W = \frac{1}{2} Q \cdot U$	W: Energie im Kondensator [J]
Plattenkondensator		
Kapazität	$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$	$\varepsilon_r$ : relative Permittivität des Isolators $\varepsilon_0$ : elektrische Feldkonstante A: Plattenfläche [m²] d: Plattenabstand [m] E: elektrisches Feld im Kondensator [V/m]
Elektrisches Feld im Kondensator	$E = \frac{U}{d}$	
Kondensatorentladung über Widerstand R	$\tau = R \cdot C$	τ: Zeitkonstante [s]
Die weiteren Formeln zum Kondensator werden beim IMPP üblicherweise nicht abgefragt.		

Spule		
Magnetfeld	$B = \mu_0 \cdot \frac{n \cdot I}{l}$	$B$ : mag. Flussdichte [T, Tesla] $\mu_0$ : mag. Feldkonstante $n$ : Windungszahl $I$ : Strom [A] $l$ : Spulenlänge [m]
Induktivität	$U_{\text{ind}} = L \cdot \frac{dI}{dt}$	$U_{\text{ind}}$ : durch Stromänderung induzierte Spannung $L$ : Induktivität $\left[ \frac{\text{T} \cdot \text{m}^2}{\text{A}} = \text{H, Henry} \right]$
Schwingkreis		
Frequenz des Schwingkreis	$f = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$	$f$ : Frequenz des Schwingkreis [Hz]
Elektrisches Feld		
Coulomb-Kraft	$F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$	$F_C$ : Coulomb-Kraft [N] $q_1, q_2$ : Punktladungen [A · s] $r$ : Abstand der Ladungen [m]
elektrisches Feld	$\vec{E} = \frac{\vec{F}_C}{q}$	$\vec{E}$ : elektrisches Feld [V/m] $q$ : „Probeladung“ [A · s]
Magnetisches Feld		
magnetische Kraft auf einen Leiter	$\vec{F}_L = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$	$\vec{F}_L$ : magnetische Kraft auf einen Leiter [N] $l$ : Länge des Leiters [m] $\vec{I}$ : Strom (mit Richtung) [A] $\vec{B}$ : magnetische Flussdichte $\left[ \frac{\text{N}}{\text{Am}} = \text{T, Tesla} \right]$
Induktion		
magnetischer Fluss	$\Phi = \frac{B}{A}$	$\Phi$ : magnetischer Fluss $\left[ \frac{\text{T}}{\text{m}^2} \right]$ $A$ : Fläche der Leiterschleife [m <sup>2</sup> ]
Induktionsspannung	$U_{\text{ind}} = \frac{d\Phi}{dt}$	$U_{\text{ind}}$ ist die in eine einzelne Leiterschleife, die vom Fluss $\Phi$ durchsetzt wird, induzierte Spannung. [V]
Wechselspannung		
Wechselspannung	$U(t) = U_S \cdot \sin \omega \cdot t$	$U_S$ : Spannungsamplitude [V] $\omega$ : Kreisfrequenz [1/s] $t$ : Zeit [s]
Effektivspannung	$U_{\text{eff}} = \frac{U_S}{\sqrt{2}}$	$U_{\text{eff}}$ : Effektivspannung [V]
kapazitiver Widerstand (Kondensator)	$R_C = \frac{1}{\omega \cdot C}$ . Der Strom eilt der Spannung um 90° voraus	$R_C$ : kapazitiver Widerstand $\left[ \frac{\text{s}}{\text{F}} \right]$ $C$ : Kapazität des Kondensator [F]
induktiver Widerstand (Spule)	$R_L = \omega \cdot L$ . Der Strom hinkt der Spannung um 90° nach.	$R_L$ : induktiver Widerstand [s/H] $L$ : Induktivität der Spule [H]

## Übungsfragen

(• leicht; •• mittel; ••• schwer)

### Strom, Spannung, Leistung

- 1. Vier Taschenlampenbatterien mit je 4,5 V lassen sich auf mehrerlei Weise hintereinander schalten. Welche Gesamtspannungen kann man dadurch mit ihnen erzeugen?
- 2. Welchen Strom zieht ein Fernsehempfänger mit 125 W Leistung aus der Steckdose? Welche Leistung setzt eine Röntgenröhre um, die mit 80 kV Hochspannung und 5 mA Röhrenstrom betrieben wird?
- 3. Eine Kilowattstunde elektrische Energie kostet 12 Cent. Was kostet es, eine 40-W-Glühlampe das ganze Jahr brennen zu lassen?
- 4. Wie viele 100-W-Glühlampen kann man gleichzeitig an einer Steckdose betreiben, wenn sie mit einer 16-A-Sicherung abgesichert ist?
- 5. Mathematisch wird Wechselspannung der Steckdose durch die Gleichung  $U(t) = U_s \cdot \cos(\omega t)$  beschrieben. Welche Werte sind für  $U_s$  und  $\omega$  einzusetzen?

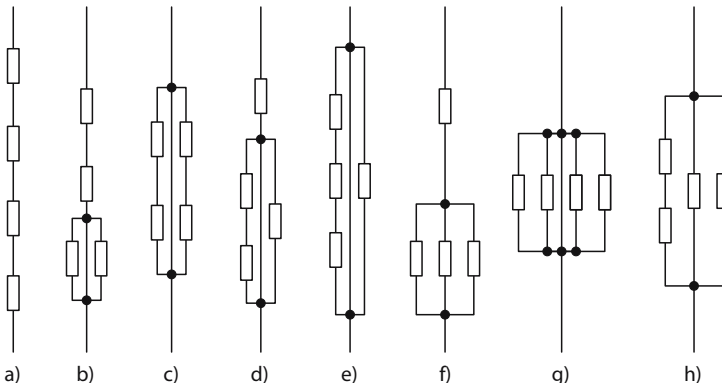
### Widerstand

- 6. Welchen Strömen entsprechen die beiden Grenzkurven in Abb. 6.10 bei 400V?
- 7. Ein 1-Ω-Widerstand und ein 2-Ω-Widerstand sind in Reihe geschaltet. Wie verhalten sich die in den Widerständen umgesetzten Leistungen zueinander? Wie verhalten sich die Leistungen, wenn die Widerstände parallel geschaltet sind?
- 8. Acht gleiche Glühlampen sind in Reihe an einer Steckdose angeschlossen. Welche Spannung liegt an jeder Lampe? Wenn ein Strom von 0,4 A fließt, welchen Widerstand hat jede Lampe und welche Leistung setzt sie um?
- 9. Es gibt mehrere Möglichkeiten, vier gleiche Widerstände zusammenzuschalten. Abbildung 6.100 zeigt acht von ihnen. Sie lassen sich ohne genaue Rechnung nach steigendem Gesamtwiderstand ordnen. Wie? Und was liefert die genaue Rechnung?

- 10. Wie teilt ein 6-kΩ-Potentiometer, dessen Schleifkontakt 3 kΩ abgreift, eine Spannung von 60 V auf, wenn es a) nicht belastet und b) mit 3 kΩ belastet wird?
- 11. Wenn in der Wheatstone-Brücke der Abb. 6.28 der Widerstand  $R_1$  7352 Ω beträgt,  $R_2$  6248 Ω und  $R_3$  5000 Ω, wie groß ist bei abgeglichenen Brücke dann  $R_4$ ?
- 12. Die Spannung an einer 12-V-Autobatterie sinkt auf 10 V, wenn der Anlasser betätigt wird. Der Anlasser zieht einen Strom von 60 A. Wie groß ist der Innenwiderstand der Batterie? Welchen Widerstand hat der Anlassermotor?
- 13. In den dreißiger Jahren des vorigen Jahrhunderts kam in Deutschland noch 110 V Gleichspannung aus den Steckdosen. Wollte man da eine 12-V-, 50-W-Glühlampe eines Filmprojektors betreiben, so konnte man nicht wie heute einen Transformator einbauen, der die Spannung heruntertransformiert, sondern man schaltete einen Vorwiderstand in Reihe mit der Glühlampe. Welchen Widerstand musste dieser haben und welche Leistung wurde in ihm verheizt?

### Feld und Potential

- 14. Wie verlaufen die Feld- und Potentiallinien zu der Elektrodenanordnung in Abb. 6.101 ungefähr?
  - 15. Das sog. „Ruhepotential“ einer nicht „feuernden“ Nervenfasern liegt etwas über 70 mV; die Dicke normaler Membranen, die z. B. auch Nervenfasern umgeben, beträgt ungefähr 5 nm. Welche Feldstärke erzeugt das Ruhepotential in der Membran?
  - 16. Wie groß ist die Kraft zwischen dem Kern eines Eisentoms ( $Q = 26 \cdot e_0$ ) und dem Kernächsten Elektron, wenn wir einen Abstand von  $1,5 \cdot 10^{-12}$  m annehmen?
  - 17. Mit welcher Geschwindigkeit treffen die freien Elektronen in der Bildröhre eines Fernsehempfängers auf dem Bildschirm auf, wenn die Röhre mit 2 kV Anodenspannung betrieben wird?
- Kondensator
- 18. Die Ladung auf einem Kondensator steigt um 15 μC, wenn die Spannung von 97 V auf 121 V erhöht wird. Wie groß ist die Kapazität des Kondensators?



■ Abb. 6.100. Zu Übungsfrage 9

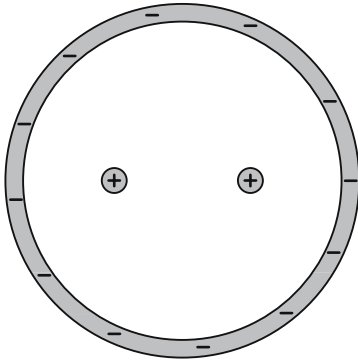


Abb. 6.101. Zu Übungsfrage 14

- 19. Trockene Luft hat eine Durchbruchfeldstärke von  $3 \cdot 10^6$  V/m. Wie viel Ladung kann auf einen Plattenkondensator gebracht werden, wenn der eine Plattenfläche von  $50 \text{ cm}^2$  hat?
- 20. Ein Kondensator mit  $1 \text{ }\mu\text{F}$  Kapazität entlädt sich über einen  $1\text{-k}\Omega$ -Widerstand. Wie groß ist die Zeitkonstante?
- 21. Wie verändert sich die Kapazität eines Luftkondensators, wenn man den Abstand der Platten verdoppelt und ihn gleichzeitig mit einem Isolator mit einer Permittivität von  $\epsilon_r = 4$  füllt?
- 22. In einen geladenen Plattenkondensator wird ein Isolator mit einer Permittivität von  $\epsilon_r = 2$  geschoben. Wie ändern sich Kapazität, Spannung und Ladung auf den Platten, wenn
  - a) der Kondensator isoliert ist?
  - b) der Kondensator noch an der Spannungsquelle angeschlossen ist?
- 23. Wie ändert sich die in einem Kondensator gespeicherte Energie, wenn:
  - a) die Spannung verdoppelt wird?
  - b) die Ladungen auf den Platten verdoppelt wird?
  - c) der Plattenabstand verdoppelt wird während der Kondensator mit einer Spannungsquelle verbunden bleibt?
- 24. Ein großer 4-F-Kondensator hat genug Energie gespeichert, um  $2,5 \text{ kg}$  Wasser von  $20^\circ\text{C}$  auf  $95^\circ\text{C}$  zu erhitzen. Welche Spannung liegt am Kondensator?

## Stromleitung, Elektrochemie

- 25. In welcher Größenordnung liegt die Geschwindigkeit, mit der die Elektronen in der Zuleitung zu einer Schreibtischlampe hin und her pendeln? (Leistung  $60 \text{ W}$ , Kupferquerschnitt  $0,75 \text{ mm}^2$ , molare Masse  $M(\text{Cu}) = 63,54 \text{ g/mol}$ ).
- 26. Wieso führt der Dissoziationsgrad  $x_D = 1,9 \cdot 10^{-9}$  beim Wasser zu pH 7?
- 27. Welche Wasserstoffionenkonzentration gehört zu pH 2,5?
- 28. Bei der elektrolytischen Abscheidung von Silber aus Silbernitrat ( $\text{AgNO}_3$ ) wurde gemessen:  $\Delta m / \Delta Q = 1,1179 \text{ mg/C}$ . Welche molare Masse  $M(\text{Ag})$  und welche Atommasse  $m_M(\text{Ag})$  folgen daraus? Silber ist hier einwertig.

- 29. Lässt sich anschaulich einsehen, dass in der Nernst-Formel die Ladung der durchtretenden Ionen unter dem Bruchstrich steht, also die Membranspannung verringert?
- 30. Welche Spannung entsteht bei Zimmertemperatur über einer Membran, die  $\text{Na}^+$ -Ionen hindurchlässt und  $\text{Cl}^-$ -Ionen völlig zurückhält, wenn sich auf ihren beiden Seiten  $\text{NaCl}$ -Lösungen in folgenden Konzentrationen befindet:
  - a) links  $0,1$  molar und rechts  $1,0$  molar,
  - b) links  $0,01$  molar und rechts  $1,0$  molar,
  - c) links  $0,1$  molar und rechts  $0,001$  molar,
  - d) links  $0,1$  molar und rechts  $0,2$  molar
 Vorzeichen?
- 31. Welche Spannung läge nach der Nernst-Formel über einer ionenselektiv-permeablen Membran, wenn man sie auf der einen Seite in physiologische Kochsalzlösung und auf der anderen in absolut reines Wasser taucht?

## Magnetfeld

- 32. Ein längerer Draht befindet sich in einem Magnetfeld von  $10^{-4} \text{ T}$  und verläuft senkrecht zu den Feldlinien. Nun wird ein Strom von  $5 \text{ A}$  durch den Draht geschickt. Wo und in welchem Abstand vom Draht ist dann die Feldstärke null?
- 33. Ein langer Draht, durch den  $12 \text{ A}$  fließen, übt auf einen  $7 \text{ cm}$  entfernten parallelen Draht eine anziehende Kraft von  $8,8 \cdot 10^{-4} \text{ N}$  pro Meter aus. Wie groß ist der Strom im zweiten Draht und welche Richtung hat er?
- 34. Wie groß ist die Kraft auf ein Flugzeug, dass mit  $120 \text{ m/s}$  senkrecht zum Erdmagnetfeld von  $5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$  fliegt und eine Ladung von  $155 \text{ As}$  trägt?

## Induktion

- 35. In einer geschlossen Spule mit  $100$  Windungen, einer Querschnittsfläche von  $25 \text{ cm}^2$  und einem Widerstand von  $25 \text{ }\Omega$  wird ein Magnetfeld parallel zur Spulenachse in  $2$  Sekunden von  $0 \text{ T}$  auf  $1 \text{ T}$  erhöht. Welcher induzierte Strom fließt dabei im Mittel durch die Spule?
- 36. Zwischen den Polschuhen eines großen Elektromagneten (Abb. 6.102) wird eine Probespule mit konstanter Geschwindigkeit parallel zu sich selbst genau auf der Symmetrieebene des Feldes entlang gezogen, aus dem feldfreien Raum

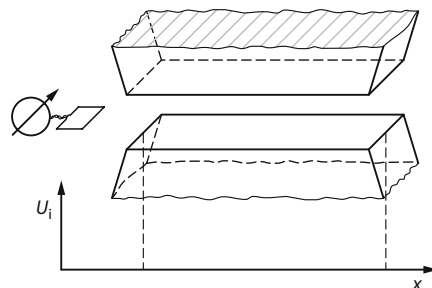


Abb. 6.102. Zu Übungsfrage 36



in den feldfreien Raum. Wie sieht der Verlauf der induzierten Spannung, bezogen auf die momentane Position der Probepule, qualitativ aus?

•• 37. Jede Schule besitzt in ihrer physikalischen Sammlung einen „Experimentiertrafo“, bestehend aus einem U-Kern mit aufsetzbarem Joch und einem Satz auswechselbarer Spulen. Vorhanden seien die Spulen mit 24, 250, 500, 1000 und 25.000 Windungen. Welche Kombination wird der Lehrer wählen, wenn er für einen Versuch ca. 12 kV Hochspannung haben möchte und für einen anderen 6 V Niederspannung. Primäre Spannungsquelle ist die Steckdose (230 V).

## Schwingkreis

•• 38. Welche Größen im elektrischen Schwingkreis entsprechen der Auslenkung  $x$  des Federpendels, der Geschwindigkeit  $v$  seines Pendelkörpers, der potentiellen und der kinetischen Energie?

# Optik

## 7.1 Elektromagnetische Wellen – 238

- 7.1.1 Der strahlende Dipol – 238
- 7.1.2 Spektralbereiche – 240
- 7.1.3 Wellenausbreitung – 241

## 7.2 Geometrische Optik – 243

- 7.2.1 Lichtbündel – 243
- 7.2.2 Spiegelung – 245
- 7.2.3 Brechung – 247
- 7.2.4 Dispersion – 250
- 7.2.5 Linsen – 251
- 7.2.6 Abbildung durch Linsen – 254
- 7.2.7 Abbildungsgleichungen – 255
- 7.2.8 Abbildung durch einfache Brechung – 258
- 7.2.9 Das Auge – 258
- 7.2.10 Fehlsichtigkeit und Brillen – 260
- 7.2.11 Optische Instrumente – 262

## 7.3 Intensität und Farbe – 265

- 7.3.1 Strahlungs- und Lichtmessgrößen – 265
- 7.3.2 Optische Absorption – 267
- 7.3.3 Temperaturstrahlung – 270
- 7.3.4 Farbsehen – 271

## 7.4 Wellenoptik – 275

- 7.4.1 Polarisiertes Licht – 275
- 7.4.2 Interferenz – 276
- 7.4.3 Kohärenz – 278
- 7.4.4 Dünne Schichten und Beugungsgitter – 279
- 7.4.5 Beugungsfiguren – 281

## 7.5 Quantenoptik – 283

- 7.5.1 Das Lichtquant – 283
- 7.5.2 Energiezustände und Spektren – 285
- 7.5.3 Laser – 287
- 7.5.4 Röntgenstrahlen – 289
- 7.5.5 Der Compton-Effekt – 292
- 7.5.6 Röntgendiagnose – 293

## 7.6 Elektronenoptik – 295

- 7.6.1 Elektronenbeugung – 295
- 7.6.2 Elektronenmikroskope – 295
- 7.6.3 Die Unschärferelation – 297

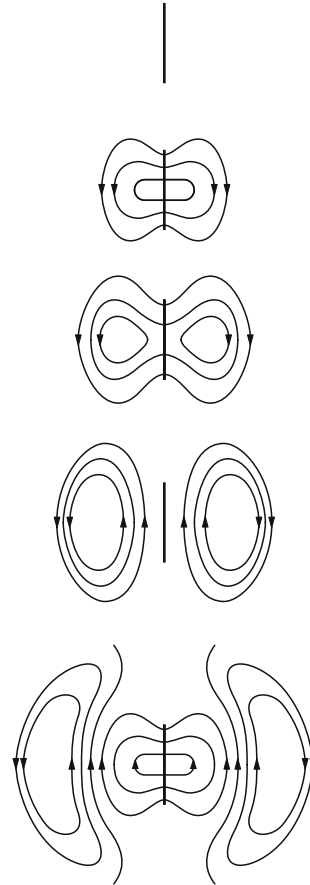
## ➤ ➤ Einleitung

Optik ist die Lehre vom Licht, vor allem von seiner Ausbreitung. Als Licht bezeichnet man zunächst einmal diejenigen elektromagnetischen Wellen, die das Auge des Menschen wahrnimmt, also in einem sehr schmalen Spektralbereich. In erweitertem Sinn werden auch die benachbarten Gebiete als Licht bezeichnet. Kennzeichen der Wellenausbreitung sind Interferenz und Beugung. Allerdings machen sie sich im makroskopischen Alltag meist gar nicht bemerkbar, weil die Wellenlänge sichtbaren Lichtes zu klein ist. Dann gelten die Regeln der geometrischen Optik. Licht überträgt Energie. Der selektiven Empfindlichkeit des menschlichen Auges wegen müssen für den Strahlungsfluss einer elektromagnetischen Welle und den Lichtstrom verschiedene Messverfahren und Einheiten definiert werden. Sichtbares Licht wird von Atomen und Molekülen emittiert und absorbiert. Weil sie so klein sind und weil die kurzen Wellenlängen hohe Frequenzen zur Folge haben, spielt hier eine Eigenschaft der Natur eine bedeutsame Rolle, die sich im Alltag sonst nicht bemerkbar macht: die Quantelung der Energie.

## 7.1 Elektromagnetische Wellen

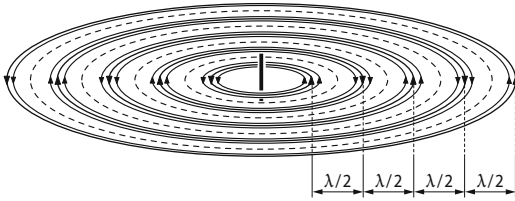
### 7.1.1 Der strahlende Dipol

Die Bilderreihe der letzten Abbildung des vorigen Kapitels (■ Abb. 6.99) macht zwar plausibel, wieso ein gerader Draht als elektrischer Dipol schwingen kann und eine Eigenfrequenz besitzt, aber sie schematisiert die Feldverteilung doch zu sehr. Auch Feldlinien breiten sich nur mit endlicher Geschwindigkeit, der Lichtgeschwindigkeit, aus. Außerdem lösen nicht nur die Ladungen des Dipols ein elektrisches Feld aus, dasselbe tut auch das sich ändernde Magnetfeld um den Dipol herum. Resultat: Die elektrischen Feldlinien lösen sich in einer Weise vom Dipol ab, wie dies ■ Abb. 7.1 etwas realistischer darstellt, und zwar durch Teilbilder in zeitlichen Abständen von jeweils  $T/6$ , dem Sechstel einer Schwingungsdauer. Beim ersten Nulldurchgang (4. Teilbild) ist der Dipol selbst feldfrei; das Feld hat sich von ihm gelöst und bildet in der Zeichenebene ein System geschlossener Feldlinien, räumlich aber einen torusähnlichen Schlauch mit dem Dipol als Achse. Danach entste-

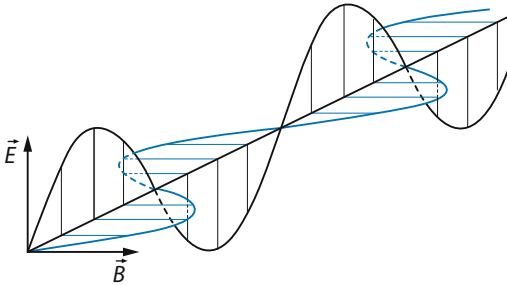


■ Abb. 7.1. Schwingender Dipol. Verlauf der elektrischen Feldlinien; realistischer als in ■ Abb. 6.99 gezeichnet. Von oben nach unten fortschreitende Zeit (nach R.W. Pohl)

hen neue Feldlinien gleicher Gestalt aber mit entgegengesetztem Vorzeichen und drängen die alten nach außen ab. Diese nehmen zunächst nierenförmige Gestalt an, passen sich aber mit wachsendem Abstand immer mehr Kreisausschnitten an. Das zugehörige Magnetfeld läuft mit, in Form konzentrischer Kreise, die mit periodisch wechselndem Umlaufsinn gewissermaßen aus dem Dipol herausquellen. ■ Abbildung 7.2 zeigt eine „Momentaufnahme“ für die Symmetrieebene des Dipols. In ihr sind die beiden Felder am stärksten, nach oben und unten werden sie schwächer und in der Längsrichtung des Dipols geschieht gar nichts mehr. Praktisch strahlt der Dipol in alle Richtungen, aber er strahlt nicht homogen.



■ **Abb. 7.2. Schwingender Dipol.** Verlauf der magnetischen Feldlinien in der Symmetrieebene eines schwingenden Dipols, Momentaufnahme (nach R.W. Pohl)



■ **Abb. 7.3. Elektromagnetische Welle.** Augenblicksdiagramm einer nach hinten laufenden elektromagnetischen Welle

Elektromagnetische Wellen entstehen, weil ein sich änderndes elektrisches Feld sich mit magnetischen Feldlinien umgibt und umgekehrt. Greift man ganz willkürlich eine einzige Ausbreitungsrichtung heraus, so kann man in räumlicher Darstellung die Stärken der beiden Felder, wieder als Momentaufnahme, graphisch aufzeichnen. Abbildung 7.3 zeigt das Ergebnis, nämlich ein elektrisches Wechselfeld parallel zur Dipolachse und ein magnetisches Wechselfeld senkrecht dazu. Beide schwingen synchron, sie haben ihre Maxima und ihre Nulldurchgänge zur gleichen Zeit am gleichen Ort. Maxima wie Nulldurchgänge laufen mit Lichtgeschwindigkeit vom Dipol weg, dabei nehmen beide Felder ihre Energieinhalte mit: Der Dipol strahlt eine **elektromagnetische Welle** ab und muss die entsprechende Leistung liefern. Auch wenn er selbst keine Stromwärme entwickelte, kämen seine Schwingungen durch Strahlungsdämpfung rasch zur Ruhe, würden sie nicht durch einen passenden Wechselspannungsgenerator immer wieder aufgefrischt.

### Merke

Elektromagnetische Welle: ein elektrisches und ein magnetisches Wechselfeld schwingen synchron zueinander; sie stehen (im Wesentlichen) senkrecht aufeinander und senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung.

In jeder halben Schwingungsdauer kommt die Welle um eine ganze Dipollänge weiter. Dem entspricht die schon am Ende des letzten Kapitels genannte Beziehung  $T = 2 \cdot l/c$  zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$ , der Dipollänge  $l$  und der Schwingungsdauer  $T$ , denn die allgemeine Beziehung

$$c = \lambda \cdot f = \lambda/T$$

gilt für elektromagnetische Wellen genauso wie für alle anderen.

### Merke

VFür alle Wellen gilt:

Ausbreitungsgeschwindigkeit = Wellenlänge · Frequenz.

$$c = \lambda \cdot f$$

■■■ Elektromagnetische Wellen entstehen, weil ein sich änderndes elektrisches Feld sich mit magnetischen Feldlinien umgibt und umgekehrt. In den entsprechenden Formeln tauchen die beiden Materialkenngrößen  $\varepsilon_r$  und  $\mu_r$  des Mediums, in dem die Welle läuft, und die beiden Naturkonstanten  $\varepsilon_0$  und  $\mu_0$  auf. Verwunderlich wäre es nicht, wenn diese vier Größen die Ausbreitungsgeschwindigkeit bestimmten. Multipliziert man ihre Einheiten miteinander, so bekommt man

$$1 \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} = 1 \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2}$$


also den Kehrwert des Quadrates der Einheit der Geschwindigkeit. Das legt die Vermutung nahe, für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum könne


$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}$$


gelten. In einem Medium wären dann noch dessen relative Permittivität  $\varepsilon_r$  und relative Permeabilität  $\mu_r$  in die Wurzel hineinzumultiplizieren. Selbstverständlich kann eine solche **Dimensionsanalyse** einen physikalischen Zusammenhang nicht nachweisen; sie kann

aber Hinweise geben, wo es sich lohnen könnte, mit genauen Rechnungen einem möglichen Zusammenhang nachzuspüren.

### 7.1.2 Spektralbereiche

Konstruiert ist das Auge des Menschen für den Nachweis elektromagnetischer Wellen, deren Wellenlängen um ein halbes Mikrometer herum liegen. Die für den Normalsichtigen damit verbundenen Farbeindrücke sind die Regenbogenfarben, die die  Abb. 7.63 versucht wiederzugeben, so gut das im Druck möglich ist. Grob gemessen reicht der **sichtbare Spektralbereich** von etwa 400 nm (violett) bis etwa 800 nm (rot). Das ist nicht viel, just eine Oktave im Sinne der Akustik. Tieraugen geht es da nicht besser, es lohnt nämlich nicht, auf der Erde einen größeren Empfindlichkeitsbereich zu entwickeln. Die Sonne strahlt zwar noch weit außerhalb dieses Bereiches Licht ab, aber es kommt auf der Erde nicht mehr an: Das kurzwellige **Ultraviolett** wird vor allem vom Ozon

der hohen Atmosphäre abgefangen, während der Wasserdampf wesentliche Teile vom langwelligen **Infrarot** herausnimmt. Augen sehen in dem relativ schmalen „spektralen Fenster“, das von der irdischen Lufthülle durchgelassen wird ( Abb. 7.4).


Es ist üblich, nicht nur die Strahlung im sichtbaren Spektralbereich als **Licht** zu bezeichnen, sondern auch die angrenzenden Gebiete. Was dann weiter außen liegt, heißt auf der kurzwelligeren Seite **Strahlung** (Röntgen- und  $\gamma$ -Strahlung) und auf der anderen **Welle** (Millimeter-, Meter-, Kurz-, Mittel- und Langwelle im Radiobereich). Physikalisch handelt es sich dabei um immer die gleiche Erscheinung: um elektromagnetische Wellen, nur durch Frequenz und Wellenlänge voneinander unterschieden ( Abb. 7.5). Darum ist auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit im ganzen Spektrum prinzipiell dieselbe, die

#### Vakuum-Lichtgeschwindigkeit

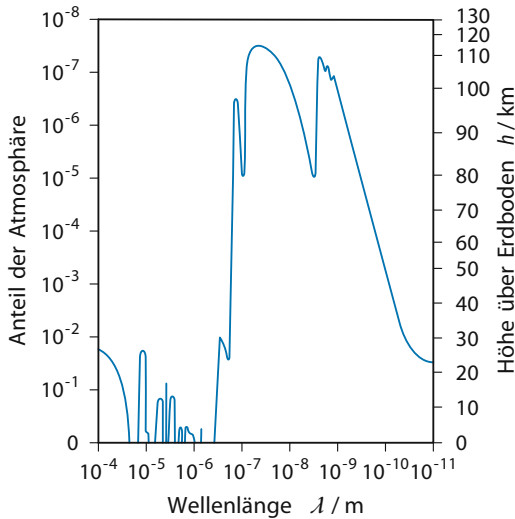
$$c = 299.792.459 \text{ m/s.}$$

Es ist erlaubt, sich stattdessen  $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  oder auch 300.000 km/s zu merken.

#### Klinik

**Von Sternen und weißen Mäusen.** Der Gesichtssinn des Menschen reagiert nicht auf Licht allein. Wem so sehr mit der Faust aufs  **Auge** geschlagen wird, dass er „Sterne sieht und die Funken stieben“, der sieht die Sterne und die Funken wirklich, aber sie sind die Folgen eines mechanischen Reizes und keines optischen. Man kann es auch weniger gewalttätig haben: Schon ein leichter Druck auf den ausgeruhten, von Licht abgeschirmten Augapfel löst im Gehirn das Signal „Licht“ aus, wie ein jeder leicht bei sich selbst nachprüfen kann. Zum Gesichtssinn gehört nicht nur das Auge mit Hornhaut, Linse, Glaskörper und Netzhaut, sondern auch der Sehnerv mitsamt dem für das Sehen zuständigen beträchtlichen Teil des Großhirns (**visueller Kortex**). Alles zusammen vermittelt dem Menschen Eindrücke von einer bei ausreichendem Licht bunten, immer aber räumlichen Welt, und das, obwohl die Netzhaut nur flächenhafte Bilder aufnehmen kann. Hier lässt sich der Gesichtssinn denn auch täuschen: Zumal in ebene Bilder inter-

pretiert er virtuos räumliche Vorstellungen hinein, sofern die Perspektive auch nur einigermaßen stimmt – Maler und Photographen nutzen das aus. Der Gesichtssinn hat auch nur eine begrenzte Aufnahmegeschwindigkeit: Bei einer Folgefrequenz von 25 Hz und mehr verschmelzen diskrete Bilder zu einem kontinuierlichen Eindruck – Film und Fernsehen nutzen dies aus. Auf jeden Fall aber liefert der Gesichtssinn dem Menschen weit vollkommene Informationen über seine Umwelt als die vier anderen Sinne zusammen. Voraussetzung ist natürlich, dass der Sinneseindruck „Licht“ durch das physikalische Phänomen „Licht“ ausgelöst wird und nicht durch mechanische Reize oder gar durch Rauschgifte. Die beiden Bedeutungen des Wortes **Licht** müssen deshalb sorglich auseinander gehalten werden; sie sind zwar eng miteinander verknüpft, können aber unabhängig voneinander existieren. Licht im physikalischen Sinn war in der Welt, lange bevor es Augen gab.



■ **Abb. 7.4.** Eindringen der Sonnenstrahlung in die Erdatmosphäre. Angegeben ist der Anteil der Atmosphäre, bis zu dem 10% der einfallenden Strahlungsleistung noch vordringen (*linke Ordinate*); diese Angabe ist in der rechten Ordinate auf Höhe über dem Erdboden umgerechnet worden

#### Merke

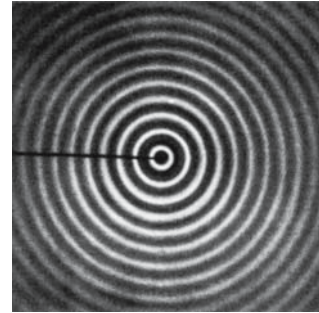
Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum)  
 $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$   
 (wichtige Naturkonstante).

### 7.1.3 Wellenausbreitung

Alle Wellen breiten sich nach den gleichen Gesetzen aus. Darum ist es durchaus erlaubt, auch die Ausbreitung des Lichts am Modell der Wasserwellen zu studieren; die **Wellenwanne** (■ Abb. 7.6) ist ein nützliches Hilfsmittel im Bereich der Optik.



■ **Abb. 7.6.** Skizze einer Wellenwanne im Schnitt; ein Stift tippt periodisch in ein flaches Wasserbecken



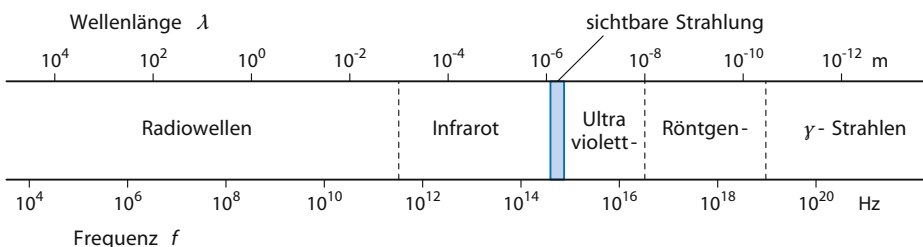
■ **Abb. 7.7.** Kreiswellen in einer Wellenwanne (nach R.W. Pohl)

Sie reduziert zugleich die immer ein wenig unübersichtliche Wellenausbreitung im Raum auf die leichter überschaubaren Verhältnisse der Ebene. Die Wellentäler und Berge erscheinen in den mit der Wellenwanne gewonnenen Bildern (■ Abb. 7.7 bis 7.12) hell beziehungsweise dunkel. Man sieht deshalb die **Wellenfronten**, die zum Beispiel den Verlauf der Wellenberge markieren, sehr deutlich.

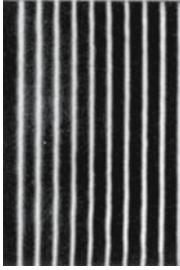
#### Merke

Die Wellenfronten stehen immer senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der Welle.

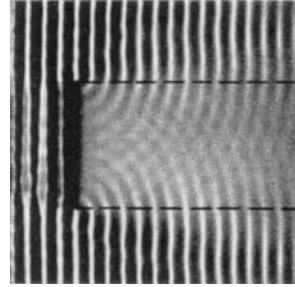
Bei hinreichend großem Abstand von der Wellenquelle, vom **Wellenzentrum**, sind Wellen immer kugel- bzw. kreisförmig (■ Abb. 7.7); wenn nichts



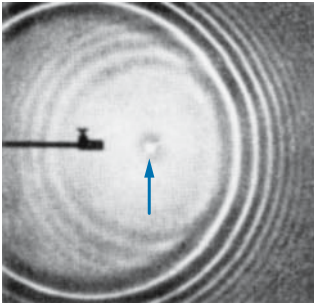
■ **Abb. 7.5.** Das Spektrum der elektromagnetischen Wellen



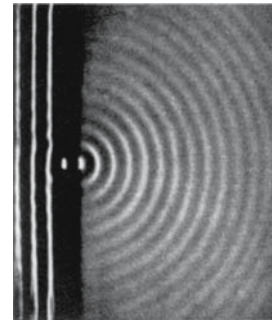
■ Abb. 7.8. Ebene Wellen in einer Wellenwanne (nach R.W. Pohl)



■ Abb. 7.10. Großes Hindernis wirft einen Schatten (nach R.W. Pohl)

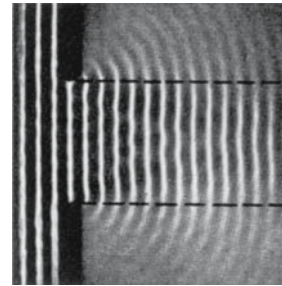


■ Abb. 7.9. Kleines Hindernis (Pfeil) wird zum Wellenzentrum (nach R.W. Pohl)



■ Abb. 7.11. Kleines Loch wird zum Wellenzentrum (nach R.W. Pohl)

im Wege steht, breiten sie sich gleichmäßig nach allen Richtungen aus. Geht man sehr weit weg, so erscheinen sie in einem hinreichend schmalen Bereich der Beobachtung als **ebene Wellen** mit gerader Front in der Wanne (■ Abb. 7.8). Lässt man die Welle an einem Hindernis vorbeilaufen, so hängt das Resultat sehr von der Größe dieses Hindernisses ab. Ist es klein gegenüber der Wellenlänge, so wird es zu einem sekundären Wellenzentrum (■ Abb. 7.9), ist es sehr groß, so entsteht hinter ihm ein **Schattenraum**, der, wenn man nicht allzu genau hinsieht, durch Geraden begrenzt wird, vom Wellenzentrum aus über die Kanten des Hindernisses hinweg gezeichnet (■ Abb. 7.10). Sieht man aber genauer hin, so dringt die Welle doch etwas in den Schattenraum hinein. Das ist auch beim umgekehrten Fall eines breiten Spaltes so (■ Abb. 7.12). Macht man einen solchen Spalt schmaler, so wird dieser Effekt immer stärker. Im Grenzfall, wenn die Spaltbreite klein ist verglichen mit der Wellenlänge, gibt es hinter dem Spalt gar keinen Schatten mehr und die Welle breitet sich



■ Abb. 7.12. Größeres Loch liefert ein begrenztes Wellenbündel (nach R.W. Pohl)

als Kreiswelle überall hin aus (■ Abb. 7.11). Auch das ganz kleine Hindernis von ■ Abb. 7.9 warf ja keinen Schatten. Wellen können also „um die Ecke“ gehen. Diese Erscheinung nennt man **Beugung**. Sie ist umso ausgeprägter, je kleiner die Abmessungen der Hindernisse gegenüber der Wellenlänge sind. Für Schallwellen ist das aus dem Alltag geläufig. Man kann jemanden, der hinter einem Baum steht, durchaus etwas zurufen und



er hört es, weil die Schallwellenlänge eher größer als der Baumdurchmesser ist und der Schall „um den Baum herum“ geht. Ist das Hindernis hingegen groß (ein Haus), dann wirft es einen Schatten und hinter dem Hindernis ist es wirklich dunkel (beziehungsweise still). Ist die Lichtwellenlänge vernachlässigbar gegenüber allen Lineardimensionen des Experiments, so ist der Ausdruck **Lichtstrahl** mit scharfer Bündelbegrenzung gerechtfertigt.

Für Röntgenstrahlen gilt dies in höherem Maß als für sichtbares Licht, aber auch dessen Wellenlänge ist in der normalen Umgebung des Menschen verschwindend klein. Darum hat es auch so lange gedauert, bis man seine Wellennatur erkannte. Derjenige Teil der Optik, der sich um diese nicht kümmert, heißt **geometrische Optik**.

Wellen können sich, wie Schwingungen, bei der Überlagerung verstärken, schwächen und sogar auslöschen. Dies nennt man **Interferenz** (► Kap. 7.4.2). Zusammen mit der Beugung führt Interferenz zu **Beugungsfiguren** (► Kap. 7.4.5). Das Wort „Strahl“, das gerade Bündelbegrenzung, scharfe Schatten und gleichmäßige Ausleuchtung des schattenfreien Raumes einschließt, wird diesen Erscheinungen nicht mehr gerecht. Interferenz und Beugung machen sich umso deutlicher bemerkbar, je näher die Wellenlänge  $\lambda$  an die Abmessungen der „Geräte“ des Experiments herankommt: Die **Langwelle** des Deutschlandfunks ( $\lambda \approx 1$  km) läuft über Berg und Tal und wirft keine Schatten, die **Ultrakurzwelle** der Fernsehsender ( $\lambda \approx 3$  m) lässt sich zwar von Bäumen kaum stören, ist aber tief unten in den schmalen Tälern der Eifel nicht unmittelbar zu empfangen. Derartige Effekte behandelt die **Wellenoptik**: Als weiterführende Theorie schließt sie alle Aussagen der geometrischen Optik ein, eben in der Näherung vernachlässigbarer Wellenlänge – vernachlässigbar im Vergleich zu den Abmessungen der Objekte im Wellenfeld.

## 7.2 Geometrische Optik

### 7.2.1 Lichtbündel

Ein geometrisches Gebilde, das, von einem Punkt ausgehend, gerade durch den Raum läuft und nur in dieser einen Richtung ausgedehnt ist, heißt in der Mathematik **Strahl**. Physikalisch lässt sich ein solcher Strahl nicht realisieren, das **Lichtbündel** eines Lasers (► Kap. 7.5.3) kommt ihm aber einigermassen nahe (► Abb. 7.13). Es hat zwar einen durchaus nachweisbaren Durchmesser, aber der ist doch vergleichsweise klein. Mit wachsendem Laufweg wird er allerdings immer größer, denn das Lichtbündel auch des besten Lasers ist immer noch **divergent**, es hat einen nicht verschwindenden **Öffnungswinkel**  $\omega$ , (näherungsweise) definiert als Quotient aus Bündeldurchmesser  $d$  und Abstand  $l$  von der als punktförmig angesehene Lichtquelle (► Abb. 7.14). Dahinter steht eine gewisse Abstraktion, denn wirklich existierende Lichtquellen sind immer ausgedehnt und werfen von einem Hindernis neben dem eigentlichen **Kernschatten** einen **Halbschatten**, in den sie mit einem Teil ihrer strahlenden Oberfläche hineinleuchten (► Abb. 7.15).

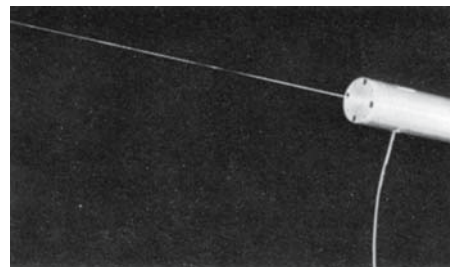
#### Merke

Öffnungswinkel eines Lichtbündels:  $\omega = d/l$ .

Divergent: Lichtbündel läuft auseinander

Konvergent: Lichtbündel wird schmaler und läuft in einem Punkt zusammen

Der Mensch sieht Licht nur dann, wenn es in seine Augen fällt. Bündel, die quer zur Blickrichtung

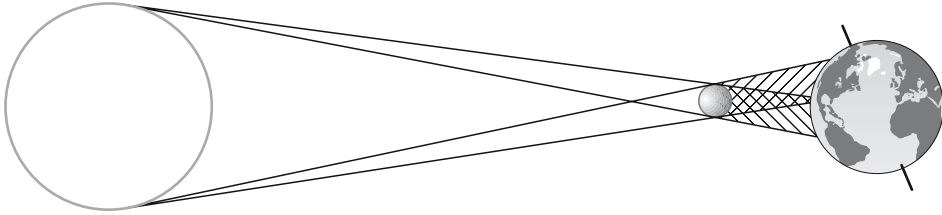


► Abb. 7.13. Lichtbündel eines Helium-Neon-Lasers, durch Rauch deutlicher sichtbar gemacht



■ Abb. 7.14. Bündelbegrenzungen eines „schlanken“ divergenten Bündels. Hier gilt für in guter Näherung:

$$\text{Öffnungswinkel } \omega = \frac{\text{Bündeldurchmesser } d}{\text{Laufweg } l}$$



■ Abb. 7.15. Mondschaten. Dort, wo der von der Sonne geworfene Kernschatten des Mondes die Erdoberfläche trifft, kann man eine totale Sonnenfinsternis beobachten. Im Bereich des Halbschattens deckt der Mond nur einen Teil der Sonnenscheibe ab (partielle Sonnenfinsternis)

laufen, bleiben unbemerkt. Man kann sie sich deshalb nur dadurch sichtbar machen, dass man ihnen Fremdkörper wie Staub, Wasserdampf oder Tabakrauch in den Weg bringt: Sie streuen Licht aus dem Bündel hinaus und zum kleinen Teil in ein Auge oder in die Linse eines Fotoapparates hinein. Auch die handfesten Gegenstände der täglichen Umwelt werden, wenn man sie beleuchtet, zu unselbständigen **Sekundärlichtquellen**, die Licht aus dem Primärbündel seitlich hinauswerfen. In der Welt der frühen Menschen gab es im Wesentlichen nur eine **Primärlichtquelle**, die Sonne. Auch wenn sie nicht „scheint“, genügt das Streulicht der Wolken, um die Szene hinreichend zu erhellen. Selbst bei klarem Himmel reicht das Streulicht, die anderen Primärlichtquellen des Kosmos, die Fixsterne, völlig zu überstrahlen. Man lasse sich hierdurch nicht irreleiten: Lichtbündel verschiedener Quellen durchsetzen sich gegenseitig, ohne sich (nennenswert) zu beeinflussen. Auch am Tage sind die Sterne „da“, aber das Auge nimmt ihr schwaches Licht nicht wahr, weil es von dem hellen zu sehr beansprucht wird.

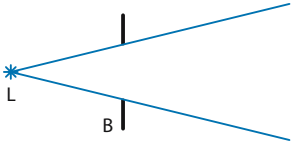
#### Merke

Eine Primärlichtquelle erzeugt Licht,  
eine Sekundärlichtquelle streut Licht.

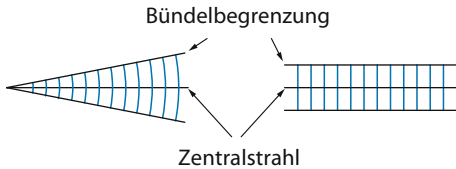
Sekundärstrahler sind naturgemäß weitaus lichtschwächer als der primäre, der sie beleuchtet. Der Gesichtssinn ist zur Wahrnehmung von Sekundärstrahlern entwickelt worden, mit entsprechender Empfindlichkeit. Direktes Sonnenlicht blendet nicht nur, es kann die Netzhaut schädigen. Auch künstliche Primärstrahler wie Glühlampen sollten durch Mattglas abgedeckt werden oder einen Raum indirekt beleuchten.

Aus den unzähligen, diffus in alle Richtungen durcheinander laufenden Sekundärlichtbündeln blendet ein Auge nur einen verschwindend kleinen Bruchteil für sich selbst heraus. Es handelt sich um schlanke, divergente Bündel, mit von der Pupille bestimmten, kleinen Öffnungswinkeln. Die Ausgangspunkte dieser Bündel vermag das Hirn zu erkennen; es setzt aus ihnen ein räumliches Bild der Umwelt zusammen.

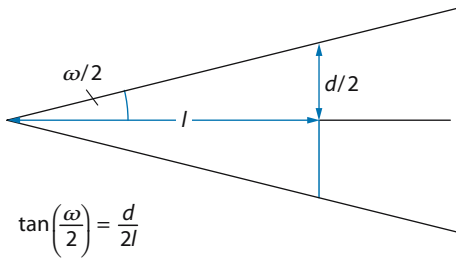
Wollte man bei einem konkreten, optischen Problem alle benutzten Lichtbündel auf Papier zeichnen, die Linienfülle würde unüberschaubar. Darum beschränkt man sich auf ganz wenige besonders wichtige Bündel und zeichnet von ihnen nur die Bündelbegrenzungen, wie sie durch Blendnetze festgelegt werden – und das nicht nur hinter, sondern auch vor der Blinde, als wüsste das Bündel schon, was ihm noch widerfahren wird (■ Abb. 7.16). Zuweilen wird auch diese Methode noch zu unübersichtlich; dann zeichnet man



■ **Abb. 7.16. Divergentes Lichtbündel**, aus dem Licht der allseitig strahlenden Punktlichtquelle L von der Blende B herausgeblendet. Die Bündelbegrenzungen werden schon vor der Blende gezeichnet



■ **Abb. 7.17. Divergentes und Parallellichtbündel**. Lichtstrahlen repräsentieren als Bündelbegrenzungen wie als Zentralstrahlen Ausschnitte aus elektromagnetischen Kugelwellen (Wellenfronten hier blau gezeichnet, „Momentaufnahme“). Grenzfall: Parallellichtbündel, ebene Welle



■ **Abb. 7.18. Öffnungswinkel**. Zur Herleitung der korrekten Formel für den Öffnungswinkel

nur den **Zentralstrahl** längs der Bündelachse, der die Hauptrichtung des Bündels markiert. In jedem Fall stehen Lichtstrahlen, auf Papier gezeichnet, für Ausschnitte aus elektromagnetischen Kugelwellen bis hin zum Grenzfall des **Parallellichtbündels**, das mit dem Öffnungswinkel null eine (streng genommen nicht realisierbare) ebene Welle darstellt (■ Abb. 7.17).

■ ■ ■ Zumeist sind optisch genutzte Lichtbündel so schlank, dass man für ihre Öffnungswinkel  $\omega = d/l$  schreiben darf. Die korrekte Formel lautet freilich

$$\tan(\omega/2) = d/(2l),$$

wie Abbildung 7.18 zeigt. Zuweilen wird auch  $\omega/2$  als Öffnungswinkel bezeichnet.

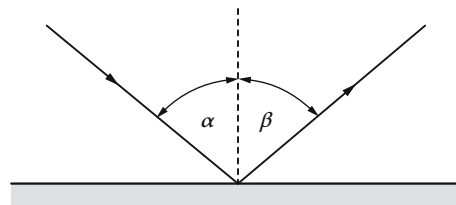
## 7.2.2 Spiegelung

Nur im Sonderfall einer matt getünchten Oberfläche streut ein Körper das Licht, das ihn trifft, völlig diffus nach allen Seiten. Im Allgemeinen gibt er dem Licht eine mehr oder weniger ausgeprägte Vorzugsrichtung mit, die von der Einfallsrichtung abhängt. Je ausgeprägter dies geschieht, desto blanker und glänzender erscheint die Fläche. Idealisierter Grenzfall ist die reguläre **Reflexion** eines vollkommenen Spiegels: Das einfallende Licht wird vollständig zurückgeworfen und bleibt dabei so scharf ausgerichtet, wie es ankam. Einfallender und reflektierter Strahl liegen zusammen mit dem **Einfallslot**, der Flächennormalen am Auftreffpunkt, in einer Ebene; **Einfallswinkel**  $\alpha$  und **Ausfallwinkel**  $\beta$ , zum Lot gemessen, sind gleich (■ Abb. 7.19). Dies ist die Aussage des **Reflexionsgesetzes**. Bei senkrechter Inzidenz ( $\alpha = \beta = 0$ ) läuft ein Strahl in sich selbst zurück; in dem anderen Grenzfall der streifenden Inzidenz ( $\alpha = \beta = 90^\circ$ ) wird er gar nicht abgelenkt.

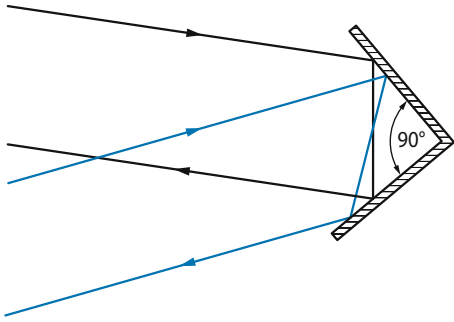
### Merke

Reflexionsgesetz: Einfallswinkel = Ausfallwinkel.

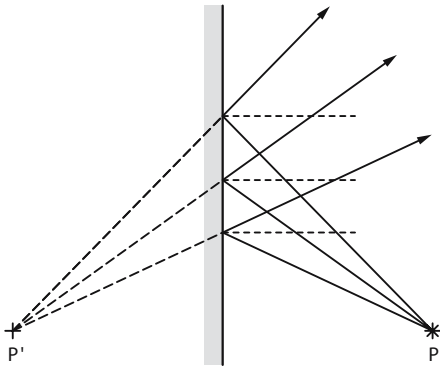
■ ■ ■ Setzt man zwei Spiegel im rechten Winkel zusammen, so erhält man einen **90°-Winkelspiegel**, der schlanke Bündel parallel zu sich selbst zurückwirft, gleichgültig, aus welcher Richtung sie auftreffen, sofern dies nur in der Zeichenebene der ■ Abb. 7.20 geschieht. Will man sich von dieser Einschränkung frei machen, muss man drei Spiegel zusammensetzen wie die Ecke einer Kiste. Nach diesem Prinzip arbeiten die Rückstrahler an Fahrzeugen und Fahrbahnmarkierungen („Katzenaugen“).



■ **Abb. 7.19. Reflexionsgesetz**



■ Abb. 7.20. 90°-Winkelspiegel. Er wirft in der Zeichenebene anlaufendes Licht parallel zu sich selbst zurück



■ Abb. 7.21. Reflexion am ebenen Spiegel. Ein im reflektierten Bündel platziertes Auge meldet das virtuelle Spiegelbild  $P'$  der Lichtquelle  $P$  als Ausgangspunkt des Bündels an das Gehirn

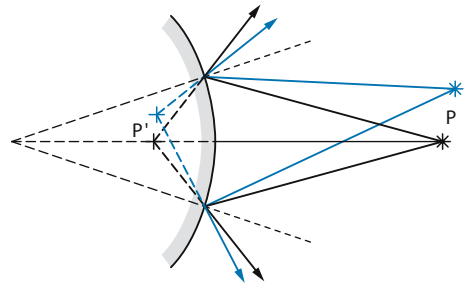
Bei einem ebenen Spiegel stehen alle Einfallslotte parallel. Ein divergent einfallendes Bündel behält deshalb nach der Reflexion seinen Öffnungswinkel bei: Zentralstrahl wie Randstrahlen folgen dem Reflexionsgesetz (■ Abb. 7.21). Das reflektierte Bündel scheint deshalb von einem Punkt herzukommen, der im gleichen Abstand hinter dem Spiegel liegt wie die wahre Lichtquelle vor ihm. Genau diesen Punkt meldet das Auge seinem Hirn als Ausgangspunkt des reflektierten Bündels: Ein Mensch sieht ein **virtuelles Bild** an einer Stelle, an der sich tatsächlich etwas ganz anderes befindet.

Spiegelbilder sind seitenverkehrt. Dies ist nicht eine Eigentümlichkeit der Optik, sondern der Richtungsbegriffe des Menschen: Wer von Ost nach West in einen Spiegel schaut und seine rechte

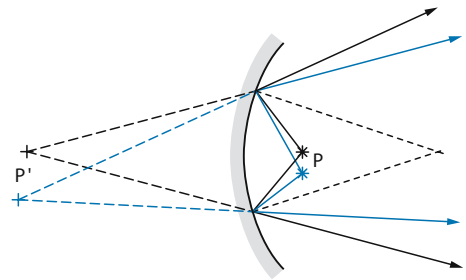
Hand hebt, hebt seine nördliche Hand; sein Spiegelbild hebt ebenfalls die nördliche Hand, aber weil es von West nach Ost schaut, ist es die linke. Zwei Menschen, die sich gegenüberstehen, sind gleicher Meinung bezüglich oben und unten, aber entgegengesetzter bezüglich rechts und links.

Ist ein Spiegel vorgewölbt, so stehen die Einfallslotte nicht mehr parallel nebeneinander; der Öffnungswinkel des reflektierten Bündels ist größer als der des einfallenden, und das virtuelle Bild erscheint verkleinert und an den Spiegel heranrückte (■ Abb. 7.22). Verkehrsspiegel an unübersichtlichen Einfahrten nutzen das aus; sie liefern ein vergleichsweise großes Bildfeld, erschweren aber die Abschätzung von Entfernungen.

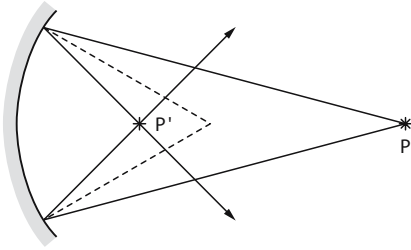
Anders ist es beim Hohlspiegel: Hier wird der Öffnungswinkel verkleinert. Das kann zu zwei verschiedenen Konsequenzen führen. Liegt die Lichtquelle hinreichend nahe am Spiegel, so bleibt das



■ Abb. 7.22. Gewölbter Spiegel. Er vergrößert den Öffnungswinkel des reflektierten Bündels gegenüber dem des einfallenden. Ein Auge meldet ein verkleinertes, etwas an den Spiegel herangerücktes, virtuelles Spiegelbild  $P'$  der Lichtquelle  $P$



■ Abb. 7.23. Hohlspiegel bei kleinem Objektabstand. Der Öffnungswinkel wird verkleinert, bleibt aber positiv: virtuelles, vergrößertes und vom Spiegel weggerücktes Bild  $P'$  von der Lichtquelle  $P$



■ **Abb. 7.24. Hohlspiegel bei großem Objektabstand:** Der Öffnungswinkel wird bis ins Negative verkleinert. Das reflektierte Bündel läuft konvergent auf den reellen Bildpunkt  $P'$  der Lichtquelle  $P$  zu und erst hinter  $P'$  wieder divergent auseinander

reflektierte Bündel divergent und der Betrachter sieht wieder ein virtuelles Bild (■ Abb. 7.23), diesmal vergrößert und vom Spiegel abgerückt: Prinzip des Rasierspiegels. Bei hinreichend großem Abstand der Lichtquelle ist der Öffnungswinkel des einfallenden Bündels aber so klein, dass der des reflektierten negativ wird. Das gespiegelte Bündel bleibt nicht divergent, es läuft konvergent auf einen Punkt zu und erst hinter ihm divergent weiter (■ Abb. 7.24). Von nun ab verhält es sich, als sei es im Konvergenzpunkt entstanden; ein Auge meldet diesen Punkt als Ausgangspunkt des reflektierten Bündels, der Mensch sieht ein **reelles Bild** an einer Stelle, an dem sich die Lichtquelle zwar nicht befindet, das Licht aber immerhin gewesen ist. Es scheint nicht, wie beim virtuellen Bild, nur von dort zu kommen, es kommt wirklich von dort.

#### Merke

Ein virtuelles Bild wird von divergenten Lichtbündeln erzeugt und lässt sich nur durch abbildende Systeme wahrnehmen (Auge, Kamera).

Ein reelles Bild wird von konvergenten Lichtbündeln erzeugt und lässt sich auf einem Bildschirm auffangen.

Die Erzeugung reeller Bilder realer Objekte heißt in der Optik **Abbildung**. Vornehmlich die Teleskope der Astronomen benutzen hierfür tatsächlich Hohlspiegel; anderswo in Physik und Technik bevorzugt man die Abbildung durch Linsen. Auch

die Natur hat sich bei der Konstruktion der Augen höherer Tiere für dieses Verfahren entschieden. Wer die Abbildung durch Linsen beherrscht (sie wird ab ► Kap. 7.2.6 ausführlich besprochen), kann seine Kenntnisse leicht auf die Abbildung durch Hohlspiegel übertragen. Dies braucht hier also nicht näher behandelt zu werden.

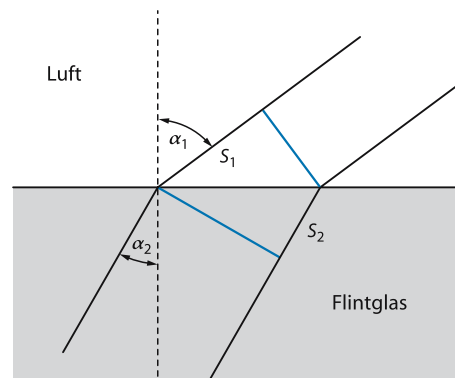
#### Umkehrbar?

► **Aufgabe.** In ■ Abb. 7.24 ist in Punkt  $P$  eine Lichtquelle und in Punkt  $P'$  ihr reelles Bild. Setzen wir nun die Lichtquelle in den Punkt  $P'$ . Gibt es dann auch ein reelles Bild? Und wenn ja, wo?

► **Lösung.** Bei der Reflexion ist Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel. Der Vorgang ist vollkommen symmetrisch und läuft genau umgekehrt ab, wenn man die Richtung des Lichtstrahls umkehrt. Deshalb ergibt sich ein reelles Bild genau im Punkt  $P$ , wo die Lichtquelle vorher war.

### 7.2.3 Brechung

In Glas läuft Licht langsamer als im Vakuum; für jedes andere lichtdurchlässige Medium gilt das auch, sogar für die Luft, wenn man genau genug misst. Infolgedessen durchsetzt Licht eine Glasplatte nur bei senkrechtem Einfall ohne Richtungsänderung; bei schrägem Einfall wird es **gebrochen**. Fällt, wie in ■ Abbildung 7.25 gezeichnet, ein Parallellichtbündel von oben rechts, aus dem Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  kom-



■ **Abb. 7.25. Brechung.** Zur Herleitung des Brechungsgesetzes (Einzelheiten im Text)

mend, unter dem Einfallswinkel  $\alpha$  auf die ebene Oberfläche eines **brechenden Mediums**, so kommt zunächst einmal der untere Randstrahl ein klein wenig früher an als der obere, um die Zeitspanne

$$\Delta t = s_1/c$$

nämlich. Im Medium herrscht die Lichtgeschwindigkeit  $v < c$ ; das Licht kann in  $\Delta t$  deshalb nur die Strecke

$$s_2 = v \cdot \Delta t = s_1 \cdot v/c$$

durchlaufen. Im Glas gilt aber wie in der Luft: Die Wellenfront (in ■ Abb. 7.25 blau) steht immer senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung. Deshalb ändert sich mit der Richtung der Wellenfront auch die Ausbreitungsrichtung des Parallelbündels. Den Ausfallswinkel  $\beta$  liefern die beiden aus Bündelbegrenzung und Wellenfront gebildeten Dreiecke der ■ Abb. 7.25, und zwar durch die Gleichung

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{c}{v} = n;$$

der Quotient  $c/v$  wird **Brechzahl  $n$**  oder auch **Brechungsindex** des Glases genannt. Gebrochen wird Licht nicht nur beim Übertritt vom Vakuum in ein brechendes Medium, sondern auch bei Wechsel zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Brechzahlen  $n_1$  und  $n_2$ . Darum gibt man dem **Brechungsgesetz** besser die vollständige Form

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}.$$

#### Merke

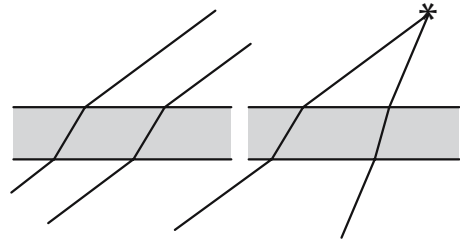
##### Brechzahl

$$n = \frac{\text{Lichtgeschwindigkeit } c \text{ im Vakuum}}{\text{Lichtgeschwindigkeit } v \text{ im Medium}} > 1$$

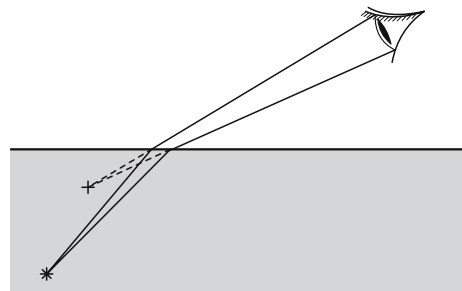
##### Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Tritt Licht vom optisch „dünnere“ Medium (dem mit der kleineren Brechzahl) in ein „dichteres“ über, so wird es zum Lot *hin* gebrochen, andernfalls vom Lot *weg*. Beim Durchgang durch eine planparallele Glasplatte heben sich beide Brechungen gegenseitig auf; ein Lichtbündel wird le-



■ **Abb. 7.26. Planparallele Glasplatte.** Beim Durchgang durch eine planparallele Glasplatte werden parallele wie divergente Lichtbündel lediglich parallelverschoben

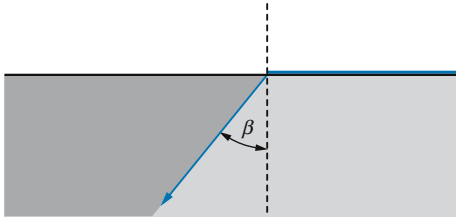


■ **Abb. 7.27. Blick ins Wasser.** Das vom Auge ausgeblendete Bündel einer Lichtquelle, die sich in einem brechenden Medium befindet (Goldfisch im Teich), scheint von einer Stelle zu kommen, an der sie sich nicht befindet; „gesehen“ wird der Goldfisch senkrecht über seiner wahren Position, denn Entfernungen registriert der Gesichtssinn nicht über den Öffnungswinkel des Lichtbündels (d. h. über die „Akkommodation“ des Auges, ► Kap. 7.2.9), sondern durch den Konvergenzwinkel der Augen (► Kap. 7.2.11)

diglich parallelverschoben (■ Abb. 7.26). Den Blick durchs Fenster stört das nicht.

Anderes gilt bei einem Teich. Hier ist das brechende Medium Wasser dick, und die Sekundärlichtquelle, etwa die Rückenflosse eines Goldfischs, befindet sich mitten darin. Das divergente Lichtbündel kommt nicht so geraden Weges beim Auge an, wie der Gesichtssinn vermutet; darum wird die Flosse an einer anderen Stelle „gesehen“ als sie sich befindet, und der Rest des Fisches auch. Das führt zu markanten Verzerrungen, vor allem bei schräger Blickrichtung (■ Abb. 7.27).

Nach ihrer Definition können Einfallswinkel und Ausfallswinkel  $90^\circ$ , kann ein Sinus 1 nicht überschreiten. Demzufolge erlaubt das Brechungsgesetz beim Übertritt aus einem dünnen in ein dichte-



■ Abb. 7.28. Grenzwinkel der Totalreflexion (Einzelheiten im Text)

teres Medium keinen Austrittswinkel  $\beta$ , der größer wäre als durch die Ungleichung

$$\sin \beta \leq n_1/n_2 < 1$$

vorgegeben. Im dichteren Medium gibt es demnach einen Winkelbereich, den Licht von außen nicht erreichen kann. Er ist in ■ Abb. 7.28 dunkler gerastert.

Was geschieht mit Licht, das aus diesem Bereich stammend, von der Seite des dichteren Mediums aus die Grenzfläche anläuft und heraus möchte? Gezeichnete **Strahlengänge** sagen nichts über die Marschrichtung des Lichtes aus: Lichtwege sind umkehrbar. Daraus folgt notwendigerweise: Kann Licht aus dem dünneren Medium *in* einen bestimmten Bereich des dichteren nicht hinein, so kann umgekehrt Licht *aus* diesem Bereich das dichtere Medium nicht verlassen – es verbleibt unter **Totalreflexion** auf der dichteren Seite der Grenzfläche. Das Reflexionsvermögen lässt sich hier von 1 kaum noch unterscheiden, allenfalls wird es ein wenig durch möglicherweise vorhandene Streuteilchen und Absorptionsschichten an der Grenzfläche beeinträchtigt. Der Winkel  $\beta$  der ■ Abb. 7.28 heißt **Grenzwinkel der Totalreflexion**. Man kann ihn zur Bestimmung von Brechzahlen verwenden.

#### Merke

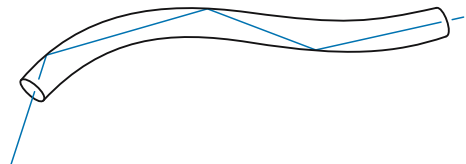
Totalreflexion: Licht kann optisch dichteres Medium nicht verlassen, wenn der Grenzwinkel der Totalreflexion  $\beta_{\text{grenz}}$  überschritten wird:

$$\sin \beta_{\text{grenz}} = 1/n$$

(bei Übertritt in Vakuum oder Luft).

#### Klinik

⚙ **Endoskopie.** In der Medizin wird die Totalreflexion beim sog. **Lichtleiter** angewendet, um Körperhöhlen, wie etwa den Magen, für photographische Zwecke auszuleuchten. Man nehme ein Bündel feiner Glasfäden, der einzelne vielleicht 30  $\mu\text{m}$  im Durchmesser; er lässt sich dann leicht um den Finger wickeln, ohne zu brechen. Gibt man durch seine Stirnfläche Licht in ihn hinein, so kann es nur durch die Stirnfläche am anderen Ende wieder heraus: Auf Seitenflächen trifft es auch in der Biegung immer nur mit Winkeln jenseits des Grenzwinkels der Totalreflexion auf (■ Abb. 7.29). Zwischen zwei Reflexionen kommt das Licht nicht weit; ehe es das andere Ende eines Dezimeter langen Glasfadens erreicht, hat es einige hundert Spiegelungen hinter sich gebracht. Läge das Reflexionsvermögen auch nur um ein Promille unter der 1, käme kaum noch Licht an. Legt man ein Bündel dünner Glasfäden sorgfältig parallel ausgerichtet nebeneinander, so kann man mit ihnen auch gewissermaßen „punktweise“ Bilder übertragen (**Faseroptik**). Auch in der Nachrichtentechnik setzen sich Lichtleiter zur Datenübertragung immer mehr durch.



■ Abb. 7.29. Lichtleiter, schematisch. Das durch eine Stirnfläche eingedrungene Licht kann wegen der Totalreflexion erst an deren anderen Stirnfläche wieder hinaus



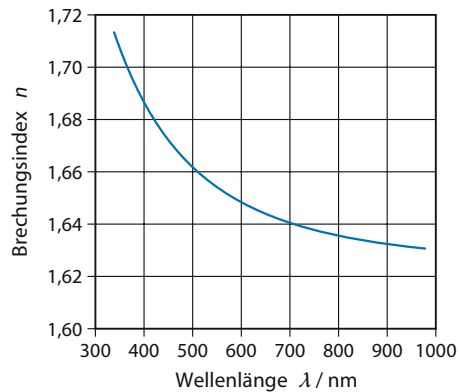
**Rechenbeispiel 7.1: Girls' best friend**

► **Aufgabe.** Die Lichtgeschwindigkeit in Diamant beträgt  $1,24 \cdot 10^8$  m/s. Was heißt das für die Brechzahl?

► **Lösung.**

$$n = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,24 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 2,42.$$

Im Vergleich zu Glas ( $n \approx 1,5$ ) ist das eine sehr hohe Brechzahl. Es gibt kaum ein durchsichtiges Material mit einem höheren. Die Brechzahl bestimmt auch das Reflexionsvermögen durchsichtiger Stoffe. Bei senkrechtem Lichteinfall reflektiert Diamant 17% des Lichtes, Glas nur 4%. Das macht den ganzen Charme des Diamanten aus: er glitzert so schön.

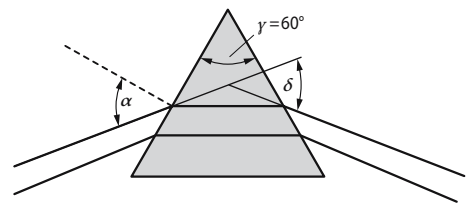


■ Abb. 7.30. Dispersionskurve von Flintglas

**Rechenbeispiel 7.2: Mit den Augen eines Fisches**

► **Aufgabe.** Wasser hat die Brechzahl  $n = 1,33$ . Wie groß ist der Grenzwinkel der Totalreflexion? Was sieht man, wenn man von unter Wasser nach oben auf eine völlig glatte Wasserfläche schaut?

► **Lösung.**  $\beta_{\text{grenz}} = \arcsin \frac{1}{1,33} = 49^\circ$ . Die Welt oberhalb des Wasserspiegels ist auf ein kreisrundes Sichtfeld mit einem Blickwinkel von  $49^\circ$  zur Senkrechten komprimiert. Jenseits von  $49^\circ$  sieht man Reflexionen vom Boden des Sees.



■ Abb. 7.31. Glasprisma. Ein Parallellichtbündel durchsetzt symmetrisch ein  $60^\circ$ -Glasprisma; Einfallswinkel  $\alpha$ , Ablenkswinkel  $\delta$

**7.2.4 Dispersion**

Brechzahlen sind von Frequenz und Wellenlänge abhängig; meist fallen sie mit wachsendem  $\lambda$  ab. Man bezeichnet diesen Effekt als **Dispersion**. Er ist nicht groß, wie die Ordinate der ■ Abbildung 7.30 zeigt. Trotzdem lässt er sich mit einem **Prisma** leicht demonstrieren. ■ Abbildung 7.31 zeigt schematisch ein Parallellichtbündel, das ein  $60^\circ$ -Prisma symmetrisch durchsetzt: Brechung zum Lot beim Eintritt, hier ein Abknicken nach rechts bedeutend; Brechung beim Austritt vom Lot weg, wieder ein Abknicken nach rechts bedeutend, denn die beiden Lote sind ja um den Prismenwinkel  $\gamma$  gegeneinander gekippt.

**Merke**

Dispersion:

Abhängigkeit der Brechzahl von der Wellenlänge, d. h.  $n = n(\lambda)$ .

Es leuchtet ein, dass der Ablenkswinkel  $\delta$  nicht nur vom Einfallswinkel  $\alpha$  und dem Prismenwinkel  $\gamma$  abhängt, sondern auch von der Brechzahl  $n$  und damit von deren Dispersion  $n(\lambda)$ . ■ Abbildung 7.31 kann deshalb nur nach einem Laserexperiment gezeichnet worden sein: Laserlicht ist **monochromatisch**, es enthält praktisch nur Licht einer Wellenlänge, sodass sich die Dispersion nicht auswirkt. Lässt man aber ein schmales Bündel Sonnenlicht auf das Prisma fallen, so wird das ursprünglich „weiße“ Licht in alle Farben des Regenbogens aufgespalten. Vom Gesichtssinn als weiß empfundenes Licht ist normalerweise ein homogenes Gemisch aus allen Wellenlängen des sichtbaren Spektralbereiches, wie es et-

wa von Wolken als Sekundärstrahlern abgegeben wird. Im blauen Himmel überwiegen die kürzeren, im Abendrot die größeren Wellenlängen. Das Prisma kann ein Wellenlängen- oder auch Frequenzgemisch spektral zerlegen, in sein **Spektrum** zerlegen.

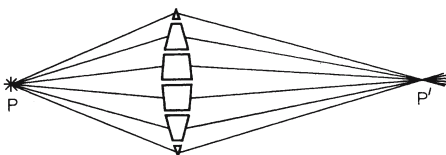
### Merke

Spektrale Zerlegung: Aufteilung eines Wellenlängengemisches in einzelne Wellenlängen.

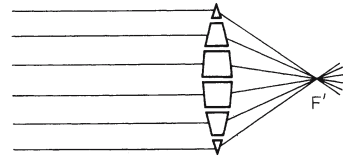
## 7.2.5 Linsen

Von der Seite gesehen muss ein optisches Prisma nicht unbedingt die Form eines Dreiecks haben. Für das in [Abb. 7.31](#) gezeichnete Bündel hat die Spitze des Prismas keine Bedeutung, sie kann gekappt werden. Wichtig ist nur der **brechende Winkel**  $\gamma$ ; mit ihm wächst der Ablenkwinkel  $\delta$ .

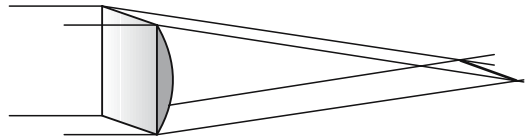
Zumindest im Gedankenversuch kann man sich einen Stapel aufeinandergesetzter Prismen nach Art der [Abb. 7.32](#) vorstellen. Ihre brechenden Winkel sollen so gewählt sein, dass sie die (gezeichneten) Zentralstrahlen von Parallellichtbündeln, die alle vom Punkt P ausgehen, in einen Punkt P' hinein sammeln. Auch parallel ankommende Bündel würden sie sammeln, aber auf kürzeren Abstand, also in den Punkt F' der [Abb. 7.33](#). Mit schmaleren Prismen ließe sich eine größere Anzahl von Bündeln erfassen; im Grenzfall wird dann die Oberfläche des Glaskörpers nicht mehr von Facetten gebildet, sondern von zwei Zylindermänteln mit horizontaler Achse. Es ändert sich nichts Wesentliches, wenn man den einen zur Ebene entarten lässt: eine derar-



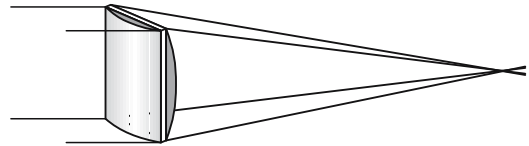
**Abb. 7.32. Linse als Prismenstapel.** Ein Prismenstapel zieht Parallellichtbündel, deren Zentralstrahlen von einem Punkt P stammen, in einem Punkt P' zusammen – sofern die brechenden Winkel richtig gewählt werden



**Abb. 7.33. Linse als Prismenstapel.** Parallel anlaufende Bündel werden nach F' gesammelt



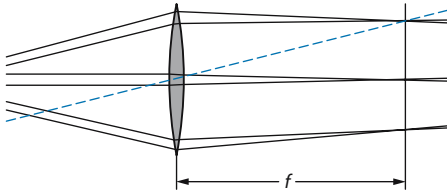
**Abb. 7.34. Zylinderlinse.** Eine Zylinderlinse liefert einen Bildstrich



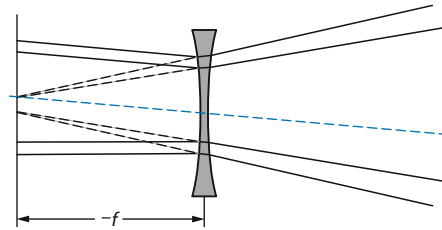
**Abb. 7.35. Zwei Zylinderlinsen mit gleichen Brennweiten und zueinander senkrechten Zylinderachsen bilden ab wie eine sphärische Linse**

tige **Zylinderlinse** zieht ein anlaufendes Parallellichtbündel zu einem horizontalen Strich zusammen ([Abb. 7.34](#)). Setzt man dicht hinter die Linse eine zweite mit vertikaler Zylinderachse, so wird das Bündel zu einem Punkt zusammengezogen ([Abb. 7.35](#)). Dieses Resultat kann man auch in einem Schritt haben, wenn man den Glaskörper durch zwei Kugelflächen begrenzt; er bildet dann eine **sphärische Linse**, und zwar eine **bikonvexe Sammellinse**. Wieder ändert sich nichts Wesentliches, wenn die eine Fläche zur Ebene entartet (**Plankonvexlinse**). Aber nicht die äußere Form ist das Entscheidende an einer Linse, sondern ihre **Brennweite**.

Als Brennweite  $f$  bezeichnet man den Abstand der Brennebene von der Linse. In der Brennebene liegen die Konvergenzpunkte aller Bündel, die als Parallelbündel unter verschiedenen Richtungen an der anderen Seite der Linse anlaufen ([Abb. 7.36](#)), in der Brennebene liegen also auch die reellen Bilder, welche die Linse von weit entfernten Objekten entwirft. Die Lage der



■ **Abb. 7.36. Sammellinse.** Parallellichtbündel werden von der Linse auf Punkte zusammengezogen, deren Lage durch den zugehörigen Zentralstrahl vorgeben ist; dieser muss nicht vom Licht des Bündels realisiert werden (blau: Zentralstrahl des oberen Bündels)



■ **Abb. 7.37. Zerstreuungslinse.** Eine Zerstreuungslinse weitet Parallellichtbündel zu divergenten Bündeln auf; sie scheinen von virtuellen Bildpunkten auf der bildseitigen Brennebene vor der Linse zu stammen: negative Brennweite. Der Zentralstrahl des oberen Bündels ist blau gezeichnet

Bildpunkte kann man leicht ermitteln: im Zentrum der Linse stehen sich deren Oberflächen parallel gegenüber, die dort durchlaufenden *Zentralstrahlen* werden ohne Richtungsänderung durchgelassen (die Parallelversetzung darf man, bei dünnen Linsen zumindest, vernachlässigen).

Grundsätzlich kann eine sphärische Linse in ihrer Mitte dünner sein als am Rand. Einfallende Parallellichtbündel werden dann nicht gesammelt, sondern zu divergenten Bündeln aufgeweitet (■ Abb. 7.37); sie scheinen von Punkten zu kommen, die auf einer Ebene *vor* der Linse liegen. Es ist deshalb sinnvoll, einer solchen konkaven oder **Zerstreuungslinse** eine negative Brennweite zuzuordnen.

„Starke“ Linsen mit stärker gekrümmten Oberflächen haben kurze Brennweiten, werden also durch eine Kenngröße mit kleiner Maßzahl charakterisiert. Wem das missfällt, der bevorzugt zur Kennzeichnung den **Brechwert**, er ist als Kehrwert der Brennweite definiert. Seine Einheit heißt

**Dioptrie (dpt)**, sie entspricht dem Kehrwert eines Meters:

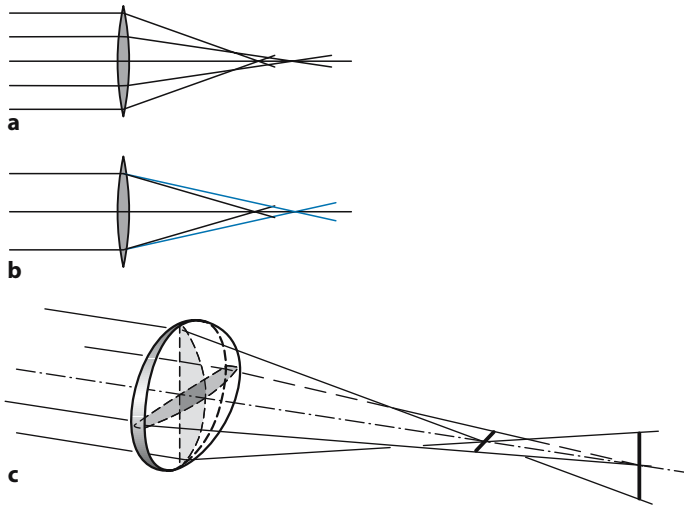
$$1 \text{ dpt} = 1 \text{ m}^{-1}.$$

Jeder, der eine Brille trägt, weiß, dass Augenoptiker immer mit Dioptrien rechnen. Das liegt vor allem daran, dass sich die Brechwerte zwei dicht hintereinandergesetzter Linsen (wie Auge und Brille) näherungsweise addieren.

#### Merke

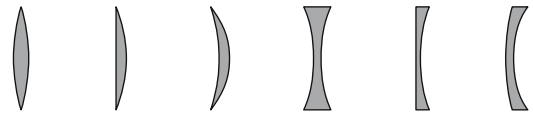
Konvexe Linse = Sammellinse: positive Brennweite  $f$   
 Konkave Linse = Zerstreuungslinse: negative Brennweite  
 Brechwert = Kehrwert der Brennweite (Einheit: Dioptrie,  $1 \text{ dpt} = 1 \text{ m}^{-1}$ )  
 Bei dünnen Linsen, die dicht hintereinander stehen, addieren sich näherungsweise die Brechwerte

Eine Sammellinse bildet Parallellichtbündel in eine einzige Ebene ab, sie liegt im Abstand der Brennweite. Strenggenommen ist dieser Satz keine Feststellung, sondern ein Postulat, das keine existierende Linse exakt zu erfüllen vermag. Man sagt deshalb, sie habe **Linsenfehler**. Am leichtesten einzusehen ist der Farbfehler (**chromatische Aberration**), eine Folge der Dispersion des Linsenmaterials: Rotes Licht bekommt eine größere Brennweite als blaues. Besonders bei großen Linsen mit kleiner Brennweite stört der Öffnungsfehler (**sphärische Aberration**): Randnahe Bündel haben eine etwas kleinere Brennweite als zentrumsnahe. Weiteren Ärger bereitet der **Astigmatismus**: Wer schräg auf eine Linse schaut, sieht sie perspektivisch verkürzt und schätzt darum die Krümmung ihrer Oberfläche in der einen Richtung höher ein als in der anderen. Die Folge: Ein schräg einfallendes Parallellichtbündel wird gar nicht in einem Punkt zusammengezogen, sondern in zwei zueinander senkrechte Striche mit verschiedenen Entfernungen von der Linse. Dies gilt erst recht (und dann auch für ein achsenparallel einfallendes Bündel), wenn zumindest eine Oberfläche der Linse tatsächlich in der einen Richtung stärker gekrümmt ist als in der anderen dazu senkrechten. Die Linse



■ **Abb. 7.38a–c. Linsenfehler.** a Öffnungsfehler (sphärische Abberation): Strahlen, die am Rand der Linse eintreten, haben einen anderen Brennpunkt; b Farbfehler (chromatische Abberation): Licht unterschiedlicher Wellenlänge hat verschiedene Brennpunkte; c eine astigmatische Linse (sphärisch mit Zylinderanteil) gibt zwei zueinander senkrecht stehende Bildstriche

ist dann keine sphärische Linse mehr, sondern hat einen Zylinderanteil. In dieser Weise entsteht der Astigmatismus des Auges, eine Fehlsichtigkeit, die durch ein Brillenglas mit entsprechendem Zylinderanteil korrigiert werden kann. Schließlich liegen die Bildpunkte eines ebenen Gegenstandes nicht notwendigerweise selbst in einer Ebene – man spricht dann von Bildfeldwölbung („Fischaugeneffekt“). ■ Abbildung 7.38 deutet die wichtigsten Linsenfehler schematisch an.



■ **Abb. 7.39. Grundtypen optischer Linsen im Schnitt.** Von links: bikonvex, plankonvex, konkavkonvex (Sammellinsen); bikonkav, plankonkav, konvexkonkav (Zerstreuungslinsen)

#### Merke

Die wichtigsten Linsenfehler:  
 Öffnungsfehler = sphärische Abberation  
 Farbfehler = chromatische Abberation  
 Astigmatismus (Zylinderlinse)

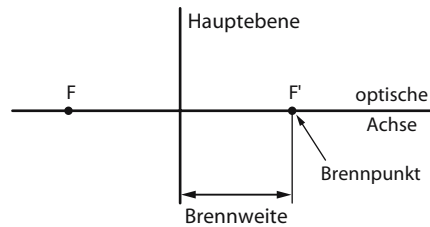
Die Abbildungsgleichung fragt nicht danach, auf welchem technischen Weg die Brennweite einer Linse „gemacht“ wird; bei den Linsenfehlern kann aber die Linsenform eine beträchtliche Rolle spielen. ■ Abbildung 7.39 zeigt die Grundtypen dieser Formen. Will man ein weit entferntes Objekt abbilden, so ist eine plankonvexe Linse besser als eine bikonvexe, sofern man die ebene Seite dem Bild zudreht (und nicht umgekehrt!). Man soll immer versuchen, mit seinem Licht so symmetrisch wie möglich durch eine Linse hindurchzukommen.

Linsenfehler lassen sich auch korrigieren, durch Kompensation nämlich. Mehrere Linsen, aus verschiedenen Glassorten geschliffen und geschickt zusammengesetzt, können ihre Fehler gegenseitig weitgehend aufheben und insgesamt trotzdem noch wie eine abbildende Linse wirken. Speziell gegen die sphärische Aberration und Bildfeldwölbung helfen auch asphärische Linsen, also solche mit zum Beispiel parabolisch gekrümmten Oberflächen. Ihre Herstellung mit computergesteuerten Maschinen ist recht teuer. Die Güte derartiger **Objektive** bestimmen vor allem Qualität und Preis von Kameras, Fernrohren und Mikroskopen.

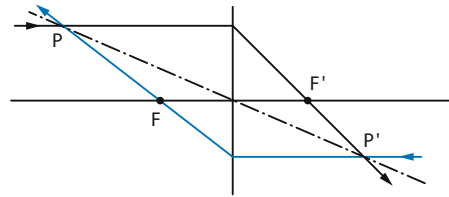
## 7.2.6 Abbildung durch Linsen

### Merke

Einer hinreichend dünnen Linse kann man zuverlässig die Ebene zuordnen, von der aus die Abstände zu Gegenstand und Bild gemessen werden müssen; sie heißt **Hauptebene**. Senkrecht zu ihr durch die Linsenmitte läuft die **optische Achse**. Ein achsenparallel einfallendes Parallellichtbündel wird von der Linse in den Brennpunkt  $F'$  zusammengezogen, er liegt auf der Achse im Abstand der Brennweite  $f$  von der Hauptebene (■ Abb. 7.40).



■ Abb. 7.40. Wesentliche Elemente einer dünnen Linse



■ Abb. 7.41. Bildkonstruktion. Der *schwarz* gezeichnete, von links achsenparallel einlaufende Strahl wird rechts von der Hauptebene zum Brennpunkt; analoges gilt für den *blau* gezeichneten, von rechts anlaufenden Strahl. Der *strichpunktierte* Zentralstrahl wird nicht abgelenkt. Man kann die Zeichnung auch als Konstruktion der Abbildung des Gegenstandspunktes P in den Bildpunkt P' auffassen

Dieser Satz enthält im Grunde alles, was man über die Abbildung durch (fehlerfreie) Linsen wissen muss; den Rest kann man sich leicht überlegen.

Erstens: Linsen wirken symmetrisch – unmittelbar einleuchtend bei einer bikonvexen Linse – d. h. die Brennweiten auf beiden Seiten der Hauptebene sind gleich.

Zweitens: Lichtwege sind umkehrbar – d. h. das divergente Lichtbündel einer Quelle, die im Brennpunkt liegt, verlässt die Linse als achsenparalleles Parallelbündel.

Drittens: Zentralstrahlen, d. h. Strahlen durch den Schnittpunkt von Achse und Hauptebene werden auch dann nicht gebrochen, wenn sie schräg einfallen. Damit lässt sich der für die Bildkonstruktion wichtige Tatbestand auch folgendermaßen formulieren:

### Merke

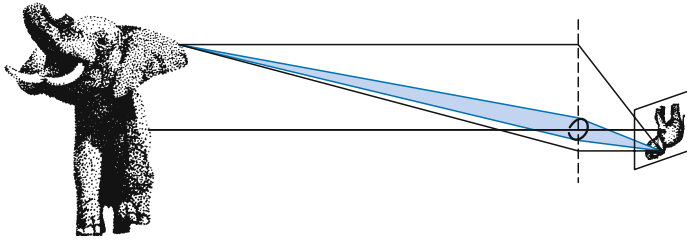
Jeder **achsenparallele Strahl** wird an der Hauptebene zum Strahl durch den Brennpunkt und umgekehrt; jeder **Zentralstrahl** läuft geradeaus weiter.

■ Abbildung 7.41 illustriert dies.

Nun weiß eine Linse nicht, ob ein achsenparallel bei ihr ankommender Strahl (etwa der schwarz gezeichnete in ■ Abb. 7.41) zu einem Parallellichtbündel gehört und damit einer sehr fernen Lichtquelle entstammt oder ob er Teil eines divergenten Bündels ist, das etwa von einer Lichtquelle im Punkte P ausgehen könnte; in jedem Fall

knickt der Strahl an der Hauptebene zum Brennpunkt hin ab. Zum divergenten Bündel des Punktes P gehört nun aber auch der blau gezeichnete Strahl, wenn auch in Gegenrichtung durchlaufen. Er ist links der Hauptebene ein Strahl durch den Brennpunkt, also rechts achsenparallel. Er trifft den schwarzen im Punkte  $P'$  – und dies gilt für alle Strahlen des divergenten Bündels aus P, der Zentralstrahl zeigt es unmittelbar: Die Linse bildet P nach  $P'$  ab, und weil Lichtwege umkehrbar sind, auch  $P'$  nach P. Nach diesem Schema lässt sich zu jedem Punkt eines Gegenstandes der zugehörige Bildpunkt konstruieren. Da grundsätzlich drei Strahlen für die Konstruktion zur Verfügung stehen, kann man sogar seine Zeichengenauigkeit überprüfen.

Es ist keineswegs notwendig, dass die zur Bildkonstruktion auf dem Papier verwendeten Strahlen im praktischen Versuch als Lichtbündel tatsächlich realisiert werden. Strahlen dürfen auch weit außerhalb der Linsenfassung auf die Hauptebene treffen, Lichtbündel laufen nur durch die Linsenöffnung; auf jeden Fall wird aber alles, was vom Gegenstandspunkt P ausgeht, im Bildpunkt



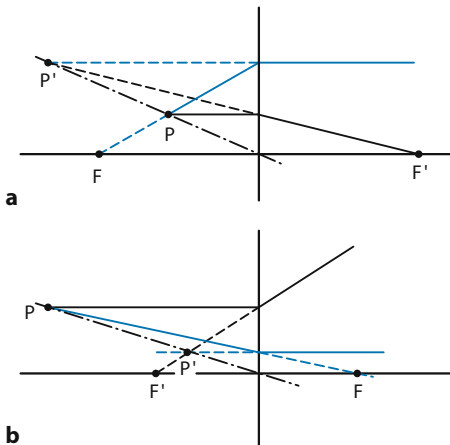
■ Abb. 7.42. Abbildung mit kleiner Linse. Strahlengang zu Bildkonstruktion (schwarz) und abbildendes Bündel (blau) vom Elefantenohr bei der Photographie; schematisch

P' gesammelt, sofern es nur durch die Linse hindurchkommt. Deren Durchmesser bestimmt den Öffnungswinkel des abbildenden Bündels, nicht aber die Lage des Bildpunktes. Auch ein Elefant lässt sich fotografieren, obwohl er viel größer ist als Linse und Kamera (■ Abb. 7.42).

Alle Abbildungen dieses Kapitels sind bisher stillschweigend für Sammellinsen gezeichnet worden, obwohl im Text schlicht von „Linsen“ die Rede war. Tatsächlich gelten die aufgestellten Sätze auch für Zerstreuungslinsen, sofern man nur Folgendes beachtet: Im üblichen Zeichenschema konstruierter Strahlengänge liegt der **Gegenstandspunkt P** links, der **Bildpunkt P'** rechts der Hauptebene - Entsprechendes gilt für den **gegenstandsseitigen Brennpunkt F** und den **bildseitigen F'**; eine Zerstreuungslinse aber hat negative Brennweite, bei ihr liegt im Schema F' links und F rechts. Die Bildkonstruktion läuft dann nach dem glei-

chen Verfahren ab (■ Abb. 7.43b), sie führt zu einem virtuellen Bild, verkleinert und an die Hauptebene herangerückt.

Auch Sammellinsen können virtuelle Bilder geben, dann nämlich, wenn P innerhalb der Brennweite  $f$  liegt. Auch jetzt wird das Bild nach dem gleichen Schema konstruiert (■ Abb. 7.43a); man lasse sich nicht dadurch beirren, dass der gegenstandsseitige Strahl durch den Brennpunkt jetzt nicht mehr von P über F zur Hauptebene gezeichnet werden kann, sondern nur umgekehrt von F über P. Die auf Papier gezeichneten Strahlen müssen ja nicht durch Lichtbündel realisiert werden. Geometrische Optik steht darstellender Geometrie sehr nahe. Das virtuelle Bild, das sich dann ergibt, ist aufrecht und vergrößert: so funktioniert eine Lupe.



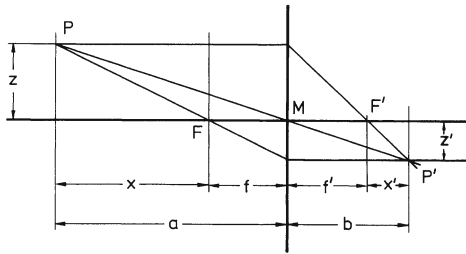
■ Abb. 7.43. Bildkonstruktion virtueller Bilder, Bezeichnungen wie ■ Abb. 7.42. Oberes Teilbild: Zerstreuungslinse, d. h. negative Brennweite, bildseitiger Brennpunkt F' links von der Hauptebene. Unteres Teilbild: Sammellinse, Gegenstandsweite kleiner als Brennweite

### 7.2.7 Abbildungsgleichungen

Man kann nach dem Schema des vorigen Kapitels den Zusammenhang zwischen **Gegenstandsweite a**, **Bildweite b** und **Brennweite f** mühsam und Punktweise durch Konstruktion mit Bleistift und Lineal gewinnen, man kann ihn aber auch ausrechnen mit Hilfe der **Abbildungsgleichung**

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

■■■ Herleitung: In ■ Abb. 7.44 sind zusätzlich zu den bisher schon genannten Elementen der optischen Abbildung der Linsenmittelpunkt M und die Abstände  $z$  und  $z'$  der Punkte P und P' von der optischen Achse eingetragen. Auf der Gegenstandsseite enthält der Strahlengang drei ähnliche rechtwinklige Dreiecke mit dem Brennstrahl als Hypotenuse. Das kleinste mit dem rechten Winkel bei M hat Achse und Hauptebene als Katheten, ihre Längen betragen  $f$  und  $z'$ . Das mittlere hat seine spitzen Ecken bei P und F, seine Kathete



■ Abb. 7.44. Zur Herleitung der Abbildungsgleichung (Einzelheiten im Text)

ten sind  $x = a - f$  und  $z$ . Diese beiden Dreiecke sind einander ähnlich, darum stehen einander entsprechende Seiten untereinander im gleichen Verhältnis:

$$\frac{z}{a-f} = \frac{z'}{f},$$

also

$$\frac{z'}{z} = \frac{f}{a-f}.$$

$z'$  und  $z$  sind aber Messwerte für die Größen von Bild und Gegenstand. Deshalb liefert diese Gleichung den Vergrößerungs- bzw. Verkleinerungsfaktor der Abbildung.

Eine weitere Gleichung liefert ein Vergleich der rechtwinkligen Dreiecke mit spitzen Winkeln bei P und M bzw. P' und M:

$$\frac{z'}{z} = \frac{b}{a}$$

Beide Gleichungen zusammen geben:

$$\frac{f}{a-f} = \frac{b}{a}.$$

Auf beiden Seiten den Kehrwert nehmen und durch  $a$  teilen liefert schon fast die Abbildungsgleichung.

#### Merke

Für die Berechnung der reellen Abbildung mit dünner Linse:

Abbildungsgleichung:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Vergrößerung:

$$\frac{z'}{z} = \frac{b}{a} = \frac{f}{a-f}$$

Ist  $a = 2f$  so ist der Abbildungsmaßstab gerade 1:1 und Bildweite gleich Gegenstandsweite.

Das Bild sehr weit entfernter Objekte liegt hingegen in der Brennebene, denn es sendet prak-

tisch Parallellichtbündel zur Linse. Daraus ergibt sich ein einfaches Verfahren, die Brennweite einer Linse zu bestimmen: Man misst den Abstand, mit dem man die Linse vor die Zimmerwand halten muss, um das gegenüberliegende Fensterkreuz scharf abzubilden. Besonders genau ist die Methode allerdings nicht. Genauere Methoden werden in vielen Medizinerpraktika durchgeführt (s. folgende Praktikumsbox).

Jeder einzelne Bildpunkt eines weit entfernten Objekts liegt dort, wo der Zentralstrahl die Brennebene kreuzt. Notwendige Folgen: je größer die Brennweite, desto größer das Bild, je kleiner die Brennweite, desto größer das Bildfeld (das etwa von einem vorgegebenen Filmformat erfasst wird). Fotografen benutzen deshalb für Fernaufnahmen Teleobjektive mit großer Brennweite und für Innenaufnahmen Weitwinkelobjektive mit kurzer Brennweite. Die Industrie verkauft auch sog. Zoom-Objektive („Gummilinsen“) mit kontinuierlich einstellbarer Brennweite. Mit ihnen kann der Amateurfilmer „Fahraufnahmen“ vortäuschen, ohne sich vom Fleck zu bewegen: Durch Verlängerung der Brennweite wird das Objekt scheinbar „herangeholt“.

#### Rechenbeispiel 7.3: Scharfstellen

► **Aufgabe.** Das „Normalobjektiv“ einer Kleinbildkamera hat die Brennweite  $f = 50$  mm. Dem entspricht auch der Abstand zwischen bildseitiger Hauptebene und Film bei „Normaleinstellung auf Unendlich“. Um wie viel Millimeter muss das Objektiv zur Scharfeinstellung auf einen 45 cm entfernten Gegenstand vorgeschoben werden?

► **Lösung.** Für „Normaleinstellung auf Unendlich“ lautet die Abbildungsgleichung

$$\frac{1}{a'} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{f}$$

und deshalb  $a' = f = 50$  mm. Für  $a = 45$  cm ergibt sich

$$a' = \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \right)^{-1} = 56,23 \text{ mm.}$$

Also muss das Objektiv um 6,23 mm verschoben werden. Ist die Brennweite kleiner, wird auch dieser Verschiebeweg kleiner. Das nützen Autofokus-Kameras gern aus: Die Verschiebemechanik kann bei kleiner Brennweite (z. B. 35 mm) einfacher und ungenauer werden.



## Praktikum

## Linse (Augenmodell)

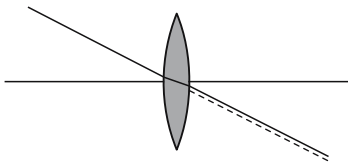
In der Regel wird eine **Brennweite** bestimmt. Es gibt drei Verfahren, die Brennweite einer Sammellinse zu bestimmen:

1) **Einfache Abbildung:** Man bildet einen Gegenstand scharf auf einen Schirm ab, misst Gegenstandsweite und Bildweite und berechnet mit der Abbildungsgleichung die Brennweite. Problem: Man muss die genaue Lage der Hauptebene der Linse kennen. Bei symmetrischen Bikonvexlinsen (■ Abb. 7.39) ist die Hauptebene einfach in der Mitte, bei anderen Formen ist die Position nicht offensichtlich.

2) **Bessel-Verfahren:** Bei festgelegtem Abstand zwischen Gegenstand und Schirm gibt es immer zwei verschiedene Positionen der Linse, die zu einer scharfen Abbildung führen, einmal ein verkleinertes und einmal ein vergrößertes Bild. Der Grund liegt in der Umkehrbarkeit von Strahlengängen. Aus dem Abstand  $s$  der beiden Linsenpositionen und dem Abstand  $a$  von Gegenstand zu Schirm kann die Brennweite  $f$  berechnet werden:

$$f = \frac{a^2 - s^2}{4 \cdot a}.$$

Rückt ein Gegenstand tatsächlich aus dem Unendlichen immer näher heran, so wächst die Bildweite. Entsprechend schiebt der Fotograf für Nahaufnahmen das Objektiv seiner Kamera zur Scharfeinstellung vor, denn die Position der Bildebene ist ihm ja durch den Film konstruktiv vorgegeben. Auf reale Objektive einer Kamera, die immer aus mehreren Linsen bestehen, ist die oben formulierte Abbildungsgleichung allerdings nicht direkt anwendbar. Sie gilt nur für dünne Linsen, bei denen zum Beispiel zu Recht der Paral-



■ **Abb. 7.45. Dicke Linse.** Nur ein längs der optischen Achse laufender Strahl kommt geraden Weges durch die Linse; schräg anlaufende Zentralstrahlen werden parallelversetzt. Bei dünnen Linsen darf man diese Versetzung vernachlässigen

Über die Lage der Hauptebene verrät das Verfahren nichts.

3) **Autokollimation** ermöglicht das Auffinden der Hauptebene. Hier bildet man einen punktförmigen Gegenstand in sich selbst ab, indem auf der anderen Seite der Linse ein Spiegel das Licht zurückwirft und der Gegenstand im Brennpunkt der Linse liegt. Er liegt dann genau im Brennpunkt, wenn auf der anderen Seite der Linse ein Parallellichtbündel austritt und deshalb ein Verschieben des Spiegels die Abbildung nicht ändert. Man misst dann den Abstand des Gegenstands zur vermuteten Position der Hauptebene, dreht anschließend die Linse herum, stellt wieder scharf und misst noch mal. Hat man die Lage der Hauptebene richtig vermutet, misst man denselben Abstand, sonst liegt die Hauptebene im Mittelwert der beiden Distanzen.

lensersatz des Zentralstrahles bei schrägem Einfall (■ Abb. 7.45) vernachlässigt werden kann. Bei Linsensystemen und dicken Linsen berücksichtigt man den Parallelversatz dadurch, dass man zwei Hauptebenen einführt. Wie das funktioniert, gehört zur technischen Optik, die eine Wissenschaft für sich ist und hier nicht vertieft werden soll.

## Rechenbeispiel 7.4: Teleobjektiv

► **Aufgabe.** Ein Tierfreund möchte einen scheuen Hasen auf 3 m Distanz bildfüllend auf seinen Kleinbildfilm (Bildmaße 24×36 mm) bannen. Welche Brennweite muss sein Objektiv dazu haben?

► **Lösung.** Sagen wir einmal, der Hase ist 30 cm hoch, also  $z = 30$  cm. Die Bildhöhe soll  $z' = 26$  mm sein. Die Gegenstandsweite ist  $a = 3$  m. Jetzt müssen wir nur noch die Gleichung

$$\frac{z'}{z} = \frac{f}{a - f}$$

nach  $f$  auflösen. Das Ergebnis ist:

$$f = a \cdot \left( \frac{z}{z'} + 1 \right)^{-1} = 24 \text{ cm.}$$

## 7.2.8 Abbildung durch einfache Brechung

Eine Linse hat immer zwei Oberflächen: Das Licht, das sie durchsetzt, wird zweimal gebrochen. Unerlässlich für eine optische Abbildung ist das nicht. Zur Abbildung genügt bereits eine einzige gekrümmte brechende Fläche. Allerdings kann das Licht auf seinem Weg zum reellen Bildpunkt dann den Glaskörper nicht mehr verlassen; ein Bildschirm, ein fotografischer Film müsste sich in dessen Innerem befinden, allenfalls unmittelbar auf der Rückseite – keine gute Lösung für die Technik, wohl aber für die Natur: Sie kann die lichtempfindliche **Netzhaut** durchaus auf der Rückseite des Augapfels anwachsen lassen. Mit dieser Konstruktion wird die Abbildung durch nur eine brechende Fläche nahe gelegt, und so macht es die Natur im Wesentlichen auch. Die **Hornhaut** übernimmt den Hauptteil der Abbildung, die **Augenlinse** sorgt lediglich für einen gewissen Komfort bei der Scharfeinstellung. Bei einer Staroperation wird diese Linse entfernt; eine Brille muss sie ersetzen, erlaubt aber keine Scharfeinstellung mehr.

■ ■ ■ Was sich bei einer Abbildung mit nur einer brechenden Fläche im Wesentlichen gegenüber einer Linse ändert zeigt ■ Abbildung 7.46: Vor und in dem Glaskörper ergeben sich unterschiedliche Brennweiten  $f$  und  $f'$ . Dadurch modifiziert sich die Abbildungsgleichung. Liegen Bild und Bildweite  $b$  im Glaskörper, so ergibt sich:

$$\text{Abbildungsgleichung} \quad \frac{f}{a} + \frac{f'}{b} = 1.$$

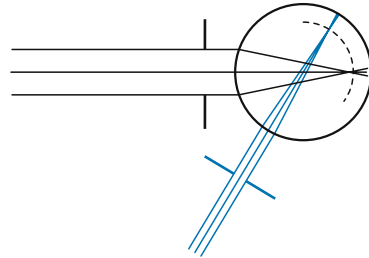
Sie herzuleiten, ist nicht sonderlich schwer, aber etwas mühsam und wenig ergiebig.

Die beiden Brennweiten  $f$  und  $f'$  stehen im gleichen Verhältnis wie die Brechzahlen  $n$  und  $n'$  der Medien, in denen sie liegen. Man kann deshalb der Brechwert so definieren, dass er auf beiden Seiten gleich wird:

$$\text{Brechwert} \quad D = \frac{n}{f} = \frac{n'}{f'}.$$

Bei der Linse ist die Brechzahl des Mediums drumherum (Luft) gleich eins, sodass die Brechwert, wie in ► Kap. 7.2.5 gesagt, einfach der Kehrwert der Brennweite ist.

Aus welcher Richtung man eine Kugel auch immer anschaut, sie zeigt sich stets in gleicher Gestalt. Von wo ein Lichtbündel auch anläuft, auf jeden Fall besitzt es eine **optische Achse**, auf der ein Lichtstrahl durch das Kugelzentrum zum Bildpunkt läuft. Die Brennflä-



■ Abb. 7.46. Abbildende Kugel (Augenmodell). Parallelbündel aus verschiedenen Richtungen werden von einer brechenden Kugel in eine zu ihr konzentrische Kugelfläche (Brennfläche) abgebildet

che einer brechenden Kugel ist deshalb selbst eine Kugelfläche; beide Kugeln haben den gleichen Mittelpunkt, wie ■ Abbildung 7.46 zeigt. Diese Zeichnung hat freilich einen etwas akademischen Charakter. Man braucht nämlich eine für sichtbares Licht ungewöhnlich hohe Brechzahl  $>2$ , um die Brennfläche in die brechende Kugel hineinzubekommen. Mit Diamant ginge es:  $n = 2,41$ . Eben das macht ihn für Schmuckstücke so beliebt: Zu großem  $n$  gehört ein kleiner Grenzwinkel der Totalreflexion. Er erlaubt, Diamanten zu Brillanten mit vielen glitzernden Flächen zu schleifen. Organisches Leben, das Augen bilden will, kann diese Brechzahlen aber nicht verwirklichen. Die Hornhaut ist deshalb vorne stärker gekrümmt als die Oberfläche des Augapfels sonst.

## 7.2.9 Das Auge

Das Auge des Menschen besteht im Wesentlichen aus einer lichtdurchlässigen Kugel von ca. 24 mm Durchmesser, dem **Glaskörper** (Bulbus). Seine Rückseite ist mit der lichtempfindlichen **Netzhaut** belegt, der Retina. Man könnte nun hoffen, eine solche Kugel erlaube, zumindest die halbe Welt mit einem einzigen „Panoramablick“ zu erfassen, denn die Optik der brechenden Kugel bevorzugt ja keine Blickrichtung. Im vorigen Kapitel hatte sich aber gezeigt: Um die Brennfläche einer Kugel auf ihre eigene Oberfläche zu legen, braucht man ein Material mit der Brechzahl 2. Das steht der Natur im Bereich der organischen Substanzen nicht zur Verfügung; beim Glaskörper muss sie sich mit  $n = 1,34$  zufrieden geben. Folglich wölbt sie die **Hornhaut**, die Kornea, deutlich vor, verrin-

gert dadurch den Radius der brechenden Kugelfläche und mit ihm die Brennweite. Der Panoramablick geht verloren; er wird durch hohe Rotationsbeweglichkeit des Auges ersetzt.

Mit der vorgewölbten Hornhaut wäre das Auge freilich fest auf eine ganz bestimmte Sehweite eingestellt (plusminus Schärfentiefe): Kornea und Retina können ja nicht gegeneinander verschoben werden. Für die **Akkommodation**, für die Scharfeinstellung auf nahe Objekte, baut die Natur dem Menschenauge deshalb noch eine **Augenlinse** ein, bestehend aus einer gallertartigen Masse mit der Brechzahl 1,41. Sie selbst überlassen, möchte sie unter der Wirkung der Oberflächenspannung Kugelform annehmen. Daran wird sie aber von radial angreifenden Spannfasern gehindert. Diese ziehen sie flach, sodass sie eine echte Bikonvexlinse bildet. Außen hängen die Spannfasern an einem Ringmuskel (■ Abb. 7.47). Kontrahiert er, so geben die Fasern nach und die Linse wird kugelig, ihr Brechwert steigt: Akkommodation auf kleinere Sehweite.

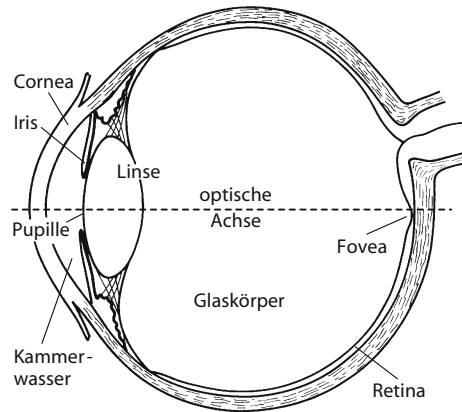
Bei „entspanntem Auge“, d.h. entspanntem Ringmuskel und gespannt flach gezogener Linse akkommodiert der Normalsichtige „auf unendlich“. Von dem dafür notwendigen Brechwert liefert die Hornhaut den Löwenanteil, nämlich 43 Dioptrien (dpt), während die Linse nur 15 dpt hinzutut. Wird sie bei einer Staroperation entfernt, so braucht die **Starbrille** nur diese 15 dpt zu ersetzen, denn der Brechwert der Hornhaut bleibt erhalten. Die Fähigkeit zur Akkommodation geht freilich verloren, aber das tut sie in höherem Lebensalter sowieso.

#### Merke

Auges des Menschen:

- Brechwert der Hornhaut ca. 43 dpt
- Brechwert der Linse ca. 15 dpt
- Akkommodation: Scharfeinstellung des Auges durch Änderung der Linsenkrümmung

Im Vergleich mit dem Objektiv auch eines billigen Fotoapparates nehmen sich die optischen Eigenschaften des Auges recht kümmerlich aus. Der Industrie stehen im Bereich der unbelebten Natur

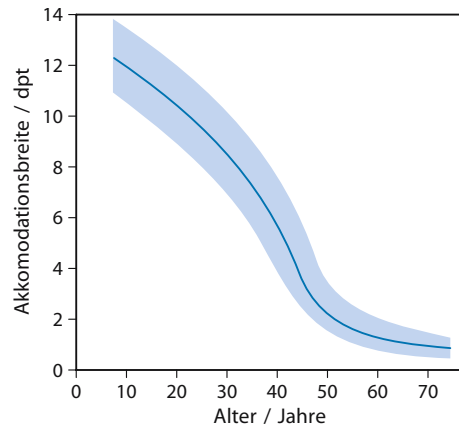


■ Abb. 7.47. Menschliches Auge. Horizontaler Schnitt

einfach die besseren Materialien zur Verfügung. Die Natur hat andere Möglichkeiten, diesen Nachteil auszugleichen. Vor allem kann sie dem Auge eine große Beweglichkeit verleihen, mit dem der Glaskörper in der Augenhöhle herumrollt. Das erlaubt, auf der anderen Seite sehr rationell zu arbeiten: Nur ein kleiner Teil der Netzhaut, die **Fovea**, ist dicht mit Sehzellen belegt, die ihre eigenen „Leitungen“ ins Gehirn besitzen. Dort liegen die Konvergenzpunkte derjenigen Lichtbündel, die nur wenig gegen die optische Achse geneigt sind, sodass sich Linsenfehler auch nur relativ wenig auswirken. Auch weiter außen vermag die Retina durchaus noch Einzelheiten auseinander zu halten. Hohes Auflösungsvermögen der Sehzellen lohnt hier aber nicht mehr, weil es sich optisch doch nicht erreichen lässt. Dafür erlaubt die hohe Beweglichkeit, das Auge rasch in die jeweils interessanteste Blickrichtung zu drehen. Wer ein Buch liest, vermag kaum mehr als ein einzelnes Wort gleichzeitig scharf zu sehen; seine Augen folgen dem Text auch im Zeilensprung allemal so schnell, wie das Gehirn den Inhalt des Gelesenen zu erfassen vermag. Nur der Ungeübte nimmt hierbei den Finger zu Hilfe. Die Kugelform der Augen ist nicht aus optischen Gründen zweckmäßig, sondern aus mechanischen.

Dieses Verfahren, das wirksame Gesichtsfeld durch rasche Augenbewegung zu erweitern, stellt übrigens beträchtliche Anforderungen an den Mechanismus, mit dem die Signale der Sehzellen neural verarbeitet werden, bis sie ins Bewusstsein

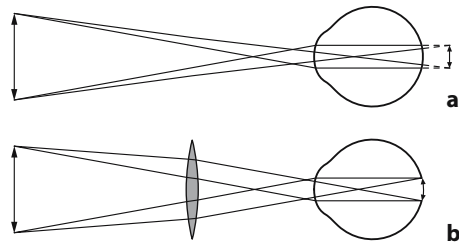
vordringen. Jede Bewegung der Augäpfel lässt ja das optisch erzeugte Bild über die Netzhaut gleiten, meist weit schneller als dies bei starrem Blick aus dem D-Zug-Fenster geschieht. Trotzdem registriert ein ruhender Beobachter seine Umgebung ganz korrekt als ruhend und der fahrende ebenso korrekt als fahrend. Das ist nur möglich, wenn ein Neurocomputer die Signale der Sehnerven der Augenbewegung entsprechend korrigiert, ehe er sie auf der Ebene des Bewusstseins ankommen lässt. Dazu werden dem Computer die an die zuständige Augenmuskulatur gegebenen Befehle mitgeteilt. Wer seine Augen „von Hand“ bewegt, etwa indem er mit dem Zeigefinger vorsichtig am rechten Augenwinkel zieht, der sieht die Welt wackeln.



■ **Abb. 7.48. Akkommodationsbreite.** Abnahme der Akkommodationsbreite mit dem Lebensalter. Der graue Bereich deutet die Schwankungen in der Bevölkerung an

### 7.2.10 Fehlsichtigkeit und Brillen

Ein gesundes Auge sieht die Sterne scharf, sein Fernpunkt liegt im Unendlichen. Die kürzeste individuell noch scharf einstellbare Sichtweite entspricht dem jeweiligen Nahpunkt. Zwischen beiden liegt die „Akkommodationsentfernung“. Es hat etwas für sich, nicht sie selbst anzugeben, sondern ihren Kehrwert, die **Akkommodationsbreite**, und zwar in Dioptrien. Wer auf alles akkommodieren kann, was sich zwischen 12,5 cm und unendlich vor seinem Auge befindet, hat eine Akkommodationsbreite von 8 dpt. Scharfeinstellung auf sehr kurze Entfernung strengt den Ringmuskel um die Augenlinse auf die Dauer an. Immerhin vermag der normalsichtige Mensch aber stundenlang zu lesen, d. h. auf die übliche Leseentfernung von ca. 35 cm zu akkommodieren. Mit dem Lebensalter lassen aber die Elastizität der Augenlinse und die Spannkraft des Ringmuskels nach: Die Akkommodationsbreite nimmt ab und der Nahpunkt entfernt sich (■ Abb. 7.48). Wenn sein Kehrwert 3 dpt unterschritten hat, wird das Lesen mühsam; man muss die Zeitung weiter weg halten, und schließlich werden die Arme zu kurz und die Schrift zu klein. Weil das beim Menschen meist im Laufe seines fünften Lebensjahrzehnts einsetzt, spricht man hier von **Alterssichtigkeit**. Sie lässt sich mit einer Sammellinse als **Brille** kompensieren (■ Abb. 7.49). Es ist nur eine **Lesebrille**,



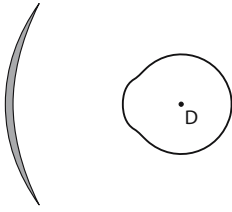
■ **Abb. 7.49a,b. Lesebrille.** a Alterssichtigkeit schiebt den Nahpunkt über die Bezugssehweite hinaus; dort liegende Objekte werden hinter die Netzhaut abgebildet und unscharf gesehen. b Abhilfe durch eine Sammellinse als Brille; Abbildung auf die Netzhaut auch bei Akkommodation auf unendlich

die ihr Träger absetzen muss, wenn er in die Ferne schauen will.

#### Merke

Akkommodationsbreite  $\Delta D$ : Differenz der Brechkräfte des entspannten und des voll akkommodierten Auges,  $\Delta D$  nimmt im Laufe des Lebens von etwa 12 dpt auf etwa 1 dpt ab (Alterssichtigkeit).

Beständen Brillengläser aus flachen, hier also bikonvexen Linsen, so beeinträchtigte deren Astigmatismus (► Kap. 7.2.5) den Blick, sobald die Augen nicht starr geradeaus sehen, sondern nach oben, unten oder zur Seite gerollt werden. Zur



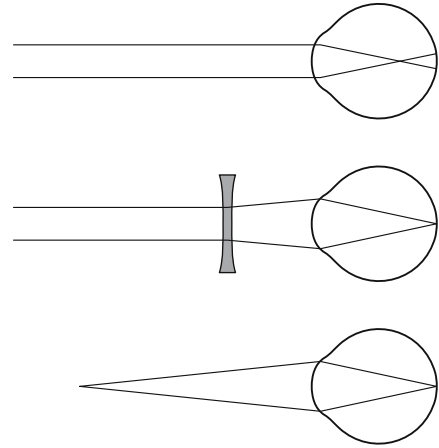
■ **Abb. 7.50. Brillenglas.** Brillengläser, die einer Kugelfläche um den Augendrehpunkt D angepasst sind, umgehen den Astigmatismus einer Linse gegenüber schräg einlaufenden Bündeln

Abhilfe passt man die Gläser einer Kugelfläche an, in deren Zentrum der Augendrehpunkt liegt (■ Abb. 7.50). Der Blick geht dann immer halbwegs senkrecht durch das Brillenglas.

Bei manchen Menschen ist der Augapfel ein wenig zu groß für die Krümmung der Hornhaut; auch bei völlig entspanntem Auge liegen Bilder vom Mond vor der Netzhaut und können durch kein Akkommodationsbemühen auf sie gebracht werden. Nur hinreichend nahe Gegenstände erscheinen scharf: Der Fernpunkt ist herangerückt – beispielsweise auf 25 cm entsprechend 4 dpt. Man nennt ein solches Auge **kurzsichtig**. Dass bei voll erhaltener Akkommodationsbreite der Nahpunkt ebenfalls heranrückt, nützt dem Träger des Auges nicht viel, denn hier bringen 4 dpt mehr nur wenige Millimeter. Die lebenswichtigen hohen Sehweiten lassen sich aber durch eine Brille mit Zerstreuungslinsen zurückgewinnen. Einfallende Parallelbündel müssen derart divergent aufgeweitet werden, dass ihre Konvergenzpunkte hinter der Hornhaut bei entspanntem Auge gerade auf die Netzhaut fallen (■ Abb. 7.51). Auch das Umgekehrte kommt vor: Der Augapfel ist zu kurz, die Krümmung der Hornhaut zu gering. Einen zu kleinen Brechwert des **weitsichtigen** Auges kann eine Brille mit Sammellinsen korrigieren, in Grenzen aber auch einfache Akkommodation.

#### Merke

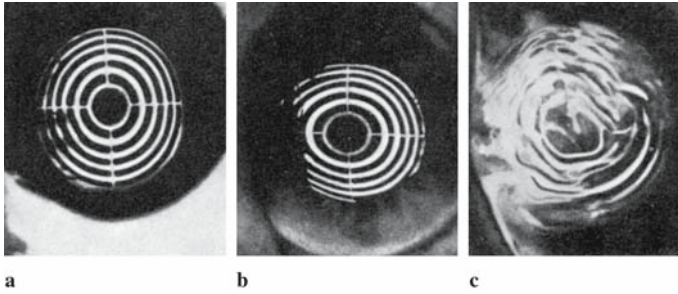
Kurzsichtig: Brechwert im Vergleich zum Augapfel zu groß, Fernpunkt  $< \infty$ , Brille konkav, weitsichtig: Brechwert im Vergleich zum Augapfel zu klein, Brille (wenn nötig) konvex.



■ **Abb. 7.51. Kurzsichtigkeit.** Bei einem kurzsichtigen Auge muss der zu hohe Brechwert der Hornhaut (*erstes Teilbild*) durch eine Zerstreuungslinse reduziert werden. Sie weitet ein achsenparallel einfallendes Parallellichtbündel gerade so stark auf, dass es von der Hornhaut auf das Zentrum der Retina fokussiert wird (*zweites Teilbild*). Das von der Linse aufgeweitete Bündel entspricht einem divergenten Bündel, das aus dem Fernpunkt des kurzsichtigen Auges stammt (*drittes Teilbild*)

Auch bei einem kurzsichtigen Menschen nimmt die Akkommodationsbreite mit dem Lebensalter ab. Wessen Fernpunkt zufällig bei 30 cm liegt, der kann nach wie vor bequem und ohne Brille lesen. Wer dieses Glück nicht hat, muss dann, wenn seine zuvor normalsichtigen Altersgenossen Sammellinsen als Lesebrillen aufsetzen, die Zerstreuungslinsen seiner Fernbrille durch weniger starke ersetzen.

Nicht notwendigerweise bildet die Hornhaut eine kugelförmige Oberfläche aus. An sich sollte sie von einem schießscheibenähnlichen Objekt ein Spiegelbild entwerfen, das ebenfalls aus konzentrischen Kreisen besteht. Sieht der Arzt im **keratoskopischen Bild** Ellipsen (■ Abb. 7.52), so ist das Auge vermutlich **astigmatisch**. Dabei handelt es sich um eine Fehlsichtigkeit, die sich mit einem selbst astigmatischen Brillenglas korrigieren lässt, einem Glas also, in das ein Zylinderanteil bewusst eingeschliften worden ist. Auf die richtige Position der Zylinderachse muss dann beim Einsetzen in die Brillenfassung geachtet werden. Unebenheiten der Hornhaut, wie sie von einem Bild entsprechend ■ Abb. 7.53c angezeigt werden, lassen sich freilich nur noch durch **Haftschalen** so ei-



■ **Abb. 7.52a–c. Hornhautverformung.** Schießscheibenähnliches Objekt, gespiegelt an der Hornhaut eines leidlich normalsichtigen (a) und eines astigmatischen Auges (b). Unebenheiten der Hornhaut (c) lassen sich nicht durch eine Brille und nur begrenzt durch eine Haftschale korrigieren (nach Landois-Rosemann)

nigermassen ausgleichen, die auch von „normal“ Fehlsichtigen unmittelbar auf die Hornhaut gesetzt werden.

Der Augenarzt findet sein endgültiges Brillenrezept im Wesentlichen durch Probieren. Dazu braucht er nicht alle denkbaren Brillengläser vorrätig zu halten; er darf kombinieren. Linsen, die dicht hintereinander stehen, addieren (im Wesentlichen) ihre Brechwerte, ob sie nun Sammel-, Zerstreuungs- oder Zylinderlinsen sind.

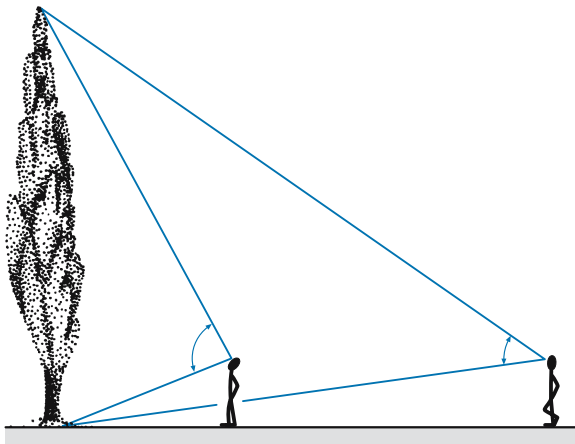
### 7.2.11 Optische Instrumente

Wie groß ein Spaziergänger eine Pappel sieht, hängt nicht nur von der Höhe des Baumes ab, sondern auch von seiner Entfernung. Entscheidend ist die Größe des Bildes auf der Netzhaut, und die wird vom Sehwinkel bestimmt, dem Winkel zwischen den Zentralstrahlen der abbildenden Bündel von Fuß und Gipfel der Pappel (■ Abb. 7.53).

Sonne und Mond erscheinen dem irdischen Beobachter gleich groß – sie sind es nicht, aber ihre **Sehwinkel** sind es. Wenn man ein Objekt „mit einem Blick“ erfassen kann, beträgt der Sehwinkel nur einige Grad. Dann darf man in guter Näherung schreiben:

$$\text{Sehwinkel} = \frac{\text{Abmessung des Objektes}}{\text{Entfernung des Objektes}}$$

Der Mensch sieht, was auf seiner Netzhaut erscheint: ein flaches Bild der Umwelt. Der Gesichtssinn hat aber gelernt, dieses Bild räumlich zu interpretieren. Bei hinreichend nahen Gegenständen hilft dabei das **binokulare**, das beidäugige Sehen: Da beide Augen aus etwas unterschiedlichem Gesichtswinkel schauen, übermitteln sie auch etwas verschiedene Bilder vom gleichen Objekt; das Gehirn deutet diese Unterschiede räumlich. **Stereoskopische Doppelaufnahmen** nutzen diese Fähigkeit; sie erlauben sogar, den Eindruck der Tiefe kräftig zu übertreiben, wenn die beiden Bilder



■ **Abb. 7.53. Sehwinkel.** Je näher der Beobachter an die Pappel herangeht, umso größer wird der Sehwinkel, unter dem sie ihm erscheint



nämlich aus Positionen aufgenommen wurden, die weit mehr als nur einen Augenabstand auseinander lagen. Die räumliche Interpretation gelingt aber auch bei einem flachen Bild mühelos, sofern es nur die Perspektive einigermaßen richtig wiedergibt. Ein ferner Gegenstand muss kleiner gezeichnet werden, denn in der Natur käme ihm ein kleiner Sehwinkel zu.

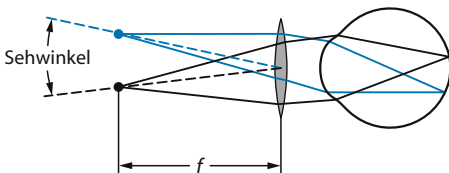
Wer etwas genauer betrachten will, muss den Sehwinkel vergrößern. Das gängige Verfahren heißt: näher herangehen. Ist man aber schon so nahe, dass das Auge nicht mehr scharf stellen kann, hilft eine **Lupe**. Im einfachsten Fall besteht sie aus einer Sammellinse von wenigen Zentimetern Brennweite. Von allen Gegenstandspunkten in ihrer Brennebene erzeugt sie Parallellichtbündel, die das entspannte Auge auf seine Netzhaut abbildet, als kämen sie von unendlich fernen Gegenständen. Die Sehwinkel werden jetzt aber von der Lupe vorgegeben; sie sind so groß, als könne das Auge auf deren Brennebene scharf stellen (■ Abb. 7.54). Der Abstand zwischen Lupe und Auge spielt der Parallelbündel wegen keine grundsätzliche Rolle. Nur wenn man ihn klein hält, erlaubt die Lupe ein größeres Gesichtsfeld, denn dieses wird von der Linsenfassung begrenzt.

Den **Vergrößerungsfaktor**  $\Gamma$  eines optischen Instruments bezieht man auf die von ihm bewirkte Vergrößerung des Sehwinkels:

$$\Gamma = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}}$$

Bei der Lupe entspricht der Gewinn an Sehwinkel dem Gewinn an Nähe zum Objekt. Dabei bezieht man den Sehwinkel ohne Instrument auf die offizielle **Bezugssehweite** von 25 cm (sie wird zuweilen nicht ganz glücklich „deutliche Sehweite“ genannt). Folglich gilt

$$\Gamma = \frac{25 \text{ cm}}{f_{\text{Lupe}}}$$



■ Abb. 7.54. Strahlengang einer Lupe

### Merke

Optische Instrumente:

Vergrößerungsfaktor

$$\Gamma = \frac{\text{Sehwinkel mit Instrument}}{\text{Sehwinkel ohne Instrument}}$$

$$\text{Sehwinkel} = \frac{\text{Abmessung des Objektes (Bildes)}}{\text{Entfernung des Objektes (Bildes)}}$$

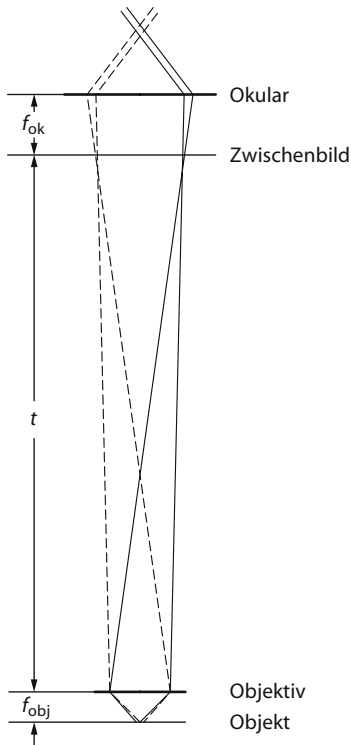
Auf weniger als Nasenlänge kann man ein Objekt nur schwer an das Auge heranzuführen; dadurch ist der Bereich sinnvoller Lupenbrennweiten nach unten begrenzt. Niemand muss aber das Objekt seines Interesses unmittelbar unter die Lupe nehmen: Es genügt ein reelles Bild, entworfen von einem **Objektiv** in handlichem Abstand vor der Nasenspitze. Deckt sich dieser Abstand so ungefähr mit der Brennweite des Objektivs, so ist der betrachtete Gegenstand weit weg, ein verkleinertes Bild liegt in der Brennebene, und das Instrument ist ein Fernrohr. Hat das Objektiv demgegenüber eine kurze Brennweite, dann liegt das Objekt nahezu in seiner Brennebene, ein vergrößertes Bild auf Abstand dahinter in Nasennähe, und das Instrument ist ein **Mikroskop**. Das Grundsätzliche seines Strahlenganges zeigt ■ Abbildung 7.55.

Die optische Industrie hat sich darauf geeignet, das Zwischenbild des Mikroskops normalerweise 180 mm hinter die Hauptebene des Objektivs zu legen; dadurch kommt der Mikroskopist mit dem Objekthalter in handliche Entfernung. Demnach ist das Zwischenbild gegenüber dem Objekt ziemlich genau um den Abbildungsmaßstab  $\Gamma_{\text{obj}} = 180 \text{ mm} / f_{\text{obj}}$  vergrößert. Es wird mit einer Lupe betrachtet, die jetzt **Okular** heißt und den Vergrößerungsfaktor  $\Gamma_{\text{ok}} = 250 \text{ mm} / f_{\text{ok}}$  mitbringt. Daraus ergibt sich für die Gesamtvergrößerung des Mikroskops

$$\Gamma_{\text{M}} = \Gamma_{\text{obj}} \cdot \Gamma_{\text{ok}} = \frac{180 \text{ mm}}{f_{\text{obj}}} \cdot \frac{250 \text{ mm}}{f_{\text{ok}}}$$

$\Gamma_{\text{obj}}$  und  $\Gamma_{\text{ok}}$  sind auf den Mikroskopobjektiven und -okularen eingraviert. Das Zwischenbild existiert nicht materiell, es schwebt frei im Tubus des Mikroskops. Man kann an seine Position eine Glasplatte bringen, in die ein Maßstab eingritz ist, ein sog. **Okularmikrometer**: Der Beobachter sieht es zusammen mit dem Objekt scharf (vgl. hierzu ■ Abb. 1.5). Das Zwischenbild „steht auf





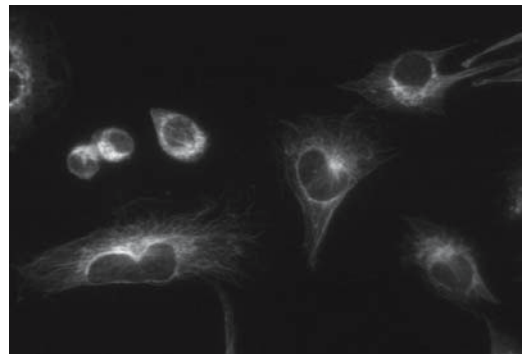
■ **Abb. 7.55. Mikroskop**, grundsätzlicher Strahlengang; das Objektiv entwirft mit seiner kurzen Brennweite  $f_{\text{obj}}$  ein vergrößertes reelles Zwischenbild im Abstand der „optischen Tubuslänge“  $t$  (meist 180 mm) hinter seiner bildseitigen Hauptebene, das Okular macht daraus Parallelbündel für das Auge des Betrachters. In die Ebene des Zwischenbildes kann ein Okularmikrometer gesetzt werden (vgl. ■ **Abb. 1.5**). In der Nähe dieser Ebene befindet sich meist eine konvexe Feldlinse, die der Vergrößerung des überschaubaren Bildfeldes dient. Das Objekt befindet sich etwas unterhalb der dingseitigen Brennebene, weil das Zwischenbild nicht im Unendlichen liegt; der Effekt ist zu gering, um in der Zeichnung maßstabsgerecht dargestellt werden zu können

dem Kopf“, es ist gegenüber dem Objekt um  $180^\circ$  gedreht, aber es ist nicht seitenverkehrt wie ein Spiegelbild. Der Kopfstand stört nicht und man lernt rasch, wie man ein Objekt auf dem Mikroskopisch verschieben muss, um es richtig ins Bildfeld zu bekommen.

■■■ Mikroskope können sich erheblich darin unterscheiden, wie das Objekt beleuchtet wird. Durchsichtige Objekte kann man von unten beleuchten (**Hellfeld**). Man kann sie und Oberflächen auch von der

Seite beleuchten und sieht dann helle Strukturen auf dunklem Untergrund (**Dunkelfeld**). Man kann mit dem Licht auch von oben durch das Objektiv kommen (**Auflicht**). Mit der komplizierteren **Phasenkontrast**-Mikroskopie kann man nicht nur Hell-Dunkel-Unterschiede in Objekten sehen, sondern auch Brechungsindexunterschiede im Objekt. Das ist gerade für dünne Zellschnitte interessant. In der Biologie ist es auch sehr beliebt, bestimmte Strukturen in Zellen zum Beispiel selektiv mit Fluoreszenzfarbstoffen zu markieren. Beleuchtet man dann mit unsichtbarer Ultraviolettstrahlung, so leuchten diese Farbstoffe im sichtbaren Bereich und verdeutlichen so die Strukturen (■ **Abb. 7.56**). In Scanning-Laser-Mikroskopen kann man gar nicht mehr hineinschauen. Ein elektronisch gesteuerter Lichtstrahl tastet das Objekt ab und liefert eine perspektivische Darstellung der dreidimensionalen Struktur einer Oberfläche auf einen Computerbildschirm.

Auch beim astronomischen **Fernrohr** wird das Objekt kopfüber abgebildet. Alle Mondkarten haben den Südpol oben, also so, wie man den Mond von der Nordhalbkugel der Erde im **umkehrenden astronomischen Fernrohr** sieht. Darauf muss nicht achten, wer seinen **Feldstecher** benutzt. Der ist ja für terrestrische Beobachtung gebaut und darf sein Bild eben nicht auf den Kopf stellen. Man muss aber die Parallelbündel, die man seinem Auge mit vergrößertem Sehwinkel anbieten will, nicht unbedingt mit einer Sammellinse herstellen, die *hinter* dem Zwischenbild liegt; eine Zerstreuungslinse *vor* ihm tut es auch. Dann werden die Sehwinkel nicht umgekehrt und das Bild erscheint auf der Netzhaut in gewohnter Stellung. So arbeitet das **Opernglas**. Hohe Vergrößerungen verlangen beim



■ **Abb. 7.56. Fluoreszenzmikroskopie**. Im Bild sind Gewebezellen von Mäusen zu sehen, an denen sich mit Fluoreszenzfarbstoff markierte Antikörper angelagert haben (*hell*). Der Wissenschaftler erfährt, dass und wo sich die Antikörper anlagern (Aufnahme von M. Hafner)

Fernrohr langbrennweitige Objektive und entsprechend große Lichtwege. Trotzdem kann man mit kleiner Baulänge auskommen, wenn man den Strahlengang durch mehrfache Reflexionen zusammenfaltet. Der Prismenfeldstecher benutzt hierfür totalreflektierende Prismen, mit denen er das Bild auch gleich noch aufrichtet.

Vom Standpunkt der geometrischen Optik sind den Vergrößerungsfaktoren optischer Instrumente keine Grenzen gesetzt. Tatsächlich wird die noch sinnvolle Vergrößerung aber durch Beugungserscheinungen bestimmt, die von der Wellenlänge des Lichtes abhängen (► Kap. 7.4.4): Details von Objekten, die unter  $1\text{ }\mu\text{m}$  liegen, lassen sich im Lichtmikroskop kaum noch auflösen. Das entspricht einer Grenzvergrößerung von etwa 1000, genug für Einzeller und viele Bakterien, zu wenig für Details in den Zellen und Viren.

■ ■ ■ Beim Betrachten von Gewebezellen zum Beispiel würde man sich eine bessere Auflösung wünschen. Also nehme man statt sichtbarem Licht Röntgenlicht mit einer Wellenlänge von zum Beispiel  $3\text{ nm}$ . Einfach ist

das allerdings nicht, denn eine Glaslinse lässt Röntgenlicht völlig unbeeindruckt. Dennoch gibt es **Röntgenmikroskope** als hoffnungsvolle Neuentwicklung im Forschungsstadium. Wegen der notwendigen sehr intensiven Röntgenlichtquelle sind sie extrem teuer. Es gibt gegenwärtig auf der Welt etwa ein halbes Dutzend.

#### Rechenbeispiel 7.5: Vorsicht mit dem Objektiv

► **Aufgabe.** Ein Mikroskopobjektiv habe den Vergrößerungsfaktor 100. Welchen Wert hat die Brennweite des Objektivs? Wie dicht muss die Frontlinse an das Objekt herangeführt werden?

► **Lösung.** Wenn die Tubuslänge (und damit die Gegenstandsweite)  $180\text{ mm}$  ist, gilt

$$f = 180\text{ mm}/100 = 1,8\text{ mm}$$

Wie dicht die Frontlinse herangeführt werden muss, lässt sich genau erst sagen, wenn man die Lage der gegenstandsseitigen Hauptebe-  
ne kennt. Auf jeden Fall muss das Objekt ziemlich genau in die gegenstandsseitigen Brennebene gebracht werden, also  $1,8\text{ mm}$  an die Hauptebe-  
ne heran. Um eine möglichst hohe Auflösung zu erlangen (► Kap. 7.4.5), muss ein möglichst großer Winkelbereich vom Objektiv erfasst werden. Deshalb ist der Glaskörper der Linse bei so stark vergrößerten Objektiven tatsächlich oft nur noch wenige Zehntel Millimeter vom Objekt entfernt. Die Gefahr, beim Scharfstellen das Objekt zu beschädigen, ist dann groß.

### Praktikum

#### Mikroskop

Zwei Aufgaben stehen im Praktikum typischerweise an:

Ausmessen eines sehr kleinen Objektes mit Hilfe des Objektmikrometers und der Okularskala. Dies ist in ► Kap. 1.1.3 beschrieben.

Bestimmung der Vergrößerung des Objektivs und der Gesamtvergrößerung. Die Vergrößerung des Objektivs kann im Prinzip sehr genau gemessen werden, da es ein reelles Zwischenbild in den Tubus wirft. Um das Zwischenbild zu sehen, muss eine Mattscheibe in den Tubus eingebracht werden. Man vergleicht dann eine Skala auf der Mattscheibe mit dem Bild des Objektmikrometers. Schwieriger ist es mit der Gesamtvergrößerung, da das Okular nur ein virtuelles Bild liefert. Man muss jetzt mit einem Auge durch das Mikroskop auf das Objektmikrometer sehen und gleichzeitig mit dem anderen Auge auf eine  $25\text{ cm}$  entfernte Vergleichsskala. Das erfordert etwas Übung und liefert kein sehr genaues Ergebnis.

## 7.3 Intensität und Farbe

### 7.3.1 Strahlungs- und Lichtmessgrößen

Eine elektromagnetische Welle transportiert Energie. Sie tut dies mit einer Leistung, die **Strahlungsleistung** (**Strahlungsfluss**) genannt wird, üblicherweise den Buchstaben  $\Phi$  bekommt und in Watt gemessen werden kann. In einem schmalen Frequenzbereich transportiert die Welle sichtbares Licht, dieses mit einem **Lichtstrom**, der ebenfalls den Buchstaben  $\Phi$  bekommt, aber in **Lumen** ( $\text{lm}$ ) gemessen wird. Bei der **Strahlungsmessung** zählt nur die Leistung, unabhängig von ihrer spektralen Verteilung. Bei der **Lichtmessung** wird

die spektrale Verteilung entsprechend der spektralen Empfindlichkeit des normalen menschlichen Auges bewertet. Strahlungsleistung im Grünen bringt viel, im Blauen und Roten weniger, im Ultraviolett und Infrarot gar nichts.

Die schon beim Schall besprochene **Intensität** (**Strahlungsflussdichte**, **Energiestromdichte**) ist eine Strahlungsleistung pro senkrecht zur Strahlrichtung stehenden Querschnittsfläche  $A_0$  (■ Abb. 7.57):

$$I = \frac{\Phi}{A_0}$$

Sie hat die Einheit Watt durch Quadratmeter ( $1 \text{ W/m}^2$ ). Ist der Strahler so klein, dass er als punktförmig angesehen werden darf, so nimmt die Querschnittsfläche des divergenten Bündels mit dem Quadrat des Abstandes  $r$  zur Strahlenquelle zu und die Intensität entsprechend ab:

$$I \sim 1/r^2.$$

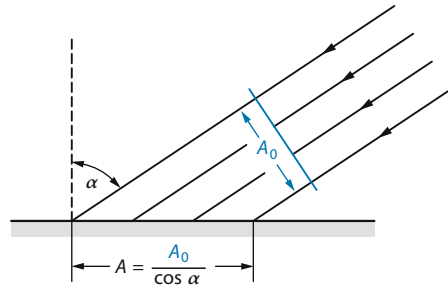
Das ist das **quadratische Abstandsgesetz** für die Intensität, von dem schon in ► Kap. 4.3.4 beim Schall die Rede war.

Eine ganze Reihe von weiteren Strahlungs- und Lichtmessgrößen beschreiben die Eigenschaften eines Strahlers (Lampe) oder das Licht am Ort des Empfängers. Sie sind wohl nur für den Experten interessant. Weil der Gegenstandskatalog einige aber aufführt, seien sie hier im Kleingedruckten erläutert.

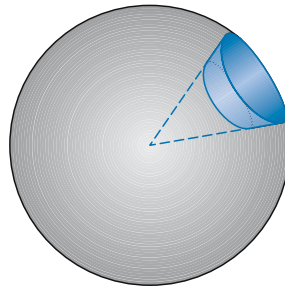
#### Merke

Strahlungsmessgrößen: wellenlängenunabhängig,  
Lichtmessgrößen: an die spektrale Empfindlichkeit des Auges angepasst.

■ ■ ■ Seit vielen Jahrmillionen liefert die Sonne auf die Distanz des Erdbahnradius Strahlung mit der extraterrestrischen Solarkonstanten (Intensität)  $1,36 \text{ kW/m}^2$  ab; auf der Erdoberfläche kommt davon noch ungefähr  $1 \text{ kW/m}^2$  an, aber nur auf einer Empfängerfläche, die quer in der prallen Mittagssonne steht. Steht sie schräg, wird sie also unter dem Einfallswinkel  $\alpha$  vom Sonnenschein getroffen, so erfasst ein Bündel mit der Querschnittsfläche  $A_0$  eine Empfängerfläche  $A$ , die um



■ Abb. 7.57. **Schräger Lichteinfall.** Bei schrägem Lichteinfall verteilt sich die Strahlungsleistung aus dem Bündelquerschnitt  $A_0$  auf die größere Empfängerfläche  $A$



■ Abb. 7.58. Zur Definition des Raumwinkels

den Faktor  $1/\cos \alpha$  größer ist (■ Abb. 7.57). Dementsprechend definiert man die

$$\text{Bestrahlungsstärke } E_e = \Phi/A = I \cdot \cos \alpha,$$

ebenfalls mit der Einheit  $\text{W/m}^2$ . Die gleiche Einheit besitzt schließlich noch die gesamte Strahlung eines Strahlers, wenn man sie auf seine Fläche  $A'$  bezieht, also die

$$\text{spezifische Ausstrahlung } M = \Phi/A'.$$

Jedes von einer punktförmigen Strahlenquelle ausgehende divergente Bündel erfasst einen bestimmten **Raumwinkel**  $\omega$ . In Analogie zum Bogenmaß des ebenen Winkels, also zum Quotienten aus erfasster Bogenlänge und Kreisradius mit der dimensionslosen „Einheit“ Radiant, definiert man den Raumwinkel als Quotienten aus erfasster Kugeloberfläche und Quadrat des Kugelradius (■ Abb. 7.58) und gibt ihm die ebenfalls dimensionslose „Einheit“ **Steradian** ( $\text{sr} = \text{m}^2/\text{m}^2$ ).

Die Oberfläche einer Kugel beträgt  $4\pi \cdot r^2$ ; größer als  $4\pi$  kann ein Raumwinkel also nicht werden. Eine ebene Strahlerfläche hat über sich nur den **Halbraum**  $2\pi$ . Im Allgemeinen leuchtet sie ihn nicht gleichmäßig aus.

Man muss also damit rechnen, dass die (als Differenti-  
alquotient definierte)

$$\text{Strahlstärke } I_e = d\Phi/d\omega$$

mit der Einheit 1 W/sr von der Ausstrahlungsrich-  
tung abhängt. Für einen ausgedehnten Strahler kann  
man für jeden Punkt der strahlenden Oberfläche die  
Strahlstärke pro Fläche, die bei schräger Blickrichtung  
(■ Abb. 7.57) noch perspektivisch verkürzt erscheint,  
angeben und kommt so zur:

$$\text{Strahldichte } L_e = \frac{d\Phi}{d\omega \cdot A' \cdot \cos \alpha}.$$

mit der Einheit 1 W/m<sup>2</sup> · sr.

Alle Strahlungsmessgrößen hängen von der Wellen-  
länge des ausgesandten Lichtes ab. Bezieht man sie  
auf ein kleines Wellenlängenintervall, so kann man ein  
Spektrum der Strahlung auftragen. Abbildung 7.62  
zeigt zum Beispiel die Wellenlängenabhängigkeit der  
spezifischen Ausstrahlung eines schwarzen Strahlers.  
Gegen die Wellenlänge aufgetragen ist hier die spek-  
trale spezifische Ausstrahlung:

$$M_{e\lambda} = \frac{dM_e}{d\lambda}$$

Für den Bereich sichtbaren Lichts wird zu jeder **Strah-  
lungsmessgröße** eine korrespondierende **Lichtmess-  
größe** definiert. Sie bekommt einen eigenen Namen  
und eine eigene Einheit, üblicherweise aber das glei-  
che Buchstabensymbol. Das **Candela** (cd) ist Einheit  
der **Lichtstärke**, das **Lumen** (lm = cd · sr) die des **Licht-  
stromes** und das **Lux** (lx = lm/m<sup>2</sup>) die der **Beleuch-  
tungsstärke**. Die ■ Tabelle 7.1 fasst das Wichtigste zu-  
sammen.

Die Lichtstärke ist Grundgröße des SI; die Einheit Can-  
dela wird so definiert, dass für schmelzendes Platin ei-  
ne Leuchtdichte von 6 · 10<sup>5</sup> cd/m<sup>2</sup> herauskommt. Für  
das menschliche Auge liegt dieser Wert hart an der  
Grenze der Blendung. Von Schwelle bis Blendung über-

deckt der Gesichtssinn 8 Zehnerpotenzen der Leucht-  
dichte. Als Anhaltswerte können gelten:

- 10<sup>-2</sup> cd/m<sup>2</sup> Schwelle (ohne Farberkennung),
- 10 cd/m<sup>2</sup> ausreichend zum Lesen,
- 10<sup>3</sup> cd/m<sup>2</sup> gute Schreibtischbeleuchtung,
- 10<sup>6</sup> cd/m<sup>2</sup> Blendung.

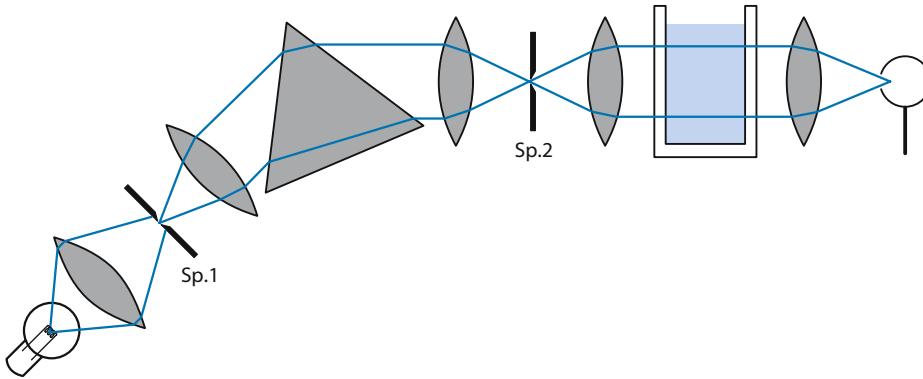
### 7.3.2 Optische Absorption

**Farben** im Sinne des lateinischen Wortes **color** sind  
subjektive Sinneseindrücke, allenfalls mit Wor-  
ten beschreibbar, aber keiner rein physikalischen  
Messung zugänglich. Niemand kann wissen, ob er  
das Rot einer Rose geradeso sieht wie sein Nach-  
bar. Farben im Sinne des lateinischen Wortes **pig-  
mentum** kann man kaufen. Es handelt sich um  
Farbstoffe, die Licht unterschiedlicher Wellenlän-  
ge unterschiedlich **absorbieren**. Diese Eigenschaft  
ist nicht auf den sichtbaren Spektralbereich be-  
schränkt und lässt sich zuverlässig ausmessen –  
am einfachsten bei **Farbfiltern** aus buntem Glas.

Geeignete Messgeräte sind unter dem Na-  
men **Spektralphotometer** im Handel. Ihr wichtigs-  
ter Teil ist der **Monochromator** (■ Abb. 7.59). Das  
weiße Licht einer Glühbirne wird vom **Konden-  
sor** auf den schmalen **Eingangsspalt** Sp 1 konzen-  
triert, vom **Kollimator** als Parallelbündel auf ein  
Prisma gegeben, dort spektral zerlegt und in die  
Brennebene einer weiteren Linse zusammengezo-  
gen. Hier entsteht ein Spektrum aus dicht an dicht  
liegenden, nach der Wellenlänge sortierten Bil-  
dern des Eingangsspaltes. Der **Ausgangsspalt** Sp 2  
fischt einen schmalen Wellenlängenbereich her-

■ Tabelle 7.1 Strahlungsmessgrößen

Strahlungsmessgröße		Einheit	Lichtmessgröße	Einheit
$Q$	Strahlungsenergie	J	Lichtmenge	lm · h
$\Phi = dQ/dt$	Strahlungsfluss	W	Lichtstrom	lm
$I_e = \Phi/\omega$	Strahlstärke	W/sr	Lichtstärke	cd
$L_e = I/A_0$	Strahldichte	W/(m <sup>2</sup> sr)	Leuchtdichte	cd/m <sup>2</sup>
$E_e = \Phi/A$	Bestrahlungsstärke	W/m <sup>2</sup>	Beleuchtungsstärke	lx



■ Abb. 7.59. Spektralphotometer, schematischer Strahlengang (Einzelheiten im Text)

7

aus und gibt ihn auf die nächste Linse, die das divergente Bündel wieder parallel richtet und durch das auszumessende Filter oder auch eine Kuvette schickt (sie kann eine Flüssigkeit enthalten, deren Absorption untersucht werden soll). Eine letzte Linse sammelt dann das durchgelassene Licht auf die nachweisende Photozelle. Die Abbildung kann auch durch Spiegel, die spektrale Zerlegung durch ein Beugungsgitter (► Kap. 7.4.4) erfolgen (Vorteil: Die Absorption im Glas wird vermieden). Die Optik hinter dem Austrittsspalt und die Photozelle machen den Monochromator zum Spektralphotometer.

Man vergleicht jetzt die von der Kuvette durchgelassene Intensität  $I(\lambda)$  mit der einfallenden Intensität  $I_0(\lambda)$  – wegen der Reflexionsverluste am Glas zieht man die Kuvette nicht einfach aus dem Strahlengang heraus, sondern vertauscht sie mit einer leeren. Division liefert die **Durchlässigkeit**

$$D(\lambda) = \frac{\text{durchgelassene Intensität } I(\lambda)}{\text{einfallende Intensität } I_0(\lambda)}.$$

Sie liegt notwendigerweise zwischen 0 (vollständige Absorption) und 1 (keine Absorption).

Senkt ein bestimmtes Filter die Intensität  $I$  für eine bestimmte Wellenlänge auf die Hälfte ab, so reduziert ein zweites Filter gleicher Eigenschaft  $I$  auf ein Viertel, ein Drittes auf ein Achtel usw.: Optische Filter, hintereinander gestellt, multiplizieren ihre Durchlässigkeit  $D$ . Dass sie außerdem ihre Dicken  $d$  addieren, hat dann Bedeutung, wenn sie aus gleichem Material gefertigt sind und folglich Durchlässigkeit und Absorption in gleicher

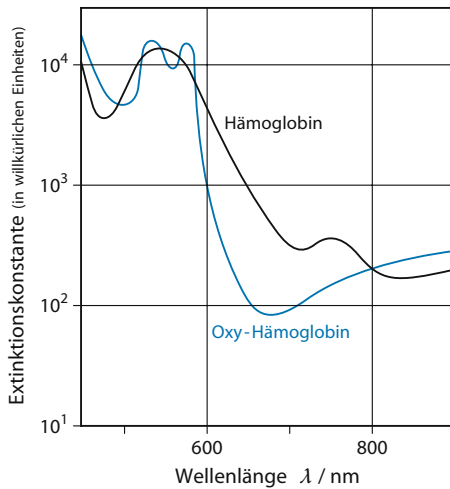
Weise spektral verteilen, wie etwa homogene Flüssigkeiten in der Kuvette der ■ Abb. 7.59. Dann gilt nämlich das sog. **Lambert-Gesetz**:

$$D(\lambda, d) = \exp(-k(\lambda) \cdot d)$$

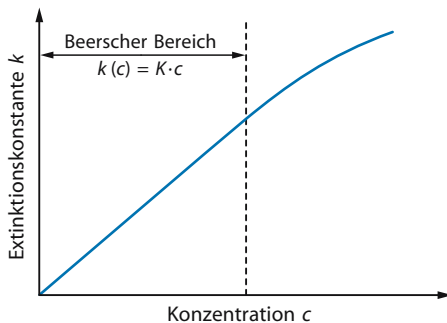
mit der **Extinktionskonstanten**  $k(\lambda)$ . Sie ist eine Materialkenngröße mit der SI-Einheit  $\text{m}^{-1}$ . Ihr Kehrwert wird **Eindringtiefe**  $a(\lambda)$  genannt. Bei so genannten **Graufiltern** sind  $a$  und  $k$  unabhängig von der Wellenlänge, zumindest im sichtbaren Spektralbereich.

Absorbiert wird Licht von einzelnen Atomen, Ionen, Molekülen, Molekülkomplexen, die beispielsweise in einer wässrigen Lösung herumschwimmen. Jede Teilchenart bevorzugt bestimmte Wellenlängenbereiche und trägt ihr **Absorptionsspektrum** wie eine Visitenkarte mit sich herum: **Hämoglobin**, zuständig für den Sauerstofftransport im Blut, hat in seiner oxidierten Form **Oxyhämoglobin** ein deutlich anderes Absorptionsspektrum als in seiner reduzierten Form (■ Abb. 7.60). Deshalb sieht auch das sauerstoffbeladene arterielle Blut hellrot aus und das venöse bläulicher: Zufällig liegen die wesentlichen Absorptionen im sichtbaren Spektralbereich.

Das Absorptionsspektrum sagt zunächst nur etwas über die spektrale Verteilung der optischen Absorption und ermöglicht damit, bestimmte Substanzen in einer Lösung zu identifizieren, also eine qualitative chemische Analyse. Die Messung der Extinktionskonstanten  $k(\lambda)$  selbst erlaubt aber auch eine quantitative Analyse, denn zumindest bei nicht zu hohen Konzentrationen



■ Abb. 7.60. Absorptionsspektrum von Hämoglobin (schwarz) und Oxyhämoglobin (blau)



■ Abb. 7.61. Beer'sches Gesetz

erweist sich das  $k$  einer bestimmten Wellenlänge als zur Konzentration  $c$  der absorbierenden Teilchen in der Lösung proportional. Dies besagt das **Beer-Gesetz**:

$$k(\lambda) = K(\lambda) \cdot c,$$

(■ Abb. 7.61). Zusammen mit dem Lambert-Gesetz ergibt es das **Lambert-Beer-Gesetz**

$$I(\lambda, c, d) = I_0[\exp(-K(\lambda) \cdot c \cdot d)].$$

## Klinik

**Labormedizin.** Von Lambert-Beer-Gesetz „leben“ viele medizinische Laboratorien geradezu, denn es erlaubt, nach entsprechender chemischer Vorbehandlung aus der Blutprobe eines Patienten die Konzentration des Sauerstoffs, der Glukose, des Äthylalkohols, dieses oder jenes Cholesterins, Blutfettes oder sonst einer gerade interessanten Substanz im Blut zu bestimmen. Wieso?

Dass viele, vor allem komplizierte Moleküle ein charakteristisches **Absorptionsspektrum** besitzen, lässt sich anschaulich begründen. Sie bestehen nun einmal aus Atomen, die unter Beteiligung von Coulomb-Kräften chemisch aneinander gebunden sind. Viele Moleküle stellen deshalb elektrische Dipole dar. Ein äußeres elektrisches Feld versucht nicht nur, die Moleküle zu drehen, es biegt auch an ihnen herum. Nun sind die Molekülteile nicht vollkommen starr miteinander verbunden: Sie können mit einer durch Masse und Bindungskräfte festgelegten Eigenfrequenz gedämpft um ihre Normallage schwingen. Passt die Frequenz des elektrischen Wechselfeldes, so kommt es zu Resonanz und Energieübertragung. Die Frequenzen der meisten Molekülschwingungen liegen im Bereich infraroten Lichts – die Folge ist Infrarotabsorption. In dicken Atlanten beziehungsweise Computerdatenbanken sind die Spektren zahlloser Substanzen mit ihren Werten für  $K(\lambda)$  gesammelt – unentbehrliches Hilfsmittel der chemischen **Absorptionsspektalanalyse**.

## Praktikum

### Spektralphotometer, Interferenz, Beugung

Die Versuche an den Universitäten zu diesem Themenbereich sind leider sehr unterschiedlich. Jeder muss sich das passende herausuchen.

Licht kann mit Hilfe von Farbfiltren, einem **Prisma** (► Kap. 7.2.4) oder einem **Beugungsgitter** (► Kap. 7.4.2 und 7.4.5) in seine Farbanteile (Wellenlängen) zerlegt werden. All diese Effekte können zum Bau eines Spektralphotometers verwendet werden.

**Merke**

Optische Absorption

- Durchlässigkeit

$$D(\lambda) = I(\lambda)/I_0(\lambda)$$

- Lambert-Gesetz:

$$D(d) = \exp(-k \cdot d)$$

$$k(\lambda) = \text{Extinktionskonstante}$$

$d$ : Schichtdicke

und

- Beer-Gesetz:

$$k(\lambda) = K(\lambda) \cdot c$$

(für kleine Konzentrationen  $c$ )

bilden zusammen

- Lambert-Beer-Gesetz:

$$I(\lambda, c, d) = I_0[\exp(-K(\lambda) \cdot c \cdot d)].$$

**Rechenbeispiel 7.6: Grau in Grau**

► **Aufgabe.** Zwei Graufilter haben die Durchlässigkeiten  $D_1 = 0,60$  und  $D_2 = 0,35$ . Welche Durchlässigkeit haben sie hintereinander gesetzt?

► **Lösung.** Hintereinandergesetzte optische Filter multiplizieren ihre Durchlässigkeiten:

$$D = D_1 \cdot D_2 = 0,21.$$

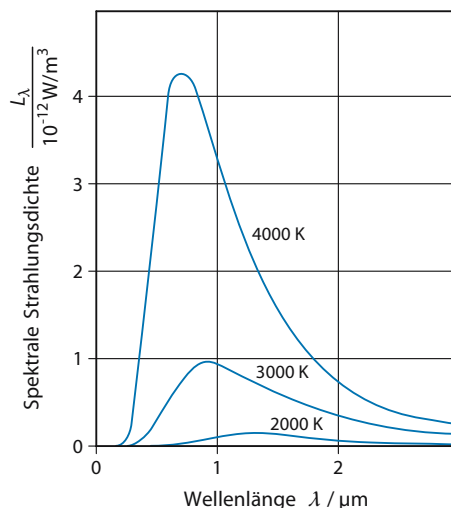
Schon in ► Kap. 5.4.2 wurde festgestellt: Was Licht absorbiert, strahlt auch Licht ab. Nur deshalb lässt sich thermodynamisches Gleichgewicht auch über Strahlung einstellen. Die Welt befindet sich aber nicht im Gleichgewicht – zum Glück, denn sonst gäbe es auf ihr nichts zu sehen. Alle Körper erschienen gleich hell und hätten keine Konturen, denn was die dunklen vom Umgebungslicht weniger zurückstreuen, müssten sie als Eigenstrahlung mehr aussenden. Wenn man durch eine kleine Klappe in den Brennofen einer Porzellanfabrik hineinschaut, sieht man in der Tat nichts als gleichmäßige Glut. In der normalen Umwelt des Menschen haben aber nur Primärlichtquellen Bedeutung, deren Oberflächentemperaturen weit über Zimmertemperatur liegen. Baum und Tier strahlen demgegenüber selbst nur im unsichtbaren Infrarot. Dass man die Eigenstrahlung der Hand fotografieren kann, hatte ■ Abb. 5.27 bereits gezeigt.

Was mehr absorbiert, strahlt auch mehr; folglich strahlt der schwarze Körper am meisten. Seine **schwarze Strahlung** hängt nur von der Temperatur ab. ■ Abbildung 7.62 zeigt ihre spektrale Verteilung, berechnet nach der „Planck’schen Strahlungsformel“ (Max Planck, 1858–1947). Man sieht auf den ersten Blick, dass die gesamte Strahlungs-

**7.3.3 Temperaturstrahlung**

Siehe auch ► Kap. 5.4.2.

Eine Tapete wirkt umso dunkler, je weniger Licht sie zurückstreut, je mehr sie also absorbiert. Völliges Schwarz lässt sich freilich mit keinem Farbanstrich erreichen, eher schon mit einem Stoff wie Samt: Zwischen den feinen Haaren kann sich das Licht in Mehrfachstreuung totlaufen. Zuverlässig schwarz ist das Spundloch eines leeren Fasses: Licht, das bei ihm hereinkommt, findet den Weg nicht wieder nach draußen. Dazu müssen die Innenwände nicht einmal dunkel gefärbt sein; auf ein paar Streuungen mehr oder weniger kommt es nicht an. Die Pupille eines Auges erscheint schwarz, obwohl der Augenhintergrund rot aussieht und strukturiert ist. Als **schwarzen Körper** bezeichnet man in der Physik ein kleines Loch in einer großen Kiste.



■ Abb. 7.62. Spektrum der schwarzen Strahlung für drei verschiedene Temperaturen



leistung, die Fläche unter der Kurve also, rapide mit der Temperatur anwächst. Sie folgt dem

**Stefan-Boltzmann-Gesetz:**  $P(T) = A \cdot \sigma \cdot T^4$

mit der **Strahlungskonstanten**  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$  ( $A$  ist die Fläche des Strahlers). Dabei verschiebt sich die Strahlung insgesamt zu kürzeren Wellen; erst bei etwa  $600^\circ \text{C}$  beginnt ein Körper, sichtbar zu glühen. Für das Wellenlängenmaximum  $\lambda_{\max}$  der schwarzen Strahlung gilt das

**Wien'sche Verschiebungsgesetz**  $\lambda_{\max} = S/T$

mit  $S = 2898 \text{ } \mu\text{m} \cdot \text{K}$ .

#### Merke

Schwarze Strahlung:

Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$P(T) = A \cdot \sigma \cdot T^4$$

mit  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ .

$P(T)$ : Abgestrahlte Leistung

$A$ : Fläche des Strahlers

#### Rechenbeispiel 7.7: Strahlender Mensch

► **Aufgabe.** Bei welcher Wellenlänge liegt das Maximum der Eigenstrahlung des Menschen ungefähr?

► **Lösung.** Mit dem Wien'schen Verschiebungsgesetz bekommen wir:  $\lambda_{\max} = S/T = 2898 \text{ } \mu\text{m} \cdot \text{K} / 310 \text{ K} = 9,35 \text{ } \mu\text{m}$ . Das liegt im infraroten Spektralbereich. Zur Erinnerung: Wir hatten im Rechenbeispiel 5.8 abgeschätzt, dass der nackte Mensch mit etwa  $160 \text{ W}$  abstrahlt, also wie zwei kräftige Glühbirnen. Durch die Kleidung wird das auf praktisch null reduziert.

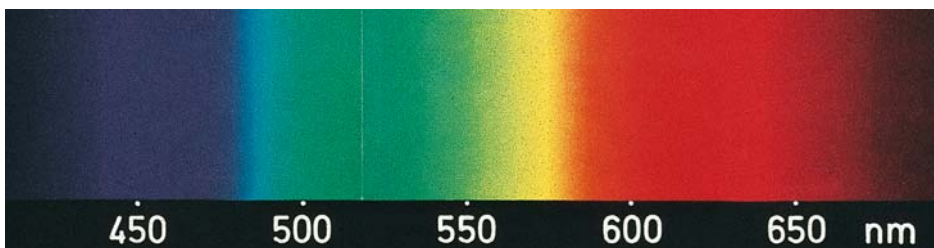
### 7.3.4 Farbsehen

Die Welt ist gar nicht bunt, sie sieht nur so aus. Ohne Augen gäbe es keine Farben, sondern nur elektromagnetische Wellen unterschiedlicher Wellenlänge. Dass bei Nacht alle Katzen grau sind, liegt auch nicht an den Katzen, sondern an der Netzhaut. Von deren Sensoren sprechen bei schwachem Licht nur die **Stäbchen** an, die lediglich Grautöne vermelden, und noch nicht die für das Farbsehen zuständigen **Zapfen**. Von ihnen gibt es drei Gruppen, durch drei verschiedene Farbstoffe (**Sehpurpur**) für die langen, die mittleren und die kurzen Wellen des sichtbaren Spektrums (■ Abb. 7.63) sensibilisiert. Weil dem so ist, lässt sich eine **Farbmetrik** entwickeln, obwohl Farben nur subjektive Empfindungen sind und keine physikalischen Größen. Die folgende Darstellung hält sich an die **Young-Helmholtz-Farbentheorie**.

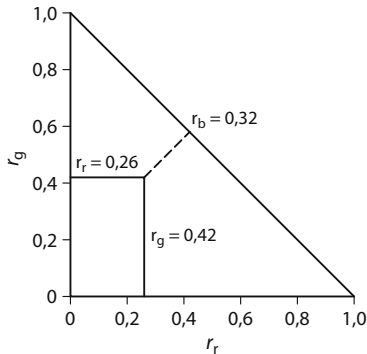
Normalerweise, wenn es denn hell genug ist, empfängt der visuelle Kortex Nervensignale von allen drei Sensoren gleichzeitig. Deren Summe bestimmt die **Helligkeit** der Wahrnehmung, während die drei relativen Anteile an dieser Summe,  $r_r$  für Rot,  $r_g$  für Grün und  $r_b$  für Blau, den wahrgenommenen **Farbton** ergeben – unabhängig von der Gesamthelligkeit, denn definitionsgemäß addieren sie sich als relative Anteile zu 1:

$$r_r + r_g + r_b = 1.$$

Deshalb braucht die Farbmetrik nur zwei von ihnen, um einen Farbton zu kennzeichnen. Üblicherweise trägt man in einem rechtwinkligen Koordinatenkreuz  $r_r$  nach rechts und  $r_g$  nach oben auf. Grundsätzlich sind dann nur Punkte erreichbar, die innerhalb des Dreiecks der ■ Abb. 7.64 lie-



■ Abb. 7.63. Farbempfinden des normalsichtigen Menschen bei verschiedenen Wellenlängen sichtbaren Lichts



■ **Abb. 7.64. Farbdreieck, schematisch.** Trägt man die relative Erregung  $r_r$  des Rezeptors für rot längs der Abszisse und die des Rezeptors für grün ( $r_g$ ) längs der Ordinate auf, so entspricht der Abstand eines Punktes von der Hypotenuse des Farbdreiecks der relativen Erregung  $r_b$  des Rezeptors für blau. Punkte außerhalb des Dreiecks sind grundsätzlich nicht erreichbar, Punkte nahe den Dreiecksseiten tatsächlich nicht

gen, denn jeder Punkt außerhalb würde für mindestens einen Rezeptor negative Erregung bedeuten. Tatsächlich kann aber keine realisierbare Farbe die Dreiecksseiten exakt erreichen, denn dort würde mindestens ein Rezeptor nicht erregt. Dafür überlappen sich aber deren Empfindlichkeitsbereiche zu sehr.

■ Abbildung 7.65 zeigt das **Farbdreieck**, so gut dies im Druck möglich ist. Der zugängliche Bereich ist größtenteils begrenzt durch die Kurve der monochromatischen Spektralfarben; diese besitzen die höchstmögliche Farbsättigung, d. h. die größtmögliche Entfernung vom **Weißpunkt** ( $r_r = r_g = r_b = 0,33$ ). Projiziert man das Licht zweier monochromatischer Quellen übereinander, so mischt man ihre Spektralfarben **additiv**. Im Farbdreieck liegt dann die Mischfarbe auf der Verbindungslinie zwischen den beiden gemischten Farben, und zwar in einer Position, die den beiden Helligkeiten quasi nach dem Hebelgesetz entspricht, also dichter bei der helleren. Diese Mischungsregel gilt auch dann, wenn die beiden zu mischenden Farben bereits ungesättigte Mischfarben sind. Jede additive Farbmischung führt näher an den Weißpunkt heran, mindert also die Farbsättigung – mit Ausnahme der **Purpurgeraden**: Sie verbindet die beiden Enden des sichtbaren Spektrums und begrenzt die zugängliche Farbfläche

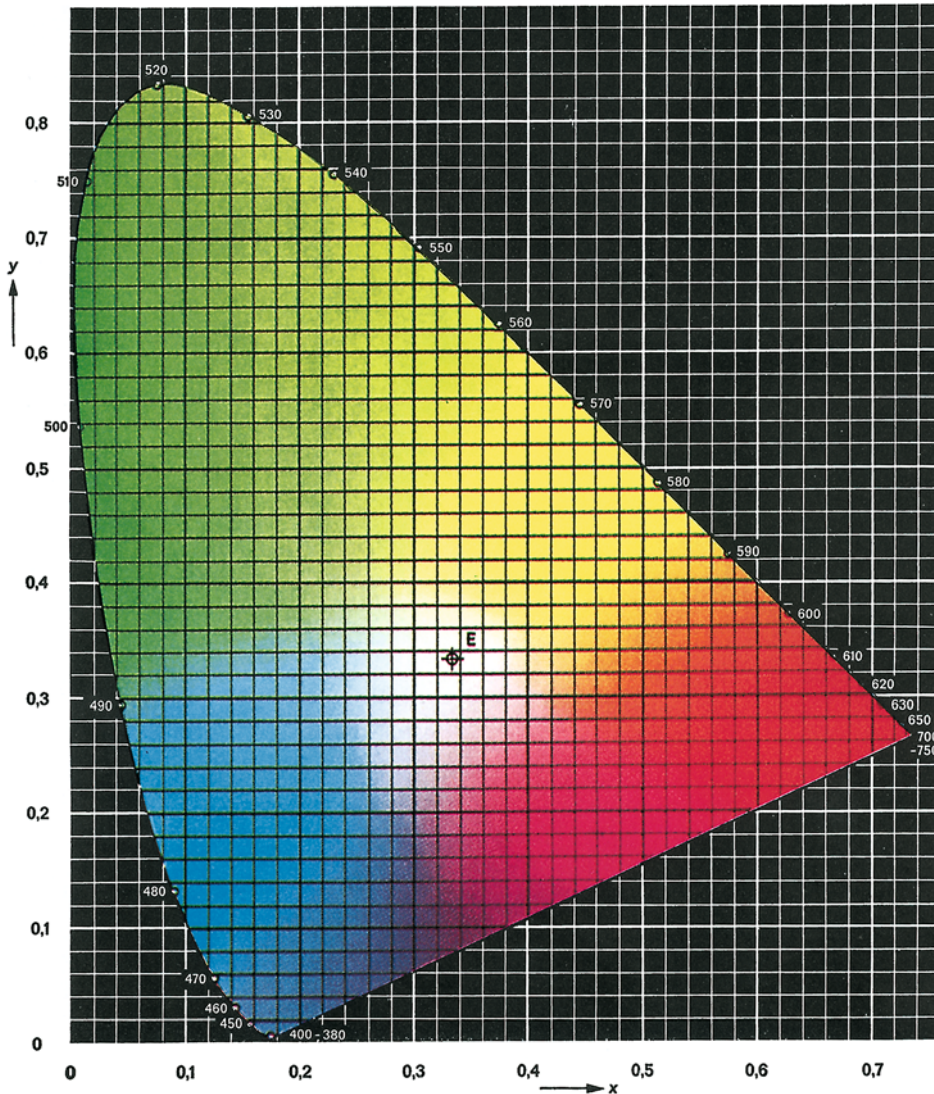
nach unten. Purpurtöne sind im Spektrum selbst nicht enthalten.

Grundsätzlich lässt sich jede ungesättigte Farbe durch mehr als ein Rezept additiver Farbmischung erreichen; ein bestimmter subjektiver Farbeindruck sagt noch nichts über die spektrale Verteilung des ihn auslösenden Lichts aus. Insbesondere muss der Eindruck Weiß nicht durch das breite Spektrum des Sonnenlichts erzeugt werden: Zu jeder Spektralfarbe gibt es eine bestimmte Komplementärfarbe, die, im richtigen Verhältnis additiv zugemischt, Weiß ergibt. Für die drei Grundfarben Rot, Grün und Blau gilt dies auch (■ Abb. 7.67).

**Additive Farbmischung** ist im Farbdreieck leicht zu beschreiben. Technisch genutzt wird sie fast nur vom Bildschirm des Fernsehempfängers. Seine Röhre besitzt drei Elektronenkanonen, die auf Flecken aus drei verschiedenen Leuchtstoffen zielen. Die Farben im Fernsehbild lassen sich in Grenzen einregeln, sie sind stets gegenüber der Wirklichkeit verfälscht. Dies stört nur in krassen Fällen: Der Mensch liebt die Illusion, und sein Gesichtssinn ist anpassungsfähig.

Die **subtraktive Farbmischung** wird vom Menschen häufiger verwendet als die additive; das gilt von alters her für Maler. Physikalisch geschieht dies: Unbuntes Licht durchsetzt nacheinander mehrere Farbstoffschichten, mehrere Farbfilter also, die jeweils bestimmte Spektralbereiche durch Absorption stärker schwächen als andere: Was durchgeht, ist bunt. Zwei **Monochromatfilter** mit schmalen Durchlässigkeitsbereichen würden für sich nahezu gesättigte Farben ergeben, in subtraktiver Mischung aber Schwarz, weil jedes das vom anderen durchgelassene Licht festhält. Auch die drei Grundfarben Rot, Grün und Blau geben subtraktiv Schwarz (■ Abb. 7.66). Weiß lässt sich subtraktiv nicht erreichen, Schwarz additiv nicht.

Es leuchtet ein, dass die spektrale Zusammensetzung des von Filtern durchgelassenen Lichtes (und damit der ausgelöste Farbeindruck) entscheidend von der spektralen Zusammensetzung des auffallenden Lichtes bestimmt wird. Monochromatisch (etwa mit einer Natriumdampflampe) beleuchtet, kann das schönste Ölgemälde nur grau in grau erscheinen. Glühbirnen senden spektral anders zusammengesetztes Licht aus als

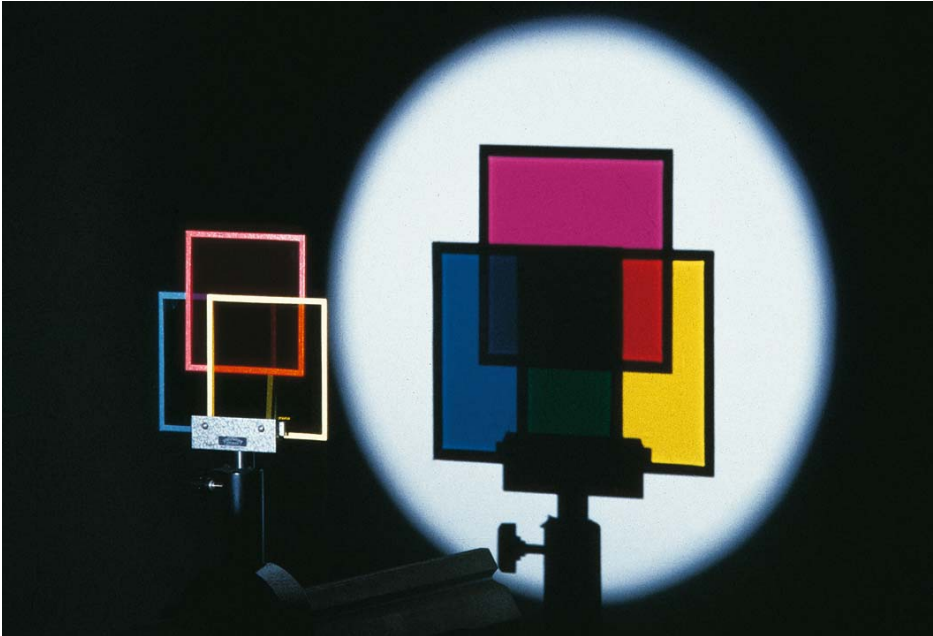


■ Abb. 7.65. Das Farbdreieck. Erreichbar ist nur der Bereich, der von der Kurve der Spektralfarben und der Purpurgeraden eingegrenzt wird

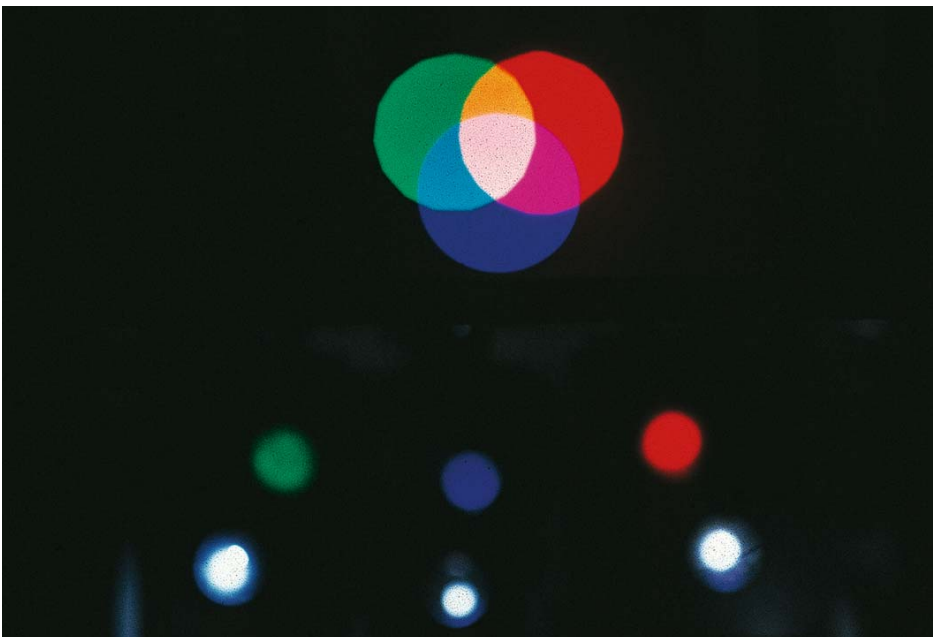
Leuchtstoffröhren, und beide anderes als die Sonne. Daran muss denken, wer Kleider oder Kravatten bei künstlicher Beleuchtung kauft (oder trägt!).

Mit dem Farbdreieck ist zwar etwas zur Farbmetrik ausgesagt, fast nichts aber zur Physiologie des Farbsehens. Der subjektive Farbeindruck, den eine farbige Fläche erzeugt, hängt nämlich noch wesentlich von Farbe und Helligkeit des Umfeldes ab. Zudem können die Rezeptoren ermüden: Hält

man eines seiner Augen für einige Zeit geschlossen und das andere nicht, so kann das geschlossene sich ausruhen und meldet, wieder geöffnet, zunächst ein wenig andere Farben als das belastete Auge.



■ **Abb. 7.66. Subtraktive Farbmischung:** Die drei Farben rot, gelb und blau ergeben zusammen schwarz. Projektion auf eine Leinwand; im Vordergrund sind die Rahmen der drei Farfilter zu erkennen



■ **Abb. 7.67. Additive Farbmischung:** Die drei Farben rot, grün und blau ergeben zusammen weiß. Projektion auf die Rückseite einer Mattscheibe; im Hintergrund sind die drei Projektoren mit ihren Farfiltern zu erkennen



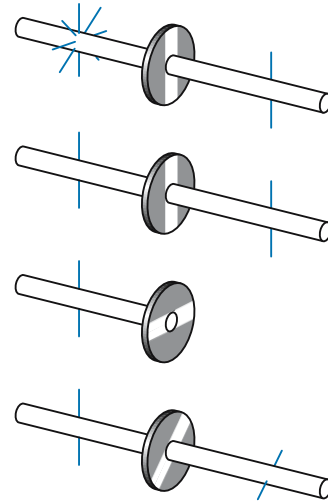
## 7.4 Wellenoptik

### 7.4.1 Polarisiertes Licht

Licht gehört zu den transversalen Wellen: Die beiden Vektoren des elektrischen und des magnetischen Feldes stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung, wie [Abb. 7.3](#) bereits dargestellt hat. Damit sind die Richtungen der beiden Vektoren aber noch nicht festgelegt, sondern nur eingeschränkt: Dem einen Feld steht eine ganze Ebene zur Verfügung, in der es grundsätzlich seine Schwingungsrichtung frei wählen kann; das andere muss dann den rechten Winkel einhalten. In der Symmetrieebene des schwingenden Dipols liegt der elektrische Vektor parallel zur Dipolachse ([Abb. 7.1](#)): Die abgestrahlte Welle ist **polarisiert**, genauer, sie ist linear polarisiert (es gibt auch noch zirkulare und elliptische Polarisation; beide brauchen hier nicht besprochen zu werden).

Von einer normalen Lampe darf man sagen, sie sei aus unzähligen Dipolen zusammengesetzt, die unabhängig voneinander in allen nur denkbaren Richtungen schwingen. Was sie gemeinsam abstrahlen, ist unpolarisiertes **natürliches** Licht, in dem alle Polarisationsrichtungen in unauflosbar rascher Zeitfolge vorkommen. Keine wird im Mittel bevorzugt.

Ein bequemes Verfahren, natürliches Licht zu polarisieren, bieten die **Polarisationsfolien**. Sie bestehen aus einem Material, dessen Absorption von der Polarisationsrichtung des einfallenden Lichtes abhängt. So wird etwa für eine bestimmte Richtung des elektrischen Vektors der ganze sichtbare Spektralbereich nahezu ungehindert hindurchgelassen, für die dazu senkrechte Richtung aber schon auf weniger als einem Millimeter fast vollständig abgefangen. Eine solche Folie erscheint dem Auge grau: Nur knapp die Hälfte vom Lichtstrom des natürlichen Lichts lässt sie passieren. Erst eine zweite Folie am Strahlengang macht deutlich, dass es sich nicht um einfache Graufilter handelt: Möglicherweise schwächt die zweite Folie den Lichtstrom allenfalls durch die unvermeidlichen Reflexionsverluste. Dann stehen die beiden Polarisatoren **parallel**. Dreht man aber die zweite Folie in ihrer eigenen Ebene um  $90^\circ$ , dann lässt sie kein Licht mehr durch: Die Polarisatoren



**Abb. 7.68. Lineare Polarisation.** Natürliches Licht nutzt mit seinem elektrischen Vektor die Ebene senkrecht zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit voll und gleichmäßig aus (1. Teilbild, linke Seite). Ein Polarisator lässt nur eine, hier vertikale Schwingungsrichtung hindurch (1. Teilbild, rechte Seite). Ein Analysator mit gleicher Polarisationsrichtung hindert den Durchgang polarisierten Lichtes nicht (2. Teilbild); er lässt kein Licht mehr durch, wenn man ihn um  $90^\circ$  dreht („gekreuzte Polarisatoren“, 3. Teilbild). In Zwischenstellungen wird das Licht mehr oder weniger stark durchgelassen; die Richtung seines elektrischen Vektors hält sich an die Vorgabe des letzten Polarisators

sind **gekreuzt**. Auch in den Stellungen dazwischen absorbiert die zweite Folie Licht, mit wachsendem Drehwinkel immer mehr. Die Schwingungsrichtung des durchgelassenen Lichts dreht sich mit; sie folgt immer dem Befehl des letzten Polarisators. [Abbildung 7.68](#) versucht, diesen Tatbestand etwas schematisch zu skizzieren. Nach altem Sprachgebrauch wird der zweite Polarisator gern **Analysator** genannt; physikalisch unterscheidet er sich von dem ersten, dem **Polarisator**, nicht.

#### Merke

Natürliches Licht: unpolarisiert, d. h. Schwingungsrichtung des elektrischen Vektors wechselt rasch und regellos.

(Linear) polarisiertes Licht: Schwingungsrichtung wird über längere Zeit konstant gehalten.

## Praktikum

**Polarisation des Lichtes (Saccharimetrie)**

Einige der komplizierten organischen Moleküle, z. B. manche Zucker, sind **optisch aktiv**; sie drehen den elektrischen Vektor des sie durchsetzenden Lichtes selbst dann noch, wenn sie in Wasser gelöst sind – der magnetische Vektor dreht sich selbstverständlich mit. Bringt man eine mit Zuckerwasser gefüllte Küvette zwischen gekreuzte Polarisatoren, so hellt sich das Gesichtsfeld auf. Man bekommt wieder Dunkelheit, wenn man den Analysator um einen Winkel  $\delta$  nachdreht – man hätte auch den Polarisator um den gleichen Winkel in Gegenrichtung drehen können.  $\delta$  ist der Länge der Küvette proportional und der Konzentration der aktiven Moleküle: Messverfahren der **Saccharimetrie** zur raschen Bestimmung des Zuckergehaltes im auspressten Saft einer Rübe.

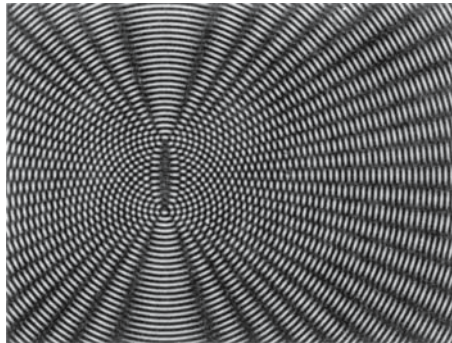
Die Durchführung und die Berechnungen im Versuch sind einfach, die Theorie optisch aktiver Substanzen hingegen sehr kompliziert. Wer hier etwas mehr wissen will, sei auf das Lehrbuch „Gerthsen Physik“ im Springer-Verlag verwiesen. Optisch Aktivität hat heute vor allem Bedeutung in Flüssigkristallanzeigen in Uhren und sonstigem elektronischen Gerät.

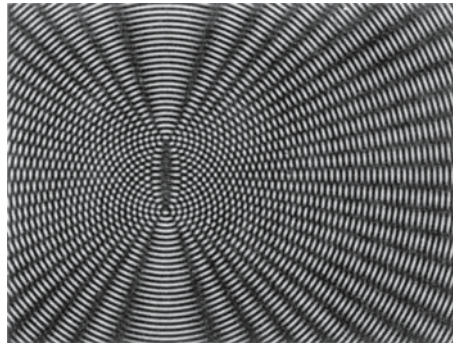
Es sei noch erwähnt, dass die Stärke der Reflexion von Licht an Oberflächen bei schrägem Lichteinfall polarisationsabhängig ist. Licht mit einer elektrischen Feldrichtung senkrecht zur Oberfläche wird schwächer reflektiert als solches mit parallelem Feldvektor. Sonnenbrillen mit eingebautem Polarisationsfilter unterdrücken Reflexe des Sonnenlichts zum Beispiel von Wasserflächen. Es gibt sogar einen bestimmten von der Brechzahl des reflektierenden Materials abhängigen Winkel, unter dem senkrecht polarisiertes Licht gar nicht reflektiert wird (**Brewster-Winkel**, bei Glas ca.  $57^\circ$ ).

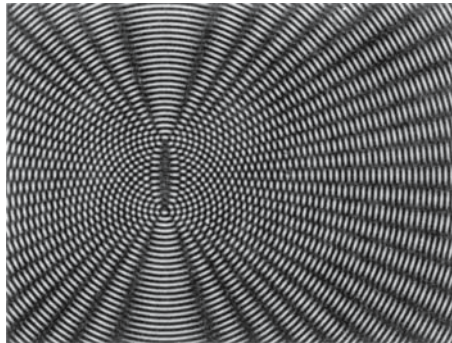
## 7.4.2 Interferenz

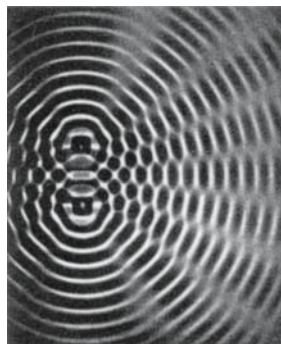
Indirekt folgt die Wellennatur des Lichts bereits aus seiner Polarisierbarkeit: Nur transversale Wellen lassen sich so, wie beschrieben, polarisieren. Den offenkundigen Beweis liefert aber erst die **Interferenz**, die Überlagerung von zwei Wellenzü-

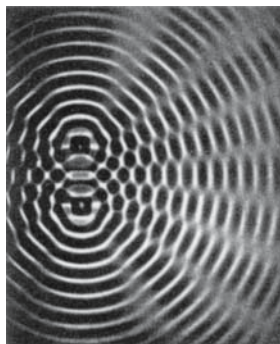
gen gleicher Wellenlänge und Frequenz. Es müssen nicht Lichtwellen sein; Wasser- und Schallwellen interferieren genauso. Man kann sogar an einem rein geometrischen Modell recht anschaulich erläutern, was bei der Überlagerung zweier Kreiswellen (als ebenem Schnitt zweier Kugelwellen) passieren muss.

Die Momentaufnahme einer Kreiswelle sei dargestellt durch ein System konzentrischer Kreise gleicher Strichbreite, abwechselnd jeweils schwarz und hell auf transparente Folie gezeichnet; sie sollen Wellentäler und Wellenberge repräsentieren. Legt man zwei derartige Systeme um 12 „Wellenlängen“ gegeneinander versetzt übereinander, so erhält man die Figur der  Abb. 7.69. Sie



 **Abb. 7.69. Modellversuch zur Interferenz.** Zwei Wellenfelder werden durch zwei Systeme konzentrischer Kreise simuliert. Auslöschung dort, wo helle und dunkle Streifen alternierend aufeinander treffen, also Berg auf Tal und Tal auf Berg: destruktive Überlagerung der lokal ausgelösten Schwingungen (nach R.W. Pohl)



 **Abb. 7.70. Interferenz zweier Wasserwellen in der Wellenwanne** (nach R.W. Pohl)

suggeriert, was bei einer entsprechenden Überlagerung zweier Wellen tatsächlich herauskommt: ein System heller und dunkler **Interferenzstreifen**. ■ Abbildung 7.70 bringt den experimentellen Beweis für Wasserwellen.

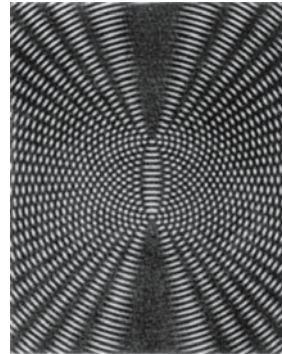
Zur Begründung sei an die Überlagerung von Schwingungen erinnert (► Kap. 4.1.5 und 6.12.2). Eine jede Welle löst überall in ihrem Wellenfeld lokale Schwingungen aus; überlagern sich zwei Wellenfelder, so überlagern sich auch deren Schwingungen. Konstruktive Interferenz verstärkt, destruktive mindert die Amplitude der Auslenkung und löscht die Schwingung im Grenzfall aus.

Im Modell der konzentrischen Kreise erscheinen die Minima dort, wo schwarze und helle Streifen sich gegenseitig abdecken; die Folien lassen kein Licht hindurch. Bei den Maxima fällt schwarz auf schwarz und hell auf hell; Licht kann durchtreten.

#### Merke

Interferenz: Überlagerung zweier Wellen gleicher Wellenlänge;  
Maximum: beide Wellen am Ort in Phase, Wellenberg trifft auf Wellenberg und Tal auf Tal;  
Minimum: beide Wellen am Ort in Gegenphase, Wellenberg trifft auf Wellental und umgekehrt.

Es ist nicht zu leugnen: Die Vorhersage des Modells widerspricht der alltäglichen optischen Erfahrung, denn sie behauptet, dass Licht plus Licht unter Umständen Dunkelheit ergeben könnte. Trotzdem soll das Modell hier weiter verfolgt werden, und zwar quantitativ. Angenommen sei, dass die beiden Wellenzentren nicht nur mit gleicher Frequenz und Amplitude, sondern auch in gleicher Phasenlage schwingen. Dann hängt die Phase der von jedem Wellenfeld ausgelösten lokalen Schwingung nur vom Laufweg ab, von der Entfernung des „Aufpunktes“ vom Wellenzentrum. Beträgt er ein ganzzahliges (nämlich  $n$ -faches) Vielfaches der Wellenlänge  $\lambda$ , so sind Zentrum und lokale Schwingung in Phase; beträgt er ein ungeradzahliges  $(2n + 1)$ -faches von  $\lambda/2$ , so sind sie in Gegenphase. Das gilt gegenüber beiden Wellenzentren. Wie eine Überlagerung sich auswirkt, be-



■ Abb. 7.71. Modellversuch zur Interferenz; gegenüber der ■ Abb. 7.69 ist der Abstand der Wellenzentren um eine halbe Wellenlänge erhöht worden (nach R.W. Pohl)

stimmt demnach der **Gangunterschied**  $x$  der beiden Wellen, die Differenz der beiden Laufwege. Es kommt zu Verstärkung und Maximum, wenn

$$x = n \cdot \lambda;$$

es kommt zu Auslöschung, wenn

$$x = (2n + 1) \cdot \lambda/2.$$

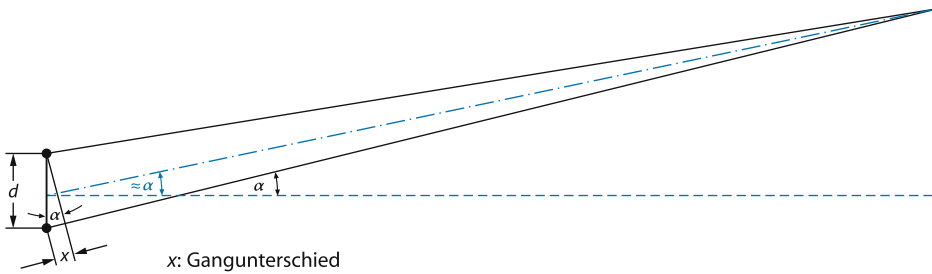
Am leichtesten zu erkennen ist dies in Richtung der verlängerten Verbindungslinie beider Wellenzentren. In ■ Abb. 7.69 beträgt ihr Abstand genau 12 Wellenlängen, geradzahliges Vielfaches von  $\lambda/2$ : Verstärkung oben und unten. In ■ Abb. 7.71 ist dieser Abstand auf 12,5 Wellenlängen erhöht, ungeradzahliges Vielfaches von  $\lambda/2$ : Auslöschung.

#### Merke

Gangunterschied: Differenz der Abstände von den beiden Wellenzentren zum gemeinsamen Aufpunkt.

Alle Punkte auf der Mittellinie zwischen den Wellenzentren (horizontale gestrichelte Linie in ■ Abb. 7.72) sind dadurch ausgezeichnet, dass sie zu beiden Zentren gleichen Abstand haben; der Gangunterschied ist null: Auf der Symmetrieebene liegt das Maximum 0. Ordnung. Der Winkel  $\alpha_n$ , um den das Maximum  $n$ -ter Ordnung gegen diese Ebene versetzt ist, lässt sich für hinreichend große Abstände leicht anhand der ■ Abb. 7.72 ausrechnen.





■ **Abb. 7.72. Gangunterschied.** Zur Herleitung der Beziehung für den Winkel  $\alpha$  zwischen der Symmetrieebene zweier Wellenzentren und der Richtung eines Interferenzmaximums

nen. Die beiden beim fernen Punkt interferierenden Strahlen verlassen die Zentren praktisch parallel. Ihren Gangunterschied  $x$  bis zum Treffpunkt findet man, indem man von einem Zentrum ein Lot auf den Strahl des anderen fällt. Zwischen diesem Lot und der Verbindungslinie der Zentren liegt der gleiche Winkel  $\alpha$  wie zwischen der Richtung der Strahlen und der Symmetrieebene. Aus der Definition der Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck folgt dann

$$\sin \alpha = x/d$$

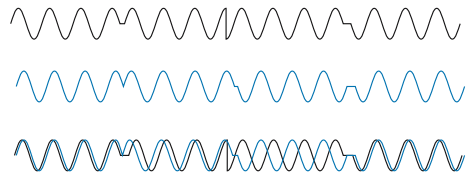
( $d$  = Abstand der Zentren). Mit  $x = n \cdot \lambda$  ergibt sich als Bedingung für das Maximum  $n$ -ter Ordnung

$$\sin \alpha_n = n \cdot \lambda/d.$$

Aus dieser Beziehung kann man die Wellenlänge  $\lambda$  bestimmen, wenn man  $\alpha_n$  und  $d$  gemessen hat.

### 7.4.3 Kohärenz

Wenn Licht eine elektromagnetische Welle ist, warum gehören dann optische Interferenzen nicht zu den alltäglichen Erfahrungen, die jedermann geläufig sind? Reale, makroskopische Lampen bestehen aus unzähligen mikroskopischen Oszillatoren, die unabhängig voneinander schwingen. Ein jeder kann plötzlich seine Schwingung unterbrechen und ein Weilchen später wieder anfangen, jetzt aber in anderer Phasenlage und Polarisationsrichtung. Normalerweise wird ein Lichtbündel von einer Unzahl rasch und unregelmäßig aufein-

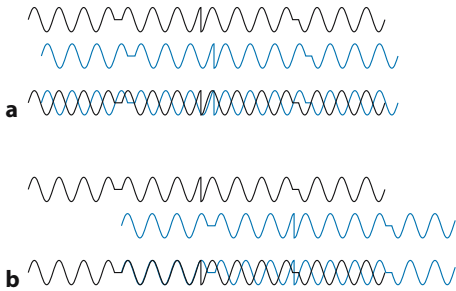


■ **Abb. 7.73. Inkohärentes Licht.** Normalerweise werden die Wellenzüge des Lichtes von einer Unzahl rasch und unregelmäßig aufeinander folgender Wellengruppen gebildet. Eine Überlagerung führt zu ebenso rasch wechselnden Interferenzfiguren, die vom Auge nur als gleichmäßige und konstante mittlere Helligkeit wahrgenommen werden

ander folgender Wellengruppen gebildet. ■ Abbildung 7.73 versucht, dies im ersten Teilbild grobschematisch anzudeuten.

Überlagern sich zwei derartige Wellenzüge (zweites und drittes Teilbild der ■ Abb. 7.73), so verstärken sie sich für kurze Zeit, löschen sich aber mit ihren nächsten Wellengruppen schon wieder aus. Es bilden sich zwar Interferenzfiguren, aber sie wechseln ihre Plätze so rasch und unregelmäßig, dass sich nur eine konstante und gleichmäßige mittlere Helligkeit beobachten lässt. Licht getrennter Quellen liefert keine beobachtbare Interferenz, es ist **inkohärent**.

Dagegen hilft nur eines: Man muss ein Lichtbündel aufspalten und die beiden Teilbündel einander überlagern. Auch dann besteht jedes Teilbündel aus einer unregelmäßigen Folge kurzer Wellengruppen, aber diese Folge ist in beiden Bündeln die gleiche (■ Abb. 7.74). Je nach Gangunterschied verstärken oder schwächen sie sich auf Dauer: Die Interferenzfigur steht still. Voraussetzung ist freilich, dass der Gangunterschied



■ **Abb. 7.74a,b. Interferenz durch Aufspaltung.** Spaltet man ein Lichtbündel in zwei Teilbündel auf, so bestehen beide aus der gleichen Folge von Wellengruppen und werden damit interferenzfähig (a), solange der Gangunterschied die Kohärenzlänge nicht überschreitet (b)

unter der (mittleren) Länge der einzelnen Wellengruppen bleibt; er darf die **Kohärenzlänge** des Lichtes nicht überschreiten.

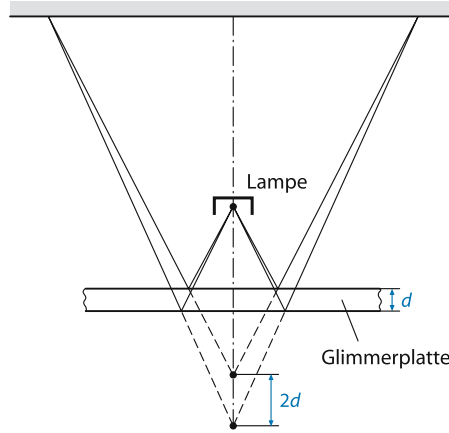
#### Merke

Kohärenz: feste Phasenbeziehung zwischen zwei interferierenden Wellenzügen,  
Kohärenzlänge: Länge eines ungestörten Wellenzuges zwischen zwei Phasensprüngen.

### 7.4.4 Dünne Schichten und Beugungsgitter

Experimentell gibt es viele Möglichkeiten, ein Lichtbündel aufzuspalten, z. B. durch Reflexion an Vorder- und Rückseite eines dünnen Glimmerblattes (Dicke  $d$ ). Eine Lichtquelle bekommt dadurch zwei virtuelle Spiegelbilder, die im Abstand  $2d$  hintereinander stehen. Die Kohärenzlänge des Lichts einer Quecksilberdampf Lampe genügt, um ein stehendes Interferenzfeld zu bilden, das auf der Wand metergroße Ringe erzeugt (■ Abb. 7.75).

Die Interferenzmaxima bilden spitze Kegel, aus denen die Zimmerwand Kreise herausausschneidet. Deren Zentrum liegt in Richtung des größten Gangunterschiedes der interferierenden Wellen; dort befindet sich das Maximum oder Minimum der höchsten Ordnung. Solche Interferenzeffekte



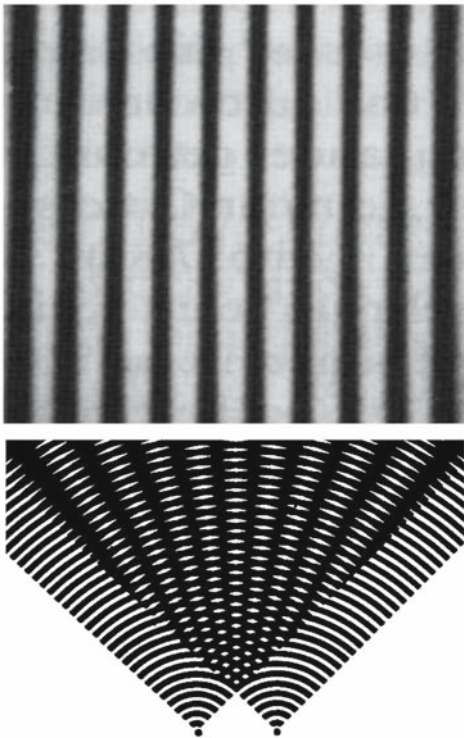
■ **Abb. 7.75. Interferenzversuch nach R.W. Pohl.** Das Licht einer Quecksilberdampf Lampe wird an Vorder- und Rückseite eines Glimmerblattes der Dicke  $d$  reflektiert. Es entsteht ein Wellenfeld, das von den beiden virtuellen Spiegelbildern der Lampe herzurühren scheint. Sie stehen im Abstand  $2d$ , strahlen kohärent und liefern an der Wand metergroße Interferenzringe, gestört durch den Schatten der Lampe und ihrer Halterung. Dass in vier schmalen Zonen die Ringe fehlen, hängt mit einer optischen Spezialität des Glimmers zusammen, der sog. Doppelbrechung

treten immer dann auf, wenn zwei reflektierende Grenzflächen nur wenige Lichtwellenlängen, das heißt also, wenige tausendstel Millimeter auseinander liegen. Da die Interferenzbedingungen wellenlängenabhängig sind, sind solche Erscheinungen meistens bunt. Besonders prachtvoll zeigt sich das z. B. bei dünnen Ölfilmen auf Wasser, bei denen die Interferenz zwischen dem von der Oberseite und der Unterseite des Ölfilms reflektierten Licht schillernde Farben hervorruft. Entsprechendes sieht man bei Seifenblasen.

Interferenz an dünnen Schichten wird auch technisch genutzt. Bei **reflexvermindernden Schichten** auf Brillengläsern und fotografischen Objektiven interferieren sich Reflexionen im sichtbaren Spektralbereich weitgehend weg. Statt Reflexionsverminderung kann aber auch Reflexionsverstärkung erreicht werden. Die Reflektoren moderner Halogenlampen sind nicht, wie man meinen könnte, mit Metall beschichtet, sondern mit einem ganzen Stapel dünner Interferenzschichten. Diese bewirken, dass das sichtbare Licht reflektiert wird, die Wärmestrahlung des infraroten Lichts aber hindurchgeht und dadurch das beleuchtete Objekt nicht so stark erwärmt wird (**Kaltlichtquellen**). Dieses Beispiel lässt schon vermuten, dass so auch Filter gebaut werden können, die nur einen ganz bestimmten, schmalen Wellenlängenbereich durchlassen (**Interferenzfilter**).

Eine weitere Methode, mit Licht kleiner Kohärenzlänge Interferenzerscheinungen zu beobachten, nutzt die **Beugung** aus. Im ► Kap. 7.1.3 wurde

diese Erscheinung schon beschrieben. Lässt man insbesondere Licht durch ein sehr kleines Loch oder einen Spalt hindurchtreten, so kommt auf der anderen Seite eine Welle mit kreisförmigen Wellenfronten heraus (■ Abb. 7.12). Schneidet man also in ein Blech zwei schmale Schlitzte, in geringem Abstand parallel zueinander (**Doppelspalt**) und beleuchtet dieses von der einen Seite, so interferieren die auf der anderen Seite austretenden kreisförmigen Wellen miteinander (■ Abb. 7.76). Die Schlitzte strahlen kohärent, weil sie von praktisch der gleichen Primärwelle angeregt werden. Folglich liefern sie ein System paralleler Interferenzstreifen mit der 0. Ordnung in der Mitte. Der Streifenabstand ergibt sich aus den Überlegungen zur ■ Abb. 7.72. Entsprechende Messungen zeigen, dass die Wellenlängen sichtbaren Lichtes tatsächlich in einem relativ schmalen Bereich um  $0,5\ \mu\text{m}$  liegen.



■ Abb. 7.76. Interferenzstreifen eines Doppelspaltes (nach R.W. Pohl)

#### Merke

Beugung und Interferenz am Doppelspalt und Beugungsgitter:

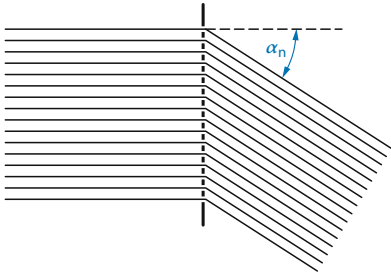
Maximum  $n$ -ter Ordnung:

$$\sin \alpha_n = n \cdot \frac{\lambda}{d}$$

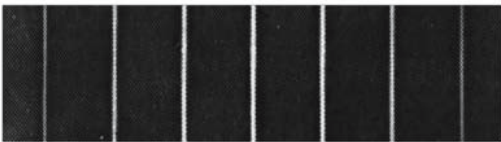
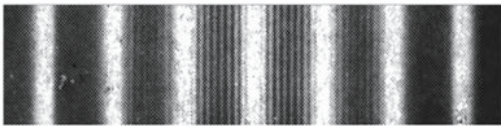
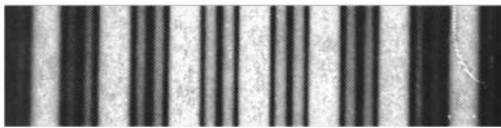
Minimum  $n$ -ter Ordnung:

$$\sin \alpha_n = (n + \frac{1}{2}) \cdot \frac{\lambda}{d}$$

Wenn man den Doppelspalt zu einem **Beugungsgitter** aus vielen äquidistanten Spalten erweitert (■ Abb. 7.77), so ändert sich an den Richtungen der Interferenzmaxima nichts, wohl aber an der Strahlungsleistung zwischen ihnen: Beim Doppelspalt fällt sie allmählich auf den Wert null und erreicht ihn genau in der Mitte zwischen zwei Maxima. Beim Gitter sind die Maxima deutlich schärfer und durch breite dunkle Streifen voneinander getrennt, umso deutlicher, je mehr Gitterspalten beleuchtet werden (■ Abb. 7.78). Warum? Der Doppelspalt liefert lediglich zwei Wellenzüge; nur bei einem Gangunterschied von  $\lambda/2$  (oder einem ungeradzahlig Vielfachen davon) löschen sie sich vollkommen aus. Bei einem Gitter mit 1000 Spalten genügt aber schon ein Gangunterschied von einem Tausendstel  $\lambda$  zwischen Nachbarn zur Auslöschung, denn dies bedeutet eine halbe Wel-



■ **Abb. 7.77. Beugungsgitter, schematisch.** Die Richtungen der Interferenzmaxima sind die gleichen wie beim Doppelspalt; die Maxima selber sind aber wesentlich schärfer ausgeprägt, weil sich auch die Wellenzüge weit entfernter Spalte mit entsprechend höheren Gangunterschieden gegenseitig auslöschen können



■ **Abb. 7.78. Beugungsfiguren von Gittern mit 4, 10 und 250 Spalten** (nach R.W. Pohl)

lenlänge Gangunterschied zwischen den Spalten 1 und 501, zwischen 2 und 502 usw.: Zu jedem Wellenzug aus einem Spalt findet sich schon jetzt ein zweiter, der die zur Interferenzauslöschung notwendige halbe Wellenlänge Gangunterschied mitbringt.

Optische Gitter haben praktische Bedeutung: Beleuchtet man sie mit einem Parallelbündel weißen Lichtes, so fächern sie es in wellenlängensortierte Parallelbündel auf, ein jedes ausgesandt in Richtung seines Interferenzmaximums. Ähnlich den Prismen können auch Beugungsgitter Licht spektral zerlegen (**Gitterspektrometer**). Aus dem täglichen Leben kennt man das von den Compact

Discs zur Musikwiedergabe. Die digitale Information ist auf einer CD in Rillen gespeichert, die einen Abstand von  $1,6 \mu\text{m}$  haben. Das liefert ein gutes Beugungsgitter und lässt die CDs auf der Abspielseite bunt schillern.

#### Rechenbeispiel 7.8: Kohärenzlänge

► **Aufgabe.** Angenommen, ■ Abb. 7.75 sei mit dem grünen Licht der Quecksilberlampe ( $\lambda = 546 \text{ nm}$ ) und einem  $0,11 \text{ mm}$  dicken Glimmerblatt erzeugt worden. Von welcher Ordnung ungefähr wäre dann das zentrale Maximum? Wie groß müsste die Kohärenzlänge der Lampe mindestens gewesen sein?

► **Lösung.** Der kleinste Gangunterschied entspricht dem Abstand der virtuellen Spiegelbilder, also zweimal die Glimmerdicke. Für die Ordnung gilt also:  $n = 2 \cdot d / \lambda = 0,22 \text{ mm} / 546 \text{ nm} \approx 400$ . Die Kohärenzlänge muss  $2 \cdot d = 0,22 \text{ mm}$  deutlich übersteigen.

#### Rechenbeispiel 7.9: Die Spektren überlappen

► **Aufgabe.** Weißes Licht mit Wellenlängen zwischen  $400 \text{ nm}$  und  $750 \text{ nm}$  fallen auf ein Beugungsgitter mit  $4000$  Spalten auf ein Zentimeter. Zeige, dass das Blau ( $\lambda = 450 \text{ nm}$ ) der dritten Ordnung mit dem Rot ( $\lambda = 700 \text{ nm}$ ) der zweiten Ordnung überlappt.

► **Lösung.** Der Abstand der Spalte im Gitter beträgt  $d = (1/400) \text{ cm} = 2,5 \mu\text{m}$ . Für die Lage des dritten Interferenzmaximums des blauen Lichts ergibt sich:

$$\sin \alpha_3 = 3 \cdot 450 \text{ nm} / 2,5 \mu\text{m} = 0,54,$$

das ist  $\alpha_3 = 33^\circ$ . Für Rot ergibt sich:

$$\sin \alpha_3 = 2 \cdot 700 \text{ nm} / 2,5 \mu\text{m} = 0,56,$$

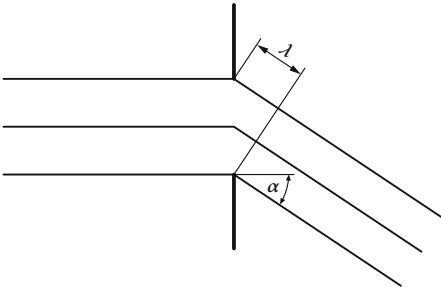
das ist  $\alpha_3 = 34^\circ$ .

### 7.4.5 Beugungsfiguren

Gleichmäßige Beugung aus einem Loch oder Spalt heraus in den ganzen Halbraum hinein (■ Abb. 7.11) setzt einen Lochdurchmesser, eine Spaltbreite voraus, die gegenüber der Wellenlänge



■ Abb. 7.79. Beugungsfigur eines Spaltes; in dem die Bildmitte zur Vermeidung von Überstrahlungen ausgeblendet ist (nach R. W. Pohl)



■ Abb. 7.80. Zur Beugung am Spalt. In der Spaltebene werden elementare Wellenzentren als Ausgangspunkte von Huygens-Elementarwellen angenommen. Erstes Interferenzminimum bei einer vollen Wellenlänge Gangunterschied zwischen den Randstrahlen

klein ist. Bei Wasserwellen lässt sich das noch einigermaßen erreichen, bei sichtbarem Licht würden die Interferenzfiguren aber zu dunkel für eine bequeme Beobachtung. Folglich macht man die Spalte breiter. Ein breiter Spalt liefert aber schon für sich allein eine Beugungsfigur. Abbildung 7.79 zeigt sie. Um dies zu verstehen, nimmt man an, in der Spaltebene lägen elementare Wellenzentren dicht an dicht, die vom (senkrecht einfallenden) Primärlicht zu gleichphasigen Schwingungen angeregt werden und entsprechend abstrahlen (**Huygens-Elementarwellen**). Hat der Spalt die Breite  $D$ , so beträgt der Gangunterschied zwischen den beiden unter dem Winkel  $\alpha$  emittierten Randstrahlen  $x = D \cdot \sin \alpha$ . Deckt sich  $x$  mit der Wellenlänge  $\lambda$ , so bekommt ein Randstrahl gegenüber dem des Elementarzentums in der Spaltmitte den Gangunterschied  $\lambda/2$ , und beide löschen sich durch Interferenz aus (■ Abb. 7.80).

Demnach lässt sich zu jedem Elementarzentrum in der einen Spalthälfte ein korrespondierendes in der anderen finden, dessen Welle sich mit der seinen weginterferiert:  $\alpha$  bestimmt die Richtung des ersten Minimums in der Beugungsfigur des Einzelspaltes. Vergleichbare Situationen wiederholen sich immer dann, wenn der Gangunter-

schied zwischen den Randstrahlen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge wird. Dazwischen bleibt ein Teil elementarer Wellenzentren übrig, die keinen Partner zur Interferenzlöschung finden. Ein einzelner Spalt der Breite  $D$  liefert demnach Beugungsminima in Richtungen, die der Beziehung

$$\sin \alpha_n = n \cdot \lambda/D$$

gehörchen. Sie ähnelt der Formel für die Interferenzmaxima zweier punktförmiger Wellenzentren.

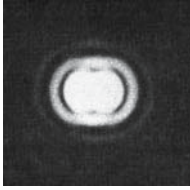
#### Merke

Beugung am Spalt: Minimum bei:

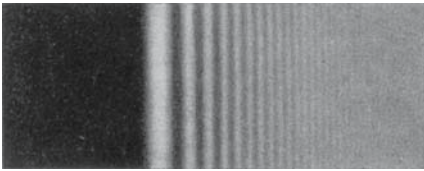
$$\sin \alpha_n = n \cdot \lambda/D.$$

Bemerkenswert an dieser Formel ist: Je schmaler der Spalt, je kleiner  $D$ , umso größer wird  $\alpha$ , umso breiter also das zentrale Maximum im Beugungsmuster. Diese paradox anmutende Tatsache ist wichtig, um das **Auflösungsvermögen** von optischen Instrumenten zu verstehen. Grundsätzlich liefert jedes Loch eine Beugungsfigur, auch die Fassung einer Linse. Selbst ein ideales, im Sinne der geometrischen Optik fehlerfreies Objektiv bildet deshalb einen Gegenstandspunkt nicht in einen Bildpunkt ab, sondern als ausgedehntes Beugungsscheibchen. Dessen Durchmesser bestimmt das Auflösungsvermögen zum Beispiel eines Mikroskops: Zwei Detailpunkte des Objekts können allenfalls dann noch getrennt wahrgenommen werden, wenn das Beugungsscheibchen des einen mit seinem Zentrum auf das erste Minimum des anderen fällt (■ Abb. 7.81). Will man ein hohes Auflösungsvermögen, so muss also der Durchmesser der Objektivlinse möglichst groß sein. Eine genauere Betrachtung zeigt, dass das Verhältnis von Linsendurchmesser zu Brennweite möglichst groß sein muss. Deshalb rückt das Objektiv umso dichter an das Objekt heran, je höher die





■ Abb. 7.81. Zum Auflösungsvermögen eines Mikroskops: überlappende Beugungsscheibchen zweier Bildpunkte (nach R.W. Pohl)



■ Abb. 7.82. Beugung an der Halbebene (nach R.W. Pohl)

Vergrößerung gewählt wird. Bei maximaler Vergrößerung ist der Abstand zuweilen nur noch ein zehntel Millimeter oder kleiner, um die nötige Auflösung zu erreichen. Maß für das Auflösungsvermögen ist die numerische Apertur des Objektivs. Sie gibt an, Licht aus welchem Winkelbereich das Objektiv erfassen kann. Dieser hängt eng mit dem Verhältnis Durchmesser zu Brennweite zusammen. Es gilt nun in etwa:

$$\text{numerische Apertur} = \frac{\lambda}{d_0},$$

wobei  $d_0$  die kleinste noch auflösbare Distanz ist. Sehr gute Objektive erreichen eine numerische Apertur von etwa 0,9. Die auflösbare Länge  $d_0$  ist also immer etwas größer als die Lichtwellenlänge  $\lambda$ . Die Verwendung von kurzwelligem blauem Licht bringt die beste Auflösung.

Beugung tritt nicht nur an Spalten oder Löchern auf, sondern an beliebigen Kanten. Das Licht dringt dort etwas in den Schatten ein und im hellen Bereich bildet sich ein Streifenmuster (■ Abb. 7.82).

### Rechenbeispiel 7.10: Breit, aber dunkel

► **Aufgabe.** Das Licht eines He-Ne-Lasers ( $\lambda = 633$  nm) fällt auf einen  $1 \mu\text{m}$  weiten Spalt. Wie breit ist das Beugungsmaximum gemessen in Winkelgrad bzw. in Zentimetern auf einem  $20 \text{ cm}$  entfernten Schirm?

► **Lösung.** Das erste Minimum erscheint unter dem Winkel:

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{d} = \frac{633 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{10^{-6} \text{ m}} = 0,633 \Rightarrow \alpha = 39^\circ.$$

Die halbe Breite  $x$  auf dem Schirm ergibt sich aus dem Tangens dieses Winkels:

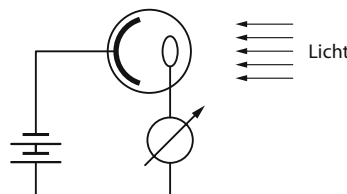
$$\tan \alpha = \frac{x}{20 \text{ cm}} \Rightarrow x = 20 \text{ cm} \cdot 0,82 = 16,4 \text{ cm}.$$

Die volle Breite hat den doppelten Wert. Das Maximum ist also sehr breit, aber auch sehr lichtschwach, denn durch  $1 \mu\text{m}$  kommt nicht viel Licht durch. Um das im Hörsaal vorzuführen, muss man sehr gut abdunkeln.

## 7.5 Quantenoptik

### 7.5.1 Das Lichtquant

Licht transportiert Energie; grundsätzlich muss deshalb ein Elektron, das sein Metall verlassen möchte, sich die dafür nötige Austrittsarbeit auch von absorbiertem Licht geben lassen können. Praktisch geschieht dies in der sog. „Vakuumphotozelle“, einem evakuierten Glaskolben mit einer großflächigen **Photokathode** und einer unscheinbaren Anode gegenüber, die einfallendem Licht möglichst wenig im Weg stehen soll. Legt man zwischen beide eine Spannung mit richtigem Vorzeichen, misst man bei passender Beleuchtung in der Tat einen **Photostrom** (■ Abb. 7.83); polt man um, fließen allenfalls Leckströme. Dies ist der **lichtelektrische Effekt** (Photoeffekt).

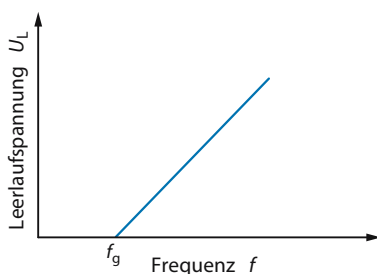


■ Abb. 7.83. Vakuumphotozelle, schematisch

Die Vakuumphotozelle vermag sogar eine Spannung zu erzeugen. Ein Elektron kann nämlich vom absorbierten Licht mehr als nur die exakte Austrittsarbeit übernehmen, den Überschuss als kinetische Energie ins Vakuum mitnehmen und so bei passender Startrichtung die Anode nicht nur ohne Nachhilfe durch äußere Spannung erreichen, sondern sogar eine Gegenspannung überwinden. Diese stellt sich als **Leerlaufspannung**  $U_L$  dann von selbst ein, wenn man Batterie und Strommesser aus dem Außenkreis herausnimmt und ihn über einen hochohmigen Spannungsmesser schließt. Das Ergebnis sorgfältiger Messreihen überrascht:  $U_L$  hängt nicht von der Bestrahlungsstärke der Photokathode ab, sondern von der Wellenlänge des Lichts, besser von dessen Frequenz  $f$ . Unterhalb einer Grenzfrequenz  $f_g$  passiert gar nichts, oberhalb steigt  $U_L$  linear mit  $f$  an (Abb. 7.84). Mit dem „klassischen“ Bild einer elektromagnetischen Welle ist dieses experimentelle Faktum nicht zu verstehen, denn deren Leistung und Energie hängt nur von den Amplituden der beiden Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  ab und nicht von der Frequenz  $f$ . Was tun?

Deuten lässt sich der äußere Photoeffekt mit der **Quantenhypothese**: Ein rotierendes Rad, ein schwingendes Pendel, kurz jedes System, das einen periodischen Vorgang mit der Frequenz  $f$  ausführt, kann die Energie dieses Vorganges nicht kontinuierlich ändern, wie die klassische Physik annimmt, sondern nur in Sprüngen mit der

$$\text{Quantenenergie } W_Q = h \cdot f.$$



■ **Abb. 7.84. Spannung an der Photozelle.** Abhängigkeit der Leerlaufspannung  $U_L$  einer Vakuumphotozelle in Abhängigkeit von der Frequenz  $f$  des Lichtes. Die Grenzfrequenz  $f_g$ , bei der der Photoeffekt einsetzt, hängt vom Material der Photokathode, nicht aber von der Bestrahlungsstärke des Lichtes ab

Das **Planck'sche Wirkungsquantum**  $h$ , nach seinem Entdecker Max Planck benannt (1858–1947) erweist sich als fundamentale Naturkonstante:

$$h = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 4,1357 \cdot 10^{-15} \text{ eVs.}$$

Sie wird Wirkungsquantum genannt, denn die Joulesekunde ist Einheit der physikalischen GröÙe Wirkung (Energie mal Zeit).

#### Merke

Quantenhypothese: Ändern kann ein periodischer Vorgang mit der Frequenz  $f$  seine Energie nur in Quantensprüngen

$$\Delta W_Q = h \cdot f;$$

Planck'sches Wirkungsquantum  $h \approx 4 \cdot 10^{-15} \text{ eVs.}$

Dass sie nicht früher entdeckt wurde, liegt an ihrer Kleinheit. Das Pendel von Großvaters Standuhr schwingt mit etwa einem Hertz. Die zugehörige Quantenenergie von weniger als  $10^{-33} \text{ J}$  entzieht sich jeder Messung. Wenn die Uhr abgelaufen ist, schwingt das Pendel nach einer e-Funktion aus; Quantensprünge kann niemand erkennen. Molekülschwingungen absorbieren oder emittieren meist infrarotes Licht; dazu gehören dann Frequenzen in der Größenordnung  $10^{14} \text{ Hz}$  und Quantenenergien im Bereich 0,1 eV – für makroskopische Systeme immer noch blitzwenig, aber für ein einzelnes Molekül keineswegs. Bei Zimmertemperatur liegt die ihm zustehende mittlere thermische Energie nur in der gleichen Größenordnung, nicht etwa weit darüber.

Die Quantenhypothese macht Beobachtungen nach Art der Abb. 7.84 geradezu selbstverständlich: Liegt die Austrittsarbeit  $W_A$  des Metalls über der Quantenenergie  $W_Q$  des Lichtes, kann das Elektron mit ihr nichts anfangen; liegt sie darunter, bleibt dem Elektron die Differenz, um die Leerlaufspannung  $U_L$  aufzubauen:

$$h \cdot f = W_Q = e_0 \cdot U_L + W_A.$$

Das ist die Gleichung eines linearen Zusammenhanges. Mit der Grenzfrequenz  $f_g$  lässt sich demnach die Austrittsarbeit messen:

$$W_A = h \cdot f_g.$$



Im Bereich der elektromagnetischen Wellen versteht man unter **energiereicher Strahlung** eine kurzwellige Strahlung mit hoher Quantenenergie, nicht etwa eine „intensive“ Strahlung mit hoher Strahlungsstärke. Bei der Photokathode bewirkt eine Steigerung der Bestrahlungsstärke lediglich, dass mehr Quantenenergien absorbiert werden und mehr Elektronen austreten können: Der Photostrom steigt, nichts sonst. So gesehen, darf man einen Strahlungsfluss (Watt) als Strom von **Quanten**, von **Photonen** interpretieren, als „Quantenstrom“ oder „Photonenstrom“, gemessen als Anzahl durch Sekunde. Nur darf man sich nicht vorstellen, da flögen Photonen wie Schrotkugeln durch die Gegend. Licht wird in Quanten emittiert und absorbiert, aber unterwegs ist es als Welle. Beugung und Interferenz lassen keine andere Deutung zu.

Dahinter steckt der berühmte **Dualismus von Welle und Korpuskel**, der in den 20er-Jahren schier zu einem „Umsturz im Weltbild der Physik“ führte – so der Titel einer Buches aus jener Zeit – und die Grenze der bis dahin betriebenen (und bisher in diesem Buch behandelten) sog. „klassischen Physik“ markiert. Diese Physik ist nicht falsch, in ihrem Geltungsbereich liefert auch die „moderne Physik“ keine anderen Ergebnisse; sie tut es nur auf kompliziertere und weniger anschauliche Weise. Die Welt der Quanten bleibt freilich der klassischen Physik verschlossen.

#### Rechenbeispiel 7.11: Photonen aus der Glühlampe

► **Aufgabe.** Wie viele sichtbare Photonen kommen größenordnungsmäßig aus einer 100-W-Glühlampe?

► **Lösung.** Wir nehmen eine mittlere Wellenlänge von 500 nm für das sichtbare Licht. Das liefert eine Energie des einzelnen Photons von

$$W_Q = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \\ = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 4 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Da unsere Glühlampe pro Sekunde 100 J abgibt, wären das etwa  $10^{20}$  Photonen. Tatsächlich gehen aber nur etwa 5% der Leistung in sichtbares Licht (der Rest ins Infrarot). Deshalb ist  $10^{19}$  eine bessere Schätzung.

#### Merke

Licht breitet sich als Welle aus, wird aber in Quanten (Photonen) emittiert und absorbiert.

### 7.5.2 Energiezustände und Spektren

Moleküle sind nicht starr; ihre Teile können gegeneinander schwingen und, da sie meist nicht elektrisch neutral sind, als schwingende Dipole elektromagnetische Wellen abstrahlen oder mit ankommenden in Resonanz geraten. Die Eigenfrequenzen organischer Moleküle liegen im Bereich bis etwa  $10^{14}$  Hz hinauf, entsprechen also infrarotem Licht. Jede Molekülsorte besitzt ein sie charakterisierendes **Spektrum**, das, meist in Absorption beobachtet, gern zur chemischen **Absorptionsspektralanalyse** benutzt wird (► Kap. 7.3.2). Soweit das Bild der klassischen Physik. Die Quantenphysik fügt nur noch ergänzend hinzu: Auch ein molekularer Oszillator kann seine Schwingungsenergie nur in **Quantensprüngen** ändern; ihm sind nur diskrete **Energiezustände** erlaubt, die man in vertikaler Energieskala wie die Sprossen einer Leiter übereinander zeichnen kann.

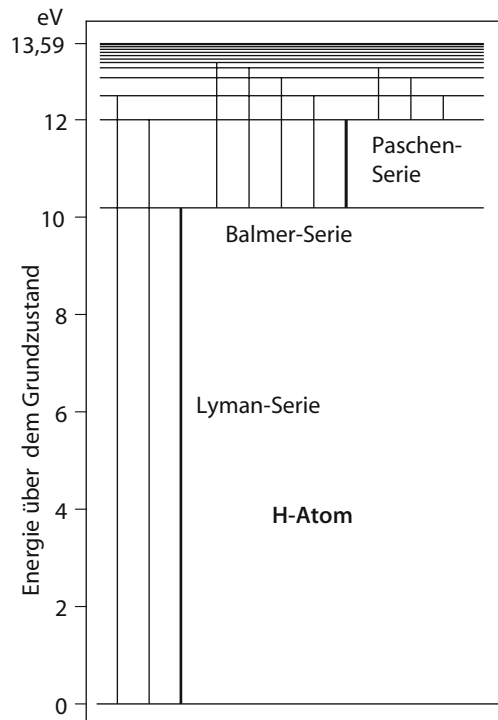
Auch Atome emittieren Licht. Die an sich farblose Flamme des Bunsenbrenners wird leuchtend gelb, wenn Spuren von Kochsalz in sie hineingeraten. Ein Fingerabdruck auf einem sauberen Stab aus Quarzglas genügt bereits. Eine spektrale Zerlegung liefert zwei eng benachbarte, scharfe Linien bei 589,0 nm und 589,6 nm, die sog. „D-Linien“ des Natriums. Atome anderer Elemente führen zu anderer **Flammenfärbung**, die in einfachen Fällen eine durchaus praktikable Methode zur qualitativen chemischen Analyse liefert. In den raffinierten Techniken der **Emissionsspektralanalyse** ist dieses Verfahren zu hoher technischer Vollkommenheit entwickelt worden.

Beim Atom fällt es der klassischen Physik schwer, einen mechanischen Oszillator mit Rückstellkraft und geladener Pendelmass zu identifizieren; darum verzichtet man auf sie ganz und hält sich gleich an die Energiezustände der Quantenmechanik, an das **Niveauschema**, das man für jedes chemische Element in mühsamer Kleinar-

beit aus dem Spektrum seines Atoms hat erschließen müssen.

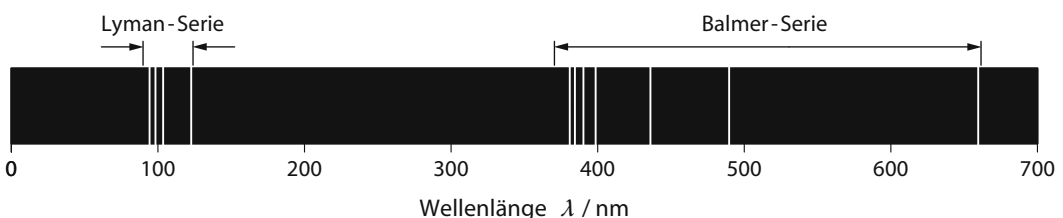
Zunächst einmal befindet sich ein Atom im Zustand niedrigster Energie, im **Grundzustand**. Dort passiert solange nichts, wie dem Atom keine **Anregungsenergie** zugeteilt wird, mit der es mindestens in einen angeregten Zustand übergehen kann. Woher diese Energie stammt, spielt keine Rolle; sie darf der thermischen Energie einer Flamme entstammen, dem Elektronenstoß in einer Gasentladung oder auch einem genau passenden Quant. Führt die Anregung nur in den ersten angeregten Zustand, so hat das Atom keine Wahl: Es kann nur mit dem gleichen Quantensprung in den Grundzustand zurückkehren, mit dem es ihn verlassen hat. Ist das Atom aber in einen höheren angeregten Zustand gelangt, darf es unter Beachtung bestimmter **Auswahlregeln** entscheiden, ob es in einem großen Sprung, also unter Emission eines relativ energiereichen „kurzwelligen“ Quants zurückkehrt oder in mehreren Sprüngen mit mehreren Quanten. Zuweilen geht das bis zum Grenzfall des Hoppelns von Sprosse zu Sprosse, von Niveau zu Niveau.

Die Abstände der Sprossen sind nicht gleich wie bei einer Leiter, sie werden nach oben immer kleiner, die zugehörigen Quanten immer „langwelliger“. Das macht die Übersetzung eines beobachteten Spektrums in das zugehörige Niveauschema so mühsam. Relativ leicht gelingt dies noch beim einfachsten aller Atome, dem des Wasserstoffs; ■ Abbildung 7.85 zeigt einen zeichnerisch etwas reduzierten Ausschnitt aus seinem Spektrum. Man erkennt zwei **Serien** mit kurzwelligen **Seriengrenzen**, vor denen sich die Spektrallinien so drängeln, dass sie sich nicht mehr getrennt zeichnen lassen. Zur Emission von Linien der Ly-



■ Abb. 7.86. Niveauschema des Wasserstoffatoms (nach R.W. Pohl)

man-Serie im Ultravioletten gehören Quantensprünge in den Grundzustand, zu der ins Sichtbare reichenden **Balmer-Serie** Sprünge in den ersten angeregten Zustand. Die infrarote **Paschen-Serie** mit Sprüngen in den zweiten angeregten Zustand ist in der Abbildung nicht mehr enthalten. ■ Abbildung 7.86 zeigt das Niveauschema des Wasserstoffs. Bei Atomen „höherer“, weiter oben im Periodensystem stehender Elemente sehen die Niveauschemata komplizierter aus. Führt man einem H-



■ Abb. 7.85. Spektrum des Wasserstoffs (Ausschnitt); die stärkeren Linien sind hier von Hand gezeichnet; zu kurzen Wellen folgen noch zahlreiche, dichter beieinander liegende schwächere Linien

Atom im Grundzustand mehr als die Quantenenergie zur Lyman-Grenze, also mehr als 13,59 eV zu, verliert es sein Hüllenelektron und wird zum  $H^+$ -Ion: Die Lyman-Grenze entspricht der Ionisierungsenergie. Dies legt die Vermutung nahe, dass alle Niveauschemata etwas mit den Elektronenhüllen der Atome zu tun haben. Davon wird später noch die Rede sein (► Kap. 8.1.1).

#### Merke

Niveauschema:

Graphische Darstellung der einem Atom von der Quantenmechanik erlaubten Energiezustände mit Grundzustand und angeregten Zuständen.

Quantensprünge zwischen diesen Zuständen entsprechen Linien im Emissions- oder Absorptionsspektrum.

Im Licht einer Natriumdampfampe wirft kalter Natriumdampf tiefschwarze Schatten. Das gleiche Licht, das ein Atom emittiert, wird auch von ihm absorbiert. Fällt das so angeregte Atom nach kurzer Zeit wieder in den Ausgangszustand zurück, emittiert es das Quant, das es eben erst absorbiert hatte; das eingestrahelte Licht wird ohne Frequenzänderung gestreut. Zwischen den Quantensprüngen von Emission und Absorption vergeht aber eine gewisse Zeit; sie hängt von der mittleren **Lebensdauer** des angeregten Zustands ab. Die beiden Quanten wissen also nichts voneinander, und die Phasen der beiden zugehörigen Wellen auch nicht: Die Streuung erfolgt inkohärent.

Führt der Quantensprung der Anregung in einem Schritt über mehrere Niveaus hinweg, darf das Atom bei der Abregung in mehreren Quantensprüngen von Niveau zu Niveau zurückkehren. Jedes der emittierten Quanten ist dann „kleiner“, jede emittierte Strahlung langwelliger als bei der Absorption. Der Energiesatz muss nur in summa befolgt werden. Leuchtstoffe werden auf diesen Mechanismus hin geradezu gezüchtet. Sie erlauben, kurzwelliges ultraviolettes oder Röntgenlicht sichtbar zu machen: Ein solcher Leuchtstoff wird von energiereichen Quanten angeregt und strahlt dafür energieärmere Quanten im sichtbaren Spektralbereich wieder ab. Liegt die Lebensdauer

der angeregten Zustände unter 10 Nanosekunden, so spricht man von **Fluoreszenz**, andernfalls von **Phosphoreszenz**. Oberbegriff zu beiden ist **Lumineszenz**. Man muss einen Leuchtstoff nicht auf optische Anregung hin züchten; der Bildschirm des Fernsehempfängers verlangt **Elektrolumineszenz**, Glühwürmchen betreiben **Biolumineszenz**.

Die Anregung durch Elektronenstoß in der Gasentladung hat große technische Bedeutung, denn sie erzeugt wenig Wärme und wenig infrarotes Licht, liefert also einen wesentlich besseren Wirkungsgrad als die Glühbirne. Nur ist ihr Licht so farbig, dass man es allenfalls zur Straßenbeleuchtung und besser zur Lichtreklame in sog. „Neonröhren“ verwenden kann (die nur selten wirklich Neon enthalten). Quecksilberdampflampen emittieren blau-grünes Licht und vor allem ultraviolettes. Man kann es zur Bräunung der Haut verwenden; in **Leuchtstoffröhren** fängt man das UV im Glaskolben ab und setzt es mit geeigneten Leuchtstoffen in sichtbares Licht um. Durch deren geschickte Mischung eine spektrale Verteilung zu erreichen, die das menschliche Auge als angenehm empfindet, ist nicht ganz einfach.

### 7.5.3 Laser

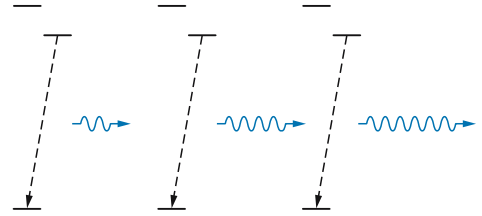
■ ■ ■ Normalerweise führen die Atome einer Gasentladung ihre Quantensprünge völlig unabhängig voneinander aus; entsprechend ist das ausgesandte Licht inkohärent. Von dieser Regel gibt es aber eine markante Ausnahme: der Laser. Sie sei am Beispiel des Helium-Neon-Lasers besprochen.

Das Helium dient hier nur der leichteren Anregung. Aus nicht näher zu erörternden Gründen nehmen seine Atome besonders gern eine ganz bestimmte Energie durch Elektronenstoß auf und geben sie als angeregte Atome beim nächsten Treff bevorzugt an Neonatome unmittelbar weiter. Dabei geht das He-Atom strahlungslos in seinen Grundzustand zurück. Es hat seine Schuldigkeit getan. Das so angeregte Ne-Atom bevorzugt nun einen Abregungsschritt, der nicht zum Grundzustand zurückführt, sondern lediglich ein infrarotes Quant emittiert. Damit landet das Atom aber in einer Sackgasse: Sein neuer Anregungszustand ist **metastabil**, er hat eine ungewöhnlich lange Lebensdauer. Infolgedessen geraten ungewöhnlich viele Atome in diesen Zustand; sie möchten herunterspringen, trauen sich aber nicht.

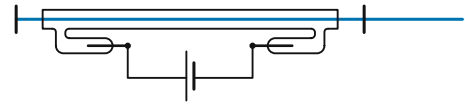
Irgendwann riskiert es ein Atom im metastabilen Zustand aber doch. Dann sendet es ein Quant der Laserlinie von 632,8 nm Wellenlänge aus (helles Rot). Dieses Quant verbreitet nun die Kunde von dem mutigen Springer. Folge: Andere Atome wagen es auch. Weil sie aber nicht aus eigenem Entschluss **spontan** heruntergesprungen sind, sondern auf Abruf gewartet haben, gibt das erste Quant die Phasenlage vor: Alle anderen Quanten schließen sich an. ■ Abbildung 7.87 versucht, diesen Vorgang der **stimulierten Emission** schematisch darzustellen. Von ihr hat der Laser seinen Namen: Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation. Weil sich die Strahlung der abgerufenen Quanten in der Phase an die des auslösenden Quants anschließt, bekommt das Laserlicht eine ungewöhnlich hohe Kohärenzlänge, bis in die Größenordnung Meter. Dies macht seine Besonderheit aus; es erlaubt ungewöhnliche Interferenzversuche.

Die Abrufwahrscheinlichkeit im He-Ne-Laser ist nicht so sehr hoch; das abrufende Quant muss gewissermaßen dicht am wartenden Atom vorbeilaufen. Man baut den Laser deshalb als langes, dünnes Entladungsrohr und verlängert den Lichtweg noch durch zwei Spiegel, zwischen denen das Licht dann hin und her gejagt wird (■ Abb. 7.88). Der eine Spiegel ist zu wenigen Prozent lichtdurchlässig. Bei ihm tritt der scharf gebündelte, hochkohärente Laserstrahl aus, den ■ Abb. 7.14 gezeigt hatte. Nur ein Quant, das in dieser Richtung startet, hat die Chance, Laserlicht abzurufen; wer quer läuft, verlässt das Entladungsrohr zu früh, bleibt allein und emittiert inkohärentes Licht, wie jede andere Gasentladung auch.

Die hohe Kohärenzlänge des Laserlichts macht ein bemerkenswertes Abbildungsverfahren möglich: die **Holographie**. Dazu muss das schmale Laserbündel zunächst einmal mit einer Linse so stark aufgeweitet werden, dass es den abzubildenden Gegenstand voll ausleuchtet. Danach überlagert man das von diesem zurückgestreute Licht einem Referenzbündel, das von dem gleichen Laser stammt, also zur Streustrahlung kohärent ist. Man kann es sich durch einen Spiegel besorgen, den man an eine Stelle im Laserbündel stellt, an der er nicht stört. Die Überlagerung liefert eine stationäre Interferenzfigur (sofern nichts wackelt). Stellt man eine photographische Platte irgendwo hinein, so hält sie das Interferenzmuster fest, das sich an ihrem Ort befindet – sofern ihr Korn fein genug für Strukturen in den Abmessungen der Lichtwellenlänge ist. Die entwickelte Photoplatte enthält dann das Hologramm des fraglichen Gegenstandes. Beleuchtet man es mit Laserlicht, das dem Referenzbündel entspricht, so entsteht ein virtuelles Beugungsbild, das dem Objekt ent-



■ Abb. 7.87. Schema der stimulierten Emission beim Laser: Das vom linken Atom bei Übergang aus dem metastabilen Zustand heraus emittierte Quant ruft die anderen Quanten phasenrichtig ab



■ Abb. 7.88. Aufbau eines He-Ne-Lasers, schematisch. Die lange Röhre des Entladungsgefäßes steht zwischen zwei Spiegeln, die den wirksamen Lichtweg für die stimulierte Emission verlängern. Der eine Spiegel ist zu wenigen Prozent lichtdurchlässig; bei ihm tritt das Laserbündel aus

spricht. Man sieht es, wenn man durch das Hologramm hindurchschaut wie durch ein Fenster. Dabei darf man seine Position wechseln und das Beugungsbild aus verschiedenen Richtungen betrachten: Es zeigt sich jeweils so, wie es das Original auch getan hätte. Hologramme minderer Qualität lassen sich auch in Reflexion und für weißes Licht herstellen. Dazu benutzt man Kunststoffe, die eine mikrometerfeine Riffelung ihrer Oberfläche erlauben: fälschungssicheres Merkmal beispielsweise von Scheck- und Kreditkarten.

Die große Kohärenzlänge des Laserlichts erlaubt nicht nur interessante Interferenzversuche; die zugehörige scharfe Bündelung führt zu extremen Bestrahlungsstärken  $E$ : 5 mW konzentriert auf  $0,1 \text{ mm}^2$  bedeutet  $E = 50 \text{ kW/m}^2$ . Das ist deutlich mehr als die Solarkonstante und erlaubt u. a. feine chirurgische Eingriffe, wie etwa das „Anschweißen“ einer sich ablösenden Netzhaut (**Laserchirurgie**). Generell bluten Schnitte mit dem Laser nicht so stark wie Schnitte mit dem Messer, lassen sich kariöse Bereiche aus Zähnen weniger schmerzhaft herausbrennen als herausbohren. Zudem konzentriert sich das Licht noch auf einen sehr schmalen Spektralbereich. Die Folge sind so hohe Feldstärken  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ , dass es in manchen opti-

schen Substanzen zu „nichtlinearen Effekten“ wie Frequenzverdoppelungen kommen kann.

### Merke

Laser:

Light amplification by stimulated emission of radiation,

Licht hoher Kohärenzlänge, spektraler Schärfe und Intensität.

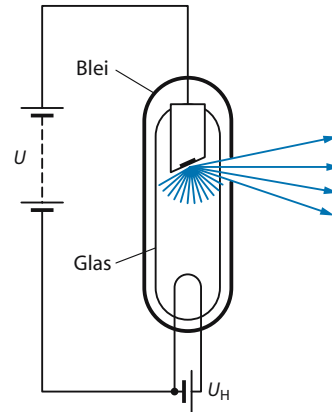
So oder so: Licht wird in Quanten emittiert und absorbiert, breitet sich aber als Welle aus. Das hier zur Erläuterung der stimulierten Emission benutzte Bild vom geradeaus fliegenden, reflektierten und Artgenossen kohärent abrufenden Quant verquickt die beiden Aspekte in unzulässiger Weise. Trotzdem liefert es eine brauchbare Eselsbrücke für jeden, der eine leidlich anschauliche Vorstellung vom Mechanismus eines Lasers haben möchte, ohne den korrekten Gedanken- und Rechnungsgang der Quantenmechanik nachzuvollziehen. Über die Brücke zu gehen, ist aber nur erlaubt, weil die korrekten Quantenmechaniker festgestellt haben, dass man auch so zum richtigen Ziel gelangt. Selbstverständlich ist das nicht. Wer ein Modell überzieht, muss sich beim Fachmann erkundigen, wie weit das erlaubt ist.

## 7.5.4 Röntgenstrahlen

In der Vakuumphotozelle geben Quanten Energie an Elektronen ab. Das Umgekehrte geschieht in der **Röntgenröhre**: Elektronen erzeugen Quanten. Die Elektronen stammen aus einer Glühkathode, werden durch eine hohe Spannung beschleunigt und auf die Anode geschossen (■ Abb. 7.89). Diese bremst sie in wenigen Atomabständen wieder ab; dabei geht der größte Teil der Elektronenenergie in Wärme über. Nur ein kümmerlicher Rest in der Größenordnung Prozent wird von Quanten übernommen.

Jedes Elektron bezieht die kinetische Energie  $W_{\text{kin}}$ , die es an der Anode abgibt, aus der Anodenspannung  $U$ :

$$W_{\text{kin}} = e_0 \cdot U$$



■ Abb. 7.89. Aufbau und Schaltung einer Röntgenröhre, schematisch. Aus der Glühkathode, geheizt mit der Heizspannung  $U_H$ , treten Elektronen aus, die, von der Anodenspannung  $U$  beschleunigt, mit der kinetischen Energie  $e_0 \cdot U$  auf die Anode treffen und dort bei der Abbremsung Röntgenquanten erzeugen

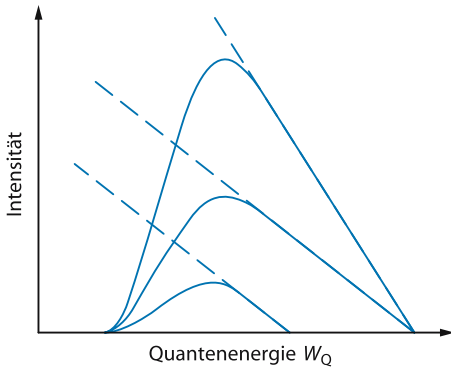
(genau genommen kommt die thermische Energie, mit der es die Glühkathode verlassen hat, noch hinzu; sie kann als klein vernachlässigt werden). Im günstigsten Fall übergibt ein Elektron beim Abbremsen seine ganze Energie einem einzigen Quant, häufiger nur einen Teil, meistens gar nichts; dann erzeugt es nur Wärme. Folge: Für die Quantenenergie der Röntgenstrahlen existiert eine obere, für die Wellenlänge eine untere, eine **kurzwellige Grenze**. In Formeln:

$$W_Q = h \cdot f \leq W_{\text{kin}} = e_0 \cdot U,$$

und

$$\lambda \geq \frac{h \cdot c}{e_0 \cdot U}.$$

Das vollständige **Bremsspektrum** einer Röntgenröhre zeigt Abbildung 7.90. Es ist vom Material der Anode unabhängig, abhängig aber von der Anodenspannung  $U$ . Steigert man sie, so verschiebt sich der Schwerpunkt des Spektrum zu kürzeren Wellen: Die Strahlung wird härter. Zugleich wird sie intensiver, weil die von den Elektronen umgesetzte Leistung zunimmt. Die Intensität lässt sich aber auch unabhängig von der Anodenspannung durch den Heizstrom der Glühkathode steuern: Er bestimmt deren Temperatur und damit den Emissionsstrom. Die Anodenspannungen medizinisch genutzter Röntgenröhren beginnen bei etwa



■ **Abb. 7.90. Bremspektrum einer Röntgenröhre**, schematisch. Der Abfall zu kleinen Quantenenergien ist eine Folge der Filterung durch das Strahlenfenster; im Vakuum der Röhre setzt sich das Spektrum entsprechend den gestrichelten Geraden fort. Eine Erhöhung der Anodenspannung verschiebt die Gerade parallel zu sich selbst nach rechts (*untere und mittlere Kurve*); eine Erhöhung des Anodenstroms dreht die Gerade im Uhrzeigersinn um ihren Schnittpunkt mit der Abszisse (*mittlere und rechte Kurve*). Dieser Schnittpunkt markiert die kurzweilige Grenze des Bremspektrums

10 kV und reichen über 300 kV hinaus. Dem entsprechen Wellenlängen von 0,1 nm abwärts, d. h. von Atomdurchmessern abwärts, jenseits vom Ultraviolett.

### Merke

Röntgenröhre, Röntgenstrahlen:

Freie Elektronen aus einer Glühkathode werden mit Spannungen  $U > 10$  kV auf eine Anode geschossen und erzeugen dort bei der Abbremsung energiereiche Quanten. Das Bremspektrum hat eine kurzweilige Grenze bei  $W_Q = e_0 \cdot U$ .

Auch Röntgenstrahlen folgen beim Durchgang durch die Materie dem Lambert-Beer-Gesetz (► Kap. 7.3.2), wenn auch nicht ganz genau, weil sie stärker gestreut werden als sichtbares Licht. Statt des Absorptionskoeffizienten  $k$  definiert man im Röntgengebiet einen **Schwächungskoeffizienten**  $\mu$ :

$$I = I_0 \cdot e^{(-\mu \cdot d)}$$

( $I$  = durchgelassene,  $I_0$  = auffallende Strahlungsleistung,  $d$  = Schichtdicke).

Röntgenstrahlen werden von Atomen absorbiert, und zwar unabhängig von chemischen Bindungen, unabhängig also von dem Molekül, in dem sich das Atom befindet. Dadurch lässt sich die Absorption von Röntgenlicht in mancher Be-

### Klinik

**Genaueres zur Röntgenröhre.** In einer Röntgenröhre wird die elektrische Energie überwiegend in Wärme umgesetzt; der Nutzeffekt ist schlecht. Kleinere Röhren, wie etwa die des Zahnarztes, dürfen deshalb immer nur sekundenweise eingeschaltet werden (das genügt für eine Aufnahme) und brauchen dazwischen längere Pausen zum Abkühlen. Der Dauerbetrieb einer Therapieröhre verlangt demgegenüber eine intensive Zwangskühlung durch Wasser oder Öl. Auf jeden Fall ist die thermische Belastung am Ort des **Brennflecks**, auf den die Elektronen konzentriert werden, beträchtlich. Medizinisch genutzte Röhren tragen dort meist ein kräftiges Stück Wolfram mit dem hohen Schmelzpunkt von 3650 K. Es wird eingesetzt in massives Kupfer, das eine hohe Wärmeleitfähigkeit besitzt. Warum man an einem kleinen Brennfleck interessiert sein muss, wird in ► Kap. 9.2.1 noch besprochen werden.

Das volle Röntgenbremspektrum lässt sich nur in Spezialapparaturen ausmessen; normalerweise nimmt allein schon der Glaskolben der Röhre den langwelligen Teil heraus. ■ Abbildung 7.90 hat dies bereits berücksichtigt. In der Klinik werden zusätzliche Filter (etwa eine Aluminiumscheibe) in den Strahlengang gesetzt, die ebenfalls bevorzugt die langen Wellen absorbieren. Ziel ist, die Strahlung insgesamt kurzweiliger, also härter und durchdringungsfähiger zu machen, denn damit Energie, die auch absorbiert wird, hat biologische Wirkung, kann Strahlenschäden auslösen. Ein Teil der Energie muss freilich absorbiert werden, denn sonst gäbe es keine Kontraste im **Röntgenbild**. Knochen erscheinen im photographischen Negativ hell; sie absorbieren stärker und sind deshalb auch stärker gefährdet.



ziehung einfacher behandeln als die von sichtbarem. Es geht nur um die Atome von rund 100 chemischen Elementen, nicht um die Moleküle der zigtausend von chemischen Verbindungen. Die Anzahldichte, mit der eine (mit dem Index  $j$  gekennzeichnete) Atomsorte in irgendeinem Material vertreten ist, bedeutet auch eine Massendichte  $\rho_j$ , mit der sie sich an der gesamten Massendichte  $\rho$  des Materials beteiligt. Kennt man dessen chemische Zusammensetzung, so kann man über die Atomgewichtstabellen leicht die einzelnen  $\rho_j$  bestimmen. Weil sich nun die Röntgenabsorptionen der verschiedenen Atomsorten einfach addieren, genügt es, für alle chemischen Elemente die (wellenlängenabhängigen) **Massenschwächungskoeffizienten**

$$\mu_m = \mu_j / \rho_j$$

zu tabellieren. Man kann dann für jede Substanz und jedes Substanzgemisch über die Dichteanteile der Komponenten den Schwächungskoeffizienten  $\mu$  berechnen.

Röntgenstrahlen werden weit stärker gestreut als sichtbares Licht. Für Röntgenaugen wären Menschen zwar in gewissem Grad durchsichtig, die Luft erschiene aber neblig trüb; die Welt läge in einem dichten Dunstschleier. Der Schwächungskoeffizient  $\mu_m$  setzt sich deshalb aus einem echten **Absorptionskoeffizienten**  $\tau_m$  und einem **Streukoeffizienten**  $\sigma_m$  additiv zusammen. Weil Strahlung, die durch Streuung aus einem Lichtbündel herausgekommen ist, durch Vielfachstreuung wieder hereinkommen kann, hält sich die Schwächung auch monochromatischer Röntgenstrahlung nicht exakt an eine e-Funktion.

#### Merke

VSchwächungskoeffizient  $\mu$ :

$$I = I_0 \cdot e^{(-\mu \cdot d)},$$

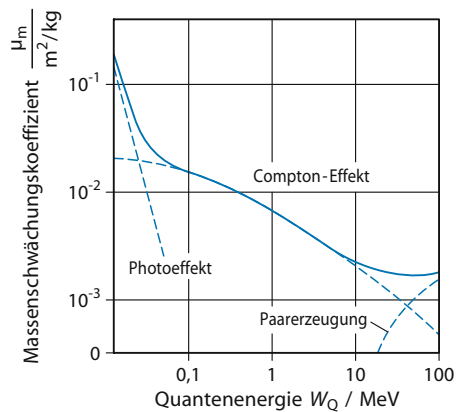
Massenschwächungskoeffizient  $\mu_m$ :

$$\mu_m = \mu_j / \rho_j.$$

Leider erschwert die Streuung den medizinischen Strahlenschutz: Es genügt nicht, dass sich die Röntgenschwester aus dem direkten, auf den Patienten gerichteten Strahlenbündel heraushält; sie

muss sich schon hinter eine Schutzmauer ins Nebenzimmer begeben: Der Bestrahlungsraum ist völlig von Streulicht durchsetzt.

Die leichten Atome am Anfang des **periodischen Systems der chemischen Elemente** absorbieren Röntgenstrahlung nur wenig; mit steigender **Atomnummer** nimmt das Schwächungsvermögen ganz erheblich zu. Langwellige, also weiche Röntgenstrahlung wird allgemein stärker absorbiert als kurzwellige harte. Das gilt in hohem Maße für den **Photoeffekt**, bei dem ein einzelnes Elektron die gesamte Quantenenergie auf einen Schlag übernimmt. In biologischem Gewebe wird der Massenschwächungskoeffizient bis etwa 50 keV vom Photoeffekt bestimmt, ab 80 keV herrscht der weniger von der Quantenenergie abhängige **Compton-Effekt** (er wird im nächsten Kapitel behandelt), den oberhalb 10 MeV die **Paarbildung** ablöst (■ Abb. 7.91).



■ **Abb. 7.91.** Massenschwächungskoeffizient  $\mu_m$  des Wassers (er stimmt praktisch mit dem biologischen Gewebe überein). Bei kleinen Quantenenergien überwiegt der Photoeffekt, bei mittleren der Compton-Effekt und bei großen die Paarbildung. Bei schwereren Atomen rücken die Bereiche von Photoeffekt und Paarbildung aufeinander zu und engen den Bereich des Compton-Effektes ein



## Praktikum

## Röntgenstrahlen

Meistes wird die Absorption der Strahlung in Abhängigkeit der Dicke des absorbierenden Materials ausgemessen. Da die Intensität im Material exponentiell absinkt, kann die Absorption mit einer

$$\text{Halbwertsdicke } d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}$$

charakterisiert werden. Vielleicht sind für Sie auch die Kapitel zum Röntgenspektrum, ► Kap. 8.1.4, und zur Dosimetrie, ► Kap. 9.1.1 und 9.1.2, interessant.

## Rechenbeispiel 7.12: Fast alles bleibt stecken

► **Aufgabe.** Welcher Anteil der Strahlungsenergie steht bei einer Durchleuchtung des Magen-Darm-Trakts für die Belichtung des Röntgenfilmes schätzungsweise noch zur Verfügung, welcher Teil wird im Gewebe absorbiert? Zur Vereinfachung der Abschätzung soll Folgendes angenommen werden: Die Röntgenstrahlung ist monochromatisch mit 50 keV Quantenenergie; das Gewebe verhält sich wie Wasser und besitzt eine gleichmäßige Schichtdicke von 20 cm. Der Massenschwächungskoeffizient wird der ■ Abb. 7.91 entnommen.

► **Lösung.** Für die Abschwächung der Strahlung gilt:

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\mu \cdot d}$$

mit  $\mu = \mu_m \cdot \rho$ . Wir haben angenommen:  $d = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m}$ ; Modellsubstanz Wasser: Massenschwächungskoeffizient  $\mu_m = 0,02 \text{ m}^2/\text{kg}$  und  $\rho = 1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ . Dann ist:  $\mu = 20 \text{ m}^{-1}$  und  $\mu \cdot d = 4$ , also

$$\frac{I}{I_0} = e^{-4} = 0,02 \hat{=} 2\%.$$

98% der Röntgenenergie werden also vom Gewebe absorbiert! Nach dieser Abschätzung wundert man sich vielleicht etwas weniger darüber, dass die zivilisationsbedingte Strahlenbelastung in den Industrieländern im Wesentlichen von der medizinischen Röntgendiagnose herrührt.

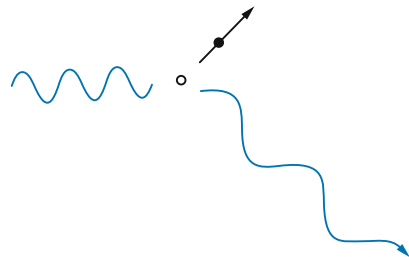
## 7.5.5 Der Compton-Effekt

Elektromagnetische Wellen transportieren Energie, aber keine Masse. Dass sie trotzdem mechanischen Impuls auf einen Absorber oder einen Spiegel übertragen, kann auf den ersten Blick überraschen – auf den zweiten aber schon nicht mehr, denn nach der Relativitätstheorie sind Energie und Masse ja eng miteinander verwandt: Licht transportiert lediglich keine Ruhemasse. Seine Quanten verleihen ihm aber Eigenschaften, die durchaus an Korpuskeln erinnern.

Obwohl man weiß, dass sich Licht als Welle mit Beugung und Interferenz ausbreitet, und dass da keine Quanten durch die Gegend fliegen, kann es zuweilen nützlich sein, so zu tun, als täten sie dies doch, als wären die Quanten Teilchen mit der kinetischen Energie  $W_Q = h \cdot f$  und dem mechanischen


$$\text{Impuls } p_Q = \frac{\text{Wirkungsquantum } h}{\text{Wellenlänge } \lambda}.$$


Trifft in diesem Sinn ein Quant auf ein freivagabundierendes Elektron, so stößt es mit ihm ganz nach den Regeln der klassischen Mechanik für einen elastischen Stoß: Es überträgt Energie und Impuls, achtet dabei aber streng auf deren Erhaltungssätze. Trifft das Quant zentral, so wird es zurückgeworfen; trifft es schief, so wird es zur Seite abgelenkt und das Elektron zur anderen Seite (■ Abb. 7.92). Weil man Quanten nicht gezielt abschießen kann, lassen sich die Ablenkungswinkel nicht vorhersagen, wohl aber nachmessen – und dazu die Energie, die das Elektron mitbekommen hat. Sie fehlt dem Quant: Es muss seine



■ **Abb. 7.92. Compton-Effekt**, schematisch. Ein Röntgenquant stößt mit einem Elektron zusammen und überträgt ihm nach den Regeln des elastischen Stoßes Impuls und Energie: Das gestreute Quant gehört zu einer weichen Strahlung als das stoßende Quant


Frequenz erniedrigen und seine Wellenlänge erhöhen; der Betrag hängt mit dem Streuwinkel zusammen. Messungen mit Röntgenstrahlen haben ergeben, dass sich dieser **Compton-Effekt** genannte Vorgang wirklich an die Stoßgesetze hält. Dabei muss das gestreute Elektron nicht einmal frei sein; die Energie eines Röntgenquantens ist groß genug, um ein paar eV für die Ionisation, für die Abspaltung eines der äußeren Hüllenelektronen des Atoms unauffällig zu liefern.

Compton-Streuung spielt bei der Schwächung der medizinisch genutzten Röntgenstrahlen schon ab 50 keV eine gewichtige Rolle, wie  Abb. 7.91 gezeigt hat. Wie beim Photoeffekt werden schnelle Elektronen erzeugt, nur verschwindet das Quant nicht völlig. Es fliegt mit kleinerer Energie („errötet“, wenn man so will) zur Seite weiter. Quanten sind nicht so unwandelbar wie Elektronen, wie „richtige“ Partikel.

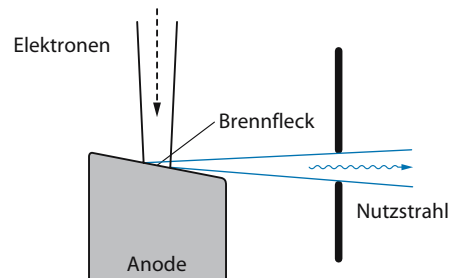
Quanten besitzen ja auch keine Ruhemasse wie richtige Partikel, sondern nur Energie. Weil aber nach der Relativitätstheorie Energie und Masse äquivalent sind ( Kap. 8.2.3), unterliegt Licht doch der Gravitation. Im Labor ist das nur mit beträchtlichem Aufwand nachzuweisen. Selbst im Weltraum ziehen nur große Himmelskörper vorbeilaufendes Licht merklich an. Es scheint aber auch Himmelskörper zu geben, deren Masse so groß ist, dass ihr eigenes Licht sie nicht verlassen, ihrer Gravitation nicht entfliehen kann, und ankommendes Licht unrettbar eingefangen wird. Die Astrophysiker nennen sie „schwarze Löcher“, zu Recht, denn schwärzer kann ein Loch nicht sein.


### 7.5.6 Röntgendiagnose

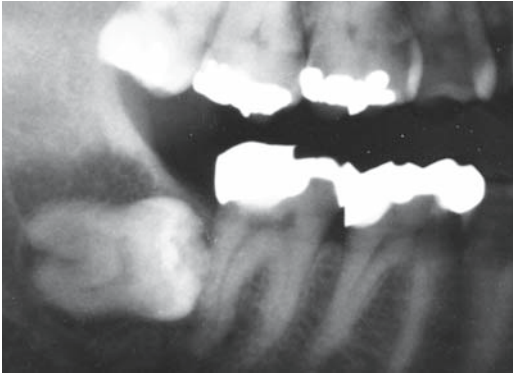
Mit Röntgenlicht kann man fotografieren; die chemische Industrie hat dafür spezielle Emulsionen entwickelt. Grundsätzlich war das nicht nötig, auch normale Filme werden durch energiereiche Quanten geschwärzt. Aber die Spezialfilme kommen mit kürzeren Belichtungszeiten aus und reduzieren so die Strahlenbelastung des Patienten. Röntgenlicht kann man nicht sehen, aber mit Leuchtschirmen sichtbar machen; was die Quanten ultraviolette Lichtes können, können Röntgenquanten allemal.

Für Röntgenlicht lassen sich keine Linsen schleifen, denn in seinem Spektralbereich weichen die Brechzahlen aller Substanzen nicht nennenswert von eins ab. Die Röntgendiagnose ist deshalb zunächst einmal auf lebensgroße Schattenbilder angewiesen. Scharfer Schattenwurf erfordert kleine Lichtquellen, in der Röntgenröhre also einen kleinen Brennfleck, auf den die Elektronen konzentriert werden müssen. Dort setzen sie ihre kinetische Energie fast vollständig in Wärme um. Die Folge ist eine hohe thermische Belastung. Man setzt deshalb an den Ort des Brennflecks ein hochschmelzendes Material wie Wolfram, bettet es in gut wärmeleitendes Kupfer ein und kühlt dies mit Wasser. Nur relativ bescheidene Röhren wie etwa die des Zahnarztes kommen mit der Wärmekapazität ihrer Anode aus, brauchen aber nach einigen wenigen Aufnahmen eine längere Ruhepause zur Abkühlung. Die thermische Belastung des Wolframs lässt sich dadurch mindern, dass man die Anode in Richtung des Nutzstrahlbündels abschrägt ( Abb. 7.93): Die perspektivische Verkürzung erlaubt, dem Brennfleck eine größere Fläche zu geben.

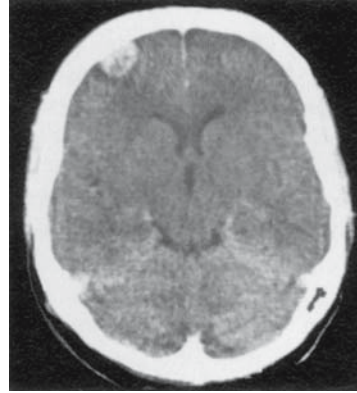
Chemisch besteht der Mensch überwiegend aus Wasser und komplizierten Kohlenwasserstoffen. Die Massenschwächungskoeffizienten für Röntgenstrahlungen reagieren nicht auf Moleküle, sondern nur auf deren Atome; sie steigen im Wesentlichen monoton mit der Atomnummer  $Z$  an. Für die Röntgendiagnose besteht der Mensch also überwiegend aus den relativ leichten Elementen Wasserstoff ( $Z = 1$ ), Kohlenstoff ( $Z = 6$ ) und Sauerstoff ( $Z = 8$ ). Als leichtestes aller Atome spielt H kaum eine Rolle, die Kernladungszahlen von C



 **Abb. 7.93. Röntgenröhre.** Verkleinerung der für den Schattenwurf wirksamen Fläche des Brennflecks durch perspektivische Verkürzung



■ Abb. 7.94. Röntgenaufnahme mit einer kleinen Röntgenröhre beim Zahnarzt. Röntgenbilder sind in der Regel Negativbilder wie dieses: Die das Röntgenlicht vollständig absorbierenden Amalgam-Plomben erscheinen weiß



■ Abb. 7.95. Computertomographie eines Kopfes

und O unterscheiden sich kaum. Darum werfen nur die Knochen deutlich sichtbare Schatten im Röntgenbild: Sie enthalten das immer noch leichte, aber in seiner Umgebung relativ schwere Kalzium ( $Z = 20$ ). Metallteile, wie die Amalgam-Plomben des Autors in ■ Abb. 7.94 treten natürlich noch deutlicher hervor, da sie die Röntgenstrahlen praktisch gar nicht mehr hindurchlassen. Zähne haben eine hohe Dichte und heben sich auch dann gegen den Kieferknochen ab, wenn sie ganz in ihm verborgen sind, wie der querliegende Weisheitszahn. Um erkennbare Kontraste in Muskel- und Fettgewebe zu bekommen, muss man relativ weiche Strahlung mit hohen Schwächungskoeffizienten benutzen, die den größten Teil ihrer Dosisleistung im Patienten lassen und nicht im Röntgenfilm. Für diffizilere Untersuchungen hilft man mit einem **Kontrastmittel** nach, das schwere Atome in physiologisch möglichst unbedenklichen Verbindungen enthält.

Im Schattenbild überdecken sich Organe des Patienten, die in Strahlrichtung hintereinander lagen. Im Gegensatz zum Lichtmikroskop erlaubt der Schattenwurf nicht nur eine Ebene des Objekts scharf abzubilden; seine Schärfentiefe lässt sich nicht begrenzen. Hier hilft die **Röntgentomographie** (die früher Computertomographie genannt wurde). Sie durchleuchtet den Patienten momentan immer nur mit einem dünnen „Nadelstrahl“, verschiebt ihn in einer Ebene, registriert dabei die

durchgelassene Dosisleistung und wiederholt das Ganze in der gleichen Ebene noch einmal aus einer anderen Richtung. Ein Computer merkt sich die zu allen Positionen des Nadelstrahls gehörenden Dosisleistungen, rechnet danach die Röntgenschwächung für jeden Kreuzungspunkt aus und setzt so ein Bild der abgetasteten Ebene aus „Pixeln“ von der Größen des Strahldurchmessers zusammen (■ Abb. 7.95). Der diagnostische Gewinn ist beträchtlich, der technische Aufwand auch.

Wie immer man im Einzelnen vorgeht: Schwarz-Weiß-Bilder, also auch Röntgenbilder, verlangen Kontrast. Die einzelnen Organe, die man erkennen will, müssen unterschiedlich absorbieren. Es hat also keinen Sinn, extrem harte, durchdringende Strahlen zu verwenden. Sie werden fast gar nicht geschwächt, also auch nicht unterschiedlich. Es hat aber auch keinen Sinn, sehr weiche Strahlen zu verwenden; sie bleiben im Patienten stecken und kommen beim Röntgenfilm nicht an. Folglich belasten sie nur den Patienten, ohne der Diagnose zu helfen. Der allzu weiche Anteil der Röntgenbremsstrahlung muss also herausgefiltert werden, z. B. durch ein paar Millimeter Aluminium. Sehr harte Strahlung vermeidet man leicht, indem man sie mit hinreichend niedriger Anodenspannung gar nicht erst erzeugt.

Am Ende kommt immer heraus, dass nur ein kleiner Teil der eingeschossenen Dosis den Film belichtet und der große Rest den Patienten belastet. Wer eine Röntgenaufnahme anordnet, muss

bedenken, ob der diagnostische Nutzen den zugehörigen Strahlenschaden rechtfertigt

## 7.6 Elektronenoptik

### 7.6.1 Elektronenbeugung

Licht ist als kontinuierliche elektromagnetische Welle unterwegs; bei Emission und Absorption benehmen sich die Photonen aber wie diskrete Teilchen. Da wäre es nicht mehr als recht und billig, wenn sich echte Teilchen, Elektronen etwa, unterwegs wie Wellen benehmen. Sie tun dies in der Tat.

Auch Elektronen können eine photographische Emulsion schwärzen. ■ Abbildung 7.98 zeigt das fotografische Positiv der Beugungstreifen, die ein zur Hälfte von einem Blech mit scharfer Kante abgedecktes Elektronenbündel erzeugt hat; es entspricht der ■ Abb. 7.82 im ► Kap. 7.4.5, das mit Licht erzeugt worden war. Ein Zweifel ist nicht mehr möglich: Auch Elektronen unterliegen der Beugung und der Interferenz, auch materielle Teilchen breiten sich als Wellen aus. Man nennt sie **Materiewellen**.

Damit stellt sich die Frage der Wellenlänge  $\lambda$  eines Bündels freier Elektronen. Sie ist von deren Geschwindigkeit abhängig, genauer von deren mechanischem Impuls  $\vec{p}$ . Die Gleichung

$$\lambda = h/p$$

gilt nicht nur für Elektronen, sie gilt auch für schwerere Teilchen und sogar für Photonen. Licht überträgt auf einen Absorber nicht nur Energie, sondern auch Impuls; es übt einen **Lichtdruck** aus.

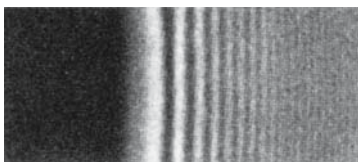
Was „wellt“ bei einer Materiewelle? Wer hat da eine Amplitude? Beim Licht sind es die beiden Fel-

der  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ . Ihre Amplituden sind ein Maß für die Strahlungsleistung, für die Photonenstromdichte, die einen Absorber erreicht, und damit ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, in einer Zeitspanne  $\Delta t$  auf einem Flächenstück  $\Delta A$  ein Photon anzutreffen. Analog ist die Amplitude der **Wellenfunktion** einer Materiewelle ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron (oder ein anderes von der Welle repräsentiertes Teilchen) anzutreffen. In diesem Sinn spricht man auch von **Wahrscheinlichkeitswellen**. Je schwerer ein Teilchen, desto größer sein Impuls, desto kürzer die Wellenlänge seiner Materiewelle. Je kleiner  $\lambda$ , desto unauffälliger die Beugungserscheinungen, desto richtiger das Bild der klassischen Physik von geradeaus fliegenden Partikeln.

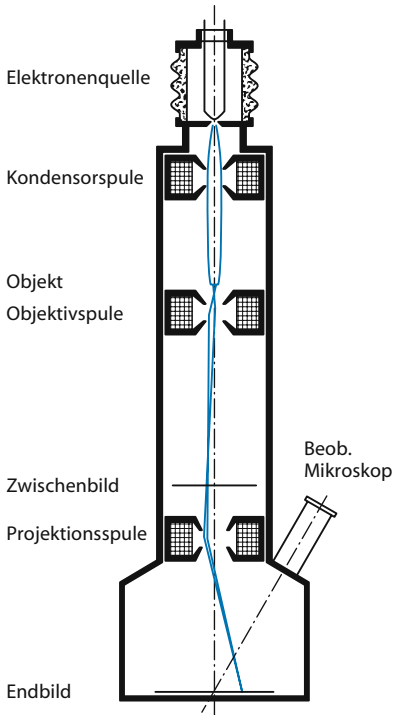
### 7.6.2 Elektronenmikroskope

Mit passend angeordneten Magnetfeldern lassen sich Elektronenstrahlbündel in ähnlicher Weise ablenken wie Lichtbündel mit Linsen. Das erlaubt, beispielsweise **Elektronenmikroskope** zu konstruieren. Deren Strahlengänge entsprechen denen der Lichtmikroskope (■ Abb. 7.97), besitzen also Strahlenquelle, Kondensor, ein ein Zwischenbild erzeugendes Objektiv und statt des Okulars eine „Projektionsspule“, die auf dem Leuchtschirm ein reelles Elektronenbild erzeugt, das der Betrachter auch noch durch ein optisches Mikroskop mit großem Objektastand betrachten kann.

Das Auflösungsvermögen eines Mikroskops wird grundsätzlich durch die Beugung beim Objektiv begrenzt. Die Beschleunigungsspannungen moderner Elektronenmikroskope liegen zumeist im Bereich von 120–400 kV. Wer danach erwartet, mit Elektronenwellenlängen im Bereich Pico-meter ( $= \text{pm} = 10^{-12} \text{ m}$ ) könne man die Auflösung um rund 5 Zehnerpotenzen gegenüber dem Lichtmikroskop ( $\lambda \approx 500 \text{ nm}$ ) verbessern und so Details vom inneren Aufbau der Atome sichtbar machen, der wird enttäuscht. Die optische Industrie hat gelernt, die Linsenfehler von Objektiven vorzüglich zu korrigieren und so hohe Aperturen zu erreichen. Bei Elektronenlinsen gelingt das nicht; sie erlauben nur kleine Öffnungswinkel und ein entsprechend kleineres Auflösungsvermögen.



■ Abb. 7.96. Elektronenbeugung an der Halbebene, photographisches Positiv; man vergleiche mit der ■ Abb. 7.82 (nach R.W. Pohl)

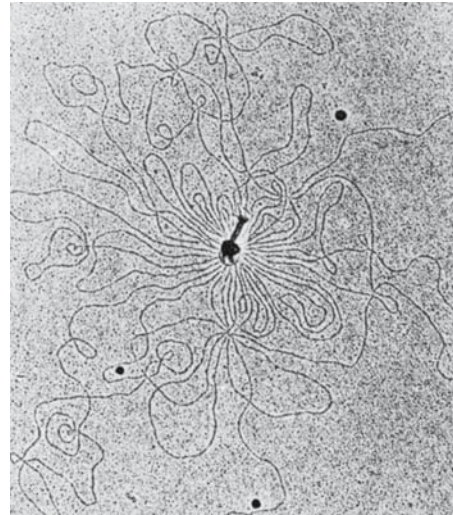


■ Abb. 7.97. Strahlengang eines Elektronenmikroskops (nach Gerthsen)

Trotzdem liegt dieses noch weit über dem des besten Lichtmikroskops.

Elektronenoptik ist nur im Vakuum möglich; in Luft kommen die Elektronen nicht weit. Das verhindert die Beobachtung lebender oder auch nur wasserhaltiger Objekte; sie müssen ja mit ins Vakuum hinein. Elektronenmikroskopische Bilder wie das der ■ Abb. 7.98 stammen nicht unmittelbar von dem abgebildeten Objekt, sondern von einer dünnen Metallschicht, die schräg auf einen Lackfilm aufgedampft worden ist. Der Lack war zuvor auf das Objekt aufgebracht und nach dem Trocknen vorsichtig wieder abgezogen worden. Die Präparationstechnik der Elektronenmikroskopie ist eine Kunst für sich.

Nicht mit dem Elektronenmikroskop verwechselt werden darf das **Rasterelektronenmikroskop**. Bei ihm wird ein feiner Elektronenstrahl dazu benutzt, das Objekt zeilenweise abzutasten (Ablenkung nach dem Prinzip der Oszillographenröhre). Alle Punkte der Objektoberfläche emittieren



■ Abb. 7.98. Elektronenmikroskopisches Bild vom Genom eines Phagen; es befand sich ursprünglich in dessen Kopf. Länge des Phagen:  $0,2\ \mu\text{m}$ ; Länge des Genoms:  $34\ \mu\text{m}$



■ Abb. 7.99. Mit einem Rasterelektronenmikroskop gewonnenes Bild von Drüsen und Flimmerzellen in der Mucosa olfactoria eines Goldfisches (Aufnahme von Breipohl, Bijvank und Zippel)

dann so, wie sie vom Elektronenstrahl getroffen werden, nacheinander Sekundärelektronen, also einen elektrischen Strom, der sich verstärken und zu einer Art „Fernsehbild“ zusammensetzen lässt. Das Auflösungsvermögen wird durch die



Bündelung des abtastenden Elektronenstrahls begrenzt; es ist geringer als beim normalen Elektronenmikroskop. Eine große Schärfentiefe erlaubt aber Aufnahmen, die überraschend plastisch wirken (■ Abb. 7.99).

### 7.6.3 Die Unschärferelation

Die reine Sinusschwingung

$$y(t) = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

hat weder Anfang noch Ende, denn die Amplitude  $y_0$  der Auslenkung  $y(t)$  ändert sich mit der Zeit  $t$  ausdrücklich *nicht*. Die Schwingung war schon da, als die Welt geschaffen wurde, und dauert über den jüngsten Tag hinaus unentwegt an. Realistisch ist das nicht, aber mathematisch leicht zu beschreiben. Hingegen muss eine Schwingung, die nur eine begrenzte Zeitspanne  $\Delta t$  andauern soll, mathematisch durch Überlagerung aus vielen Einzelschwingungen zusammengesetzt werden, die sich vor und nach  $\Delta t$  weginterferieren. Ihre Frequenzen müssen einen Bereich  $\Delta\omega$  dicht an dicht ausfüllen – je kleiner  $\Delta t$ , desto größer  $\Delta\omega$ , und umgekehrt. „Dicht an dicht“ heißt kontinuierlich; die Mathematik braucht unendlich viele Einzelschwingungen mit unendlich kleinen, aber doch unterschiedlichen Amplituden. Sie muss einen Aufwand treiben, um eine realistische Situation korrekt zu beschreiben.

Was den Schwingungen recht ist, ist den Wellen billig. Ein begrenzter Wellenzug der Länge  $\Delta x$  entspricht der Überlagerung unendlich vieler unendlicher Wellen, deren Wellenlängen  $\lambda$  einen Bereich  $\Delta\lambda$  dicht an dicht mit unendlich kleinen, aber unterschiedlichen Amplituden ausfüllen. Je kleiner  $\Delta x$ , desto größer  $\Delta\lambda$  und umgekehrt. Zu den großen Kohärenzlängen des Laserlichts gehören mit mathematischer Notwendigkeit besonders schmale Spektrallinien.

Auch die Materiewelle, die ein Elektron repräsentiert, braucht als **Wellenpaket** der Länge  $\Delta x$  einen Wellenlängenbereich  $\Delta\lambda$ , wenn das Elektron

auf den Bereich  $\Delta x$  lokalisiert sein soll. Zu  $\Delta\lambda$  gehört aber ein Bereich  $\Delta p$  des mechanischen Impulses und  $\Delta v$  der Geschwindigkeit. Je geringer die **Ortsunschärfe**  $\Delta x$ , desto größer die **Impulsunschärfe**  $\Delta p$  und umgekehrt. Werner Heisenberg hat herausgefunden, dass das Produkt der beiden Unschärfen nicht kleiner sein kann als die Planck-Konstante  $h$ :

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq h,$$

und das prinzipiell, nicht etwa wegen mangelnder Messtechnik (deren Messungenauigkeiten meist viel größer sind). Diese **Unschärferelation** gilt für alle Paare physikalischer Größen, deren Produkt die physikalische Größe **Wirkung** ergibt, sich also in der Einheit  $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$  messen lässt – beispielsweise auch für Energie- und Zeitunschärfe:

$$\Delta W_Q \cdot \Delta t \geq h;$$

je größer die mittlere Lebensdauer  $\Delta t$  eines angeregten Zustands im Atom, desto schärfer die emittierte Spektrallinie.

Wer Atommodelle entwirft, darf die Unschärferelation nicht vergessen; auch in Gedanken darf man ein Elektron nicht genauer lokalisieren, als die Unschärferelation erlaubt. Anschaulich ist das nicht, denn in der makroskopischen Welt, an der sich das menschliche Anschauungsvermögen entwickelt hat, spielt das Plank'sche Wirkungsquantum  $h$  keine nennenswerte Rolle, weil es so klein ist. Das Zusammenspiel von elektromagnetischer Welle und Quant, von Partikel und Materiewelle bleibt unanschaulich; man kann sich allenfalls durch häufigen Gebrauch daran gewöhnen. Dies mag der Grund sein, warum zuweilen vom **Dualismus von Welle und Korpuskel** gesprochen wird, als handle es sich um einen unauflöslchen Widerspruch in der Natur. Der Widerspruch existiert aber nur in der Vorstellungswelt des Menschen; Elektronen und Quanten kennen die Naturgesetze und richten sich nach ihnen. Die Natur ist nicht verpflichtet, ihre Gesetze dem Hirn des Menschen anzupassen.

In Kürze		
	Formel	Größe [Einheit]
<b>Sichtbares Licht</b>		
Wellenlänge	$\lambda = 0,4 \mu\text{m bis } 0,8 \mu\text{m}$	$\lambda$ : Wellenlänge [1 m]
Vakuumlichtgeschwindigkeit	$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	
<b>Brechung</b>		
Brechzahl	$n = \frac{v}{c}$	$n$ : Brechzahl (Brechungsindex) dimensionslos $v$ : Lichtgeschwindigkeit im Medium [1 m/s] $c$ : Vakuumlichtgeschwindigkeit
Reflexionsgesetz	Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel	
Brechungsgesetz	$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1}$	$\alpha_1$ : Einfallswinkel Medium 1 $n_1$ : Brechzahl Medium 1 $\alpha_2$ : Einfallswinkel Medium 2 $n_2$ : Brechzahl Medium 2
<b>Totalreflexion</b>		
Grenzwinkel $\alpha_{\text{grenz}}$	$\sin \alpha_{\text{grenz}} = \frac{n_2}{n_1}$	$\alpha_{\text{grenz}}$ : Grenzwinkel der Totalreflexion
Totalreflexion tritt auf, wenn das Licht aus einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium tritt: $n_1$ größer $n_2$		
<b>Linse</b>		
Brennweite: Abstand des Punktes hinter der Linse, in dem sich Strahlen, die vor der Linse parallel laufen, treffen (Sammellinse, Abb. 7.34)		
Brechwert	$D = \frac{1}{f}$ $D$ positiv: Sammellinse $D$ negativ: Zerstreuungslinse	$f$ : Brennweite [m] $D$ : Brechwert $\left[ \frac{1}{\text{m}} = \text{dpt, Dioptrie} \right]$
Linsengleichung	$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ Gilt für das reelle Bild einer dünnen Sammellinse	$f$ : Brennweite [m] $a$ : Gegenstandsweite [m] $b$ : Bildweite [m]
Vergrößerungsfaktor	$\frac{\text{Bildgröße}}{\text{Gegenstandsgröße}} = \frac{a}{b} = \frac{f}{a-f}$	
Vergrößerungsfaktor eines Mikroskops Maximales Auflösungsvermögen entspricht der Wellenlänge des verwendeten Lichts.	$\Gamma_M = \frac{180 \text{ mm}}{f_{\text{Objektiv}}} \cdot \frac{250 \text{ mm}}{f_{\text{Okular}}}$	$f_{\text{Objektiv}}$ : Objektivbrennweite [m] $f_{\text{Okular}}$ : Okularbrennweite
<b>Röntgenstrahlen</b>		
Maximale Quantenenergie	$W_Q = e_0 \cdot U$	$e_0$ : Elementarladung [A·s] $U$ : Beschleunigungsspannung (10 kV bis 500 kV)



Absorption		
Intensität	$I(d) = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot d}$ Das quadratische Abstands- gesetz $I \sim 1/r^2$ gilt auch hier.	$I$ : Intensität [ $\text{W/m}^2$ ] $I_0$ : einfallende Intensität $\mu$ : Schwächungskoeffizient [ $1/\text{m}$ ] $d$ : Eindringtiefe [ $\text{m}$ ] $r$ : Abstand von der Punktquelle [ $\text{m}$ ]
Wellenoptik		
Beugung	Licht, das durch einen hinreichend schmalen Spalt fällt, geht „um die Ecke“.	
Interferenz	Wenn sich Licht aus verschiedenen Richtungen überlagert, so entsteht ein Interferenzmuster aus hellen und dunklen Gebieten.	
Beugungsgitter Viele Spalten nebeneinander be- wirken ein Interferenzmuster mit ausgeprägten, scharfen Intensitäts- maxima unter den Winkeln:	$\sin \alpha_n = \frac{n \cdot \lambda}{g}$	$\alpha_n$ : Winkel des Intensitätsmaximums $n$ : Nummer der Ordnung $\lambda$ : Wellenlänge [ $\text{m}$ ] $g$ : Gitterkonstante [ $\text{m}$ ] (Spaltabstand)

## Übungsfragen

(● leicht; ●● mittel; ●●● schwer)

### Geometrische Optik

- 1. Der Glaskörper des menschlichen Auges hat die Brechzahl 1,34. Welcher Grenzwinkel der Totalreflexion gegenüber Luft ( $n \approx 1,00$ ) gehört dazu?
- 2. Ein Lichtstrahl tritt von einem optisch dünneren Medium in ein optisch dichteres. Ändert sich seine Wellenlänge und wenn ja, wie?
- 3. Ein Lichtstrahl trifft aus Luft auf eine Glasoberfläche ( $n = 1,52$ ) und wird teilweise reflektiert und teilweise gebrochen. Der Reflexionswinkel ist doppelt so groß wie der Winkel des gebrochen Strahls. Wie groß ist der Einfallswinkel? ( $\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ )

### Abbildung mit Linsen

- 4. Wenn Sie Ihr Spiegelbild in einer Weihnachtsbaumkugel betrachten, sehen Sie dann ein reelles oder ein virtuelles Bild?
- 5. Sie wollen sich selbst im Spiegel fotografieren. Der Spiegel ist 1,5 m vor Ihnen. Auf welchen Abstand müssen Sie fokussieren?
- 6. Ein Brillenglas hat eine Brennweite von 50 cm. Wie groß ist sein Brechwert?
- 7. Für welche Bildweite ist das von einer dünnen Linse erzeugte reelle Bild genau so groß wie der Gegenstand?
- 8. Ist das Zwischenbild in einem Lichtmikroskop reell oder virtuell?
- 9. Wie verändert sich die Vergrößerung eines Mikroskops, wenn die Brennweite des Objektivs verkleinert wird?

- 10. Ein Fotograf will einen 22 m hohen Baum aus einer Entfernung von 50 m fotografieren. Welche Brennweite muss er für sein Objektiv wählen, damit das Bild vom Baum gerade den 24 mm hohen Film ausfüllt?
- 11. Wenn ein Teleobjektiv mit 135 mm Brennweite Objekte zwischen 1,5 m und  $\infty$  scharf abbilden soll, über welche Stecke muss es dann relativ zur Filmebene verfahrbar sein?
- 12. Konstruiere (am besten auf Millimeterpapier) für eine Sammellinse mit  $f = 30 \text{ mm}$  den Bildpunkt P' zu einem Gegenstandspunkt P, der 6 cm vor der Hauptebene und 2,5 cm neben der optischen Achse liegt. Konstruiere für die gleiche Linse den Bildpunkt eines Parallelbündels, dessen Zentralstrahl durch einen Punkt 6 cm vor der Hauptebene und 2 cm unter der optischen Achse läuft.
- 13. Wie weit sind Objekt und reelles Bild auseinander, wenn die abbildende Linse eine Brennweite von 75 cm hat und das Bild um den Faktor 2,75 vergrößert ist?
- 14. Welche Brennweite hat eine Lupe mit der Aufschrift „8×“?

### Strahlungsmessgrößen

- 15. In welchen Raumwinkel strahlt die Sonne?
- 16. Zu welcher Strahlungsmessgröße gehört die Solarkonstante (► Kap. 5.5.5)?
- 17. Welche Leistung strahlt die Sonne in Form elektromagnetischer Wellen ab? (Sie strahlt außerdem noch Teilchenströme ab.)

### Wellenoptik

- 18. Welche Auflösung hat ein normales Lichtmikroskop bestenfalls?
- 19. Eine elektromagnetische Mikrowelle habe eine Wellenlänge von 3 cm. Was ist ihre Frequenz?

- 20. Einfarbiges Licht fällt auf einen Doppelspalt, bei dem die Spalte 0,04 mm Abstand haben. Auf einem 5 m entfernten Schirm sind die Interferenzmaxima 5,5 cm auseinander. Welche Wellenlänge und welche Frequenz hat das Licht?
- 21. Ein Lehrer steht ein Stück hinter einer 80 cm breiten Tür nach draußen und bläst in seine Trillerpfeife, die einen Ton von etwa 750 Hz aussendet. Wenn wir annehmen, dass draußen auf dem Schulhof nichts reflektiert, unter welchem Winkel wird man die Trillerpfeife kaum hören?
- 22. Die Flügel eines tropischen Falters schillern in wunderschönem Blau, wenn man sie unter etwa  $50^\circ$  zur Senkrechten betrachtet. Dieser Farbeindruck entsteht, weil die Flügeloberfläche ein Reflexionsbeugungsgitter darstellt. Wenn wir annehmen, dass das gebeugte Licht senkrecht auf den Flügel eingefallen ist, welche Gitterkonstante hat das Beugungsgitter auf dem Flügel in etwa?

## 7

**Absorption**

- 23. Wenn ein Graufilter nur 50% des einfallenden Lichtes durchlässt, um welchen Faktor schwächen dann 4 solche Filter hintereinander das Licht ab?
- 24. Der Schwächungskoeffizient von Blei für eine  $\gamma$ -Strahlung sei  $1 \text{ cm}^{-1}$ . Wie groß ist die Halbwertsdicke von Blei?

**Röntgenstrahlen**

- 25. Welche Anodenspannung einer Röntgenröhre ist in medizinischen Anwendungen typisch?
- 26. Die Anodenspannung einer Röntgenröhre wird verdoppelt. Wie ändert sich die maximale Quantenenergie der Strahlung?
- 27. Eine Röntgenröhre beim Arzt werde mit 150 kV Anodenspannung und 20 mA Elektronenstrom betrieben.
  - a) Wie groß ist die höchste Quantenenergie im Bremsspektrum?
  - b) Welche Leistung wird in der Röhre umgesetzt?
  - c) In welcher Größenordnung liegt die Strahlungsleistung der erzeugten Röntgenstrahlen?

# Atom- und Kernphysik

## 8.1 Aufbau des Atoms – 302

- 8.1.1 Das Bohr'sche Atommodell – 302
- 8.1.2 Elektronenwolken – 303
- 8.1.3 Das Pauli-Prinzip – 304
- 8.1.4 Charakteristische Röntgenstrahlung – 305

## 8.2 Aufbau des Atomkerns – 305

- 8.2.1 Kernspinresonanztomographie – 305
- 8.2.2 Nukleonen und Nuklide – 307
- 8.2.3 Der Massendefekt – 308
- 8.2.4 Radioaktivität – 309
- 8.2.5 Nachweis radioaktiver Strahlung – 311
- 8.2.6 Zerfallsgesetz – 314
- 8.2.7 Kernspaltung und künstliche Radioaktivität – 316
- 8.2.8 Antimaterie – 317

## ➤ ➤ Einleitung

Materie besteht aus Molekülen, ein Molekül aus Atomen, ein Atom aus Kern und Hülle, die Hülle aus Elektronen und der Kern aus Nukleonen, aus Protonen und Neutronen nämlich. An chemischen Reaktionen sind nur die Hüllenelektronen beteiligt. Die (positive) Kernladung bestimmt aber, wie viele Elektronen in die Hülle gehören, und damit auch, zu welchem chemischen Element das Atom gehört. Bei Kernreaktionen wird pro Atom sehr viel mehr Energie umgesetzt als bei chemischen Reaktionen. Kernumwandlungen erfolgen vor allem beim radioaktiven Zerfall und emittieren dann ionisierende Strahlung.

## 8.1 Aufbau des Atoms

### 8

### 8.1.1 Das Bohr'sche Atommodell

In einem Metall liegen die Atome so dicht nebeneinander, dass sie sich praktisch berühren. Ihre Durchmesser bleiben knapp unter einem Nanometer. Eine Aluminiumfolie, wie man sie zum Grillen verwendet, ist immer noch viele Hundert Atomlagen dick. Für einen Strahl schneller Elektronen sollte da kein Durchkommen sein.

Das Experiment widerspricht. Die allermeisten der eingeschossenen Elektronen durchdringen die Folie, als habe ihnen gar nichts im Wege gestanden; nur einige wenige sind auf Hindernisse gestoßen, die sie aus ihrer Bahn geworfen haben. Atome können deshalb keine Kügelchen aus homogener Materie sein; zumindest aus Sicht schneller Elektronen sind sie im Wesentlichen „leer“. Nur wenn ein Elektron auf den **Atomkern** trifft, wird es abgelenkt. Das geschieht selten, denn dessen Durchmesser liegt in der Größenordnung  $10^{-14}$  m. Ihn umgibt eine **Hülle** aus Elektronen mit einer Größe von ca.  $10^{-10}$  m. Stellt man sich den Kern als Stecknadelkopf (ca. 1 mm) vor, so hätte die Hülle einen Durchmesser von 10 m bis 100 m. Die Masse der Elektronen ist klein gegenüber der des Kerns; von durchfliegenden Elektronen wird die Hülle kaum bemerkt.

#### Merke

Im Atom ist die Masse auf den kleinen Atomkern konzentriert, während der Durchmesser von der lockeren Elektronenhülle bestimmt wird.

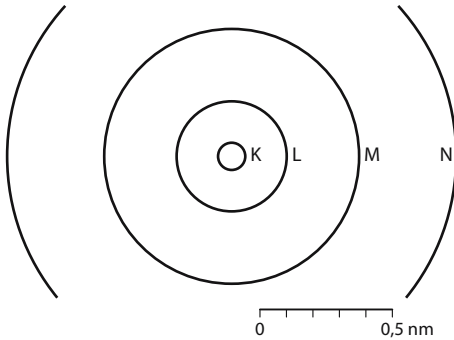
Elektronen sind negativ elektrisch geladen. Nach außen erscheint ein Atom elektrisch neutral. Das ist nur möglich, wenn der Kern ebenso viele positive Elementarladungen besitzt wie die Hülle Elektronen. In der Tat erweist sich die **Kernladungszahl**  $Z$  als wichtigste Kenngröße des Atoms. Sie wird deshalb auch **Ordnungszahl** genannt und bestimmt seine Position im Periodensystem der chemischen Elemente. Warum aber ist ein Atom stabil? Warum folgen die Hüllenelektronen nicht der Coulomb-Kraft des Kerns und stürzen in ihn hinein?

Das **Bohr'sche Atommodell** (Niels Bohr, 1885–1962) macht da eine Anleihe bei der Astronomie: Warum stürzen die Planeten nicht in die Sonne? Weil sie auf geschlossenen Bahnen um sie herumlaufen und so die Kraft der Gravitation mit der Zentrifugalkraft kompensieren. Analog laufen im Bohr'schen Atommodell die Elektronen der Hülle auf geschlossenen Bahnen um den Kern herum.

#### Merke

Bohr'sches Atommodell: Die Hüllenelektronen laufen auf Bohr-Bahnen um den Kern wie Planeten um die Sonne.

Nach den Vorstellungen der klassischen Physik müsste freilich ein auf einer **Bohr-Bahn** umlaufendes Elektron eine seiner Umlauffrequenz entsprechende elektromagnetische Welle abstrahlen; es würde Energie verlieren und auf einer Spiralbahn doch in den Kern hineinstürzen. Weil es das offensichtlich nicht tut, half es Bohr gar nichts: Er musste ohne nähere Begründung postulieren, dass dem Elektron lediglich einige stabile Bahnen erlaubt sind, auf denen es nicht strahlt, während es die ihm verbotenen Bereiche dazwischen nur im Quantensprung überqueren darf. Die zu einer Bohr-Bahn gehörende Energie lässt sich berechnen. Spektrum und Niveauschema eines Atoms



■ **Abb. 8.1. Bohr'sches Atommodell.** Maßstabsgerechte Zeichnung der Bohr-Bahnen für das H-Atom; der Kern ist in diesem Maßstab nicht zu erkennen

gestatten somit Aussagen über die erlaubten Bahnen. Für das einfachste aller Atome, das des Wasserstoffs ( $Z = 1$ , nur ein Elektron in der Hülle) kommen ganz vernünftige Bahnradien heraus, wie ■ Abbildung 8.1 zeigt. Die innerste Bahn des Grundzustandes erhält den Kennbuchstaben K, die größeren Bahnen der angeregten Zustände folgen alphabetisch.

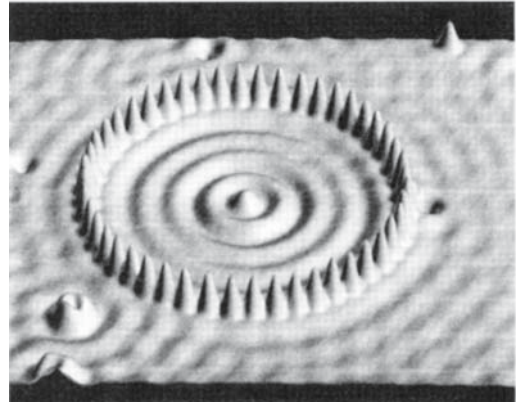
#### Merke

Ein Atomkern besitzt positive Elementarladungen; die Kernladungszahl  $Z$  ist zugleich die Ordnungszahl im Periodensystem der chemischen Elemente.

So recht befriedigen kann das Bohr'sche Atommodell freilich nicht. Das ist auch kein Wunder, denn liefe ein Elektron tatsächlich auf einer Bohr-Bahn, so wären zu jedem Zeitpunkt Ort und Geschwindigkeit, Impuls und Energie gemeinsam genauer bekannt, als die Unschärferelation erlaubt. Niels Bohr konnte das nicht wissen. Als er sein Modell aufstellte, ging Werner Heisenberg (1901–1976) noch zur Schule.

### 8.1.2 Elektronenwolken

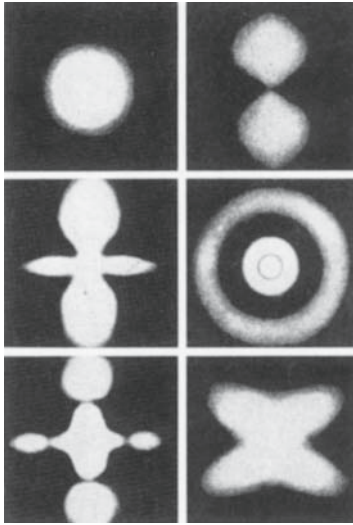
Als elektrische „Punktladung“ sitzt der Atomkern des Wasserstoffs im Zentrum eines kugelsymmetrischen Feldes; die Feldlinien laufen radial nach



■ **Abb. 8.2. Materiewellen.** Auf einer Kristalloberfläche sind Atome in einem Kreis angeordnet. Im Inneren des Kreises sieht man die stehende Materiewelle von Oberflächenenergie. Das verwendete Rastertunnelmikroskop macht die Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Elektronen und damit auch einzelne Atome sichtbar (D. Eigler, IBM)

außen, die Potentialflächen sind konzentrische Kugeln. Wie weit sich das Hüllenelektron entfernen kann, hängt von seiner Energie ab. In der Quantenphysik wird die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Elektron an einer bestimmten Stelle befindet, durch eine Welle beschrieben. Diese (Materie-)Welle wird durch das elektrische Feld des Atomkerns eingesperrt. Es entsteht dadurch eine stehende Welle genau so, wie das im ► Kap. 4.3 für eine Geigensaiten oder eine Flöte besprochen wurde. Ein schönes Beispiel für eine zweidimensionale stehende Materiewelle zeigt die ■ Abbildung 8.2. Es handelt sich um eine tunnelmikroskopische Aufnahme, die direkt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit von Elektronen auf der Oberfläche eines Metallkristalls zeigt. Es wurde ein Ring aus einzelnen Atomen auf der Kristalloberfläche angeordnet und im Inneren hat sich eine stehende Elektronenwelle ausgebildet. Wenn Sie ihre gefüllte Kaffeetasse am Rand anstoßen, sehen Sie für kurze Zeit eine ähnliche stehende Welle auf der Kaffeeoberfläche.

Dreidimensionale stehende Wellen können noch viel kompliziertere Formen annehmen. Leider können die stehenden Materiewellen des Hüllenelektrons eines Atoms nicht mit einem Mikroskop sichtbar gemacht werden, aber man kann sie berechnen und als wolkige Gebilde darstellen, wie



■ **Abb. 8.3. Elektronenwolken.** Sie kennzeichnen die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Hüllenelektrons in verschiedenen angeregten Zuständen (nach Finkelburg)

das in ■ Abb. 8.3 versucht wurde. Dort, wo es hell ist, ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für das Elektron hoch. Man spricht von einer **Elektronenwolke**. Jedes Bild zeigt einen Schnitt durch diese Wolke für verschiedene Energiezustände des Wasserstoffatoms.

Erhellend sind solche Bilder nur in Grenzen. Darum spricht man gern weiter von so anschaulichen Bohr-Bahnen, obwohl man weiß, dass es sie, genau genommen, gar nicht gibt. Dabei muss man dann neben den Kreisbahnen der ■ Abb. 8.1 auch noch elliptische Bahnen mit halbwegs gleicher Größe und Energie zulassen. Die Kreisbahnen werden zu **Elektronenschalen** zusammengefasst. Die Buchstaben L, M, N usw. bezeichnen derartige Schalen. Nur die K-Schale muss sich allein mit einer Kreisbahn zufrieden geben.

### 8.1.3 Das Pauli-Prinzip

Das einsame Hüllenelektron des Wasserstoffs darf sich auf jede Bohr-Bahn seines Atoms setzen, sofern es sich die dazu nötige Energie beschaffen kann. Sobald sich aber der Kernladungszahl  $Z$  entsprechend mehrere Elektronen in einer Hülle versammeln, müssen sie das **Pauli-Prinzip** beach-

ten: Es erlaubt immer nur zwei Elektronen, gemeinsam auf einer Bohr-Bahn umzulaufen, und keinem weiteren.

#### Merke

Pauli-Prinzip: Jede Bohr-Bahn darf von nicht mehr als zwei Hüllenelektronen besetzt werden.

Eine K-Schale besitzt nur eine einzige Bahn, die Kreisbahn. Sie hat also nur für zwei Elektronen Platz. Das genügt dem Wasserstoff ( $Z = 1$ ) und dem Helium ( $Z = 2$ ). Das nächste Element im Periodensystem, das Lithium, muss sein drittes Elektron bereits in die L-Schale setzen. Diese fasst mit Kreis- und Ellipsenbahnen zusammen 8 Elektronen, reicht also bis zum Neon mit  $Z = 10$ . Natrium ( $Z = 11$ ) braucht bereits einen Platz in der M-Schale. Darüber wird es komplizierter. Zuweilen setzt sich ein neues Elektron „vorzeitig“ in eine höhere Schale, und die innere wird erst bei Elementen mit größerer Atomnummer aufgefüllt. Chemisch zeigt sich eine Systematik: Alle Elemente, deren Elektronen eine Schale voll besetzen, eine Schale „abschließen“, sind reaktionsunwillige **Edelgase**; ihre Nachbarn zu beiden Seiten entwickeln demgegenüber besondere chemische Aggressivität. Elemente, denen nur noch ein Elektron zur abgeschlossenen Schale fehlt, sind **Halogene**. Diejenigen, die ein Elektron zu viel besitzen, sind **Alkalimetalle**. Die ersten bilden gern negative Ionen, die zweiten gern positive, denn dann sind ihre Elektronenschalen abgeschlossen. Die chemische Natur eines Elements hängt weitgehend von seinem äußersten Elektron ab; es wird **Leuchtelektron** genannt, weil es auch für das optische Linienspektrum des Atoms zuständig ist. Die inneren Elektronen haben ja keine freien Bahnen in ihrer Nähe, in die sie mit den Quantenenergien des Spektrums hineinspringen könnten.

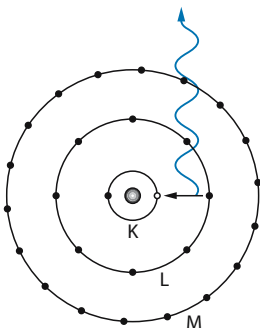
#### Merke

Bohr'sches Atommodell und Pauli-Prinzip machen nicht nur die Atomspektren, sondern auch das Periodensystem der chemischen Elemente verständlich.

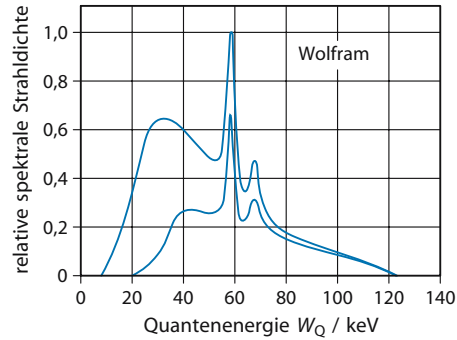
### 8.1.4 Charakteristische Röntgenstrahlung

Das Niveauschema eines Atoms wird üblicherweise nur für das Leuchtelektron gezeichnet. Alle anderen Elektronen haben über sich nur besetzte Bahnen und können deshalb ihre Plätze nur mit relativ hohem Energieaufwand verlassen. Immerhin bringt das freie Elektron, das in der Röntgenröhre auf die Anode zujagt, genug Energie mit, um auch einmal einen Artgenossen aus der K-Schale eines Anodenatoms herauszuschlagen. Dessen Platz bleibt aber nicht lange frei, z. B. kann ein Elektron aus der L-Schale nachrücken. Dabei wird dann ein energiereiches Quant aus dem Spektralgebiet der Röntgenstrahlen emittiert, es gehört zur  $K_\alpha$ -Linie des Atoms (■ Abb. 8.4). Dem kontinuierlichen Bremspektrum der Röntgenröhre überlagert sich das Linienspektrum der **charakteristischen Strahlung**, charakteristisch für das Material am Ort des Brennflecks. Die Quantenenergien der Linien wachsen nahezu proportional mit dem Quadrat der Kernladungszahl.

Besondere Bedeutung hat das Linienspektrum für die **Röntgenstrukturanalyse**. Technisch ist es nicht ganz einfach, Beugungsgitter für das Röntgengebiet herzustellen; die kurzen Wellen verlangen arg schmale Strukturen. Die Natur liefert aber von sich aus passende Objekte: Die Gitterkonstanten der Kristalle liegen gerade in der richtigen Größenordnung. Freilich ist es nicht leicht, die Beugungsfigur eines zunächst ja unbekannten dreidimensionalen Raumgitters richtig zu interpretieren. Dabei kann man sogar Aussagen über die Struktur der Gitterbausteine gewinnen, selbst



■ Abb. 8.4. Emission der  $K_\alpha$ -Linie im Bohr'schen Atommodell



■ Abb. 8.5. Bremspektrum mit überlagerter charakteristischer Strahlung. Der Abfall zu kleinen Quantenenergien wird durch Aluminiumfilter hervorgerufen; obere Kurve: Filterdicke 1 mm; untere Kurve: 2 mm

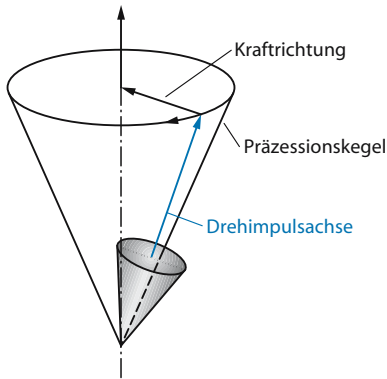
wenn die so kompliziert gebaut sind wie das Molekül des Insulins. Auch die Doppelhelix der Desoxyribonukleinsäure DNS, der Trägerin aller Erbinformationen irdischen Lebens, wurde so gefunden.

## 8.2 Aufbau des Atomkerns

### 8.2.1 Kernspinresonanztomographie

Mit der nötigen Vorsicht darf man nicht nur das Bohr'sche Atommodell benutzen, sondern auch den Atomkern für eine kleine rotierende Kugel halten. Dank seiner Masse besitzt er dann einen Drehimpuls und dank seiner Ladung ein magnetisches Moment – eine rotierende elektrische Ladung entspricht einem Kreisstrom, bildet also einen kleinen Magneten. Gerät ein solcher Kern in ein äußeres magnetisches Feld, so möchte er sein Moment zur Feldrichtung parallel stellen. Daran hindert ihn aber sein Drehimpuls. Wäre er ein makroskopischer Kreisel, so begänne er eine **Präzession**: Er ließe seine Drehachse auf einem Kegel rotieren, dessen Achse zum Magnetfeld parallel läge (■ Abb. 8.6). Die Drehfrequenz (**Präzessionsfrequenz**) hänge von der Feldstärke ab, vom Kegelwinkel, vom magnetischen Moment und vom Drehimpuls. Legte man jetzt ein magnetisches Wechselfeld quer zum konstanten Hauptfeld, so käme es immer dann zu einer **Resonanzabsorpti-**





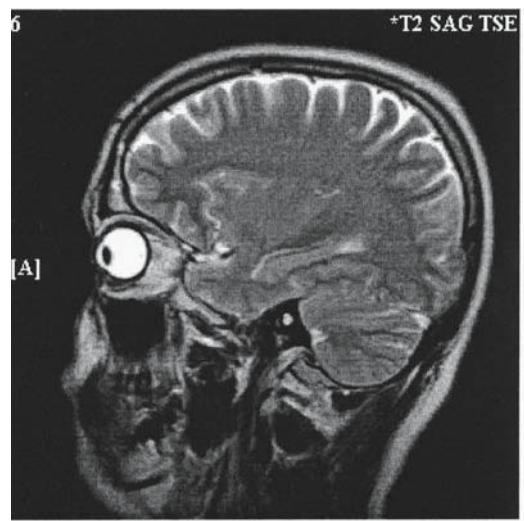
■ Abb. 8.6. Präzession eines makroskopischen Kreisel

on, wenn die Wechselfrequenz mit der Präzessionsfrequenz übereinstimmt.

Die Konjunktive im letzten Absatz sollen daran erinnern, dass die Regeln für einen makroskopischen Kreisel in den nun schon subatomaren Dimensionen des Atomkerns modifiziert werden müssen. Alle wesentlichen Größen sind hier **gequantelt**, können also nur wenige diskrete Werte annehmen. Das gilt für den Drehimpuls und das magnetische Moment, wie auch für die Äquivalente von Kegelwinkel und Präzessionsfrequenz. Zu einer Resonanzabsorption kommt es aber wirklich. Die zugehörigen Quantenenergien liegen im Bereich der Nachrichtentechnikern geläufigen Mikrowellen. Sie hängen von der Stärke des stationären Magnetfeldes ab und vor allem von den Eigenschaften des betroffenen Kerns. Die Kernspinresonanz erlaubt also, ganz bestimmte Kerne zu erkennen. Medizinisch besonders interessant ist hier der Wasserstoff.

Dass der Mensch Wasserstoffkerne in großer Anzahl enthält, weiß man allerdings sowieso. Es geht um deren räumliche Verteilung, die beispielsweise im Tumor eine andere ist als im gesunden Gewebe drum herum. Dem kann man über die Kernspinresonanz mit einer freilich ziemlich komplizierten Steuerung des Magnetfeldes beikommen. Zunächst legt man den Patienten der Länge nach in ein hohes, konstantes und homogenes Hauptfeld. Diesem wird ein paralleles Feld überlagert, das in seiner Richtung einen Gradienten besitzt. Dadurch kann es im Patienten nur noch in einer Ebene quer zum Feld zu Reso-

nanzen kommen, wenn die Frequenz der Mikrowellen fest und unveränderlich eingestellt wird. Durch Steuerung des Zusatzfeldes kann man die Ebene verschieben, ohne Patient oder Maschine bewegen zu müssen. Mit einem dritten, quer gestellten Feld pickt man nun aus der Ebene einen schmalen Balken heraus, der sich seinerseits durch reine Steuerung des Feldes verschieben und auch drehen lässt. Ein Computer schiebt jetzt den Balken in zwei verschiedene Orientierungen über die Patientenebene, speichert die Stärke der Resonanzsignale zusammen mit den Steuersignalen der Felder und setzt daraus ein Bild der **Protonenverteilung** in der untersuchten Patientenebene zusammen – wie sich im nächsten Kapitel herausstellen wird, sind die Atomkerne des normalen Wasserstoffs Protonen. ■ Abbildung 8.7 zeigt eine solche Aufnahme der **Kernspinresonanztomographie**. Das Wort ist unhandlich, darum redet man lieber von **NMR-Tomographie** (NMR: Nuclear Magnetic Resonance). Die Abbildung zeigt einen senkrechten Schnitt durch den Kopf an der Position eines Auges. Durch ein spezielles Verfahren ist hier die Wasserkonzentration hervorgehoben, wodurch die Struktur des Auges schön sichtbar wird: die relativ wenig wasserhaltige Augenlinse hebt sich dunkel gegen die Augenflüssigkeit ab.



■ Abb. 8.7. Kernspinresonanztomogramm. Schnitt durch Kopf und Auge des Autors. Die Augenflüssigkeit (Wasser) tritt hell hervor

Die Zeichenschärfe der NMR-Bilder wächst mit der Steilheit der Gradienten im Magnetfeld. Dort werden in jedem bewegten Leiter elektrische Spannungen induziert, zu denen entsprechend der Leitfähigkeit auch Ströme gehören. Der Patient ist ein Elektrolyt. Auch wenn er sich während der Tomographie nicht bewegen darf – Herz und Blutstrom lassen sich nicht stilllegen.

Die Kernspinresonanz ist auch ein wichtiges Hilfsmittel der chemischen Analyse, da das Signal auch etwas vom chemischen Bindungszustand abhängt. Eine verwandte Spielart magnetischer Resonanz ist die **Elektronenspinresonanz (ESR)**, die das gleiche Spiel mit den Hüllenelektronen der Atome treibt und daher natürlich auch sehr empfindlich auf die Chemie ist. Sie eignet sich zum Beispiel zur Untersuchung von Metallkomplexen in der Lebensmittelchemie.

## 8.2.2 Nukleonen und Nuklide

Auch der Atomkern, so klein er ist, lässt sich noch in **Nukleonen** zerlegen. Von ihnen gibt es aber nur zwei Sorten: die positiv geladenen **Protonen** und die ungeladenen **Neutronen**. Ihre Massen sind nahezu gleich. Wenn man sich mit 3 Dezimalstellen begnügt, darf man schreiben:

$$m_p \approx m_n \approx 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg.}$$

Als makroskopische Einheit führt das Kilogramm in der Welt der Atome zu unhandlichen Zehnerpotenzen. Deshalb definiert man für diesen Bereich eine

$$\text{atomare Masseneinheit } u = 1,66057 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

und bekommt mit ihr

$$m_p = 1,007265 \text{ } u \text{ und } m_n = 1,008650 \text{ } u.$$

Immerhin ist das Neutron um rund 1,5 Promille und damit fast zwei Elektronenmassen schwerer als das Proton. Das hat physikalische Bedeutung.

Das häufigste chemische Element ist der Wasserstoff: ein Proton im Kern, ein Elektron in der Hülle, kein Neutron,  $Z = 1$ . Wieso sind andere Elemente überhaupt möglich? Zwei oder gar mehr Protonen im Kern müssen sich doch mit der Cou-

lomb-Kraft ihrer positiven Elementarladungen abstoßen. Sie können in der Tat nur zusammenbleiben, weil zwischen Nukleonen eine **Kernkraft** herrscht, nach deren Natur hier nicht gefragt werden soll; sie lässt sich nur durch wellenmechanische Rechnung korrekt erfassen. Jedenfalls bewirkt sie eine kräftige, von der Ladung unabhängige Anziehung, allerdings nur auf extrem kurze Distanz: Die Nukleonen müssen sich gewissermaßen „berühren“, wenn sie Atomkerne, wenn sie **Nuklide** bilden wollen.

Zwei Zahlen kennzeichnen ein Nuklid: Die Protonenanzahl  $Z$  und die Neutronenanzahl  $N$ . Als Kernladungszahl bestimmt  $Z$  die Anzahl der Elektronen in der Hülle und über sie die chemischen Eigenschaften des Atoms. Deshalb ist  $Z$  zugleich die **Atomnummer** des chemischen Elementes im Periodensystem. Die Neutronen bestimmen zusammen mit den Protonen die Masse des Kerns und des ganzen Atoms. Darum wird die **Nukleonenanzahl**  $A = Z + N$  auch **Massenzahl** genannt. Mit ihr unterscheidet man üblicherweise die **Isotope** eines Elementes, also Nuklide gleicher Protonen-, aber unterschiedlicher Neutronenanzahl. Wie kommt es dazu?

### Merke

Kenngößen des Nuklids:

- $Z$  = Protonenanzahl, Kernladungszahl, Ordnungszahl
- $N$  = Neutronenanzahl
- $A = Z + N$  = Massenzahl

Schreibweise:  ${}_Z^AX$ ;  $X$ : Kürzel des Elements, z. B.:  ${}_2^4\text{He}$

Die anziehende Kernkraft zwischen zwei Protonen reicht nicht aus, die abstoßende Coulomb-Kraft zwischen zwei positiven Elementarladungen zu überwinden. Mindestens ein Neutron muss mit seiner Kernkraft hinzukommen, zwei sind besser. Es gibt also zwei stabile Isotope des zweiten Elementes im Periodensystem, des Edelgases Helium:

Helium-3, He-3,  ${}^3\text{He}$ ,  ${}_2^3\text{He}$  mit  $Z = 2, N = 1, A = 3$ ,

Helium-4, He-4,  ${}^4\text{He}$ ,  ${}_2^4\text{He}$  mit  $Z = 2, N = 2, A = 4$ .

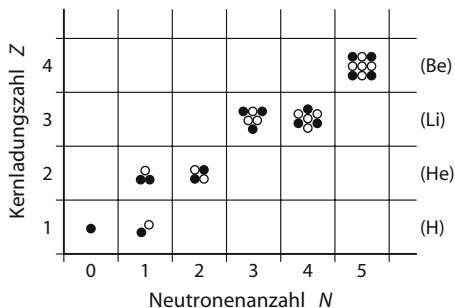
Hier sind die gebräuchlichsten Schreibweisen zusammengestellt. Das chemische Symbol steht für alle Isotope eines Elements. Zu ihrer Unterscheidung fügt man die jeweilige Massenzahl  $A$  oben links an. Die Kernladungszahl unten links kann man sich grundsätzlich sparen, da sie ja schon im chemischen Element zum Ausdruck kommt.

### Merke

Isotope sind Nuklide mit gleicher Protonenanzahl  $Z$ , aber unterschiedlicher Neutronenanzahl und damit Massenzahl.

■ ■ ■ Eine gewisse Sonderrolle unter den Isotopen spielen die des Wasserstoffs. Bei einem Kern, der nur aus einem Proton besteht, vergrößert ein hinzukommendes Neutron die Masse gleich um einen Faktor zwei. Dadurch ändern sich zwar nicht die chemischen, wohl aber die physikalischen Eigenschaften so sehr, dass es sich lohnt, dem **schweren Wasserstoff**  ${}^2_1\text{H}$  einen eigenen Namen und ein eigenes chemisches Symbol zu geben: **Deuterium**  ${}^2_1\text{D}$ . Der Atomkern heißt **Deuteron**. Sogar ein **überschwerer Wasserstoff** mit zwei Neutronen existiert, lebt aber nicht allzu lange. Er bekommt ebenfalls einen eigenen Namen und ein eigenes Symbol: **Tritium**,  ${}^3_1\text{T}$ , **Triton**.

Alle denkbaren Nuklide, ob sie nun existieren oder nicht, lassen sich übersichtlich in der sog. **Nuklidtafel** zusammenfassen. Dafür weist man jedem von ihnen ein quadratisches Kästchen zu und stapelt diese wie Schuhkartons im Regal, Isotope mit glei-

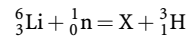


■ Abb. 8.8. Unteres Ende der Nuklidtafel; volle Kreise symbolisieren Protonen, offene Neutronen

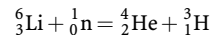
chem  $Z$  nebeneinander, gleiche Neutronenanzahlen  $N$  übereinander. Gleiche Nukleonenanzahlen  $A$  liegen dann in Diagonalen von oben links nach unten rechts. Den Bereich der leichtesten Elemente bis  $Z = 4$  (Beryllium) zeigt ■ Abbildung 8.8. Abweichend von der Norm ist hier das Tritium als instabiles Nuklid nicht aufgeführt.

### Rechenbeispiel 8.1: Kernreaktion

► **Aufgabe.** Welcher weitere Kern  $X$  ist an folgender Reaktion beteiligt?



► **Lösung.** Auf einen Lithiumkern wird also ein Neutron geschossen. Bei einer Kernreaktion müssen die Gesamtzahlen der Ladung und der Masse erhalten bleiben. Vorher ist die Gesamtmassezahl 7 und die Ladungszahl 3. Also muss  $X$  die Massenzahl  $7 - 3 = 4$  und die Ladungszahl  $3 - 1 = 2$  haben. Das ist ein Heliumkern oder  $\alpha$ -Teilchen. Also:



Neben Helium entsteht überschwerer Wasserstoff ( ${}^3_1\text{H}$ , Tritium), der radioaktiv ist.

## 8.2.3 Der Massendefekt

Es überrascht, aber die Masse des häufigeren Helium-Isotops  ${}^4_2\text{He}$  liegt mit  $4,0020\text{ u}$  etwas unter der gemeinsamen Masse der 4 Nukleonen, die es bilden. Mit knapp 2% springt dieser **Massendefekt** nicht ins Auge, aber bedeutsam ist er durchaus. Hinter ihm steht nämlich die Feststellung der Relativitätstheorie, Masse  $m$  und Energie  $W$  seien äquivalent entsprechend der Gleichung

$$W = m \cdot c^2.$$

Die Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist groß, ihr Quadrat erst recht. Demnach wiegt Energie nicht viel. Umgekehrt repräsentiert ein Gramm irgendwelcher Materie bereits 89,9 GJ oder 25000 Kilowattstunden. Um einen Kern des Helium-4 in seine Nukleonen zu zerlegen, muss man ihm seinen Massendefekt zurückgeben, d. h. 27,3 MeV Energie zuführen, immerhin 6,8 MeV pro Nukleon. Sie wurden zuvor als **Bindungsenergie** abgegeben. Diese für die Stabilität eines Nuklids wichti-

ge Größe kann man also gewissermaßen „mit der Waage“ bestimmen. Bei chemischen Reaktionen gilt grundsätzlich dasselbe. Nur liegen hier die frei werdenden Bindungsenergien nur im Bereich einiger eV pro Molekül. Der zugehörige Massendefekt ist auch für die beste Analysenwaage viel zu klein. Insofern haben die Chemiker recht, wenn sie behaupten, bei ihren Reaktionen blieben die Massen der beteiligten Partner erhalten.

Vom Massendefekt des  ${}^4\text{He}$  „lebt“ die Erde, ihre Flora und Fauna sogar im unmittelbaren Sinn des Wortes, der Mensch nicht ausgenommen. Seit rund 5 Milliarden Jahren „verbrennt“ die Sonne Wasserstoff zu Helium und strahlt die dabei durch Massendefekt frei werdende Energie in den Weltraum hinaus. Das wird vermutlich noch einmal  $5 \cdot 10^9$  Jahre so weitergehen, bis sich die Sonne sterbend zum „roten Riesen“ aufbläht, über die Erdbahn hinaus.

### 8.2.4 Radioaktivität

In einem stabilen Atomkern müssen Kern- und Coulomb-Kräfte in einem ausgewogenen Verhältnis zueinander stehen. Viel Spielraum lässt die Natur ihnen nicht: In der Nuklidtafel (Abb. 8.9) besetzen sie nur eine recht schmale **stabile Rinne**. Leichtere Kerne benötigen ungefähr ein Neutron pro Proton, schwerere aber mit wachsendem  $Z$  einen immer größeren Neutronenüberschuss. Die stabile Rinne beginnt unten links unter  $45^\circ$  und wird nach oben immer flacher und endet beim letzten stabilen Nuklid, dem Wismut-209 mit 83 Protonen und 126 Neutronen (Abb. 8.9). Befindet sich der Atomkern außerhalb dieser stabilen Rinne, so versucht er früher oder später, durch Abspalten von Teilchen das Verhältnis von Protonenzahl zu Neutronenzahl in den stabilen Bereich zu manövrieren. Dann ist das Atom **radioaktiv**.

Abbildung 8.10 zeigt, welche Möglichkeiten ein Atomkern im Prinzip hat:

- **$\alpha$ -Zerfall.** Um die stabile Rinne zu erreichen, müssen die schweren Elemente jenseits des Wismut, die alle radioaktiv sind, vor allem Nukleonen loswerden: Dazu stoßen sie einen vollständigen Atomkern ab, den des Helium-4. Dadurch reduzieren sich die Protonen- und

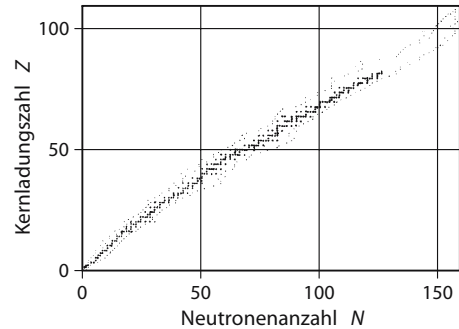


Abb. 8.9. Nuklidtafel. Die *dicken Punkte* markieren die stabilen Nuklide („stabile Rinne“), die *feinen Punkte* markieren das leichteste und das schwerste bekannte Isotop des jeweiligen Elements. Weiter außen liegende Nuklide sind so kurzlebig, dass sie sich nicht nachweisen lassen

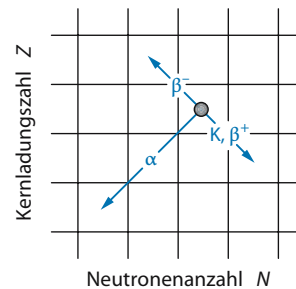


Abb. 8.10. Die wichtigsten Kernumwandlungen im Schema der Nuklidtafel

Neutronenanzahlen je um 2, die Nukleonenanzahl also um 4. In der Nuklidtafel bedeutet das einen Sprung über 2 Zeilen und 2 Spalten unter  $45^\circ$  nach unten links (Abb. 8.10). Diese Art radioaktiver Strahlen wurde als erste entdeckt; man brauchte einen Namen und nannte sie, weil man nichts Besseres wusste,  **$\alpha$ -Strahlen**. Dementsprechend heißen im  $\alpha$ -Zerfall emittierten  ${}^4_2\text{He}$ -Kerne bis heute  **$\alpha$ -Teilchen**. Auch das berühmte Radium-226, von Marie Curie (1867–1934) erstmals chemisch isoliert, ist ein  $\alpha$ -Strahler. Mit seiner Ordnungszahl 86 kann es freilich die stabile Rinne nicht in einem Sprung erreichen; dem ersten  $\alpha$ -Zerfall müssen sich weitere anschließen. Die führen aber, ihrer  $45^\circ$  wegen, in der Nuklidtafel unter die stabile Rinne. Darum wird ab und an ein  $\beta$ -Zerfall eingeschoben. Er ändert die Mas-

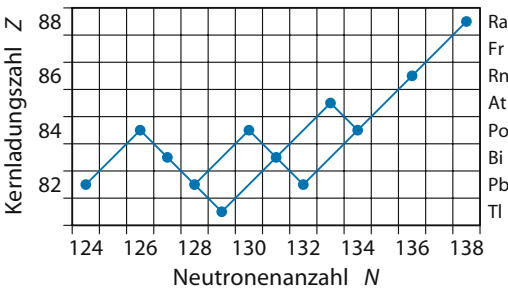


Abb. 8.11. Zerfallsreihe des Radium-226

senzahl nicht, erhöht aber die Ordnungszahl. In der Nuklidtafel entspricht er einem Sprung auf das Nachbarfeld oben links. Auf diese Weise zieht ein schweres Atom eine ganze **Zerfallsreihe** hinter sich her. Abbildung 8.11 zeigt die des Radium-226. Sie verfehlt das stabile Wismut-Isotop  $^{209}_{83}\text{Bi}$  und endet beim Blei-Isotop  $^{206}_{82}\text{Pb}$ .

- **$\beta^-$ -Zerfall.** Nuklide, die zu viele Neutronen besitzen, betreiben  $\beta^-$ -Zerfall (genauer:  $\beta^-$ -Zerfall, s. unten). Tatsächlich kann sich ein Neutron in ein Proton umwandeln, dabei ein Elektron abstoßen und ihm noch das Äquivalent der verbleibenden Masse als kinetische Energie mitgeben. Aus historischen Gründen bezeichnet man ein solches, praktisch lichtschnelles Elektron, als  **$\beta^-$ -Teilchen**. Als man den  $\beta^-$ -Zerfall entdeckte und ihm einen Namen geben musste, konnte man seine Natur noch nicht feststellen.
- **$\beta^+$ -Zerfall.** Was machen Kerne, die, aus welchen Gründen auch immer, oberhalb der stabilen Rinne entstehen?  $\alpha$ - und  $\beta^-$ -Zerfall nützen ih-

nen nichts, sie müssen Protonen loswerden. Sie tun dies durch Umwandlung eines Protons in ein Neutron. Dazu haben sie grundsätzlich zwei Möglichkeiten. Mancher Kern fängt ein Elektron ein, und zwar von dort, wo es ihm am nächsten ist, aus der K-Schale seiner eigenen Hülle: **K-Einfang**. Der zweite Weg bringt etwas grundsätzlich Neues: Hier stößt der Kern ein Positron aus, ein „Elektron mit positiver Ladung“. Es gehört nicht in das Sonnensystem, denn es ist ein Teilchen der hierzulande nicht lebensfähigen sog. **Antimaterie**, von der in ► Kap. 8.2.8 noch kurz die Rede sein wird. Positronen gehören, wie die Elektronen, zu den  $\beta^-$ -Teilchen; zur Unterscheidung spricht man je nach Ladungsvorzeichen von  $\beta^-$ - und  $\beta^+$ -Strahlern. In der Nuklidtafel bewirken K-Einfang wie  $\beta^+$ -Zerfall einen Sprung in das Nachbarfeld unten rechts.

Für das betroffene Atom ist sein radioaktiver Zerfall ein höchst aufregender Vorgang. Mit seiner Kernladungszahl ändert es seine chemische Natur; es muss seine Nukleonen im Kern und seine Elektronen in der Hülle neu arrangieren. Der neue Kern entsteht in einem angeregten Zustand und sucht nun seinen Grundzustand. Er erreicht ihn nach der gleichen Methode wie die Hülle auch: durch Emission von Quanten. Nur geht es im Kern um wesentlich höhere Energien. Entsprechend kurzweilig ist die emittierte elektromagnetische Welle. Man nennt sie  **$\gamma$ -Strahlung**. Mit ganz wenigen Ausnahmen wird bei einem  $\alpha$ - oder  $\beta^-$ -Zerfall immer auch ein  **$\gamma$ -Quant** ausgesandt (► Tabelle 8.1).

Tabelle 8.1 Radioaktive Zerfallsarten

Zerfallsart	emittiert wird	$\Delta Z$	$\Delta N$	$\Delta A$
$\alpha$	$^4_2\text{He}$	-2	-2	-4
$\beta^-$	Elektron	+1	-1	0
$\beta^+$	Positron	-1	+1	0
K-Einfang		-1	+1	0
$\gamma$	Quant	0	0	0

### 8.2.5 Nachweis radioaktiver Strahlung

Kernumwandlungen betreffen immer nur einzelne Atome, einzelne Kerne. Diese sind durch die Elektronenhülle weitgehend von der Außenwelt abgeschirmt. Ihre Umwandlungen lassen sich nicht beeinflussen; sie reagieren weder auf Druck, noch auf Temperatur oder chemische Bindung. Wie will man herausbekommen, was ein einzelner Atomkern tut? Man kann es nur, weil der Energieumsatz bei Kernprozessen vergleichsweise hoch ist. Die Teilchen und Quanten radioaktiver Strahlung verfügen meist über Energien zwischen 0,1 MeV und 1 MeV. Damit kann man zigtausend Moleküle ionisieren. Wenn ein „radioaktiver Strahl“ durch die Luft fährt, hinterlässt er auf seiner Bahn einen nachweisbaren Ionenschlauch. Er berichtet von einem einzelnen Kernprozess.

Dies tut auch der **Halbleiterzähler**: Hier setzt der Strahl normalerweise gebundene Elektronen für kurze Zeit zu Leitungselektronen frei. Im **Szintillationszähler** erzeugen ähnliche Elektronen per Lumineszenz einen Lichtblitz.

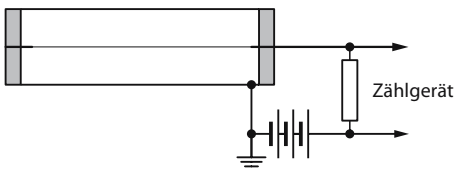
Wichtigstes Messinstrument der Kernphysik ist das **Geiger-Müller-Zählrohr**, das einen Zwitter zwischen selbständiger und unselbständiger Gasentladung nutzt (► Kap. 6.6.9). Es ist so empfindlich, dass es ein einzelnes ionisierendes Teilchen, das beim radioaktiven Zerfall eines einzelnen Atomkerns ausgesandt wurde, nachweisen kann. Ein Geigerzähler sperrt ein passend ausgesuchtes Gas unter vermindertem Druck in ein Rohr ein und stellt einen dünnen Draht in dessen Achse (► Abb. 8.12). Eine Nadel tut es auch („Spitzenzähler“). Wichtig ist der kleine Krümmungsradius, der schon bei mäßigen Spannungen zu hohen Feldstärken führt. Das Rohr muss dünnwandig sein oder ein spezielles Strahlenfenster haben, damit es ionisierende Teilchen überhaupt herein-

lässt. Die elektrische Spannung zwischen Zählrohr und Wand wird nun so eingestellt, dass die selbständige Entladung gerade eben noch nicht zündet. Sie wird dann aber von einem einzelnen schnellen Teilchen ausgelöst, wenn dieses durch das empfindliche Volumen dicht um den Draht fährt: Es zieht den Ionenschlauch hinter sich her, dessen Elektronen die Lawine starten. Ein hoher Schutzwiderstand stoppt sie sofort wieder; mehr Ladung als die in der Kapazität des Zählrohres gespeicherte steht nicht zur Verfügung. Wenn aber die Spannung über dem Zählrohr für die Dauer der Entladung zusammenbricht, dann erscheint sie gleichzeitig über dem Schutzwiderstand und kann elektronisch registriert, gezählt und durch ein Knacken im Lautsprecher hörbar gemacht werden: „Der Geigerzähler tickt.“

#### Merke

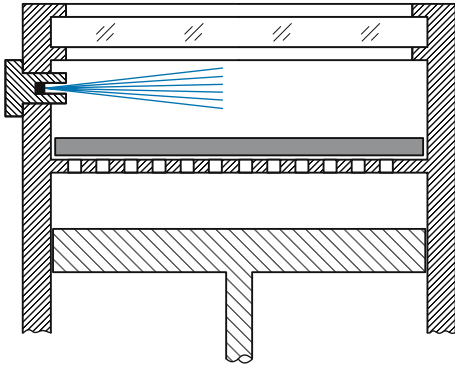
Geiger-Müller-Zählrohr: Ein einzelnes ionisierendes Teilchen löst eine Elektronenlawine aus, die nach weniger als einer Millisekunde gestoppt wird.

Das Auge ist des Menschen bestes Sinnesorgan; er möchte die Spuren radioaktiven Zerfalls sehen. Auch das erlauben ihm die Ionenschläuche, und zwar mit Hilfe der **Nebelkammer**. Sie nutzt aus, dass die Kondensation einer Flüssigkeit zu den Keimbildungsprozessen gehört (► Kap. 5.3.2), und dass Ionen ausgezeichnete Kondensationskeime bilden. Zuvor muss der Dampf freilich kondensationswillig gemacht, d. h. übersättigt werden. Dies erreicht man durch eine Unterkühlung, ausgelöst durch eine rasche und damit praktisch adiabatische Expansion (adiabatisch: ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung, ► Kap. 5.4.2). Daraus ergibt sich das Konstruktionsprinzip einer Nebelkammer, schematisch dargestellt in ► Abb. 8.13. Fährt beispielsweise ein  $\alpha$ -Teilchen unmittelbar nach der Expansion durch die Kammer, so kondensieren Nebeltröpfchen an seinem Ionenschlauch und markieren die Bahn als weißen Strich, deutlich sichtbar in scharfem seitlichem Licht. Die Nebelspur steht für eine knappe Sekunde – lange genug, sie zu fotografieren – und löst sich dann wieder auf.

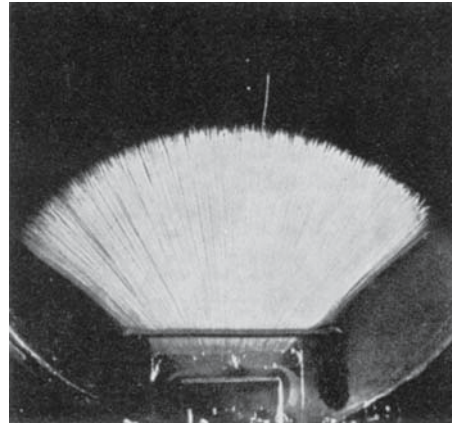


► Abb. 8.12. Geiger-Müller-Zähler





■ **Abb. 8.13. Wilson-Nebelkammer.** Die eigentliche Beobachtungskammer enthält einen mit Alkohol oder Wasser getränkten Filz, der ständig für Sättigungsdampfdruck sorgt. Durch einen kurzen Zug am Kolben wird die Temperatur in der Kammer in adiabatischer Expansion abgesenkt und der Dampf übersättigt. Er kondensiert bevorzugt an den von der radioaktiven Strahlung ausgelösten Ionenschläuchen



■ **Abb. 8.14. Bahnen von  $\alpha$ -Teilchen;** das eine Teilchen mit überhöhter Reichweite stammt von einem angeregten Atomkern (Aufnahme: Philipp; nach Finkelnburg)



■ **Abb. 8.15. Bahnen von  $\beta$ -Teilchen;** die gerade, nicht geschlossene Nebelspur stammt von einem schnellen Teilchen, die verschlungenen von langsamen (Aufnahme: Rutherford; nach Westphal)

#### Merke

Nachweisgeräte für einzelne radioaktive Strahlen:  
Zählrohr und Halbleiterzähler registrieren jeden „Strahl“ als elektrischen Impuls, Szintillationszähler als Lichtblitz, die Nebelkammer bildet Teilchenbahnen ab.

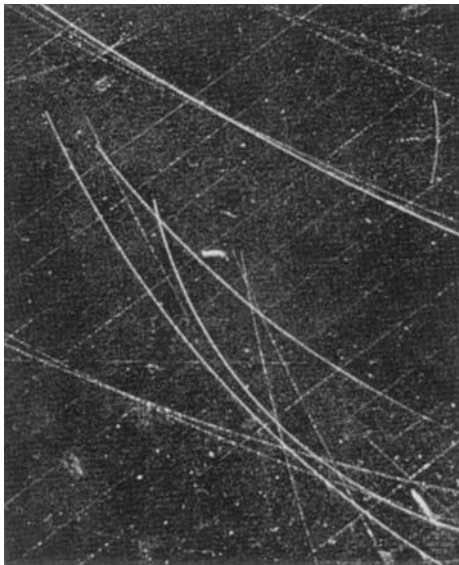
In der Nebelkammer hinterlassen die verschiedenen Teilchenarten charakteristische Spuren. Typisch für die  $\alpha$ -Teilchen sind kurze, kräftige, gerade Bahnen einheitlicher Länge, wie sie Abbildung 8.14 zeigt. Der Heliumkern ist so schwer, dass er nicht leicht aus seiner Bahn geworfen werden kann. Eben deshalb hat er aber auch eine hohe Ionisationsrate, verliert seine anfängliche kinetische Energie darum verhältnismäßig rasch und läuft sich schon nach wenigen Zentimetern tot. Seine Reichweite ist ein Maß für seine Startenergie. Der „Pinsel“ der ■ Abb. 8.14 lässt erkennen, dass alle aus gleichen Kernprozessen stammende  $\alpha$ -Teilchen gleiche Energie mitbekommen. Ihre Bedeutung in der Strahlentherapie ist sehr begrenzt: Einigen Zentimetern Reichweite in Zimmerluft entsprechen allenfalls Zehntelmillimeter in Wasser oder Gewebe.

$\beta$ -Strahlen ionisieren weitaus schwächer, besonders wenn sie noch schnell und energiereich sind, denn dann haben sie gewissermaßen nur wenig Zeit, im Vorbeifliegen ein Luftmolekül zu ionisieren. In der Nebelkammer hinterlassen sie lange, oftmals unterbrochene, selten gerade und zumal gegen Ende verschlungene Spuren (■ Abb. 8.15): Das leichte Elektron wird von jedem Molekül, auf das es einigermaßen zentral trifft, aus seiner Bahn geworfen. Entsprechend ge-



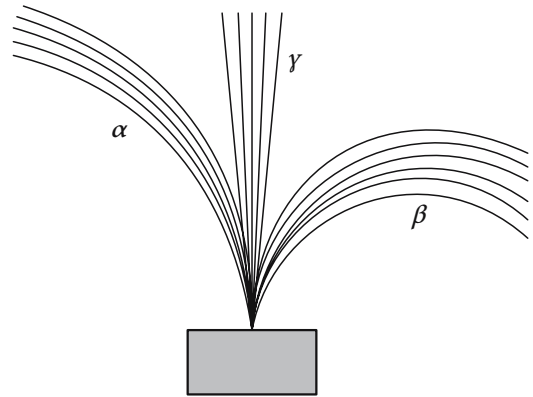


■ **Abb. 8.16. Nebelkammeraufnahme.** Quanten hinterlassen keine eigenen Spuren in der Nebelkammer; die von ihnen ausgelösten Elektronen ziehen aber Spuren nach Art von  $\beta$ -Teilchen seitlich aus dem Quantenbündel heraus (nach R.W. Pohl)



■ **Abb. 8.17. Bahnen von Protonen in der Nebelkammer;** sie sind gekrümmt, weil bei der Aufnahme ein Magnetfeld in Blickrichtung der Kamera bestand. Die Aufnahme diente dem Nachweis schneller Neutronen, die als neutrale Teilchen nicht ionisieren und darum keine Bahns Spuren hinterlassen. Bei hinreichend zentralem Stoß übertragen sie ihre kinetische Energie auf die in der Kammer in Form von Wasserstoffgas vorhandenen Protonen. (Aufnahme: Radiation Laboratory, University of California; nach Finkelburg)

ring ist seine Reichweite in Wasser und biologischem Gewebe. Medizinisch genutzt werden  $\beta$ -Strahlen deshalb nur dann, wenn man das radioaktive Präparat unmittelbar an den Ort des Geschehens bringen kann. Ein Beispiel liefert  $^{198}\text{Au}$ , das z. B. als Goldchlorid physiologischer Kochsalzlösung zugesetzt und in die Bauchhöhle eines Patienten gebracht, dort herumvagabundierende Krebszellen abtöten soll.



■ **Abb. 8.18. Spuren radioaktiver Strahlen im Magnetfeld.** Quanten werden nicht, Elektronen nach der einen und Heliumkerne nach der anderen Seite abgelenkt. Die Zeichnung ist nicht maßstabgerecht: Ein Feld, das Elektronen in der angegebenen Weise ablenkt, würde  $\alpha$ -Teilchen nicht erkennbar beeinflussen

Leider emittieren (fast) alle  $\beta$ -Strahler auch durchdringende Quanten, der Patient wird also zu einer lebenden  $\gamma$ -Quelle. Glücklicherweise klingt die Aktivität des Goldpräparats mit einer Halbwertszeit von rund drei Tagen ab (auch in der Kanalisation, in die einige der strahlenden Kerne sicherlich entweichen).  $\gamma$ -Quanten und Röntgenstrahlen hinterlassen in der Nebelkammer unmittelbar keine Spuren. Sie lösen aber bei der Ionisation energiereiche Elektronen aus, die  $\beta$ -Teilchen entsprechen. Deren Spuren starten irgendwo im Wellenbündel und laufen seitlich aus ihm heraus (■ Abb. 8.16).

$\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahlen sind zwar die wichtigsten Produkte radioaktiver Kernumwandlungen, nicht aber die einzigen. ■ Abbildung 8.17 zeigt die Spuren von Protonen. Dass die Bahnen gekrümmt

sind, hat einen äußerlichen Grund: Die Nebelkammer befindet sich in einem Magnetfeld mit den Feldlinien in Blickrichtung der Kamera. Folglich wird jedes hindurchfliegende Teilchen, sofern es elektrisch geladen ist, von der Lorentz-Kraft auf eine Kreisbahn gezwungen (► Kap. 6.10.2). Der Drehsinn hängt vom Vorzeichen der Ladung, der Bahnradius von Geschwindigkeit und spezifischer Ladung  $q/m$  ab. Die schweren  $\alpha$ -Teilchen werden darum weniger stark abgelenkt als die leichten Elektronen, und in entgegengesetzter Richtung zudem. Die weit verbreitete ■ Abb. 8.18 setzt demnach die Existenz eines Magnetfeldes stillschweigend voraus.

## 8.2.6 Zerfallsgesetz

Ein instabiler Kern zerfällt nicht sofort nach seiner Geburt. Jedes radioaktive Nuklid besitzt seine eigene mittlere **Lebensdauer**  $\tau$ . Ist sie zu groß, als dass sie sich messen ließe, gilt das Nuklid als stabil; ist sie für eine Messung zu klein, gilt das Nuklid als nichtexistent und sein Kästchen in der Nuklidtafel bleibt leer.

Die Radioaktivität wird vom Zufall regiert: Niemand kann vorhersagen, welcher Kern in einem radioaktiven Präparat als nächster zerfallen wird. Auch der Zufall wird von mathematischen Gesetzen regiert: Man kann recht genau vorhersagen, wie viele Kerne eines bekannten radioaktiven Präparates in der nächsten Sekunde, Minute, Stunde oder Woche zerfallen werden. Den Quotienten aus Anzahl  $\Delta N$  und Zeitspanne  $\Delta t$ , die **Zerfallsrate**, bezeichnet man als

$$\text{Aktivität } A = \Delta N / \Delta t$$

eines radioaktiven Präparats. Sie ist eine reziproke Zeit; ihre Si-Einheit 1/s bekommt den Namen **Becquerel** (Bq).

■ ■ ■ Die reziproke Sekunde 1/s dient auch als Einheit der Frequenz, dies aber unter dem Namen Hertz. Weshalb die Unterscheidung? Eine Schwingung ist ein kausaler Vorgang, der radioaktive Zerfall ein zufallsbedingter **stochastischer** Prozess.

Atome sind klein und zahlreich, auch die instabilen. Die Aktivitäten üblicher Präparate für Medizin und Technik

bekommen, in Bq gemessen, unangenehm hohe Maßzahlen. Sogar ein normaler erwachsener Mensch strahlt mit „erschreckenden“ 5000 Bq, ohne deswegen als radioaktiv zu gelten. Zu kleineren Maßzahlen führt die vor Einführung des Systeme International übliche Einheit **Curie** = Ci =  $3,77 \cdot 10^{10}$  Bq. Da bleiben dem Menschen nur noch harmlos klingende 0,14  $\mu$ Ci.

Es leuchtet ein: Die Aktivität  $A$  eines Präparats ist proportional zur Anzahl  $N$  der in ihm versammelten radioaktiven Atome und proportional zu deren **Zerfallskonstanten**  $\lambda$ , nämlich umgekehrt proportional zur **Lebensdauer**  $\tau = 1/\lambda$ :

$$\text{Aktivität } A = \lambda \cdot N = N/\tau.$$

Das gilt so für ein einheitliches Präparat, dessen Nuklid mit einem einzigen Sprung die stabile Rinne erreicht. Zieht es eine Zerfallsreihe mit  $n$  vergleichsweise kurzlebigen Folgenukliden hinter sich her, so erhöht sich  $A$  auf das  $n$ -fache.

Wegen der Aktivität nimmt  $N$  als  $N(t)$  mit der Zeit ab, und zwar mit der Geschwindigkeit  $dN/dt = -A$  (negatives Vorzeichen wegen der Abnahme). Die Anzahl  $N(t)$  der zum Zeitpunkt  $t$  noch vorhandenen, nicht zerfallenen Kerne folgt demnach der Differentialgleichung

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N(t)}{\tau}.$$

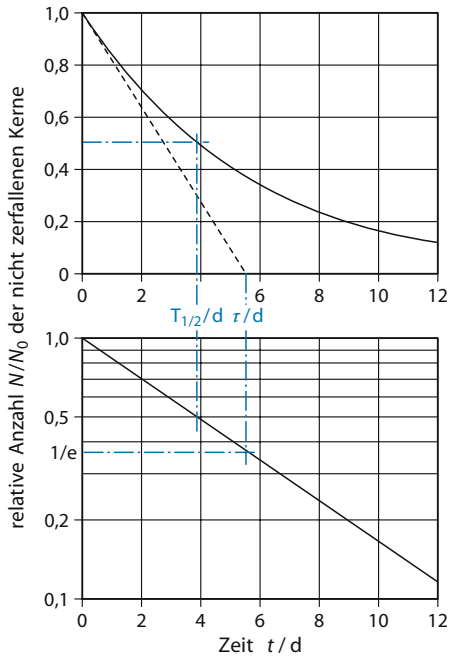
Rein mathematisch ist das die Differentialgleichung der Kondensatorentladung von ► Kap. 6.4.6, nur stand dort anstelle der Teilchenanzahl  $N(t)$  die elektrische Spannung  $U(t)$ . Den mathematischen Formalismus kümmern Buchstaben und ihre physikalischen Bedeutungen nicht. Was  $U$  recht ist, ist  $N$  billig. Folglich gilt für  $N(t)$  das

### Gesetz des radioaktiven Zerfalls

$$N(t) = N_0 \cdot e^{(-t/\tau)} = N_0 \cdot e^{(-\lambda t)}.$$

Die abfallende e-Funktion besagt: In gleichen Zeitspannen  $\Delta t$  geht  $N(t)$  von jedem Ausgangswert  $N_0$  auf dessen gleichen Bruchteil hinunter, insbesondere in der **Halbwertszeit**  $T_{1/2}$  auf  $\frac{1}{2}N_0$ . Aus alter Gewohnheit wird in Tabellenbüchern meist die Halbwertszeit und nicht die mittlere Lebensdauer angegeben. Rein mathematisch gilt

$$\begin{aligned} \text{Halbwertszeit } T_{1/2} &= \text{Lebensdauer } \tau \cdot \ln 2 \\ &= 0,6931 \cdot \tau. \end{aligned}$$



■ **Abb. 8.19a,b.** Radioaktiver Zerfall am Beispiel des Radon-222; Halbwertszeit 3,825 Tage, Lebensdauer 5,518 Tage; **a** Darstellung in linearem Maßstab; **b** einfach-logarithmische Darstellung

Graphisch liefert der radioaktive Zerfall in linearem Maßstab die schon bekannte abfallende Kurve der Exponentialfunktion (► Kap. 1.5.2), die an der Ordinate startet und asymptotisch auf die Abszisse zuläuft, ohne sie jemals zu erreichen (■ Abb. 8.19). Eine Tangente, zu irgendeinem Zeitpunkt  $t_0$  angelegt, schneidet die Abszisse zum Zeitpunkt  $t_0 + \tau$ , d. h. um 1,4472 Halbwertszeiten nach  $t_0$ . Teilt man die Ordinate logarithmisch, so streckt sich die Kurve zur Geraden.

#### Merke

Gesetz des radioaktiven Zerfalls:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{(-t/\tau)} = N_0 \cdot e^{(-\lambda \cdot t)},$$

Kenngrößen des radioaktiven Zerfalls:

- mittlere Lebensdauer  $\tau$ ,
- Zerfallskonstante  $\lambda = 1/\tau$ ,
- Halbwertszeit  $T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2$ ,
- Aktivität  $A(t) = dN/dt = N(t)/\tau = \lambda \cdot N(t) =$  Zerfallsrate; Einheit: Becquerel = Bq = 1/s; Curie = Ci =  $3,77 \cdot 10^{10}$  Bq.

Die Lebensdauern und Halbwertszeiten der Nuklide reichen von 0 (nichtexistent) bis  $\infty$  (stabil). Einige Beispiele seien hier aufgeführt:

— Kalium-40	$T_{1/2} = 1,28 \cdot 10^9$ Jahre
— Kohlenstoff-14	$T_{1/2} = 5730$ Jahre
— Radon-222	$T_{1/2} = 5,825$ Tage
— freies Neutron	$T_{1/2} = 18$ min
— Tantal-181	$T_{1/2} = 6,8 \mu\text{s}$

#### Klinik

⚡ **Natürliche Strahlungsaktivität des Menschen.** Seit Anbeginn der Welt, seit dem Urknall vor etwa 16 Milliarden Jahren, hat das Kalium-40 noch keine 15 Halbwertszeiten erlebt. Zehn Halbwertszeiten bringen den Faktor 1024. Gewiss, das K-40 ist seither deutlich weniger geworden, es ist aber immer noch so viel vorhanden, dass es ganz natürlicherweise in Pflanze, Tier und Mensch vorkommt. 80% der natürlichen Aktivität des Menschen stammen vom K-40. Auch **Kohlenstoff-14** kommt in der Natur vor, durch Kernprozesse in der hohen Atmosphäre ständig erzeugt. Er dient den Archäologen zur Altersbestimmung von Fundstücken, die biologisches Material enthalten. Das Edelgas Radon-222 gehört zur Zerfallsreihe des Radium-226, einer Allerweltssubstanz, die in Spuren überall vorkommt und z. B. auch zur Aktivität des Menschen messbar, wenn auch unwesentlich beiträgt. Radon-222 kriecht aus Mauersteinen und kann in Zimmern, zumal in schlecht gelüfteten, durchaus bedenkliche Konzentrationen erreichen: Wenn es eingeatmet zu dem nicht mehr gasförmigen Polonium-218 zerfällt, wird es nicht wieder ausgeatmet und liefert die **Strahlung** des Restes der Zerfallsreihe in der Lunge ab.

## Praktikum

## Radioaktiver Zerfall, Absorption

Die Versuch dienen dazu, den Gebrauch von Nachweisgeräten (Zählrohr oder Szintillationszähler) und den Umgang mit radioaktiven Stoffen zu erfahren. Die Hochschulen setzen die verschiedensten radioaktiven Proben ein. Man kann auch etwas über Statistik lernen, da der radioaktive Zerfall gezählt wird und zufällig verläuft.

Da die Aufgaben an den einzelnen Universitäten verschieden sind, kann hier nur auf die relevanten Kapitel verwiesen werden:

Strahlung radioaktiver Kerne, Zerfallsreihe

► Kap. 8.2.4

Nachweis der Strahlung, Zählrohr

► Kap. 8.2.5

Zerfallsgesetze

dieses Kapitel

Absorption von Strahlung

► Kap. 7.5.4

8

## Rechenbeispiel 8.2: Alter Knochen

► **Aufgabe.** Ein Tierknochen in einer archäologischen Ausgrabungsstätte enthält 200 g Kohlenstoff. Er weist eine Aktivität von 15 Zerfällen pro Sekunde auf, die von dem Kohlenstoff-14 Isotop herkommt. Wie alt ist der Knochen? Dazu muss man wissen, dass das Verhältnis  ${}^{14}_6\text{C}$  zu  ${}^{12}_6\text{C}$  zum Zeitpunkt, als das Tier noch atmete und fraß  $1,3 \cdot 10^{-12}$  war (natürliche Zusammensetzung in der Luft und den Pflanzen).

► **Lösung.** Als das Tier noch lebte, entsprachen 200 g Kohlenstoff

$$N_0 = \frac{6 \cdot 10^{23} \text{ Atome}}{12 \text{ g}} \cdot 200 \text{ g} \cdot 1,3 \cdot 10^{-12} \\ = 1,3 \cdot 10^{13} \text{ Atome } {}^{14}_6\text{C}.$$

Die Aktivität damals war

$$A_0 = \lambda \cdot N_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N_0 = 1,6 \cdot 10^9 \frac{1}{\text{a}} = 50 \text{ s}^{-1}.$$

Nach der gesuchten Zeit sind nur noch 15 Zerfälle pro Sekunde und entsprechend weniger  ${}^{14}_6\text{C}$ -Atome übriggeblieben. Es ist also:

$$\frac{15 \text{ s}^{-1}}{50 \text{ s}^{-1}} = 0,3 = e^{-\lambda t} = \exp\left(-\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}}\right) \\ \Rightarrow t = \frac{\ln 0,3}{\ln 2} \cdot T_{1/2} = 9950 \text{ Jahre}.$$

## 8.2.7 Kernspaltung und künstliche Radioaktivität

■ ■ ■ Einige besonders schwere Nuklide sind nicht nur radioaktiv, sondern auch noch spaltbar. Statt ein  $\alpha$ - oder  $\beta$ -Teilchen zu emittieren, teilt sich ein solcher schwerer Kern hin und wieder in zwei mittelschwere. Weil die stabile Rinne gekrümmt ist, bleiben dabei ein paar Neutronen übrig.

Diese überzähligen Neutronen sind technisch interessant. Die Kernspaltung muss nämlich nicht spontan erfolgen, sie lässt sich auch provozieren, und zwar gerade durch Neutronen. Damit wird eine **Kettenreaktion** zumindest grundsätzlich möglich: Die bei einer Spaltung freigesetzten Neutronen lösen neue Spaltungen aus. Wenn das in unkontrollierter Lawine geschieht, explodiert eine Atombombe. So ganz leicht ist die Kettenreaktion allerdings nicht zu erreichen. Die Spaltung liefert energiereiche, „schnelle“ Neutronen, braucht aber zur Auslösung langsame, „thermische“ Neutronen. Zum Zweiten ist das spaltbare Isotop  ${}^{235}\text{U}$  in Natururan nur zu 0,7% vorhanden. Zum Dritten enthält Natururan aber  ${}^{238}\text{U}$ , das besonders gern Neutronen einfängt, ohne sich zu spalten. Um Uran bombenfähig zu machen, muss man deshalb das Isotop  ${}^{235}\text{U}$  hoch anreichern – das kostet Geld.

Kernreaktoren liefern nicht nur Energie, sondern zuweilen auch spaltbares Material wie das Plutonium-Isotop  ${}^{239}\text{Pu}$ , das als Transuran zu instabil ist, um auf der Erde noch in natürlichem Vorkommen vorhanden zu sein. Alle heutigen Reaktoren nutzen die Spaltung schwerer Kerne zur Gewinnung nutzbarer Energie. Die Sonne macht es anders: Sie betreibt Kernverschmelzung am unteren Ende des Periodensystems; sie „verbrennt“ Wasserstoff nuklear zu Helium. Auch dabei wird Energie frei, im Vergleich zur eingesetzten Masse sogar sehr viel. Des Menschen Bemühen, es der Sonne gleichzutun, hat schon früh zur Wasserstoffbombe geführt, aber erst in Ansätzen zu nützlichem Gebrauch bei der Energieversorgung.

Kernreaktoren brauchen nur einen Teil der freigesetzten Neutronen für ihre Kettenreaktion. Der Rest lässt sich grundsätzlich nutzbringend verwenden: Nahezu jede Substanz, in einen Strom langsamer Neutronen gehalten, wird radioaktiv. Sie bildet durch Neutroneneinfang neue Kerne, die in der Natur nicht mehr vorkommen, weil sie, wenn es sie je gab, längst zerfallen sind. Zum Beispiel bildet Silber unter Neutroneneinfang gleich zwei  $\beta$ -aktive Isotope, die wieder zum Element

Silber gehören, weil ein Neutron mehr im Kern ja die Atomnummer nicht ändert. Technische Annehmlichkeit der Aktivierung durch Beschuss mit thermischen Neutronen: Man braucht die aktivierten Kerne nicht chemisch aus der nichtaktivierten Matrix herauszupräparieren.

### Merke

Künstliche Radioaktivität:  
Durch Neutroneneinfang geht ein stabiles Nuklid in ein meist radioaktives Isotop über.

### Klinik

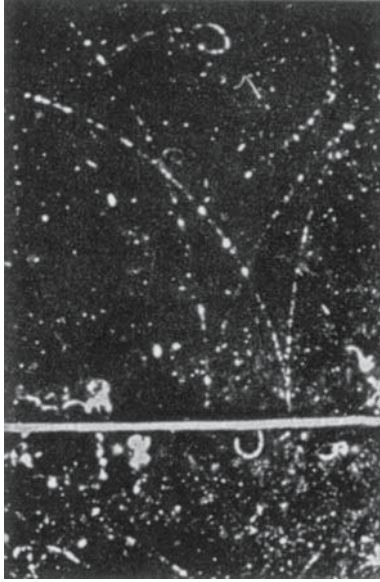
**Diagnose mit ☸ Tracern.** Künstlich radioaktive Chemikalien erlauben es, komplizierte Reaktionen wie etwa die des organischen Stoffwechsels zu verfolgen. Chemisch verhält sich ja ein aktiviertes Atom bis zu seinem Zerfall nicht anders als ein stabiles vom gleichen Element; durch seine Strahlung verrät es aber als radioaktiver Tracer, wohin es während seiner Lebensdauer durch den Stoffwechsel gebracht wurde. Spritzt man etwa einem Kaninchen radioaktives Jod in den Oberschenkel, kann man mit einem Zählrohr die Aktivität nahe der Einstichstelle leicht nachweisen. Wenig später hat sie aber der Blutkreislauf gleichmäßig über das ganze Tier verteilt, es strahlt von Kopf bis Schwanz. Wieder einige Zeit später findet sich die Aktivität bevorzugt in der Schilddrüse, denn dieses Organ hat eine Vorliebe für Jod.

## 8.2.8 Antimaterie

Im Gegensatz zu Luft und Wasser, Kohle und Eisen gehören die **Positronen**, die protonenreiche Kerne emittieren, nicht zur Materie, sondern zur **Antimaterie**. Zu jeder Art materieller Teilchen gibt es grundsätzlich auch **Antiteilchen**, zum Proton das Antiproton, zum Neutron das Antineutron und zum Elektron das „Antielektron“, eben das Positron. Die beiden Massen sind jeweils gleich. Sobald ein Teilchen auf sein Antiteilchen trifft, zerstrahlen beide: Sie setzen ihre gemeinsame Masse in Quantenenergie um. Die elektrische Ladung

### Klinik

**Dem Denken auf der Spur.** Alle Kernprozesse müssen nicht nur auf den Energiesatz achten, sondern auch auf die Erhaltung von Impuls und Drehimpuls. Die Paarbildung braucht dafür einen schweren Kern, im Beispiel des Nebelkammerbildes Blei; bei der **Positronenvernichtung** entstehen zwei Quanten, die diametral, mit entgegengesetzten Impulsen also, auseinander fliegen. Beide besitzen genügend Energie, um leicht aus dem Menschen herauszukommen. Gerade diese beiden diametral auseinander fliegenden Quanten machen Positronenstrahler als radioaktive Tracer medizinisch interessant. Legt man einen Patienten, der diese Positronenstrahler im Körper hat, in eine Röhre mit vielen ringförmig angeordneten Quantendetektoren, so werden, wenn ein Tracer zerfällt und das entstehende Positron gleich wieder vernichtet wird, zwei einander gegenüberliegende Detektoren genau gleichzeitig ansprechen (Koinzidenzmessung). Der Tracer muss genau auf der Verbindungslinie zwischen den beiden Detektoren gewesen sein. Mit dieser Ortsinformation kann man Tomogramme mit einer leidlichen Ortsauflösung von etwa 5 mm berechnen. Die Schnittbilder zeigen dann die Konzentrationsverteilung des Tracers. Diese ☸ **Positronenemissionstomographie (PET)** ist noch aufwendiger als die Kernspintomographie (► Kap. 8.2.1) und die Röntgentomographie (► Kap. 7.5.6), vor allem deshalb, weil die als Positronenstrahler verwendeten Isotope Halbwertszeiten von Minuten bis Stunden haben und vor Ort in einem Beschleuniger erzeugt werden müssen. Das ist so teuer, dass die Methode fast nur zu Forschungszwecken in der Neurologie am Gehirn eingesetzt wird. Da die Positronenstrahler aber in alle möglichen Moleküle, Proteine und sogar Medikamente eingebaut werden können, ist die Sache auch sehr universell. Baut man zum Beispiel als Positronenstrahler Fluor-18-Isotope in Glukosemoleküle ein und injiziert diese Glukose dem Patienten, so kann man im Gehirn nachschauen, wo bei einer bestimmten Tätigkeit viel Zucker gebraucht wird und sich die Traceratome ansammeln. Diese Gehirnregion ist dann besonders aktiv.



hat in einer Bleiplatte (horizontaler heller Balken) zwei im Magnetfeld entgegengesetzt gekrümmte Bahnen gleicher Ionisationsdichte ausgelöst, eben die Bahnen von einem Elektron und einem Positron.

8

■ **Abb. 8.20. Nebelkammeraufnahme einer Paarbildung.** Elektron und Positron verlassen eine Bleiplatte auf im Magnetfeld entgegengesetzt gekrümmten Bahnen. Das  $\gamma$ -Quant, das sie erzeugt hat, hinterlässt keine Spur (Aufnahme: Fowler und Lauritsen; nach Finkelnburg)

macht keine Probleme; Teilchen und Antiteilchen tragen, wenn sie schon geladen sind, entgegengesetzte Ladung. Denkbar sind sogar Atome aus Antimaterie, denn physikalisch ist es gleichgültig, ob sich ein positiver Kern mit Elektronen umgibt oder ein negativer Kern mit Positronen. Man kann deshalb einer fernen Galaxie nicht ansehen, ob sie möglicherweise aus Antimaterie besteht. Nur darf sie dann der Milchstraße nicht zu nahe kommen. In einer Welt aus Materie kann sich Antimaterie nicht lange halten. Positronen leben in Wasser allenfalls eine Nanosekunde, in Metallen nicht einmal das, in gutem Vakuum aber so viel länger, dass man mit ihnen experimentieren kann. Genau das Gleiche gilt für Materie in einer Welt aus Antimaterie.

Auch der Umkehrprozess zur Zerstrahlung, die Erzeugung von Materie aus Quantenenergie, kommt vor. Man nennt sie **Paarbildung**, denn wegen der Ladungsbilanz muss immer gleich ein Elektron-Positron-Paar entstehen. ■ Abbildung 8.20 zeigt ein entsprechendes Nebelkammerbild: Das Quant ist von unten gekommen und



In Kürze				
	Formel	Größe [Einheit]		
Atom				
Massenzahl $A$	$A$ : Anzahl der Nukleonen im Kern			
Ordnungszahl $Z$ (Kernladungszahl)	$Z$ : Anzahl der Protonen im Kern oder der Elektronen in der Hülle			
Neutronenanzahl $N$	$N = A - Z$ : Anzahl der Neutronen im Kern			
Isotope	Atome mit gleicher Ordnungszahl, aber verschiedener Massezahl			
Schreibweise (Beispiel Helium)	${}^4_2\text{He}$ ; oben: Massezahl; unten: Ordnungszahl			
Aktivität	Zerfälle pro Sekunde [Bq, Becquerel]			
Zerfallsgesetz	$N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}$	$N$ : Anzahl radioaktiver Atome $N_0$ : Anfangszahl $t$ : Zeit [s] $\tau$ : Zeitkonstante [s]		
Halbwertszeit	$T_{1/2} = \tau \cdot \ln 2$	$T_{1/2}$ : Zeit, in der die Hälfte der Atome zerfällt [s]		
Radioaktive Strahlung				
Zerfallsart	emittiert wird	$\Delta Z$	$\Delta N$	$\Delta A$
$\alpha$	${}^4_2\text{He}$	-2	-2	-4
$\beta^-$	Elektron	+1	-1	0
$\beta^+$	Positron	-1	+1	0
K-Einfang		-1	+1	0
$\gamma$	Quant	0	0	0
Antimaterie				
Wenn ein Positron und ein Elektron zusammentreffen, setzen sie ihre gemeinsame Masse in Energie in Form von zwei diametral auseinanderlaufenden $\gamma$ -Quanten um (Paarvernichtung).				

# Übungsfragen

(● leicht; ●● mittel; ●●● schwer)

- 1. Der Kern des Sauerstoffatoms enthält acht Protonen und acht Neutronen. Wie lautet die symbolische Schreibweise?
- 2. Wie viel Elektronen hat  ${}^{108}_{47}\text{Ag}$  in seiner Schale?
- 3. Woraus besteht  $\alpha$ -Strahlung?
- 4. In welche Nuklide kann das Bi-214 in der Zerfallsreihe des Radium-226 übergehen und durch welchen Zerfall?
- 5. Natürliches Silber besteht aus den Isotopen Ag-107 und Ag-109. Welche radioaktiven Nuklide entstehen bei Neutronenaktivierung?
- 6. Welche Teilchen entstehen bei der so genannten Paarbildung?

- 7. Die Aktivität einer Probe beträgt 100 Bq. Nach einer Stunde ist sie nur noch 50 Bq. Wie groß ist sie nach 2 Stunden?
- 8. Wie lange (in Halbwertszeiten) muss man warten, bis die Aktivität einer radioaktiven Probe auf 1% ihres Ausgangswertes abgesunken ist?
- 9. Warum kann die PET-Tomographie so gut den Ort eines Paarzerfalls feststellen?



# Ionisierende Strahlung

## 9.1 Dosimetrie – 322

- 9.1.1 Energie- und Äquivalentdosis – 322
- 9.1.2 Ionendosis – 323
- 9.1.3 Aktivität und Dosis – 324

## 9.2 Strahlennutzen, Strahlenschaden – 324

- 9.2.1 Radioaktive Tracer – 324
- 9.2.2 Strahlentherapie – 325
- 9.2.3 Natürliche Exposition – 326
- 9.2.4 Zivilisationsbedingte Exposition – 327
- 9.2.5 Strahlenschutz – 328



Ionisierende Strahlung überträgt im Elementarprozess der Absorption relativ viel Energie auf ein einzelnes Molekül. Man spricht darum von „energiereicher Strahlung“, die deshalb aber noch keine „intensive Strahlung“ sein muss. Sie kann komplizierte Großmoleküle zerreißen und so in wichtige Funktionen des lebenden Organismus störend eingreifen. Im Laufe der Evolution konnten nur Organismen überleben, die der Exposition durch natürliche ionisierende Strahlung standhielten.

## 9.1 Dosimetrie

### 9.1.1 Energie- und Äquivalentdosis

Keiner der fünf Sinne spricht auf Röntgen- und radioaktive Strahlen an. Das macht die **ionisierende Strahlung** vielen Menschen unheimlich und rückt sie in die Nähe anderer geheimnisvoller „Strahlen“, die mangels Existenz von den Sinnesorganen gar nicht wahrgenommen werden können. Die biologischen Wirkungen der ionisierenden Strahlen haben dahingegen einen handfesten Grund: Sie beruhen auf der von der Strahlung auf den Absorber übertragenen Energie. Darum macht man diese Energie denn auch zur Grundlage der **Dosimetrie**.

Es leuchtet ein, dass ein Elefant mehr vertragen kann als eine Mücke. Dementsprechend bezieht man die absorbierte Energie  $W$  auf die Masse  $m$  des Absorbers und definiert so die

$$\text{Energiedosis } D = W/m$$

mit der Einheit **Gray** = Gy = J/kg. Ihr hundertster Teil wird **Rad** genannt und mit rd abgekürzt:

$$1 \text{ Gy} = 100 \text{ rd} = 1 \text{ J/kg.}$$

Man darf das Rad = rd nicht mit der Einheit des ebenen Winkels (Radiant = rad) verwechseln.

$\alpha$ -Teilchen sind wegen ihrer hohen Ionisationsdichte (kurze, kräftige Spuren in der Nebelkammer) biologisch wirksamer als schnelle Elektronen; sie haben eine andere **Strahlenqualität**. Man berücksichtigt dies durch einen **Bewertungsfaktor**  $q$  und definiert die

$$\text{Äquivalentdosis } D_q = q \cdot D$$

mit der Einheit **Sievert** = Sv. Weil  $q$  eine dimensionslose Zahl ist, entspricht auch das Sievert einem J/kg. Der hundertste Teil wird jetzt **Rem** genannt und rem „abgekürzt“:

$$1 \text{ Sv} = 100 \text{ rem} = 1 \text{ J/kg.}$$

#### Merke

Dosisdefinitionen:

- Energiedosis  $D = W/m$
- Einheiten Gray = Gy = 100 Rad = 100 rd (= J/kg)
- Äquivalentdosis  $D_q = q \cdot D$
- Einheiten  
Sievert = Sv = 100 Rem = 100 rem
- Strahlenqualität: Bewertungsfaktor  $q$  (dimensionslos)
- schnelle Elektronen:  $q = 1$
- schnelle Ionen:  $q \sim 10$

Auch die Zeit, in der eine bestimmte Dosis appliziert wird, spielt für die biologische Wirkung eine Rolle. Ganz grob darf man sagen: je kürzer, desto wirksamer. Es geht also nicht nur um die Dosen  $D$  und  $D_q$ , sondern auch um die

$$\text{Dosisleistung } \Delta D / \Delta t \text{ und } \Delta D_q / \Delta t$$

mit den Einheiten Gy/s und Sv/s, die beide W/kg bedeuten.

#### Merke

Dosisleistung:

- Energiedosisleistung, Einheit Gy/s,
- Äquivalentdosisleistung, Einheit Sv/s.

Energie, die nicht absorbiert wird, hat auch keine Wirkung. Die extrem harte **Höhenstrahlung** aus dem Weltraum braucht der Mensch nicht zu fürchten: Was davon auf der Erdoberfläche noch ankommt, durchdringt auch ein paar Zentimeter Gewebe ohne nennenswerte Absorption. Aber auch Strahlen geringer Reichweite sind insofern relativ harmlos, weil man sich leicht vor ihnen schützen kann. Bei  $\alpha$ -Teilchen genügt schon eine Pappschachtel. Nur sollte man einen  $\alpha$ -Strahler weder durch Atmung (**Inhalati-**

on) noch mit der Nahrung (**Ingestion**) in seinen Körper bringen.

### 9.1.2 Ionendosis

Die Energiedosis, so wichtig und einleuchtend sie ist, hat einen schwerwiegenden Nachteil: Sie lässt sich nicht unmittelbar messen. 40 Gray, einem Menschen am ganzen Körper rasch und gleichmäßig appliziert, sind allemal tödlich; aufheizen würden sie ihr Opfer aber nur um ganze 10 mK („ein Hundertstel Grad“). Von der Wärmeentwicklung geht die Wirkung ionisierender Strahlung nicht aus. Auch für eine praktische Dosimetrie ist sie zu gering. Darum hält man sich lieber an die markante Eigenschaft der Strahlung, die Ionisation, und misst sie dort, wo das am leichtesten geht: in Luft. Dort trennt man die gebildeten Ionenpaare durch ein hinreichend hohes elektrisches Feld, zieht sie aus einem definierten Volumen mit der Luftmasse  $m$  heraus, bestimmt die Ladung  $Q$  der Ionen eines Vorzeichens und misst so die

**Ionendosis**  $I = Q/m$ ; Einheit  $1 \text{ C/kg} = 1 \text{ As/kg}$ .

Eine alte Einheit ist das

**Röntgen**  $= R = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ C/kg}$

Medizinisch wichtig ist der Umrechnungsfaktor

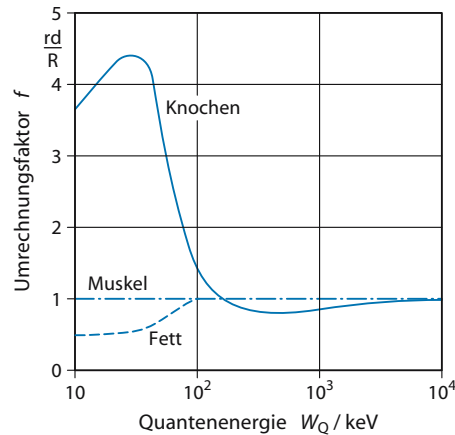
$$f = \frac{\text{Energiedosis im Gewebe}}{\text{Ionendosis in der Luft}}$$

Er beträgt etwa 1,0 rd/R, und das für Quantenenergien von 10 keV bis 10 MeV. Im Bereich der Röntgendiagnose unter 100 keV bekommen Knochen mehr Energiedosis als anders Gewebe (Abb. 9.1) – eben dadurch entsteht der Kontrast im Röntgenbild.

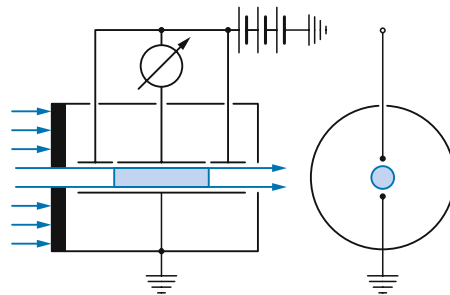
#### Merke

Ionendosis  $I = Q/m$ ,  
Einheiten:  $1 \text{ C/kg} = 1 \text{ As/kg}$ , gemessen in Luft.

■ ■ ■ Mögliche Instrumente der Dosimetrie sind demnach **Ionisationskammern**; sie werden von der Industrie in vielfältigen Formen für vielfältige Zwecke ange-



■ **Abb. 9.1.** Umrechnungsfaktor  $f$  zwischen Ionendosis in Luft und Energiedosis in menschlichem Knochen-, Muskel- und Fettgewebe für Quantenenergien von 10 keV bis 10 MeV



■ **Abb. 9.2.** „Fasskammer“ zur Dosimetrie. Blaues Raster: Messvolumen

boten. Soweit sie als Eichinstrumente der Reproduktion von Dosiseinheiten dienen, ist bei ihrer Konstruktion vor allem auf zwei Punkte zu achten:

Das wirksame **Messvolumen** muss genau bekannt sein. Das erfordert eine dicke Bleibende zur Festlegung des wirksamen Bündelquerschnitts sowie eine Messelektrode definierter Länge. Nahe ihren Enden sorgen zwei Hilfselektroden für ein unverzerrtes Feld, ohne die von ihnen aufgesammelten Ionen zur Messung abzuliefern (Abb. 9.2).

Es dürfen nur solche Ionen in das Messvolumen gelangen, die durch die unmittelbare Wirkung der Strahlung in der Kammerluft entstanden sind, nicht aber von Blenden usw. Alle bestrahlten Metallteile müssen deshalb so weit vom Messvolumen entfernt sein, dass sich die von ihnen ausgehenden Photoelektronen und Streustrahlen nicht störend bemerkbar machen.

### 9.1.3 Aktivität und Dosis

Die Aktivität eines radioaktiven Präparats lässt sich mit Zählrohren relativ leicht messen. Über potentielle Strahlenwirkungen sagt sie freilich nichts aus, denn sie bezieht sich auf den Strahler; die Wirkung hängt dagegen von der Dosis ab, und die bezieht sich auf den Strahlungsempfänger, den Absorber, den Menschen. Wenn Mensch und Strahlenquelle nicht zusammenkommen, führt auch die größte Aktivität zu keiner Dosis (z. B. Sonne).

Trotzdem möchte man umrechnen, denn wer z. B. Grenzwerte für Nahrungsmittel festlegen will, kann dies nur für die allein messbaren Aktivitäten (Einheit Bq) und **spezifischen Aktivitäten** (Einheit Bq/kg) tun und muss von ihnen auf mögliche Strahlenwirkungen schließen. Einfach ist das nicht und schon deswegen unsicher, weil man dazu Kenntnisse über die Essgewohnheiten braucht. Wer sich als Erwachsener täglich nur ein paar Tropfen Milch in den Kaffee gießt, kann eine höhere **Kontamination** für unbedenklich halten, als der Säugling, der sich ausschließlich von Milch ernährt. Weiterhin kann es zunächst nur eine Beziehung zwischen Aktivität und Dosisleistung geben. Man braucht zusätzliche Kenntnisse über die Dauer der Bestrahlung: Wie lange lebt der Strahler (**physikalische Halbwertszeit**), wie lange bleibt er im Körper, bis er ausgeschieden wird (**biologische Halbwertszeit**)? Man muss unterscheiden zwischen **Ganzkörper-** und **Organdosis** (die Schilddrüse sammelt Jod), zwischen Kleinkind und Erwachsenen (der Übergang ist fließend). Letzten Endes kann der **Dosisfaktor D/A** nur abgeschätzt werden. Das geschieht konservativ, nämlich so, dass die Realität vermutlich harmloser ist als die Schätzung – was wiederum Ängste bei dem auflösen kann, der die Schätzung als Realität nimmt.

Von Dosissschätzungen hat man wenig, wenn man die biologischen Folgen nicht kennt. Das ist ein vielschichtiges Problem, aber keines der Physik. Darum sollen an dieser Stelle drei Angaben genügen:

- Die natürliche spezifische Aktivität des Menschen liegt bei etwa 70 Bq/kg, entsprechend 5000 Bq pro Person (Kalium-40, Kohlenstoff-14, Radium-226).

- Bei rascher homogener Ganzkörperbestrahlung gelten 4 Sv als **Letaledosis**, als „LD50“ – ein gesunder Erwachsener überlebt sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 50%.
- Die Bildröhren der Fernsehempfänger sind kleine Röntgenröhren. Wer im normalen Maße fernsieht, sammelt dadurch im Laufe eines Jahres einige Mikrosievert auf. Das muss ihm der Spaß wert sein.

## 9.2 Strahlennutzen, Strahlenschaden

Siehe auch Röntgendiagnose (► Kap. 7.5.6).

### 9.2.1 Radioaktive Tracer

Chemisch unterscheiden sich die verschiedenen Isotope eines Elements nicht voneinander, biochemisch also auch nicht. Ob sie stabil sind oder radioaktiv, am Stoffwechsel des Menschen nehmen sie in der gleichen Weise teil (bis zum Zerfall, versteht sich; danach sind sie ja in neue Elemente übergegangen). Man kann demnach die Wege des Stoffwechsels mit einem Zählrohr verfolgen, wenn man den stabilen Nukliden einer interessanten Substanz instabile zumischt; sie werden radioaktive Tracer genannt.

Zu den Konsequenzen des Stoffwechsels gehört die Ausscheidung. Normalerweise erfolgt sie exponentiell, d. h. mit einer „biologischen“ Halbwertszeit  $T_b$ . Zusätzlich verschwinden Tracerkerne durch radioaktiven Zerfall, also mit der „physikalischen“ Halbwertszeit  $T_{1/2}$ . Vom Zählrohr beobachten lässt sich nur die aus beiden resultierende **effektive Halbwertszeit**  $T_e$ , mit der die Aktivität des Patienten insgesamt abklingt. Die Kehrwerte der beiden vorgegebenen Halbwertszeiten addieren sich zum Kehrwert der effektiven Halbwertszeit:

$$1/T_e = 1/T_{1/2} + 1/T_b.$$

- Herleitung: Die drei Halbwertszeiten  $T_{1/2}$ ,  $T_b$  und  $T_e$  sind proportional zu den Kehrwerten der zugehörigen Zerfallskonstanten  $\lambda$ ,  $\lambda_b$  und  $\lambda_e$ . Ohne den biologischen Abbau nähme die der Aktivität proportiona-

le Anzahl  $N$  der aktiven Kerne im Blut von ihrem Ausgangswert  $N^*$  ab nach der Gleichung

$$N(t) = N^* \cdot \exp(-\lambda \cdot t).$$

Ohne den radioaktiven Zerfall sorgte der biologische Abbau für eine Abnahme von  $N^*$  nach

$$N^*(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda_b \cdot t).$$

Beide Prozesse zusammen liefern

$$N(t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda_b \cdot t - \lambda \cdot t) = N_0 \cdot \exp(-\lambda_e \cdot t).$$

Daraus folgt über

$$\lambda_e = \lambda_b + \lambda$$

das erwartete Ergebnis.

Im radioaktiven Alltag kann die Situation noch komplizierter werden. Anfang der 60er-Jahre hat man mit oberirdischen Kernwaffentests beträchtliche Mengen Cäsium-137 in der Erdatmosphäre verstreut und über die ganze Welt verteilt. Die Substanzmengen reichten, um z. B. in Deutschland das Nuklid auch im Menschen nachzuweisen. Es hat eine physikalische Halbwertszeit von 32 Jahren und eine biologische von ca. 100 Tagen. Aus den Menschen war es aber erst ein paar Jahre nach dem zwischen den Großmächten vereinbarten Teststopp wieder verschwunden. Warum? In diesem Fall wird die zeitbestimmende Größe von den Wurzeln der Gräser geliefert. Das Cs wird zunächst vom Regen aus der Atmosphäre ausgewaschen und in den Boden eingetragen, von den Wurzeln der Weidepflanzen aufgenommen, von den Kühen gefressen und an die Milch weitergegeben. Schließlich kommt es in Butter und Käse auf den Esstisch. Der Pfad ist unterbrochen, wenn späterer, nicht kontaminierter Regen das Cs so tief in den Boden gespült hat, dass die Wurzeln der Gräser nicht mehr herankommen. 1986 hat die Reaktorkatastrophe von Tschernobyl wieder Cs-137 in die Atmosphäre gebracht, diesmal im Vergleich zu den Kernwaffentests relativ wenig und regional begrenzt. In den alten Bundesländern wurde der Fall-out genau gemessen und dokumentiert. Er lag, mit regionalen Unterschieden, in der gleichen Größenordnung wie in den 60er-Jahren.

Radiojod wird nicht nur zur Diagnose eingesetzt, sondern auch zur Therapie einer Schilddrüsenüberfunktion. Dann ist die biologische Strah-

lenwirkung gesuchte Eigenschaft und nicht mehr unangenehme Beigabe. Dadurch ändern sich die Wünsche, die man an das Isotop stellt. Bei der Diagnose sollen die Strahlen außerhalb des Körpers nachgewiesen werden, sie müssen also den Patienten verlassen. Das tun nur Quanten. Am besten wären also reine  $\gamma$ -Strahler; es gibt sie, denn K-Einfang und „isomere Umwandlung“ aus einem angeregten Zustand des Kerns setzen keine Teilchen frei. Weiterhin wäre es für den Patienten am besten, wenn die Aktivität nach Abschluss der Beobachtung abrupt abbräche. Das erlaubt die e-Funktion nicht; sie kann allenfalls eine kurze Halbwertszeit in der Größenordnung Stunde liefern. Allerdings erschwert das die Handhabung: Für den Transport des Präparats vom Hersteller zum Patienten stehen auch nur wenige Stunden zur Verfügung. Demgegenüber wünscht die Therapie vor allem eine Konzentration der Strahlenwirkung auf das betroffene Organ; hier sind die kurzen Reichweiten der  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strahlen interessant und die Quanten lästige Beigabe. Die Halbwertszeit darf gern etliche Tage oder auch Wochen betragen.

### Rechenbeispiel 9.1: Strahlender Patient

► **Aufgabe.** Einem Patienten wird ein Präparat mit dem Isotop  $^{59}\text{Fe}$  (physikalische Halbwertszeit  $T_{1/2} \approx 46$  d) in die Vene gespritzt. Nach 3 Tagen ist die Aktivität des Patienten auf 50% abgefallen. Wie groß sind biologische und effektive Halbwertszeit?

► **Lösung.** Die effektive Halbwertszeit beträgt drei Tage und die physikalische 46 Tage. Also ist die biologische:

$$T_b = \left( \frac{1}{T_e} - \frac{1}{T_{1/2}} \right)^{-1} = 2,82 \text{ Tage.}$$

Zum Glück funktioniert hier die Verdauung besser als die Physik.

## 9.2.2 Strahlentherapie

An die Strahlentherapie mit energiereicher Strahlung möchte man Forderungen stellen, die sie nicht erfüllen kann: Bösartiges Gewebe soll sie eine tödliche Dosis applizieren und das gesunde Gewebe drum herum unbehelligt lassen. Tatsächlich kann man nur versuchen, den Tumor aus ver-

schiedenen Richtungen zu bestrahlen, sodass sich bei ihm alle Dosen kumulieren und das vor und hinter ihm liegende Gewebe immer nur eine Teildosis abbekommt. Das lässt sich mit einer einzigen Strahlungsquelle erreichen, die nach vorgegebenem Bestrahlungsplan um den Patienten herumgeschwenkt wird. Diesen Plan zu erstellen, erfordert nicht nur Sachkenntnis, sondern auch Fingerspitzengefühl. Ohne Computer geht es sowieso nicht. Dem Rechner müssen zunächst einmal die Körperformen des Patienten und die genaue Lage des Tumors mitgeteilt werden; ferner muss er die Schwächungs- und Streukoeffizienten der verwendeten Strahlung kennen, den Öffnungswinkel des Strahlenbündels und die genaue Lage der Quelle. Wenn man ihm dann einen Bestrahlungsplan eingibt, rechnet er die Verteilung der Dosisleistung im Körper des Patienten aus. Anhand der Rechenergebnisse muss man dann versuchen, durch kluge Änderungen und neue Berechnung den Bestrahlungsplan schrittweise zu optimieren. Das kann eventuell auch der Rechner tun.

Bei Bestrahlung von außen wird  $\gamma$ -Strahlung aus Geräten verwendet, die im Prinzip wie eine Röntgenröhre funktionieren. Da man oft sehr hochenergetische Strahlung verwenden möchte, reicht eine normale Röntgenröhre aber nicht. Die Elektronen werden erst in einem Beschleuniger mit hohen Spannungen (üblich sind 0,6 bis 23 Millionen Volt) beschleunigt, bevor sie die Anode treffen.

In manchen Fällen (Lunge, Magen-Darm-Trakt) kann der Tumor über eine Körperöffnung von innen zugänglich sein. Dann kann man über einen Schlauch ein radioaktives Präparat in die Nähe des Tumors bringen und ihn so bestrahlen.

Eine ganz neue vielversprechende Strahlenart sind hochenergetische ionisierte Atome (z. B. Kohlenstoffionen). Diese haben die freundliche Eigenschaft, fast ihre ganze Energie in einer bestimmten Eindringtiefe abzuliefern, die von der Ionenenergie abhängt, also steuerbar ist. Das darüber liegende Gewebe wird dann weitgehend geschont. Der technische Aufwand (ein Ionenbeschleuniger) ist gewaltig und gewaltig teuer. In Heidelberg wird ein solcher Beschleuniger nur für medizinische Zwecke gebaut und soll dann etwa tausend Patienten pro Jahr kurieren können.

Die Möglichkeiten sind aber begrenzt. Oftmals muss man zufrieden sein, wenn wichtige, aber unbeteiligte Organe nur 10% von der Dosis im Tumor abbekommen. Die notwendigen Dosen sind hoch, sie betragen leicht einige Sievert, selbst wenn der Tumor nicht abgetötet, sondern nur in seinem Wachstum gehemmt werden soll.

### 9.2.3 Natürliche Exposition

Auch wenn am Anfang der Welt niemand dabei war: Nach allem, was man heute weiß, muss man davon ausgehen, dass die ionisierende Strahlung von Anfang an dabei war, lange bevor Sonne, Mond und Erde entstanden. Als sich später auf der Erde Leben entwickelte, fand es die Strahlung vor und musste sehen, wie es damit fertig wurde. Kein Zweifel, es ist damit fertig geworden. Es geht nicht um die Strahlung an sich, es geht um die Strahlendosis.

Bei der natürlichen Exposition lassen sich 3 Anteile unterscheiden:

- **Höhenstrahlung:** Sie kommt aus dem Weltraum und hat die Atmosphäre der Erde durchdrungen.
- **Bodenstrahlung** (oder besser **Umgebungsstrahlung**): Zu ihr gehört auch die Strahlung aus den Wänden der Häuser.
- **Eigenstrahlung:** Sie rührt von radioaktiven Atomen her, die naturgemäß im Körper vorhanden sind.

Einen wesentlichen Beitrag zur Eigenstrahlung liefert das bereits erwähnte Kalium-40. Es ist mit etwa 0,001% in allem Kalium der Welt enthalten, also auch in den rund 140 g im Körper des erwachsenen Menschen (70 kg); Kalium ist kein Spurenelement. Wegen der extrem großen Halbwertszeit ( $1,25 \cdot 10^9$  a) liefern die 1,4 mg  $^{40}\text{K}$  eine konstante Dosisleistung von ungefähr 0,17 mSv/a. Zusammen mit anderen Nukliden wie Kohlenstoff-14 und der Allererweltschubstanz Radium-226 bringt es die Eigenstrahlung auf etwa 0,3 mSv/a.

Die Dosisleistung der Höhenstrahlung hängt vor allem davon ab, wie viel Erdatmosphäre man noch über sich hat – dazu aber auch von der geographischen Breite des Aufenthaltsorts und ein

wenig sogar von der Fleckenaktivität der Sonne. Auf Meereshöhe in Mitteleuropa muss man mit 0,3 mSv/a rechnen; 12 km weiter oben im Flugzeug sind es bereits mehr als 15 mSv/a, gut 30 µSv pro Atlantiküberquerung.

Die Bodenstrahlung hängt in hohem Maße von den örtlichen Gegebenheiten ab; sie kann sich schon auf wenige Meter Distanz merklich ändern, in Wohnungen auch von Zimmer zu Zimmer. In der Bundesrepublik schwanken die über größere Flächen gemittelten Messwerte zwischen 0,25 mSv/a und 1,5 mSv/a mit einem Schnitt von ca. 0,4 mSv/a. Anderswo kommen in bewohnten Gegenden auch mehr als 10 mSv/a vor, zuweilen sogar mehr als 100 mSv/a. Dies gilt im Freien. In Wohnungen ist die Dosisleistung höher, weil das Baumaterial radioaktive Beimengungen enthält. Allgemein muss man mit einem Zuschlag von 20–40% zur Strahlung im Freien rechnen. Eine Sonderrolle spielt das Edelgas Radon-222, der erste Folgekern in der Zerfallsreihe des Radium-226 (■ Abb. 8.11). Spurenweise hält sich Radium auch in den Häuserwänden auf. Dort bildet sich also Radon, das mit seiner Halbwertszeit von 3,8 d Zeit genug hat, heraus- und in die Zimmerluft zu diffundieren. Aktive Atome, die vom Menschen ein- und wieder ausgeatmet werden, schaden nichts; Atome aber, die in der Lunge zerfallen, gehören nicht mehr zum Edelgas, bleiben in der Lunge sitzen und spulen dort den Rest der Zerfallsreihe bis zum Blei ab. Es hängt von den Lebensgewohnheiten des Einzelnen ab, welchen Anteil seines Lebens er im Freien, welchen er in Häusern verbringt. Man schätzt sparsam, wenn man für die Umgebungsstrahlung 0,5 mSv/a ansetzt.

Zählt man alles zusammen, so landet man in der Bundesrepublik bei einer natürlichen Strahlenexposition von 1,1 mSv/a im Schnitt. Örtlich werden aber 2 mSv/a deutlich überschritten. Dort, wo der Berg Uran enthält, muss man, auch wenn es nicht abbauwürdig ist, mit weit mehr rechnen. Im Laufe seines Lebens sammelt ein Mitteleuropäer also allemal 100 mSv Ganzkörperbestrahlung auf. Die Natur hält soliden Abstand von den  $\approx 4$  Sv der Letaldosis. Zudem bezieht sich die Letaldosis auf eine kurzzeitige Exposition, während sich die Dosis der Umweltstrahlung auf ein ganzes Leben verteilt und darum vermutlich weni-

ger wirksam ist. Genau lässt sich die Wirkung solcher **Kleindosisstrahlung** auf den Menschen nicht feststellen, denn dazu müsste man Versuchspersonen jahrzehntelang strahlensicher hinter Beton und Blei von der Umgebungsstrahlung abschirmen. Die einfachste Annahme postuliert einen linearen Zusammenhang zwischen Dosis und Wirkung unabhängig von der Zeit, als sei der Organismus grundsätzlich nicht in der Lage, auch den geringsten Strahlenschaden zu reparieren. Daraus folgt die Aussage: „Jede noch so kleine Dosis schadet, alle Schäden akkumulieren sich.“ Dies ist eine sog. **konservative** Annahme, kein empirischer Befund.

### 9.2.4 Zivilisationsbedingte Exposition

Die einzige Sparte menschlicher Tätigkeit, die professionell Äquivalentdosen in vergleichbarem Umfang wie die Natur an die Bevölkerung verteilt, ist die Medizin und hier speziell die Röntgendiagnose. Das mag überraschen, weil die Expositionszeiten bei Röntgenaufnahmen allenfalls nach Sekunden bemessen werden, die natürliche Bestrahlung hingegen Tag und Nacht andauert. Röntgenröhren sind aber nun einmal unglaublich intensive Quellen ionisierender Strahlung. Das Millisievert, für das die Natur rund ein Jahr braucht, liefert sie leicht im zehnmillionsten Teil dieser Zeit, in einer Sekunde ab ( $1 \text{ a} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$ ). Generell muss man je nach Organ mit Dosen zwischen 0,1 mSv und 10 mSv pro Aufnahme rechnen.

So ganz gering sind die Diagnosedosen also nicht. Allerdings handelt es sich um **Organdosen** und nicht, wie bei der natürlichen Exposition, um **Ganzkörperdosen**. Wenn man vergleichen will, braucht man Zahlenwerte für den Risikoanteil des einzelnen Körperteils am ganzen Körper. Es kann sich nur um grobe Schätzwerte handeln. Der Verlust einer Hand ist nicht tödlich; die Gonadendosis betrifft erst die nächste Generation. Zur Umrechnung von Organdosis auf **Ganzkörperäquivalent** benutzt man die **Wichtungsfaktoren** der ■ Tabelle 9.1.

Wenn man jetzt alle in einem Jahr in der Bundesrepublik diagnostisch applizierten Organdosen abschätzt, auf Ganzkörperäquivalent um-



■ **Tabelle 9.1** Wichtungsfaktoren für das Ganzkörper-äquivalent

Organ	Wichtungsfaktor [%]
Brust	15
rotes Knochenmark	12
Lunge	12
Schilddrüse	3
Knochenoberfläche	3
Restkörper insgesamt	30
genetisches Risiko der Gonadendosis	25

rechnet, zusammenzählt und durch die Bevölkerungszahl dividiert, kommt man in die Nähe von 0,5 mSv, freilich mit einer Unsicherheit, die gut und gerne  $\pm 50\%$  betragen kann. So sehr gut werden Diagnosedosen nicht dokumentiert, zudem verteilen sie sich extrem inhomogen auf die Bevölkerung. Seit die Röntgenreihenuntersuchung zur Früherkennung der Lungentuberkulose nicht mehr Pflicht ist, braucht sich so mancher jahrelang keiner Durchleuchtung zu unterziehen. Andere bekommen dafür umso mehr ab. Immerhin muss man festhalten: Die medizinische Röntgen-diagnose belastet den Mitteleuropäer im Mittel seines Lebens mit ungefähr 0,5 mSv/a.

Die Strahlentherapie setzt im Einzelfall weit höhere Dosen ein als die Diagnose; schließlich will sie wucherndes Gewebe abtöten oder doch zumindest am Wachstum hindern. Dass sie dazu mit Millisievert nicht auskommt, sondern ganze Sievert braucht, kann nicht verwundern. Für die mittlere Strahlenbelastung der Gesamtbevölkerung spielt sie trotzdem keine große Rolle, weil nur relativ wenige Einzelpersonen betroffen sind. Darum trägt sie schätzungsweise mit weniger als 0,01 mSv/a zur gesamten Strahlendosis bei. Den gleichen Schätzwert ordnet man der Nuklearmedizin zu.

Ebenfalls maximal 0,01 mSv/a werden für die Kernkraftwerke angesetzt (solange sie ordnungsgemäß arbeiten!), maximal das Doppelte für den Fall-out längst vergessener Kernwaffentests in der

offenen Atmosphäre und das Gleiche noch einmal für andere Anwendungen radioaktiver Stoffe und ionisierender Strahlen in Forschung, Technik und Haushalt. Damit bekommt man als Summe der zivilisationsbedingten Strahlenexposition in der Bundesrepublik Deutschland ca. 0,6 mSv/a heraus.

### 9.2.5 Strahlenschutz

Es hat keinen Sinn, im Zelt zu überwintern, um der Strahlung der Zimmerwände zu entgehen, wenn man sich dabei eine Lungenentzündung holt. Auch beim Strahlenschutz geht es um das Abschätzen von Risiken. Dies vermag der Einzelne freilich nicht immer für sich allein und in freier Entscheidung zu tun, weil er sich ja regionalen und vor allem weltweiten Expositionen nicht entziehen kann. Regional sind die Regierungen gefordert, international müssen Abkommen getroffen werden. Eine Richtschnur kann die natürliche Exposition liefern, der sich ja auch niemand entziehen kann und die mit Sicherheit nicht lebensgefährlich ist. Wenn man sie mit den runden Werten von 1 mSv/a und 100 mSv für ein volles Menschenleben ansetzt, hat man gewiss nicht zu hoch gegriffen. Das Doppelte und Dreifache kommt in der Natur ebenfalls vor, auch mal das Hundertfache, und das alles ohne erfassbare Gesundheitsschäden bei den Menschen, die dort wohnen.

Die deutsche **Strahlenschutzverordnung** verlangt Aufmerksamkeit, sobald die Möglichkeit besteht, dass jemand im Laufe eines Jahres mehr als 1,0 mSv ungewollt aus künstlichen Strahlenquellen aufnimmt. Bereiche, in denen dies geschehen kann, müssen als „Strahlenschutzbereiche“ gekennzeichnet sein. Wer dort arbeitet, gilt als „Angestellter strahlenexponierter Berufe“ und ist verpflichtet, seine Personendosis laufend zu kontrollieren, im Allgemeinen durch eine Plakette am Rockaufschlag, die einen strahlenempfindlichen Film enthält. Er wird von einer staatlichen Stelle in regelmäßigen Abständen ausgetauscht und ausgewertet. Wer im Laufe eines Jahres mehr als 50 mSv aufgenommen hat, muss seinen Arbeitsplatz wechseln. Dies muss auch, wer es in 13 aufeinander folgenden Wochen als Frau auf 15 mSv

und als Mann auf 30 mSv gebracht hat. Innerhalb dieser Grenzen für die Ganzkörperdosis dürfen den Extremitäten (Füße, Knöchel, Hände und Unterarme) höhere Teildosen zugemutet werden: maximal 0,75 Sv im Laufe eines Jahres und maximal 0,40 Sv im Laufe eines Vierteljahres. Wer, um Komplikationen zu vermeiden, die Plakette nicht regelmäßig trägt, muss das selbst verantworten.

Gegen unnötige Strahlenexpositionen in der Medizin gibt es drei wirksame Maßnahmen zur Vorbeugung:

- **Weggehen** – das quadratische Abstandsgesetz bietet immer noch den zuverlässigsten Strahlenschutz.
- **Abschirmen** – z. B. durch eine Bleischürze. Die Bedienungspulte von Röntgenanlagen befinden sich in einem strahlendichten Nebenraum, dessen Tür während der Bestrahlung geschlossen sein muss.
- **Dosis reduzieren** – d. h. nicht mehr einstrahlen, als für den medizinischen Zweck absolut unerlässlich ist.

In Kürze		
	Formel	Größe [Einheit]
<b>Dosis</b>		
Energiedosis $D$	$D = \frac{W}{m}$	$D \left[ \frac{\text{J}}{\text{kg}} = \text{Gy, Gray} \right]$ $W$ : absorbierte Energie [J] $m$ : Masse des Absorbers [kg]
Äquivalenzdosis	bewertete Energiedosis: $D_q = q \cdot D$ $q$ : Bewertungsfaktor (abhängig von den Teilchen in der Strahlung)	$D_q$ [Sv, Sievert, 1Sv = 100 rem] Äquivalenzdosis: bewertete Energiedosis $D$
<b>Abschwächung</b>		
Im Vakuum bei Punktquellen gilt auch für radioaktive Strahlen das quadratische Abstandsgesetz	$D \sim \frac{1}{r^2}$	$r$ : Abstand von der Punktquelle [m]
In absorbierendem Material (Blei, Beton) gilt exponentielle Abschwächung, charakterisiert durch eine Halbwertsdicke	$D = D_0 \cdot e^{-\frac{d}{d_{1/2}}}$	$D_0$ : Anfangsdosis [Gy] $d$ : Eindringtiefe [m] $d_{1/2}$ : Halbwertsdicke [m]

## Übungsfragen

(• leicht; •• mittel; ••• schwer)

- 1. Wie ist die Energiedosis definiert?
- 2. Welcher mittleren Äquivalentdosisleistung ist der durchschnittliche Mitteleuropäer durch die natürliche Umgebungsstrahlung ungefähr ausgesetzt?
- 3. Welcher mittleren Äquivalentdosisleistung darf sich ein Mensch höchstens aussetzen, wenn er im Laufe seines Lebens nicht mehr als 1% der Letaldosis aufnehmen will?

# Anhang

A1      Antworten    – 332

A2      Physikalische Formelsammlung    – 345

A3      Sachverzeichnis    –353

# Antworten

## 1 Grundbegriffe

1.  $1a = 365 d = 365 \cdot 24 \cdot 60 \text{ min} = 525600 \text{ min};$   
 $1 \text{ Mikrojahrhundert} = 100 \cdot \mu a = 10^{-4} a \approx 53 \text{ min}.$

2.  $r = d/2 = 10 \text{ cm};$  Halbkugel:  
 $V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \approx 2000 \text{ cm}^3 = 2 \text{ Liter}$

3. Maßstab: 80 Skt. = 1,00 mm  
 Mit Wimpern: 81 Skt. = 1,01 mm  
 Körper 72 Skt. = 0,90 mm

4. Oberfläche eines Zylindermantels:  
 $A_M = 2\pi \cdot r \cdot h;$   
 Oberfläche einer Endscheibe:  $A_K = \pi r^2;$   
 Gesamte Oberfläche:  
 $A_g = A_M + 2 \cdot A_K = 2\pi \cdot r(h + r)$

5. Die Molmassen  $M$  sind laut Anhang:  
 $M(\text{H}) = 1 \text{ g/mol}; M(\text{H}_2) = 2 \text{ g/mol} \Rightarrow 3,5 \text{ mol}$   
 $\text{H}_2 = 7 \text{ g}$   
 $M(\text{C}) = 12 \text{ g/mol}; M(\text{O}) = 16 \text{ g/mol}$   
 $M(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}) = (24 + 6 + 16) \text{ g/mol} = 46 \text{ g/mol}$   
 Für die Masse eines einzelnen Moleküls gilt dann:  

$$m_M = \frac{M}{N_A} = \frac{46 \text{ g/mol}}{6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}} = 7,64 \cdot 10^{-23} \text{ g}.$$

6. Die Molmasse von Wasser ist:  
 $M(\text{H}_2\text{O}) = (2 + 16) \text{ g/mol} = 18 \text{ g/mol}.$   
 Andererseits ist die Dichte von Wasser  
 $\rho = 1 \text{ g/cm}^3.$   
 Also nehmen ein Mol Wasser  $18 \text{ cm}^3$  ein.

7. Die an den Rüben haftende Erde verursacht einen Fehler, der näherungsweise proportional zum Gesamtgewicht sein dürfte und darum am besten als relativer Fehler angegeben wird. Bei einer Messwiederholung verrät er sich nicht: systematischer Fehler.

8. In die Flächenberechnung geht der Radius quadratisch ein, deswegen ist nach Regel 2 der Fehlerfortpflanzung zweimal die Unsicherheit

des Radius anzusetzen: relative Unsicherheit der Fläche: 1%

9. Leistung ist Strom mal Spannung; Die relativen Unsicherheiten sind zu multiplizieren.  
 Also: 10% (Strom) plus 5% (Spannung) macht 15%.

10. Die Dauer des Vorgangs ist  $t_2 - t_1$ . Hier addieren sich die absoluten Unsicherheiten.  
 Die Dauer ist also auf zwei Zehntel Sekunden genau bekannt.

11. Vektorprodukt: Vektoren parallel:  $\sin 0^\circ = 0$   
 Skalarprodukt: Vektoren senkrecht:  
 $\cos 90^\circ = 0$

12. Exponentielles Wachstum bringt in gleichen Zeitspannen gleiche Faktoren. Die Weltbevölkerung wuchs in den ersten 50 Jahren um den Faktor  $1,61/1,17 = 1,38$ , in den zweiten 50 Jahren um  $2,50/1,61 = 1,55$ , also schneller als nur exponentiell.

13. Ja. In einfach logarithmischer Darstellung fällt die Zahl der Tropfen längs einer Geraden ab, und zwar um den Faktor  $Z = 100$  in  $t = 50 \text{ s}$ . Halbwertszeit

$$T_{1/2} = t \cdot \frac{\lg 2}{\lg Z} = 7,5 \text{ s}.$$

## 2 Mechanik des starren Körpers

1.  $v(t) = v_0 - a \cdot t \Rightarrow t = \frac{1 \text{ m/s}}{1 \text{ m/s}^2} = 1 \text{ s}$

2. Zunächst sollte man die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde umrechnen um dann die Beschleunigung in Meter pro Sekunde zum Quadrat ausrechnen zu können. Dazu muss man die Maßzahl durch 3,6 teilen:

$$v = \frac{100 \text{ m}}{3,6 \text{ s}} = 27,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Die Beschleunigung ist dann:

$$a = \frac{27,8 \text{ m/s}}{6 \text{ s}} = 4,63 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

also knapp halb so groß wie die Fallbeschleunigung.

3.  $s = \frac{g}{2} t^2 = 19,62 \text{ m}.$
4.  $50 \text{ km/h} = 13,89 \text{ m/s} = g \cdot t \Rightarrow \text{Fallzeit } t = 1,42 \text{ s};$   
 Höhe  $h = \frac{g}{2} t^2 = 9,83 \text{ m}.$

Das entspricht etwa einem Fall aus dem dritten Stock.

5. Fallhöhe  $\Delta h = 1,5 \text{ m}$ ; Bremsweg  $\Delta s = 0,005 \text{ m}$ . Die Fallzeit sei  $\Delta t$ . Die maximale Geschwindigkeit bei konstanter Beschleunigung:  
 $v^2 = g^2 \cdot \Delta t^2 = g^2 \cdot 2 \cdot \Delta h / g = 2g \cdot \Delta h = 2a \cdot \Delta s$   
 $\Rightarrow \frac{a}{g} = \frac{\Delta h}{\Delta s} = 300;$   
 Die Beschleunigung des Schädels ist gewaltig:  
 $a = 300 \cdot g!$

6. Er muss senkrecht herübersteuern und sich abtreiben lassen. Dann ist die Geschwindigkeitskomponente quer zum Fluss maximal.

7. Für die Zuggeschwindigkeit  $v$  gilt:

$$\tan 60^\circ = \frac{v}{8 \text{ m/s}},$$

also  $v = 13,9 = 50 \text{ km/h}.$

8. Die Fallzeit  $t_1$  aus  $1,5 \text{ m}$  Höhe ist:

$$1,5 \text{ m} = \frac{g}{2} t_1^2 \Rightarrow t_1 = 0,55 \text{ s}.$$

Das ist gerade die halbe Sprungzeit, den Aufsteigen und Fallen im Sprung sind symmetrisch.  $2 \cdot t_1$  ist die gesamte Sprungzeit, in der das Känguru  $6 \text{ m}$  weit kommt. Damit ist die Horizontalgeschwindigkeit:

$$v_{0x} = \frac{6 \text{ m}}{2 \cdot t_1} = 5,45 \text{ m/s}.$$

9. „70 Kilo“ bedeutet:  $m = 70 \text{ kg}$ ;  
 $F_G = m \cdot g = 686,7 \text{ N}.$

10. Im Buchdruck beträgt die Höhe  $h$  der Stufe etwa  $11 \text{ mm}$  (Gegenkathete) und der Abstand

$s$  zwischen den Auflagepunkten der Bohle  $43 \text{ mm}$  (Hypotenuse).

$$\frac{F_1}{F_G} = \sin \alpha = \frac{h}{s} = 0,26.$$

Die Krafteinsparung beträgt also 74%.

11. a)  $F = 1 \frac{1}{4} F_1 = 1,25 \cdot F_1$   
 b) weniger stark, denn wenn zwei Vektoren nicht parallel liegen, ist der Betrag des Summenvektors kleiner als die Summe der Beträge der einzelnen Vektoren.

12. Die Waage zeigt eine höhere als ihre tatsächliche Masse an, da die nach unten gerichtete Bewegung ihres Körpers abgebremst werden muss und die dafür notwendige Kraft zusätzlich zur Gewichtskraft von der Personenwaage aufzubringen ist.

13. Das schwere Kind setzt sich etwa auf den halben Abstand wie das leichte, damit in etwa Gleichgewicht herrscht (Hebelgesetz).

14. Arbeit:  $\Delta W = m \cdot g \cdot 16 \cdot 0,17 \text{ m} = 1,87 \text{ kJ}$ ;  
 Leistung  $P = 500 \text{ W} = 0,5 \text{ kJ/s}$ ;

$$\Delta t = \Delta W / P = 3,8 \text{ s}.$$

15. Das hängt von Ihrer Masse (sagen wir  $70 \text{ kg}$ ) und der Höhe des Stockwerks (sagen wir  $3 \text{ m}$ ) ab:  $W = m \cdot g \cdot h \approx 2100 \text{ J}$

16.  $Q = \frac{m}{2} v^2 = 0,5 \text{ J}$

17. Die kinetische Energie von Jane wird vollständig in potentielle Energie umgewandelt:

$$\frac{m}{2} v^2 = m \cdot g \cdot h \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = 1,6 \text{ m}.$$

Das funktioniert immer, solange die Liane nicht kürzer als  $0,8 \text{ m}$  ist.

18. Es ist egal, denn in beiden Fällen bleibt das Auto stehen und die ganze kinetische Energie muss umgesetzt werden.

19. Unmittelbar nach dem Stoß bewegen sich beide Autos mit halber Geschwindigkeit weiter (doppelte Masse), also mit der halben kineti-

schen Energie. Nur die Hälfte der kinetischen Energie des auffahrenden Autos wird umgewandelt.

Da beide Autos stehen bleiben, geht die ganze Energie ins Blech.

20. Ist die Beschleunigung linear, so reagiert die Balkenwaage gar nicht, da die Trägheitskräfte gleicher Massen immer gleich sind. Rotiert das Bezugssystem, so hängen die Trägheitskräfte auch von der Lage ab und Waage wird wahrscheinlich reagieren.

21. Die Armbanduhr schwenkt immer in Richtung der Resultierenden aus Fallbeschleunigung und Flugzeugbeschleunigung  $a_B$ , also

$$\tan 25^\circ = \frac{a_F}{g} \Rightarrow a_F = 4,57 \text{ m/s}^2.$$

Startgeschwindigkeit  $v = a_F \cdot 18 \text{ s} = 82,3 \text{ m/s}$   
 $= 300 \text{ km/h}$ .

22. Umlaufzeit  $T = 1 \text{ a} = 3,154 \cdot 10^7 \text{ s}$ ;  
 Bahnradius  $r = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$ .  
 Umlauffrequenz  $f = 1/T = 3,17 \cdot 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ ;  
 Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi \cdot f = 1,99 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ ;  
 Bahngeschwindigkeit  
 $v = 2\pi \cdot r \cdot f = 29,7 \text{ km/s} = 107000 \text{ km/h}$ .

23.  $a_z = \omega^2 \cdot r$ , die Beschleunigung vervierfacht sich also.

### 3 Mechanik deformierbarer Körper

1. Die Zugspannung ist  $10^7 \text{ N/m}^2$ .
2.  $E =$  Steigung der Hooke'schen Geraden =  
 $\frac{7,5 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2}{1 \cdot 10^{-3}} = 7,5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ ,  
 denn die Gerade geht z. B. durch den Punkt mit  $\sigma = 7,5 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$  und  $\Delta l/l = 10^{-3}$ .

3. Zugkraft  $F$ :

$$\frac{F}{\pi \cdot (0,01 \text{ m})^2} = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \cdot \frac{0,003 \text{ m}}{1,6 \text{ m}}$$

$$\Rightarrow F = 1,18 \cdot 10^5 \text{ N}.$$

4. Druck  $p = \frac{F}{A}$ ;  $F = 15 \text{ N}$ .  
 Fläche

$$A = \frac{\Delta V}{\Delta s} = \frac{1 \text{ ml}}{15 \text{ mm}} = 6,67 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2.$$

$$p = 2,25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

5. Zum Luftdruck kommt noch mal etwa 1/10 Luftdruck dazu:  $1,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ .

6. Auftriebskraft = Gewichtskraft:

$V_{\text{unter}} \cdot 1025 \text{ kg/m}^3 \cdot g = V_{\text{gesamt}} \cdot 917 \text{ kg/m}^3 \cdot g$ .  
 Also verhält sich der Volumenteil unter Wasser zum Gesamtvolumen wie die Dichte des Eises zur Dichte des Wassers:

$$\frac{V_{\text{unter}}}{V_{\text{gesamt}}} = 0,895.$$

Also ist ein Anteil von 0,105 oder 10,5% über Wasser.

7. Die normale Gewichtskraft auf den Granitstein ist:

$$F_G = V \cdot 2700 \text{ kg/m}^3 \cdot g = 3 \text{ kg} \cdot g = 29,4 \text{ N}$$

$$\Rightarrow V = 1111 \text{ cm}^3.$$

Die Auftriebskraft für den Granitstein im beschleunigten Eimer:

$$F_A = V \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot (g + 3,5 \cdot g) = 49 \text{ N}.$$

Sie ist also höher als die normale Gewichtskraft. Schwimmen wird der Stein trotzdem nicht, denn er muss ja auch nach oben beschleunigt werden und hat eine entsprechend größere scheinbare Gewichtskraft.

8. Oberflächenspannung

$$\sigma = \frac{F_\sigma}{2 \cdot 2\pi \cdot r} = \frac{F - m \cdot g}{2\pi \cdot d} = \frac{(53 - 30) \text{ mN}}{2\pi \cdot 0,05 \text{ m}}$$

$$= 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}.$$

Dass dieser berechnete Wert dem Tabellenwert für destilliertes Wasser entspricht, ist eher Zufall. Eigentlich muss noch berücksichtigt werden, dass auch noch ein Wasser-meniskus gehoben wird, dessen Gewichtskraft herauszukorrigieren wäre. Andererseits wurde die Messung mit normalem Leitungswasser gemacht, das aufgrund von Verunreinigungen eine deutlich verminderte Oberflächenspannung hat. Beide Effekte haben sich in

■ Abb. 3.28 in etwa kompensiert.

9. Sechs mal der Fußumfang ist  
 $s = 6 \cdot 2\pi \cdot 3 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .  
 Diese Zahl multipliziert mit der Oberflächenspannung ergibt die Tragfähigkeit:  
 $F = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 70 \text{ mN/m} = 7,7 \cdot 10^{-5} \text{ N}$ .  
 Das reicht nicht annähernd, um die Gewichtskraft von etwa  $0,16 \text{ N}$  zu tragen. Das Insekt ist zu fett.

10. Volumenstromstärke

$$I = A \cdot v$$

$$\Rightarrow v = \frac{I}{A} = \frac{0,84 \text{ m}^3/\text{s}}{\pi(0,184 \text{ m})^2} = 7,9 \text{ m/s}.$$

11. Volumenstromstärke durch Druckdifferenz.

12. Um einen Faktor  $2^4 = 16$ .

13. Wenn das Rohr die Querschnittsfläche  $A$  hat, haben wir eine resultierende Kraft auf das Flüssigkeitsvolumen im Rohr von  $\Delta F = A \cdot \Delta p$ . Mechanische Leistung erhalten wir, wenn wir diese Kraft mit der Geschwindigkeit  $v = I/A$  der Flüssigkeit multiplizieren:  
 $P = v \cdot \Delta F = v \cdot A \cdot \Delta p = I \cdot \Delta p$ .

14. Die vom Herzen zu erbringende Leistung ist:

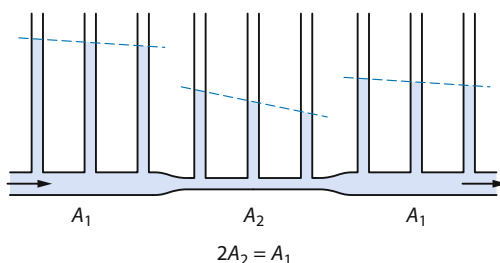
$$P = \frac{\text{Volumenarbeit}}{\text{Zeit}} = \frac{p \cdot dV}{dt} = p \cdot \text{Volumenstrom } I.$$

Der Volumenstrom ist

$$I = 6 \text{ l/min} = 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Einsetzen liefert:  $P = 1,73 \text{ Pa} \cdot \text{m}^3/\text{s} = 1,73 \text{ Watt}$ . Das ist so viel, wie ein Taschenlampenbirnchen braucht.

- 15.



16. Der Volumenstrom  $I = A \cdot v$  muss in der Düse der gleiche sein wie im Rohr. Deshalb verhalten sich die Geschwindigkeiten zueinander umgekehrt wie die Querschnittsflächen, hier wie 100:1. Die Geschwindigkeit in der Düse ist also  $65 \text{ m/s}$ . Da wir Reibungsfreiheit angenommen haben, muss die Pumpe nur die Beschleunigungsarbeit liefern:

$$I \cdot \Delta p = I \cdot \left( \frac{1}{2} \rho \cdot (65 \text{ m/s})^2 - \frac{1}{2} \rho \cdot (6,5 \text{ m/s})^2 \right).$$

Anders gesagt: die Pumpe muss den Atmosphärendruck plus die Differenz im Staudruck liefern:

$$p = 10^5 \text{ Pa} + \frac{1}{2} \rho ((65 \text{ m/s})^2 - (6,5 \text{ m/s})^2)$$

$$\approx 10^5 \text{ Pa} + \frac{1}{2} \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot (65 \text{ m/s})^2$$

$$= 2,2 \cdot 10^6 \text{ Pa}.$$

Das ist etwa der 20fache Atmosphärendruck.

#### 4 Mechanische Schwingungen und Wellen

1. Die Auslenkung bei  $t = 0$ :

$$x(t=0) = A_0 \cdot \sin(\pi/4)$$

$$= 5 \text{ cm} \cdot 0,707 = 3,54 \text{ cm}.$$

Die Geschwindigkeit:

$$v(t=0) = A_0 \cdot \omega \cdot \cos(\pi/4)$$

$$= A_0 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \cos(\pi/4) = 5,55 \text{ cm/s}.$$

Maximale Beschleunigung:

$$a_{\max} = A_0 \cdot \omega^2 = 12,3 \text{ cm/s}^2.$$

2.  $T = 2 \text{ s (!)}$ ;  $l = g \cdot \frac{T^2}{(2\pi)^2} = 0,99 \text{ m}.$

3.  $2\pi \cdot 4 \text{ Hz} = \sqrt{\frac{D}{1,5 \cdot 10^{-4} \text{ kg}}} \Rightarrow D = 0,095 \text{ N/m}.$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{0,5 \text{ g}}} = 2,2 \text{ Hz}.$$

4. Die maximal auftretende Geschwindigkeit ist  $v = A_0 \cdot \omega$ . Die Schwingungsenergie ist gleich der maximal auftretenden kinetischen Energie beim Durchgang durch die Ruhelage und also proportional zu  $A_0^2$ . Zehnfache Energie bedeutet also  $\sqrt{10}$ fache Amplitude. Man kann genauso auch mit der maximalen potentiellen



Energie bei maximaler Dehnung der Feder argumentieren.

5.  $c \approx 1,5 \text{ km/s}$  (siehe Anhang).

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{1500 \text{ m/s}}{10^6 \text{ s}^{-1}} = 1,5 \text{ mm.}$$

6. Aufgrund der sehr unterschiedlichen Schallgeschwindigkeit in Wasser und in Luft würde sonst schon ein geringer Luftzwischenraum zu starken Reflexionen des Ultraschalls führen.

7. Auch Licht ist eine Welle und es gilt das quadratische Abstandsgesetz: Verdoppelt sich der Abstand, geht die Intensität auf ein Viertel:  $0,25 \text{ W/m}^2$

8. Er hört die 65fache Intensität; zu den 65 Phon addieren sich  $10 \cdot \lg 65 = 18,1 \text{ dB}$ ; gibt zusammen  $83,1 \text{ dB}$

9.  $0 \text{ dB}$  bedeutet, dass der Pegel gleich irgendeinem Referenzpegel ist. Addiere ich den gleichen Pegel noch mal dazu, bekomme ich den doppelten Pegel, und das ergibt  $10 \cdot \lg 2 = 3 \text{ dB}$ :  $0 \text{ dB} + 0 \text{ dB} = 3 \text{ dB}$

10. Es bildet sich eine stehende Welle in Grundschwingung. Das heißt, dass der Durchmesser der Tasse in etwa die halbe Wellenlänge ist. Also:  $\lambda = 0,16 \text{ m}$ ,  $f = 1 \text{ Hz}$ , daraus folgt  $c = \lambda \cdot f = 0,16 \text{ m/s}$ .

11. Sie wollen die Tonhöhen jeweils um  $2 \text{ Hz}$  herauf bzw. herabsetzen:

$$2 \text{ Hz} = 442 \text{ Hz} \cdot \frac{v}{330 \text{ m/s}} \Rightarrow v = 1,5 \text{ m/s.}$$

Sie müssen in Richtung des tieferen Tons gehen.

## 5 Wärmelehre

1. Umfang der Erde:  $2\pi \cdot 6,38 \cdot 10^6 \text{ m} = 4,0 \cdot 10^7 \text{ m}$ . Verlängerung des Stahlbandes bei  $\Delta T = 10 \text{ K}$ :  $\Delta l = \alpha_{\text{Fe}} \cdot \Delta T \cdot 4,0 \cdot 10^7 \text{ m} = 4800 \text{ m}$ . Das gibt eine Radiusänderung von

$$\Delta r = \frac{4800 \text{ m}}{2\pi} = 764 \text{ m.}$$

So hoch würde das Stahlband schweben.

2. Die Temperatur ist proportional zur kinetischen Energie der Moleküle, also proportional zum Geschwindigkeitsquadrat. Doppelte Geschwindigkeit heißt viermal höhere Temperatur (absolut).  $0^\circ \text{C}$  entspricht  $273 \text{ K}$ .  $4 \cdot 273 \text{ K} = 1092 \text{ K}$  entspricht  $819^\circ \text{C}$ .

3. Der Druck verdoppelt sich. Nach Gasgesetz ist der Druck proportional zur absoluten Temperatur und diese wiederum ist definitionsgemäß proportional zur mittleren kinetischen Energie der Schwerpunktbewegung der Atome.

4. Das Molvolumen ist  $22,4 \text{ l}$ . Ein Mol sind  $6,02 \cdot 10^{23}$  Moleküle.


Mittlere Molekülmasse:

$$m = \frac{1,293 \text{ g} \cdot 22,4}{6,02 \cdot 10^{23}} = 4,81 \cdot 10^{-23} \text{ g.}$$

5. Bei  $10^5 \text{ Pa}$  gehen in  $22,4 \text{ l}$  ein Mol Gas. In einen Kubikzentimeter gehen dann

$$\frac{0,001 \text{ l}}{22,4 \text{ l}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} = 2,7 \cdot 10^{19}$$

Moleküle. Ist der Druck 14 Größenordnungen kleiner, so ist es auch die Zahl der Moleküle:  $N \text{ pro cm}^3 = 270000$ . Immer noch ganz schön viele.

6. Aus  Abb. 5.18 kann man ablesen  $p \approx 0,7 \cdot 10^5 \text{ hPa}$ . Das ist in etwa der Luftdruck auf einem  $3000 \text{ m}$  hohen Berg.

7. Sättigungsdampfdruck bei  $20^\circ \text{C}$ :  $23,4 \text{ hPa}$ ;  $52\%$  davon:  $12,2 \text{ hPa}$ . An der Fensteroberfläche ist dies die Sättigungsdampfdichte, also ist ihre Temperatur höchstens  $10^\circ \text{C}$ .

8. Nach idealem Gasgesetz ist der Druck proportional zur absoluten Temperatur, steigt also bei uns um ca.  $10\%$  auf  $1,65 \text{ bar}$ .

9.  $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ , also geht die absolute Temperatur auf ein viertel des ursprünglichen Wertes.

10.  $p \cdot V$  ist bei konstanter Temperatur proportional zur Gasmenge, also sind noch  $100\% \cdot 5 \text{ bar} / 28 \text{ bar} = 18\%$  in der Flasche. Das entnommene Gas füllt ein Volumen von  $50 \text{ l} \cdot 23 = 1150 \text{ l}$ . Ein Ballon hat ein Volumen von  $\frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = 14,1 \text{ l}$ . Macht etwa 80 Ballons.

11. Der Druck sinkt auf

$$p_2 = \frac{280 \text{ K}}{293 \text{ K}} \cdot 1 \text{ bar} = 0,9556 \text{ bar}.$$

Der Differenzdruck zwischen Innen und außen ist dann:  $\Delta p = 4,4 \cdot 10^3 \text{ Pa}$ . Kraft auf die Tür  $F = \Delta p \cdot 0,32 \text{ m}^2 = 1420 \text{ N}$ . Da muss man sich schon heftig stemmen. Bei konstantem Druck passt bei  $7^\circ \text{C}$

$$\frac{293 \text{ K}}{280 \text{ K}} = 1,0464$$

mal mehr Luft in den Schrank als bei  $20^\circ \text{C}$ . Die Volumendifferenz ist  $\Delta V = 0,0464 \cdot 155 \text{ l} = 7,2 \text{ l}$ .

12.  $\Delta t = \frac{c(\text{H}_2\text{O}) \cdot 250 \text{ g} \cdot 30 \text{ K}}{350 \text{ W}} = 90 \text{ s}.$

13. Es stellt sich eine Temperatur von  $66,6^\circ \text{C}$  ein.

14. Die Wärmekapazität ist:  $\frac{2000 \text{ J}}{20 \text{ K}} = 100 \frac{\text{J}}{\text{K}}.$

15. Das Bier muss auf  $37^\circ \text{C}$  erwärmt werden. Pro Gramm benötigte Energie  $W = c(\text{H}_2\text{O}) \cdot 29 \text{ K} \cdot 1 \text{ g} = 122 \text{ J}$ . Das sind etwa  $6,5\%$  von  $1880 \text{ J}$ .

16. Leistung  $P_0 = 1,6 \text{ W}$ ; Nutzeffekt  $\eta = 0,25$ ; benötigte Energiezufuhr:  $P = P_0 / \eta = 6,4 \text{ W}$ . Heizwert Glukose  $H_G = 17 \text{ kJ/g}$ ; benötigter Massenstrom der Glukose:

$$\Delta m / \Delta t = \frac{P}{H_G} = 0,38 \text{ mg/s}.$$

Konzentration der Glukose im Blut:  $c = 1 \text{ mg/ml} = 1 \text{ mg/cm}^3$ ; erforderlicher Blutstrom:  $I = 0,38 \text{ cm}^3/\text{s}$ .

Dicke der Membran:  $\Delta x = 0,01 \text{ cm}$ ; Konzentrationsgradient der Glukose:

$$c' = \frac{c}{\Delta x} = 100 \text{ mg/cm}^4.$$

Diffusionskonstante der Glukose:

$D \approx 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$ ; Diffusionsstromdichte

$$j = D \cdot c' = 10^{-4} \frac{\text{mg}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}};$$

benötigte Fläche:

$$A = \frac{\Delta m / \Delta t}{j} = 4000 \text{ cm}^2 = 0,4 \text{ m}^2.$$

17. Wassermoleküle treten in die Salzlösung, um die Konzentration des Salzes zu vermindern. Dort steigt also der Wasserspiegel.

18. Van't-Hoff-Gleichung:

$$\Delta p = 0,2 \text{ mol/l} \cdot R \cdot 293 \text{ K} = 487 \text{ Pa}.$$

Beachte, die absolute Temperatur einzusetzen!

19. Nach der van't Hoff Gleichung ist der osmotische Druck proportional zur absoluten Temperatur, er verdoppelt sich also gerade.

20. Die von der Sonne zugeführte Leistung berechnet sich mit der Querschnittsfläche der Erde:

$$P_{\text{ein}} = \pi \cdot r_E^2 \cdot 1 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}.$$

Die durch Wärmestrahlung abgegebene Leistung berechnet sich hingegen mit der gesamten Erdoberfläche:

$$P_{\text{aus}} = 4\pi \cdot r_E^2 \cdot \sigma \cdot T^4.$$

Im Gleichgewicht ist  $P_{\text{ein}} = P_{\text{aus}}$ , also:

$$T^4 = \frac{\pi \cdot r_E^2 \cdot 1 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}}{4\pi \cdot r_E^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4} = 4,4092 \cdot 10^9 \text{ K}^4.$$

Wir bekommen:  $T = 258 \text{ K}$  entspricht  $-15^\circ \text{C}$ . Die tatsächliche durchschnittliche Temperatur der Erdoberfläche wird mit  $+5^\circ \text{C}$  angegeben. Für die Abstrahlung ist aber zu berücksichtigen, dass ein Teil der Erde immer mit Wolken bedeckt ist, die also einen Teil der Abstrahlung übernehmen. Diese Wolken sind viel kälter als die Erdoberfläche.

## 6 Elektrizitätslehre

1. Alle gleiche Richtung: 18 V; eine in Gegenrichtung: 9 V; zwei in Gegenrichtung: 0 V.
2. Fernsehempfänger:  

$$I = \frac{P}{U} = \frac{125 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 0,54 \text{ A}.$$
Röntgenröhre:  $P = 8 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 400 \text{ W}$
3. Ein Jahr brennen lassen:  $W = 365 \cdot 24 \text{ h} \cdot 40 \text{ W} = 350 \text{ kWh}$ , macht 42 Euro.
4. Eine 100-W-Birne zieht 0,43 A. Also kann man mit 16 A 36 solcher Glühlampen betreiben.
5.  $U_S = \sqrt{2} \cdot 230 \text{ V} = 325 \text{ V};$   
 $\omega = 2\pi \cdot 50 \text{ Hz} = 314 \text{ s}^{-1}.$
6. Obere Grenzkurve:  $R = 1,9 \text{ k}\Omega$ , also  $I = U/R = 0,21 \text{ A}$ ,  
untere Grenzkurve:  $R = 0,75 \Omega$ , also  $I = 0,53 \text{ A}.$
7. Bei Reihenschaltung fließt durch beide Widerstände der gleiche Strom, am 2- $\Omega$ -Widerstand fällt aber die doppelte Spannung ab. Deshalb wird in ihm auch die doppelte Leistung umgesetzt. Bei Parallelschaltung liegt an beiden Widerständen die gleiche Spannung, durch den 1- $\Omega$ -Widerstand fließt aber der doppelte Strom, also setzt er auch die doppelte Leistung um.
8. An jeder Birne liegt ein Achtel der Spannung: 28,75 V. Der Widerstand ist  

$$R = \frac{28,75 \text{ V}}{0,4 \text{ A}} = 72 \Omega$$
und die Leistungsaufnahme  $P = 28,75 \text{ V} \cdot 0,4 \text{ A} = 11,5 \text{ W}.$

## 9. In der Reihenfolge der Schwierigkeit:

Schaltung	Leitwert	Widerstand	Rangplatz
a)	4 G	4 R	8
g)		$\frac{1}{4} R$	1
b)		$2\frac{1}{2} R$	7
c)		R	4
h)	$2\frac{1}{2} G$	0,4 R	2
e)	$(1+\frac{1}{3}) G$	0,75 R	3
f)		$(1+\frac{1}{3}) R$	5
d)		$(1+\frac{2}{3}) R$	6

10. Der Spannungsteiler ist genau in der Mitte geteilt, liefert also 30 V.  
Eine Parallelschaltung von zwei 3-k $\Omega$ -Widerständen liefert den halben Widerstandswert: 1,5 k $\Omega$ . Dieser ist mit 3 k $\Omega$  in Reihe geschaltet. Das liefert eine Spannung von:  

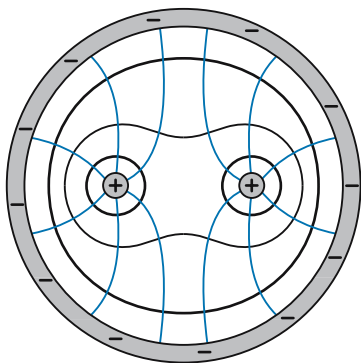
$$U = \frac{1,5 \text{ k}\Omega}{3 \text{ k}\Omega + 1,5 \text{ k}\Omega} 60 \text{ V} = 20 \text{ V}.$$
11.  $R_4 = R_3 \cdot \frac{R_2}{R_1} = 4249 \Omega.$
12.  $R_1 = \frac{12 \text{ V} - 10 \text{ V}}{60 \text{ A}} = 0,033 \Omega;$   
Anlasser:  $R_A = \frac{10 \text{ V}}{60 \text{ A}} = 0,166\Omega.$
13. Widerstand der Glühlampe:  

$$R_G = \frac{U^2}{P} = \frac{144 \text{ V}^2}{50 \text{ W}} = 2,9 \Omega.$$
Vorwiderstand  $R_V$ :  

$$\frac{R_G}{R_V} = \frac{12 \text{ V}}{110 \text{ V} - 12 \text{ V}} \Rightarrow R_V = 23,7 \Omega.$$
Damit ergibt sich ein Strom von  

$$I = \frac{110 \text{ V}}{26,6 \Omega} = 4,1 \text{ A}$$
und eine Leistung im Vorwiderstand von  
 $P = U \cdot I = 98 \text{ V} \cdot 4,1 \text{ A} = 401 \text{ W}.$ 
Im Vorwiderstand wurde achtmal so viel Leistung verbraten wie in der Glühlampe; eine beachtliche Energieverschwendung.

14.



$$15. E = \frac{7 \cdot 10^{-2} \text{ V}}{5 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 1,4 \cdot 10^7 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Das ist größer als die Durchschlagfeldstärke in Luft!

$$16. F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{26 \cdot e_0^2}{r^2} \\ = 9,0 \cdot 10^9 \frac{\text{Vm}}{\text{As}} \cdot \frac{26 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As})^2}{(1,5 \cdot 10^{-12} \text{ m})^2} \\ = 2,66 \cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

$$17. \frac{m_e}{2} v^2 = e_0 \cdot 2000 \text{ V} \Rightarrow v = 2,6 \cdot 10^7 \text{ m/s}.$$

Das ist immerhin ein Zehntel der Lichtgeschwindigkeit. Wir konnten noch gerade ohne relativistische Korrektur (► Kap. 6.6.8) rechnen.

$$18. \text{ Da } C = \frac{Q}{U} \text{ für beliebige Ladungen und Spannungen gilt, gilt auch}$$

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta U} = \frac{15 \mu\text{C}}{24 \text{ V}} = 0,62 \mu\text{F}.$$

19. Feld im Kondensator:

$$E = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{A} \\ \Rightarrow Q = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 0,005 \text{ m}^2 \\ = 1,33 \cdot 10^{-7} \text{ As}.$$

$$20. \tau = R \cdot C = 1 \text{ ms}$$

21. Der doppelte Plattenabstand halbiert die Kapazität, der Isolator erhöht sie um den Faktor 4. Insgesamt verdoppelt sich die Kapazität.

22. a) Die Ladung auf den Platten bleibt gleich. Deshalb geht das Feld um einen Faktor 2 herunter und damit auch die Spannung. Die Kapazität geht um einen Faktor 2 herauf.

b) Die Spannung bleibt konstant und also auch das Feld. Damit das Feld konstant bleiben kann, muss die Ladung einen Faktor 2 heraufgehen. Für die Kapazität gilt natürlich das Gleiche wie unter a).

23. a) Doppelte Spannung bedeutet doppelte Ladung und Feldstärke: doppelte Energie

b) Doppelte Energie

c) Doppelter Plattenabstand bedeutet halbe Kapazität und bei gleicher Spannung halbe Ladung: Energie halbiert.

24. Um das Wasser zu erhitzen brauchen wir

$$W = m \cdot c(\text{H}_2\text{O}) \cdot \Delta T \\ = 2,5 \text{ kg} \cdot 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot 75 \text{ K} = 787 \text{ kJ}.$$

Energie im Kondensator:

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \Rightarrow U = \sqrt{\frac{2W}{C}} = 627 \text{ V}.$$

25. Die Stromdichte ist

$$j = \frac{I}{A} = e_0 \cdot n_e \cdot v_d.$$

Um daraus die Driftgeschwindigkeit  $v_d$  zu gewinnen, müssen wir die Leitungselektronendichte  $n_e$  wissen. Jedes Kupferatom spaltet etwa ein Leitungselektron ab:

$$n_e = \frac{\rho(\text{Cu})}{M(\text{Cu})} \cdot N_A \\ = \frac{8,93 \text{ g/cm}^3}{63,54 \text{ g/mol}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \\ = 8,41 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}.$$

Der Strom ist

$$I = \frac{60 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 0,26 \text{ A}$$

und die Stromdichte

$$j = \frac{I}{A} = 0,35 \text{ A/mm}^2 = 35 \text{ A/cm}^2.$$

$$\text{Also } v_d = \frac{j}{e_0 \cdot n_e} = 0,0026 \text{ cm/s}.$$

Das ist ganz schön langsam.

26.  $M(\text{H}_2\text{O}) = 18 \text{ g/mol}$ ;  $\rho(\text{H}_2\text{O}) = 1000 \text{ g/l}$ . Stoffmengendichte:

$$c_n(\text{H}_2\text{O}) = \frac{\rho}{M} = 55,6 \text{ mol/l.}$$

$$c_n(\text{H}^+) = x_D \cdot c_n(\text{H}_2\text{O}) = 1,06 \cdot 10^{-7} \text{ mol/l, was pH 7 entspricht.}$$

27. Nur dimensionslose Zahlen können logarithmiert werden;  $c_n(\text{H}^+)$  zunächst durch die Einheit teilen. Dann bedeutet

$$\text{pH } 2,5: \lg(c_n \cdot \text{l/mol}) = -2,5; c_n \cdot \text{l/mol} = 10^{-2,5} = 3,16 \cdot 10^{-3}, \text{ also } c_n(\text{H}^+) = 3,16 \text{ mmol/l.}$$

28.  $m_M(\text{Ag}) = F \cdot \Delta m / \Delta Q = 107,87 \text{ g/mol}$   
 $M(\text{Ag}) = e_0 \cdot \Delta m / \Delta Q = 1,7911 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$

29. Die Diffusionsstromdichte  $j_D$  der durchtretenen Ionen ist von deren Ladung unabhängig, der kompensierende Feldstrom  $j_E$  steigt aber mit  $z \cdot e_0$ , weil die elektrische Kraft und mit ihr die Beweglichkeit  $\mu$  dies auch tun. Mehrwertige Ionen können also  $j_D$  mit geringerer Feldstärke und kleinerer Membranspannung kompensieren.

30.  $U_M = 59 \text{ mV} \cdot \lg\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$ , also:

	$(c_1/c_2)$	$\lg$	$U_M$
a	10	1	59 mV
b	100	2	118 mV
c	0,01	-2	-118 mV
d	2	0,3	18 mV

Da die positiven Ionen durch die Membran hindurchkommen, laden sie die Lösung mit der kleineren Konzentration positiv auf.

31.  $U_M = \infty$  (!) – entweder weil  $c_1/0 = \infty$  oder wegen  $\ln(0) = -\infty$ : im Sinne der Nernst'schen Formel gibt es kein „absolut reines“ Wasser.

32. Das Magnetfeld verschwindet längs einer Linie parallel zum Draht, wo das vom Draht erzeugte Magnetfeld mit gerade der gleichen Magnetfeldstärke dem äußeren Feld entgegensteht. Die Linie hat den Abstand r:

$$B = 10^{-4} \text{ T} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

$$\Rightarrow r = \frac{1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 5 \text{ A}}{2\pi \cdot 10^{-4} \text{ T}} = 1 \text{ cm.}$$

33. Feld am Ort des zweiten Drahtes:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot 12 \text{ A}}{2\pi \cdot 0,07 \text{ m}} = 3,44 \cdot 10^{-5} \text{ T.}$$

Kraft auf den zweiten Draht:

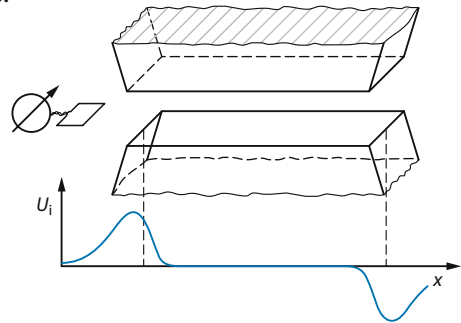
$$F_L = 8,8 \cdot 10^{-4} \text{ N} = 1 \text{ m} \cdot I_2 \cdot B \Rightarrow I_2 = 25,6 \text{ A.}$$

Der Strom im zweiten Draht fließt in gleicher Richtung wie im ersten.

34.  $F_L = Q \cdot v \cdot B = 155 \text{ As} \cdot 120 \text{ m/s} \cdot 5 \cdot 10^{-5} \text{ T} = 0,93 \text{ N.}$

35.  $I_{\text{ind}} = \frac{U_{\text{ind}}}{R} = \frac{1}{25 \Omega} \cdot 100 \cdot A \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t} = 5 \text{ mA.}$

- 36.



37.  $U_S = \frac{n_S}{n_P} 230 \text{ V};$

$$n_P = 500; n_S = 25000; U_S = 11,5 \text{ kV};$$

$$n_P = 1000; n_S = 24; U_S = 5,52 \text{ V.}$$

- 38.

Federpendel

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + D \cdot x = 0$$

$x$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

potentielle Energie der gespannten Feder  
 $W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} D \cdot x^2$

Schwingkreis

$$L \cdot \frac{d^2 Q}{dt^2} + Q/C = 0$$

$Q$

$$\frac{dQ}{dt} = I$$

elektrische Energie des geladenen Kondensators  
 $W_{\text{el}} = \frac{1}{2} Q^2 / C$

kinetische Energie  
der Pendelmasse

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

magnetische Energie der  
stromdurchflossenen  
Spule

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2$$

## 7 Optik

1.  $\sin \beta_{\text{grenz}} = \frac{1}{1,34} = 0,75 \Rightarrow \beta_{\text{grenz}} = 48,3^\circ$

2. Die Wellenlänge wird kürzer, da die Lichtgeschwindigkeit kleiner wird.

3. Für die Reflexion gilt: Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel. Also bedeutet die Forderung, dass der Einfallswinkel  $\alpha_{\text{ein}}$  doppelt so groß ist wie der Winkel des gebrochenen Strahls  $\alpha_{\text{b.}}$

rech·

Brechungsgesetz:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_{\text{ein}}}{\sin \alpha_{\text{brech}}} &= \frac{\sin 2\alpha_{\text{brech}}}{\sin \alpha_{\text{brech}}} \\ &= \frac{2 \cdot \sin \alpha_{\text{brech}} \cdot \cos \alpha_{\text{brech}}}{\sin \alpha_{\text{brech}}} \\ &= 2 \cdot \cos \alpha_{\text{brech}} = n = 1,52; \end{aligned}$$

Also:  $\alpha_{\text{brech}} = \arccos 0,76 = 41,4^\circ$  und  
 $\alpha_{\text{ein}} = 82,8^\circ$ .

4. Sie sehen ein verkleinertes virtuelles Bild (■ Abb. 7.22).

5. Sie müssen auf drei Meter fokussieren. Der Spiegel liefert ein virtuelles Bild in diesem Abstand (■ Abb. 7.21).

6. Brechwert =  $\frac{1}{0,5 \text{ m}} = 2 \text{ dpt}$

7. Es muss Bildweite gleich Gegenstandsweite sein. Das ist dann der Fall, wenn die Bildweite zweimal die Brennweite ist.

8. Es ist reell, also auf dem Kopf. Das Okular liefert dem Auge ein virtuelles Bild.

9. Die Vergrößerung nimmt zu.

10.  $\frac{z'}{z} = \frac{0,24 \text{ m}}{22 \text{ m}} = \frac{f}{50 \text{ m} - f} \Rightarrow f = 54,4 \text{ mm}$ .

11. Bildweite für  $a = \infty$  :  $b = f = 135 \text{ mm}$   
Bildweite für  $a = 1,5 \text{ m}$  :

$$b = \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \right)^{-1} = 152 \text{ mm}$$

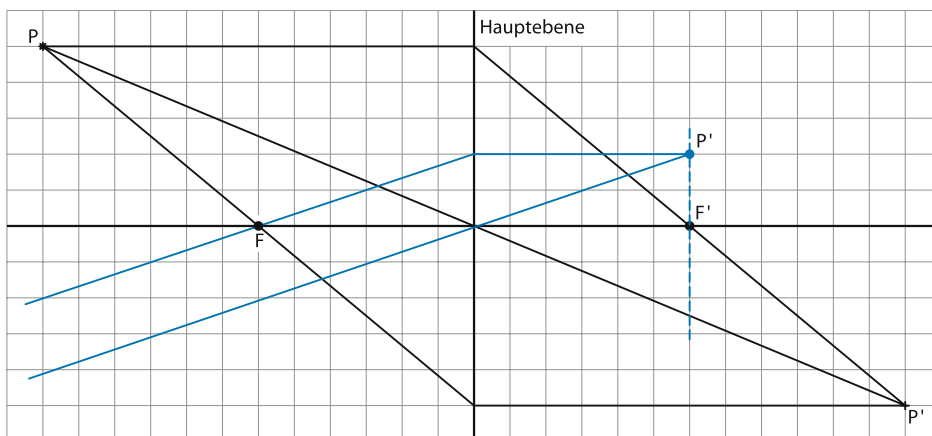
Differenz: 17 mm

12. Siehe Abbildung unten

13.  $\frac{z'}{z} = 2,75 = \frac{0,75 \text{ m}}{a - 0,75 \text{ m}} \Rightarrow a = 1,02 \text{ m}$ ;

$$\frac{b}{a} = 2,75 \Rightarrow b = 2,81 \text{ m}; a + b = 3,83 \text{ m}$$

14. Der Vergrößerungsfaktor  $\Gamma = 8$  bedeutet die Reduktion der Sehweite (= Brennweite  $f$  der



Lupe) auf ein achtel der Bezugssehweite von 25 cm:

$$F = 250/8 \text{ mm} = 31,25 \text{ mm.}$$

15. Die Sonne strahlt nach allen Seiten, also in den größtmöglichen Raumwinkel  $\omega_{\max} = 4 \pi$ .

16. Die Solarkonstante ist eine Strahlungsflussdichte und keine Bestrahlungsstärke, die den Einfallswinkel auf eine schräg gestellte Empfängerfläche berücksichtigen müsste.

17. Strahlungsleistung der Sonne:

$$P_S = \varphi_S \cdot A_R$$

$\varphi_S$  = extraterrestrische Solarkonstante im Abstand Erde – Sonne

$A_R$  = Oberfläche einer Kugel mit dem Radius  $R$  der Erdbahn.

Anhang:

$$\varphi_S = 1,36 \text{ kW/m}^2$$

$$R = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$A_R = 4\pi R^2 = 2,79 \cdot 10^{23} \text{ m}^2$$

$$P_S = 3,8 \cdot 10^{26} \text{ W.}$$

26 Zehnerpotenzen werden von den Vorsilben zu den SI-Einheiten nicht mehr erfasst. Sie übersteigen menschliches Vorstellungsvermögen.

18. Das Auflösungsvermögen entspricht in etwa der Lichtwellenlänge im sichtbaren Bereich:  $0,5 \mu\text{m}$ .

$$19. f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{0,03 \text{ m}} = 10^{10} \text{ Hz}$$

20. Der Winkelabstand der Maxima beträgt etwa  $\Delta\alpha = 5,5 \text{ cm}/5 \text{ m} = 0,011 \text{ rad}$  entspricht  $0,63^\circ$ . Wellenlänge:  $\lambda = 4 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot \sin \Delta\alpha = 0,44 \mu\text{m}$ . Das ist tiefes Blau.

21. Erstes Minimum bei Beugung an einem Spalt:  $\sin \alpha = \frac{\lambda}{d}$ . Die Spaltbreite ist hier  $d = 0,8 \text{ m}$ . Die Wellenlänge ergibt sich mit der Schallgeschwindigkeit von  $c = 330 \text{ m/s}$  zu

$$\lambda = \frac{c}{f} = 0,44 \text{ m.}$$

Damit ergibt sich für den Winkel des 1. Minimums  $\alpha = 33^\circ$ .

22. Das Beugungsmaximum erster Ordnung liegt bei:

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{g}.$$

Blaues Licht hat eine Wellenlänge von etwa 480 nm. Also

$$g = \frac{4,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{\sin 50^\circ} = 0,63 \mu\text{m}.$$

Die Struktur auf dem Flügel ist also selbst in der Größenordnung der Lichtwellenlänge.

$$23. \text{ Um den Faktor } \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$24. d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu} \approx 0,7 \text{ cm}$$

25. Etwa 10 kV – 500 kV.

26. Sie verdoppelt sich auch (► Kap. 7.5.4)

$$27. W_{\max} = 150 \text{ keV}$$

$$P = I \cdot U = 20 \text{ mA} \cdot 150 \text{ kV} = 3 \text{ kW}$$

$$\varphi \approx 0,01 \cdot P = 30 \text{ W}$$

## 8 Atom- und Kernphysik

1. Die Ordnungszahl ist 8 und die Massenzahl 16:  $^{16}_8\text{O}$

2. Die Elektronenzahl ist gleich der Ordnungszahl: 47.

3. Aus Heliumatomkernen

4. Nach ■ Abb. 8.8 sind dem Bi-214 ( $A = 214$ ,  $Z = 83$ ,  $N = 131$ ) folgende Zerfälle möglich:

$\alpha$ - Zerfall in Tallium-210:  $A = 210$ ,  $Z = 81$ ,  $N = 129$ ;

$\beta$ - Zerfall in Polonium-214:  $A = 214$ ,  $Z = 84$ ,  $N = 130$ .

5. Neutroneneinfang bedeutet:  $\Delta A = +1$ ,  $\Delta Z = 0$ ,  $\Delta N = +1$ , führt also von Ag-107 zu Ag-108 und von Ag-109 zu Ag-110 (beide sind  $\beta$ -Strahler mit 2,44 min und 24,17 s Halbwertszeit.).

6. Ein Elektron und ein Positron.



7. Die Aktivität fällt exponentiell ab. Die Halbwertszeit ist eine Stunde, also beträgt die Aktivität nach 2 Stunden 25 Bq.

$$8. \quad \exp\left(-\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}}\right) = 0,01 \Rightarrow -\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}} = \ln 0,01$$

$$= -4,6 \Rightarrow t = \frac{4,6}{\ln 2} T_{1/2} = 6,64 \cdot T_{1/2}.$$

9. Bei dem Paarzerfall entstehen zwei  $\gamma$ -Quanten, die in genau entgegengesetzte Richtung davonfliegen. Es reagieren dann zwei Detektoren gleichzeitig und der Zerfall muss auf einer Linie zwischen ihnen erfolgt sein.

## 9 Dosimetrie

1. Eingestrahlte und absorbierte Energie geteilt durch die Masse des Körpers.
2. Ein Jahr sind etwa  $3 \cdot 10^7$  Sekunden. Die durchschnittliche Belastung sind etwa 1,5 mSv pro Jahr, also etwa  $5 \cdot 10^{-11}$  Sv/s.

3. Wenn Sie das gesegnete Alter von 100 Jahren erreichen, dann leben Sie ca.  $3 \cdot 10^9$  s. Die Letaldosis ist etwa 4 Sv. Die gewünschte maximale Dosisleistung wäre also:

$$\frac{dD_q}{dt} = \frac{0,01 \cdot 4 \text{ Sv}}{3 \cdot 10^9 \text{ s}} = 1,33 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Sv}}{\text{s}}.$$

Wie in der vorherigen Aufgabe berechnet, bekommen Sie leider mehr ab.

# Physikalische Formelsammlung

## Systeme International d’Unités – Die Grundgrößen und ihre Einheiten

Größe	Einheit	Größe	Einheit
Länge	m = Meter	Temperatur	K = Kelvin
Masse	kg =	Stoffmenge	mol = Mol
Zeit	s = Sekunde	Lichtstärke	cd = Candela
el. Strom	A = Ampère		

## Abgeleitete Einheiten mit eigenem Namen

Größe	Einheit	
Volumen	l = Liter	= $10^{-3} \text{ m}^3$
Zeit	min = Minute	= 60 s
	h = Stunde	= 60 min = 3600 s
	d = Tag	= 24 h = 86.400 s
	a = Jahr	= 365,24 d = $3,156 \cdot 10^7 \text{ s}$
Frequenz	Hz = Hertz	= 1/s
Kraft	N = Newton	= $1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$
Leistung	W = Watt	= $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3 = 1 \text{ J/s}$
Energie	J = Joule	= $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$
Druck	Pa = Pascal	= $1 \text{ N/m}^2$
Winkel	rad = Radiant	= 1
Raumwinkel	sr = Steradian	= 1
el. Spannung	V = Volt	= $1 \text{ W/A}$
el. Widerstand	$\Omega$ = Ohm	= $1 \text{ V/A}$
el. Leitwert	S = Siemens	= $1 \text{ A/V} = 1/\Omega$
el. Ladung	C = Coulomb	= $1 \text{ A s}$
Kapazität	F = Farad	= $1 \text{ C/V}$
magn. Fluss	Wb = Weber	= $1 \text{ V} \cdot \text{s}$
magn. Flussdichte	T = Tesla	= $1 \text{ Wb/m}^2$
Induktivität	H = Henry	= $1 \text{ Wb/A}$
Aktivität	Bq = Becquerel	= 1/s

Größe	Einheit	
Energiedosis	Gy = Gray	= 1 J/kg
Äquivalentdosis	Sv = Sievert	= 1 J/kg
Lichtstrom	lm = Lumen	= 1 cd·sr
Beleuchtungsstärke	lx = Lux	= 1 lm/m <sup>2</sup>

### Einige ältere Einheiten außerhalb des Système International

Größe	Einheit	
Energie	cal = Kalorie	= 4,18400 J
Druck	bar = Bar	= 1,000 · 10 <sup>5</sup> Pa
	Torr = Torr	= 133,3 Pa
	mmHg = mm-Quecksilber	~ 1 Torr
	mmH <sub>2</sub> O = mm-Wasser	= 9,81 mPa
magn. Flussdichte	G = Gauß	= 10 <sup>-4</sup> T
Aktivität	Ci = Curie	= 3,77 · 10 <sup>10</sup> Bq
Ionendosis	R = Röntgen	= 2,58 · 10 <sup>-4</sup> As/kg
Energiedosis	rd = Rad	= 0,01 Gy
Äquivalentdosis	rem = Rem	= 0,01 Sv

### Energieeinheiten

Joule = Newtonmeter = Wattsekunde = J = N · m = W · s
Kilowattstunde = kWh = 3,600 · 10 <sup>6</sup> J
Elektronvolt = eV = 1,602 · 10 <sup>-19</sup> J

### Einige Naturkonstanten

Lichtgeschwindigkeit (im Vakuum)	$c = 2,99792458 \text{ m/s}$ ~ 300.000 km/s
Elementarladung	$e_0 = 1,60219 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8,8541878 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$
magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 1,2566371 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/(Am)}$
Elektronenmasse	$m_e = 9,109382 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Protonenmasse	$m_p = 1,6726216 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Neutronenmasse	$m_n = 1,6749272 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Planck-Konstante	$h = 6,6262 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ $= 4,1357 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s}$
Avogadro-Konstante	$N_A = 6,0220 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	$k = 1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Gaskonstante	$R = 8,3144 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$
Faraday-Konstante	$F = 96.484 \text{ C/mol}$
atomare Masseneinheit	$u = 1,66057 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Elektronenmasse	$m_e = 9,10956 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Gravitationskonstante	$G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$

## Sonnensystem

Himmelskörper	Radius	Bahnradius	Fallbeschleunigung
Erde	$6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$	$1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$	$9,81 \text{ m/s}^2$
Mond	$1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$	$3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$	$1,67 \text{ m/s}^2$
Sonne	$6,95 \cdot 10^8 \text{ m}$		
extraterrestrische Solarkonstante = $1,36 \text{ kW/m}^2$			

## Kernladungszahlen $Z$ und molare Massen $M$ einiger natürlicher Isotopengemische

Symbol	Element	$Z$	$M$ g/mol	Symbol	Element	$Z$	$M$ g/mol
H	Wasserstoff	1	1,0079	Na	Natrium	11	22,997
He	Helium	2	4,0026	Al	Aluminium	13	26,9915
Li	Lithium	3	6,939	Cl	Chlor	17	35,475
C	Kohlenstoff	6	12,0112	Ca	Kalzium	20	40,08
N	Stickstoff	7	14,0067	Ag	Silber	47	107,868
O	Sauerstoff	8	15,9994	Pb	Blei	82	207,19

Einige Eigenschaften des Wassers

Dichte  $\rho$ , Dampfdichte  $\rho_D$ , Dampfdruck  $p_D$ , spez. Verdampfungsenthalpie  $W_D$ , spez. Wärmekapazität  $c$ , Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$ , Resistivität  $\rho_{el}$ , Oberflächenspannung  $\sigma$  gegen Luft, Viskosität  $\eta$

$T$ °C	$\rho$ g/ml	$\rho_D$ µg/ml	$p_D$ hPa	$W_D$ kJ/g	$c$ J/(g · K)	$\varepsilon_r$	$\rho_{el}$ kΩ · m	$\sigma$ mN/m	$\eta$ mN · s/m²
0	0,9998	4,85	6,10	2,50	4,218	87,90	633	75,63	1,87
4	1,0000	6,40	8,13	2,49	4,205	85,90	472	75,01	1,57
10	0,9998	9,40	12,27	2,48	4,192	83,95	351	74,22	1,31
20	0,9983	17,3	23,4	2,46	4,182	80,18	202	72,75	1,002
37	0,9914	45,4	62,7	2,42	4,178	74,51	87	69,97	0,692
50	0,9881	83,0	123,2	2,38	4,181	69,88	53	67,91	0,547
100	0,9583	600	1013	2,26	4,216	55,58	58,90	0,282	
130		1122	2699	2,17					
Tripelpunkt:			0,0075 °C		610 Pa				
kritischer Punkt:			374,2 °C		22,11 MPa				
bei 0 °C									
molare Schmelzwärme:			6,02 · 10³ J/mol						
Wärmeleitfähigkeit:			0,54 J/(m · s · K)						
bei 20 °C									
Ausdehnungskoeffizient:			1,8 · 10⁻⁴ K⁻¹						
Schallgeschwindigkeit:			1,48 km/s						
bei 25 °C									
Wellenlänge:		λ/nm	320,3		402,6		601,5		667,8
Brechzahl:		n(λ)	1,54		1,42		1,36		1,33

## Einige Materialkenngrößen

	Dichte g/ml	spez. Widerstand $10^{-8} \Omega \cdot m$	spez. Wärmekapazität J/(g · K)
Aluminium	2,70	2,8	0,90
Eisen	7,86	9,8	0,42
Kupfer	8,93	1,7	0,39
Silber	10,50	1,6	0,23
Blei	11,34	22	0,13
Quecksilber	13,60	96	0,14
Gold	19,23	2,4	0,13
Platin	21,46	4,8	0,13
Konstantan	8,8	50	

Linearer Ausdehnungskoeffizient (bei 100 °C)	
Quarzglas	$0,5 \cdot 10^{-6} K^{-1}$
Jenaer Glas	$8,1 \cdot 10^{-6} K^{-1}$
Eisen	$12,0 \cdot 10^{-6} K^{-1}$
Kupfer	$16,7 \cdot 10^{-6} K^{-1}$
Aluminium	$23,8 \cdot 10^{-6} K^{-1}$

Wärmeleitfähigkeit	
Quarzglas	1,38 J/(m · s · K)
Seide	0,04 J/(m · s · K)
Luft	0,025 J/(m · s · K)
Aluminium	230 J/(m · s · K)

Schallgeschwindigkeit	
Luft	334 m/s
Wasserstoff	1306 m/s
Aluminium	6420 m/s

Permittivität (Dielektrizitätszahl)	
Luft	1,000576
Quarzglas	3,7
Glas	5–10

Physiologischer Brennwert	
Kohlehydrate	17,2 kJ/g
Fett	38,9 kJ/g
Eiweiß	17,2 kJ/g
Schokolade	~23 kJ/g
Bier	1,9 kJ/g

Farben des sichtbaren Spektrum	
violett	400–440 nm
blau	440–495 nm
grün	495–580 nm
gelb	580–600 nm
orange	600–640 nm
rot	640–750 nm

# Tabelle griechischer Buchstaben

(Die in diesem Buch häufig verwendete Buchstaben sind fett gedruckt)

A	$\alpha$	Alpha	I	$\iota$	Iota	P	$\rho$	Rho
B	$\beta$	Beta	K	$\kappa$	Kappa	$\Sigma$	$\sigma$	Sigma
$\Gamma$	$\gamma$	Gamma	$\Lambda$	$\lambda$	Lambda	T	$\tau$	Tau
$\Delta$	$\delta$	Delta	M	$\mu$	My	Y	$\upsilon$	Ypsilon
E	$\epsilon$	Epsilon	N	$\nu$	Ny	$\Phi$	$\varphi$	Phi
Z	$\zeta$	Zeta	$\Xi$	$\xi$	Xi	X	$\chi$	Chi
H	$\eta$	Eta	O	$\omicron$	Omikron	$\Psi$	$\psi$	Psi
$\Theta$	$\theta$	Theta	$\Pi$	$\pi$	Pi	$\Omega$	$\omega$	Omega

# Liste der Formelzeichen

a	Jahr	e	Euler'sche Zahl
$a$	Gegenstandsweite (Optik)	$e_0$	Elementarladung
$a'$	Bildweite (Optik)	$E$	Elastizitätsmodul
A	Ampère (Stromeinheit)	$\vec{E}, (E)$	elektrische Feldstärke, (Betrag)
$A$	Fläche(-inhalt)	$f$	Brennweite (einer Linse), Frequenz
$A_0$	Amplitude (einer Schwingung)	$f^*$	Grenzfrequenz (eines Hoch- oder Tiefpasses)
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$	Vektoren	F	Farad (Einheit der elektrischen Kapazität)
$\vec{a}, (a)$	Beschleunigung, (Betrag)	$\vec{F}, (F)$	Kraft, (Betrag)
$\vec{a}_z, (a_z)$	Zentralbeschleunigung (bei einer Kreisbewegung)	$\vec{F}_C$	Coulomb-Kraft
$\vec{B}, (B)$	magnetische Flussdichte, (Betrag)	$\vec{F}_G$	Schwerkraft
$c$	Phasengeschwindigkeit (einer Welle)	$\vec{F}_L$	Lorentzkraft
$c$	Stoffmengendichte, spezifische Wärmekapazität (pro Masse)	$\vec{F}_N$	Normalkraft (senkrecht zur Ebene)
$c_m$	Molalität (Einheit: mol/kg)	$\vec{F}_R$	Reibungskraft
$c_n$	molare Wärmekapazität	$\vec{F}_z$	Zentripetalkraft (bei einer Kreisbewegung)
$c_p$	molare Wärmekapazität bei konstantem Druck	g	Fallbeschleunigung
$c_v$	molare Wärmekapazität bei konstantem Volumen	G	Gravitationskonstante, elektrischer Leitwert
C	elektrische Kapazität, Wärmekapazität	$\vec{v}, (v)$	Geschwindigkeit, (Betrag)
C	Coulomb (Ladungseinheit; entspricht A · s)	h	Stunde
d	Tag	h	Höhe, Planck'sches Wirkungsquantum
$d$	Abstand, Durchmesser (einer Kugel)	$\Delta h$	Höhenunterschied
D	Dioptrien (Optik)	$\vec{H}, (H)$	magnetische Feldstärke
D	Federkonstante	I	elektrischer Strom, Wärmestrom, Volumenstromstärke
dB	Dezibel		



$I$	Schallstärke, Intensität	$T_{1/2}$	Halbwertszeit
$I$	Trägheitsmoment	$T$	Schwingungsdauer, Periode
$j$	Teilchenstromdichte	$T$	Temperatur
$j_Q$	Wärmestromdichte	$\bar{T}, (T)$	Drehmoment, (Betrag)
$J$	Joule (Energieeinheit)	$u$	atomare Masseneinheit
$k$	Kompressibilität	$u(X)$	Messunsicherheit der Größe $X$
$k, k_B$	Boltzmannkonstante	$U$	elektrische Spannung, innere Energie
$k(\lambda)$	Extinktionskonstante (Optik)	$U_{\text{eff}}, I_{\text{eff}}$	Effektivwerte von Spannung und Strom
$K$	Kelvin (Temperatureinheit)	$v_0$	Anfangsgeschwindigkeit
$\text{kg}$	Kilogramm (Masseneinheit)	$V$	Volt (Spannungseinheit)
$l, \Delta l$	Länge, Längenänderung	$V$	Volumen
$l_{\text{eff}}$	effektiver Hebelarm	$V_n$	Molvolumen
$\bar{L}, (L)$	Drehimpuls, (Betrag)	$V_S$	spezifisches Volumen (Kehrwert der Dichte)
$L$	Induktivität	$w$	Energiedichte
$m$	Masse	$W$	Watt (Leistungseinheit)
$\bar{m}$	magnetisches Moment	$W$	Arbeit
$m$	Meter (Längeneinheit)	$W_{\text{el}}$	elektrische Energie
$\text{min}$	Minute	$W_{\text{kin}}$	kinetische Energie
$M$	molare Masse	$W_{\text{pot}}$	potentielle Energie
$n$	Brechungsindex (Optik)	$Z$	Kernladungszahl
$n$	Anzahldichte	$\alpha$	linearer Ausdehnungskoeffizient
$N$	Anzahl	$\alpha$	Wärmeübergangszahl, Absorptionsvermögen
$N$	Newton (Krafteinheit)	$\alpha, \beta, \gamma$	Winkel
$N_A$	Avogadro-Konstante, Logschmidt-Zahl	$\beta$	Volumenausdehnungskoeffizient
$p$	Druck	$\beta_{\text{grenz}}$	Grenzwinkel der Totalreflexion
$p_D$	Dampfdruck	$\Gamma$	Vergrößerung (Optik)
$\vec{p}, (p)$	Impuls, Dipolmoment, (Betrag)	$\delta$	Dämpfungskonstante (Schwingungen)
$P$	Leistung	$\varepsilon$	Energiedichte
$\text{Pa}$	Pascal (Druckeinheit)	$\varepsilon_0$	elektrische Feldkonstante
$Q, q$	Ladungsmenge	$\varepsilon_r$	relative Permittivität (Dielektrizitätskonstante)
$Q$	Wärmemenge, Kompressionsmodul	$\eta$	Nutzeffekt, Wirkungsgrad, Viskosität
$r$	Abstand, Radius	$\lambda$	Wellenlänge, Wärmeleitfähigkeit
$R$	elektrischer Widerstand, Strömungswiderstand	$\mu$	elektrische Beweglichkeit
$R_C$	kapazitiver Widerstand	$\mu_0$	magnetische Feldkonstante
$R_i$	Innenwiderstand	$\mu_{\text{Gl}}$	Gleitreibungskoeffizient
$R_L$	induktiver Widerstand	$\mu_H$	Haftreibungskoeffizient
$R$	Gaskonstante, Reflexionsvermögen (Optik)	$\mu_m$	Massenschwächungskoeffizient (Röntgenstrahlen)
$R_e$	Reynold-Zahl	$\mu_r$	relative Permeabilität
$s$	Sekunde (Zeiteinheit)	$\rho$	Massendichte
$s$	Standartabweichung	$\rho$	Reflexionsvermögen (Optik)
$s$	Strecke	$\rho$	spezifischer elektrischer Widerstand
$s$	Teilchenstrom	$\rho_D$	Dampfdichte
$s_0$	Anfangsort		
$t$	Zeit		

$\sigma$	elektrische Leitfähigkeit
$\sigma$	mechanische Spannung, Oberflächen- spannung
$\sigma$	Strahlungskonstante (Optik)
$\tau$	Zeit, Zeitkonstante
$\Phi$	magnetischer Fluss, Strahlungsfluss (Optik)
$\varphi_0$	Phasenwinkel (gesprochen: fi)
$\omega = 2\pi \cdot f$	Kreisfrequenz
$\omega$	Öffnungswinkel (Optik)
$\Omega$	Ohm (Einheit des elektrischen Wider- standes)

# Sachverzeichnis

☞ verweist auf klinische Bezüge im Text; (P) auf Begriffe aus den Praktikumsversuchen

## A

- α-Teilchen 309
- Abbildung (optisch) 254
- Abbildungsfehler 252
  - chromatische Aberration 252
  - sphärische Aberration 252
  - Astigmatismus 252
- Abbildungsgleichung
  - dünne Linse 255
  - einfache Brechung 258
- Abbildungsmaßstab 256
- Aberration
  - chromatische 252
  - sphärische 252
- Abklingverhalten
  - gedämpfte Schwingung 104
  - Kondensatorentladung 178
- abgeleitete Größe 8
- Ableitung 29
- Ablenkwinkel (Optik) 250
- absolute Messunsicherheit 13
- absolute Temperatur 124
- absoluter Temperaturnullpunkt 123
- Absorption 146
  - optische 267
  - Resonanz- 305
- Absorptionsspektralanalyse 269
- Absorptionsspektrum 268, 269 ☞
- Absorptionsvermögen 149
- Abstandsgesetz, quadratisches 266
- Achse
  - freie 63
  - optische 254
- achsenparalleler Strahl 254
- Achsenabschnitt 38
- actio = reactio 53
- Addition (Vektoren) 16
- additive Farbmischung 272
- Adhäsion 86
- Adsorption 146
- Aggregatzustand 68
- Akkommodation (Auge) 259
- Aktivität 314
  - Radio- 314
  - optische 276
  - spezifische 324
- Aktivkohle 147
- Akustik 110
- algebraische Gleichung 22
- alkalisch 201
- allgemeine Gaskonstante 126
- Alpha-Strahl 309
- Alpha-Teilchen 309
- Alpha-Zerfall 309
- Altersbestimmung (C-14) 315
- alterssichtig 260
- Ampère 160
- Ampèremeter (Strommesser) 160
- Amplitude 101
- Analog-Digital-Wandler 196
- Analysator 275
- Anfangsbedingung 33
- Anfangsgeschwindigkeit 33
- Anfangswinkel beim schiefen Wurf 33
- anharmonische Schwingung 107
- Anion 201
- Ankopplung (Schall) 116
- anisotrop 72
- Anode 195
- Anomalie des Wassers 125
- Antimaterie 310, 317
- Antiteilchen 317
- Anzahldichte 10
- aperiodischer Grenzfall 104
- Apertur, numerische 283
- Äquipotentialfläche 183
  - EKG 185
- Äquipotentiallinie 183
- Äquivalent, Ganzkörper- 327
- Äquivalentdosis 322
- Äquivalentdosisleistung 322
- Aräometer 77
- Arbeit
  - Hub- 40
  - mechanisch 43
  - Volumen 74
- archimedisches Prinzip 77
- Arkusfunktion 18
- Arrhenius-Diagramm 143
- arithmetischer Mittelwert 12
- Astigmatismus
  - schräger Lichteinfall 252
- Auge 253, 261
- Atmosphäre (Druck) 75
- Atmung 81 ☞
- Atom 302
- atomare Masseneinheit 307
- Atomkern 302
- Atommodell, Bohrsches 302
- Atomnummer 307
- Atomorbitale (Elektronenwolke) 304
- Atomprozent 11
- Atomspektrum 286, 305
- Atomuhr 4
- Aufenthaltswahrscheinlichkeit (Materiewelle) 303
- Auflösungsvermögen 282, 265
- Auftragung
  - doppelt-logarithmische 21
  - einfach-logarithmische 21
- Auftrieb 77
- Auge 240 ☞, 258
- Augenlinse 259
- Augenmodell 257 (P)
- Ausbreitungsgeschwindigkeit 109
- Ausdehnung, thermische 122
- Ausdehnungskoeffizient 124, 349
- Ausfallwinkel 245
- Ausgleichskurve 12
- Auslenkung
  - Federpendel 100
  - Fadenpendel 102
  - Welle 107
- Ausstrahlung, spezifische 266
- Austrittsarbeit 194
- Auswahlregel 286
- Autokollimation 257 (P)
- Avogadro-Konstante 9, 126
- Axiom (Newton'sche Gesetze) 51
- azeotropisches Gemisch 142

**B**

- β-Teilchen 310
- Bahnbeschleunigung 32
- Bahngeschwindigkeit 35
- Balkenwaage 49
- Balmer-Serie 286
- Bar 74
- Barometer 79
- barometrische Höhenformel 75
- Basis (Logarithmus) 20
- Basiseinheit (Grundeinheit) 8
- Batterie 160, 205
- Bauch, Schwingungs- 109
- Becquerel 314
- Beer-Gesetz 269
- Belastbarkeit (Spannungsquelle) 177
- Beleuchtungsstärke 267
- Benetzung 87
- Beobachtersystem (Bezugssystem) 57
- Bereich, Koexistenz- 145
- Bernoulli-Gleichung 96
- Beschleuniger (Elektronen) 326
- Beschleunigung 31
  - Erd- 32
  - Bahn- 32
  - Fall- 32
  - Tangential- 32
  - Winkel- 62
  - Zentral- 35
  - Zentripetal- 59
- Beschleunigungsspannung
  - Röntgenröhre 289
  - Strahlentherapie 326
- Bessel-Verfahren 257 (P)
- bestimmtes Integral 30
- Bestimmung
  - der Brennweite 257 (P)
  - der Dichte 78 (P)
  - Halbwertsdicke 292 (P)
  - der Kennlinie 175 (P)
  - der Oberflächenspannung 86 (P)
  - der Schmelzwärme 129 (P)
  - der Vergrößerung (Mikroskop) 265 (P)
  - der Viskosität 92 (P)
  - der Wärmekapazität 129 (P)
  - Zuckerkonzentration 276 (P)
- Bestrahlungsstärke 266
- Beta-Teilchen 310
- Beta-Zerfall 310
- Betrag eines Vektors 15
- Beugung 242, 269
  - Elektronen- 295
- Beugungsfigur 281
- Beugungsgitter 269, 280
- Beweglichkeit 192
- Bewegung
  - Dreh- 35
  - gleichförmig beschleunigte 33
  - Molekular- 130
  - thermische 127
- Bewertungsfaktor 322
- Bezugssehweite 263
- Bezugssystem 57
- Biegung 71
- bikonvex 253
- Bild
  - keratoskopisches 261
  - reelles 247
  - virtuelles 246
- Bildkonstruktion
  - virtuelle Bilder 255
- Bildkraft, -ladung 194
- Bildpunkt 254, 246
- Bildweite 255
- Bimetallstreifen 124
- Bindungsenergie (Atomkern) 308
- Binnendruck 85
- biologische Halbwertszeit 324
- Biolumineszenz 287
- Biometrie 13
- Blindleistung 225
- Blindstrom 171, 225
- Blutdruck 76, 82
- Blutdruckmessung 82, 83
- Blutsenkung 78
- Bogenmaß 18
- Bohr-Bahn 302
- Bohr'sches Atommodell 302
- Boltzmann-Konstante 126, 347
- Boyle-Mariotte'sches Gesetz 81, 125
- Bq (Becquerel) 314
- brechendes Medium 248
- Brechung 247
- Brechungsgesetz 248
- Brechungsindex 248
- Brechwert 252







- Brechzahl 248
- Bremsspektrum 289
- Brennebene 251
- Brennpunkt 251
- Brennstrahl 254
- Brennen (Schnaps) 142
- Brennfleck (Röntgenröhre) 290, 293
- Brennweite 251
- Brennwert 128, 349
- Brewster-Winkel 276
- Brille 261
- Brown'sche Moekularbewegung 131
- Brücke, Wheatstone'sche 175 (P)
- Brückenbedingung 175 (P)
- BTPS 143
- Bulbus (Auge) 258
- Bündel, Licht- 243


**C**

- <sup>14</sup>C-Methode 315
- Celsius 122
- Candela
  - Lumen 267
- Carnot-Wirkungsgrad 152
- Celsius 122
- charakteristische Länge 95
- charakteristische Röntgenstrahlung 305
- chemische Energie 42
- chromatische Aberration 252
- Compton-Effekt 292
- Computertomographie 294
- Cornea (Auge) 259
- Corti-Organ 112
- Cosinus 18
- Cotangens 18
- Coulomb 161
  - Gesetz 186
  - Kraft 181
- Curie 314
  - Temperatur 218

**D**

- Dampfdichte 141
- Dampfdruck 140
  - Sättigungs- 142
- Dampfdruckerniedrigung 141

- Dampfdruckkurve 140  
 Dämpfungskonstante 104  
 deformierbar 69  
 Dehnung 38, 70  
 dekadischer Logarithmus 20  
 Destillation 142  
 destruktive Interferenz 106  
 Deuterium 308  
 Deuteron 308  
 Dewar-Gefäß 128  
 Dezibel 113  
 Diagnose, Röntgen- 293  
 Diagramm  
   – Arrhenius- 143  
   – Zustands- 144  
 diamagnetisch 218  
 Diamantgitter 70  
 Diathermie 166, 209  
 Dichte 9  
 Dichtebestimmung 78 (P)  
 dicke Linse 257  
 Dielektrikum 166  
 Dielektrizitätskonstante 192  
 Differentialgleichung 102  
   – Schwingungs- 102, 228  
 Differentialquotient 29  
 Differenzenquotient 29  
 Differenzfrequenz 106  
 Diffraktion (Beugung) 281  
 Diffusion 133, 135   
 Diffusionsgesetz 134  
 Diffusionskoeffizient 134  
 Dimension 5  
 Dimensionsanalyse 239  
 dimensionslos 3  
 Diode 195  
 Dioptrie 252  
 Dipol  
   – schwingender 231  
   – Feldlinien 187  
 Dipolmoment 187  
 Dipolstrahlung 238  
 Dispersion 109  
   – Spektrum 251  
 Dissoziation 199  
 Dissoziationsgrad 200  
 divergent 243  
 doppelt-logarithmische Auftra-  
   gung 21  
 Dopplereffekt 117  
 Dopplerultraschalldiagnos-  
   tik 117 
- Doppleruntersuchung 117  
 Dosierung 85   
 Dosimetrie 322  
 Dosis  
   – Äquivalent- 322  
   – Energie- 322  
   – Ionen- 323  
 Dosisfaktor 324  
 Dosisleistung 322  
 Doulong-Petit, Regel 131  
 Drehachse, momentane 37  
 Drehbewegung 35, 59  
 Drehfrequenz (Kreisfrequenz) 35  
 Drehimpuls 62  
 Drehimpulserhaltungssatz 62  
 Drehmoment 48  
 Drehspulinstrument 216  
 Dreieck, Einthoven'sches 208  
 Driftgeschwindigkeit 192  
 Drillung 72  
 drittes Newton'sches Gesetz 53  
 Druck 73  
   – auf den Ohren 112  
   – Blut- 82  
   – Dampf- 141  
   – hydrostatischer 74  
   – kritischer 146  
   – Licht- 295  
   – osmotischer 136  
   – Partial- 127  
   – Sättigungsdampf- 142  
   – Schall- 112  
   – Stau- 95  
 Druckverlauf 178   
 Dualismus 285  
 dünne Linse 257  
 Dunkelfeld 264  
 Durchblutung 92   
 Durchbruchfeldstärke 199  
 Durchlässigkeit (optisch) 268  
 Dynamik (Newton'sche Geset-  
   ze) 51  
 Dynamik, Hydro- (Strömung) 88
- E**
- ebener Spiegel (Bildkonstruk-  
   tion) 246  
 ebene Welle 242  
 Ebene, schiefe 39  
 Effekt  
   – Compton- 292  
   – Doppler- 117  
   – lichtelektrischer 283  
   – Photo- 283  
 effektive  
   – Halbwertszeit 324  
   – Spannung 169  
   – Stromstärke 169  
 effektiver Hebelarm 47  
 Effektivwert 169  
 e-Funktion 19  
 Eichfehler 11  
 Eigenfrequenz  
   – Pendel 102  
   – Schwingkreis 228  
 Eigenstrahlung 326  
 Eigenvolumen 144  
 Eindringtiefe (Optik) 268  
 einfach-logarithmische Auftra-  
   gung 21  
 Einfallslot 245  
 Einfallswinkel 245  
 Eingangsspalt 267  
 Einheit 3  
   – abgeleitete 8  
   – Basis- (Grund-) 8  
 Einheitsmembran 135  
 Einheitsvektor 16  
 Einstein 197  
 Einthoven 207  
 Einzelspalt 282  
 Eis, erstarrendes 137  
 Eisen 218  
 Eisenkern 218  
 EKG 159, 185 , 207  
 elastische  
   – Grenze 71  
   – Verformung 37, 70  
 elastischer Stoß 57  
 Elastizitätsgrenze 71  
 Elastizitätsmodul 70  
 elektrische  
   – Abschirmung 190  
   – Feldkonstante 346  
   – Feldlinien 184, 187  
   – Coulomb-Kraft 186  
   – Feldstärke 181  
   – Ladung 160, 161  
   – Leistung, Watt 162  
   – Leitfähigkeit 173  
   – Spannung 159, 182  
   – Schwingung 226

- elektrischer
  - Leiter 191, 159
  - Leitwert 163, 172
  - Strom 159, 191
  - Widerstand 163
- elektrisches
  - Dipolmoment 187
  - Feld 180
  - Potential 181
- Elektrizitätslehre 159
- Elektrochemie 199
- Elektrode
  - Glas- 206
  - Kalomel 206
- Elektrokardiogramm (EGK) 159
- Elektrolumineszenz 195
- Elektrolyt 201
- Elektrolyte, Beweglichkeit 201
- elektrolytische Leitfähigkeit 201
- elektrolytische Zersetzung 203
- elektrolytischer Trog 182
- elektromagnetische Kraft 180
- elektromagnetische Welle 238
- Elektromotor 216
- Elektron
  - freies 194
  - Leucht- 304
  - quasifreies 191
- Elektronenbeugung 295
- Elektronendichte 192
- Elektronenhülle 302
- Elektronenkanone 195
- Elektronenlawine 198
- Elektronenmasse 197, 346
- Elektronenmikroskop 296
- Elektronenoptik 295, 296
- Elektronenschale 304
- Elektronenspinresonanz (ESR) 307
- Elektronenstrahl (Ablenkung) 195
- Elektronenwolke
  - Materiewellen 303
- elektronische Energieneiveaus 285
- Elektron-Positron-Paarvernichtung 317
- Elektrophorese 202
- Elektrophysiologie 207
- Elektrostatik (elektrisches Feld) 180
- Element
  - chemisches 304
  - galvanisches 205
- Elementarladung 161
- Elementarteilchen 303, 307
- Elementarwelle (Huygens) 282
- Elementarzelle 69
- Emission, stimulierte 288
- Emissionsspektralanalyse 285
- E-Modul (Elastizitätsmodul) 70
- Endoskopie 249 
- Energie 40
  - Bindungs- 201
  - Bindungs- (Atomkern) 308
  - Dissoziations- 201
  - Gasteilchen 131
  - Gitter- 140
  - elektrische 162
  - innere 131
  - Kern- 308
  - kinetische 44, 62
  - Kondensator 168, 190
  - mechanische 46
  - potentielle 40
  - potentielle (elektrisch) 186
  - Quanten- 284
  - Schwingungs- 103
  - thermische 131
  - Wärme- 131
- Energiedichte
  - elektrisch 189
  - magnetisch 224
- Energiedosis 322
- Energieerzeugung 43
- Energieerhaltungssatz 43
- Energieniveau (Atom) 286, 303
- Energiestromdichte 266
- Energieverbrauch 43
- Enthalpie, Verdampfungs- 143
- Entladen (Kondensator) 178
- Entspiegelung (Reflexvermindern) 280
- Erde
  - Atmosphäre 75
  - Daten 347
  - Erwärmung 153
  - Magnetfeld 212
- Erdpotential 182, 210
- Erdung 182, 210
- Erdbeschleunigung 32
- Ergänzung, quadratische 23
- Ersatzschaltbild 176
- erstarrendes Eis 137
- Erstarrungswärme 138
- erster Hauptsatz 152
- erstes Newton'sches Gesetz 52
- Erwärmung (Erde) 153
- erzwungene Schwingung 104
- ESR 307
- Euler-Zahl 19
- Eustachi-Röhre 112
- Exponent 20
- Exponentialfunktion 19
- exponentieller Abfall 20, 179
- Exposition
  - natürliche 326
  - zivilisationsbedingte 327
- Extinktionskonstante 268
- extraterrestrische Solarkonstante 153

## F

- Fadenpendel 102
- Fahrenheit 122
- Fahrradergometer 44
- Faktor
  - Bewertungs- 322
  - Wichtungs- 327
- Fall, freier 32
- Fallbeschleunigung 32
- Fangpendel 45
- Farad 167
- Faraday-Gesetz 203
- Faraday-Käfig 191
- Faraday-Konstante 203
- Farbdreieck 272
- Farbe 265
- Farbentheorie, Young-Helmholz'sche 271
- Farbfehler (chromatische Aberration) 252
- Farbmetrik 271
- Farbmischung
  - additive 272
  - subtraktive 272
- Farbsehen 271
- Farbton 271
- Faser, neutrale 71
- Faseroptik 249
- Fasskammer 323
- Federkonstante 38, 101
- Federpendel 100
- Fehler
  - absoluter 13
  - Eich- 11

- Mess- 11
- persönlicher 4
- relativ 13
- systematischer 11
- zufälliger 11
- Fehlerbalken (Streubalken) 12
- Fehlerfortpflanzung 14
- Fehlerstrom 211
- Fehlsichtigkeit 260
- Feld
  - elektrisches 180
  - homogenes 188
  - magnetisches 212
  - Potential- 183
- Feldbegriff 180
- Feldkonstante
  - elektrische 186, 346
  - magnetische 217, 346
- Feldlinie 184
  - geschlossene elektrische 230
  - magnetische 213
- Feldstärke
  - elektrische 181
  - magnetische 216
- Fernkraft, Fernwirkung 180
- Fernrohr 264
- Ferromagnetikum
  - hartes 218
  - weiches 218
- ferromagnetisches Material 217
- Festkörper 68
- Feuchte, relative 142
- Filter
  - Interferenz- 280
  - Monochromat- 272
- Fischaugeneffekt 253
- FI-Schutzschalter 211
- Fixpunkt (Temperatur) 123
- Fläche 4
- Flächennormale 16
- Flammenfärbung 285
- Flaschenzug 41
- Fliehkraft (Zentrifugalkraft) 61
- fließen (Festkörper) 71
- Fließgleichgewicht 154
- Flugzeit, mittlere freie 131
- Fluid (Flüssigkeit) 68, 88
- Fluoreszenz 287
- Fluoreszenzmikroskopie 264
- Fluss
  - magnetischer 221
  - Strahlungs- 165

- Flussdichte
  - magnetische 216
  - Strahlungs- (Intensität) 166
- Flüssigkeit 68
  - interpleurale 81
- Flüssigkeitsmanometer 79
- Flüssigkristall 196
- Formel, Nernst- 204
- Fourier-Analyse 106, 229
- Fourier-Synthese 106, 229
- Fovea 259
- freie
  - Achse 63
  - Flugzeit 131
  - Wegstrecke 131
- freier Fall 32
- freies Elektron 194
- Freiheitsgrad 131
- Frequenz 101
  - Kreis- 19
  - Grund- 111
- Frequenzanalysator 229
- Fusion (Kernverschmelzung) 316

## G

- galvanisches Element 205
- Galvani-Spannung 205
- Gamma-Quant 310
- Gamma-Strahlung 310
- Gangunterschied 277
- Ganzkörperäquivalent 327
- Ganzkörperdosis 327
- Gas 68
  - ideales 125
  - schallweiches 115
  - reales 144
  - van der Waals 144
- Gasentladung 198
  - selbständige 199
  - unselbständige 199
- Gaskonstante, allgemeine 126
- Gasthermometer 123
- Gauß-Verteilung 13
- gedämpfte Schwingung 103
- Gefälle (Gradient)
  - Geschwindigkeits- 88
  - Konzentrations- 134
  - Potential 185
  - Temperatur- 132
- Gefrierpunktniedrigung 140
- Gegenkraft 38
- Gegenphase 106
- Gegenstandsweite 255
- Gehalt 9
- Gehör 112
- Geiger-Müller-Zählrohr 311
- gekoppeltes Pendel 107
- Gelenk 36
- Gemisch, azeotropisches 142
- geometrische Optik 243
- geostationär 59
- Genauigkeit (Messunsicherheit) 13
- Generator 219
- Gesamtwiderstand 172
- geschlossene elektrische Feldlinie 230
- Geschwindigkeit
  - Anfangs- 33
  - Bahn- 35
  - momentane 29
  - Phasen- 109
  - Winkel- 18
- Geschwindigkeitsverteilung 132
- Gesetz
  - Beer'sches 269
  - Boyle-Mariotte 123
  - Brechungs- 248
  - Coulomb- 186
  - Diffusions- 134
  - Dulong-Petit 131
  - Faraday- 203
  - Gravitations- 40
  - Hagen-Poiseuille 91, 92 (P)
  - Henry-Dalton 147, 76
  - Hebel- 46
  - Hooke'sches 70
  - ideale Gase 81
  - Induktions- 221
  - Lambert 269
  - Lambert-Beer 269
  - Massenwirkungs- 200
  - Newton 51
  - Ohm'sches (el.) 164
  - Ohm'sches (Strömung) 90
  - Reflexions- 245
  - Stefan-Boltzmann 271, 149
  - Stokes'sches 92 (P)
  - Weber-Fechner 113
  - Wien'sches Verschiebungs- 271, 149
  - Zerfalls- 314
- Geschwindigkeitsgefälle 88



Gewichtskraft 40  
 Gitter (Kristall) 69  
 Gitter, Beugungs- 279  
 Gitterenergie 140  
 Gitterspektrometer 281  
 Glaselektrode 206  
 Glasfaser (Lichtleiter) 249  
 Glaskörper 258  
 gleichförmig beschleunigte Bewegung 33  
 Gleichgewicht 48  
 – Fließ- 154  
 – indifferentes 51  
 – labiles 50  
 – stabiles 50  
 Gleichrichter  
 – Anode 195  
 – Kathode 195  
 Gleichstromkreis 175 (P)  
 Gleichung  
 – Abbildungs- 255  
 – algebraische 22  
 – Bernoulli 96  
 – Differential- 102  
 – Größen- 3  
 – Kontinuitäts- 90  
 – quadratische 22  
 – Schwingungsdifferential- 102  
 – van-t'Hoff 136  
 – Wärmeleitungs- 132  
 – Zahlenwert- 3  
 – Zustands- 144  
 Gleichverteilungssatz 131  
 Gleitebene 73  
 Gleitreibung 54  
 Gleitreibungskoeffizient 54  
 Glied,  $RC$ - 178  
 Glukometer 77  
 Glimmlampe 198  
 Glühemission 194  
 Glühkathode 194  
 Grad (Winkel) 18  
 Grad Celsius 123  
 Gradient (Gefälle)  
 – Konzentrations- 134  
 – Potential 185  
 – Temperatur- 132  
 Graphit 70  
 Graufilter 268  
 Gravitation 40  
 Gravitationsgesetz 40  
 Gravitationskonstante 40

Gray 322  
 Grenze, kurzwellige 289  
 Grenzfall, aperiodischer 104, 228  
 Grenzfläche 83, 203  
 Grenzflächenspannung 205  
 Grenzwinkel der Totalreflexion 249  
 Größe  
 – abgeleitete 8  
 – physikalische 2  
 Größengleichung 3  
 Grundeinheit 8  
 Grundfrequenz 111  
 Grundgleichung der Mechanik 52  
 Grundgröße 8  
 Grundschiwingung 111  
 Grundzustand 286, 303  
 Grundumsatz 128 ☼, 148 ☼  
 Gruppengeschwindigkeit 109

## H

Haarhygrometer 142  
 Haftreibung 54  
 Hagen-Poiseuille, Gesetz von 91, 92 (P)  
 Halbleiterzähler 311  
 Halbschatten 243  
 Halbwertsdicke 292 (P)  
 Halbwertszeit 21  
 – biologische 324  
 – effektive 324  
 – physikalische 324  
 Haltepunkt 138  
 Hämatokrit 90  
 Hämoglobin 268  
 harmonische Schwingung 100, 107  
 harte Strahlung 289  
 hartes Ferromagnetikum 218  
 Hauptebene (Linse) 254, 257 (P)  
 Hauptsatz (Thermodynamik) 152, 153  
 Hebel 46  
 Hebelarm, effektiver 47  
 Hebelgesetz 46  
 Hellfeld 264  
 Helligkeit 266  
 Henry 223  
 Henry-Dalton-Gesetz 147  
 Hertz 101

Herzminutenvolumen 89  
 Herzzyklus 2  
 Hochpass 177  
 Höhenformel, barometrische 75  
 Höhenschichtlinie 183  
 Höhenstrahlung 322  
 Hören 112 ☼  
 Hohlspiegel 246  
 Holographie 288  
 homogenes Feld (Kondensator) 188  
 Hooke'sches Gesetz 70  
 Hörgrenze 110  
 Hornhaut 258  
 Hörschall 110  
 Hörschwelle 113, 114  
 Hubarbeit 40  
 Hülle (Atom) 302  
 Huygens-Elementarwelle 282  
 Hydrathülle 140, 187  
 hydraulische Presse 74  
 hydrodynamisches Paradoxon 95  
 hydrophile Oberfläche 87  
 hydrophobe Oberfläche 87  
 hydrostatischer Druck 74

## I

ideales Gas 125  
 Impedanz 226, 197 (P)  
 Impuls 55  
 – Dreh- 62  
 – Photon 285  
 – -unschärfe 297  
 Impulssatz 55  
 indifferentes Gleichgewicht 51  
 Induktion 219  
 Induktionsgesetz 221  
 Induktionsschleife 221  
 induktiver Widerstand 225  
 Induktivität 223  
 Influenz 190  
 Infrarot 240  
 Infraschall 110  
 Ingestion 323  
 Inhalation 322  
 Inkohärenz 278  
 Innenohr 112  
 Innenwiderstand 175  
 innere Energie 131  
 innere Reibung 54, 88  
 innere Verdampfungswärme 143

Instrument, optisches 262  
 Integral 30  
 – bestimmtes 30  
 – Linien 185  
 Integration 30  
 Integrationsgrenze 30  
 Intensität 113, 266  
 Interferenz 269, 276  
 – destruktive 106  
 – konstruktive 106  
 Interferenzfilter 280  
 interpleurale Flüssigkeit 81  
 Inzidenz 245  
 Ion 198, 199  
 Ionendosis 323  
 – Aktivität 324  
 ionenselektiv-permeable Membran 203  
 ionensensitive Membran 136  
 Ionisation 198  
 Ionisationskammer 323  
 ionisierende Strahlung 322  
 Ionisierungsarbeit (-energie) 198  
 Ionophorese 202  
 Isobaren 144  
 Isochoren 144  
 Isolator 192  
 Isotherme, kritische 146  
 Isotop 307, 203  
 isotrop 72  
 ISO-Wächter 211

## J

Joule 41  
 Joule'sche Wärme 165

## K

K $\alpha$ -Linie 305  
 Kalomel-Elektrode 206  
 Kalorie 129  
 Kalorimeter 127, 129 (P)  
 Kapazität  
 – elektrisch 167  
 – Wärme- 127  
 kapazitiver Widerstand 170  
 Kapillare 86  
 Kapillarwirkung 87  
 Karussell 60  
 Katastrophe, Resonanz- 105

Kathode, Photo- 283  
 Kathodenstrahloszillograph 196  
 Kation 201  
 Katzenauge 245  
 Kehlkopf 111  
 Keimbildungsprozess 139  
 K-Einfang 310  
 Kelvin 122  
 Kennlinie 164, 175 (P)  
 keratoskopisches Bild 261  
 Kerbwirkung 71  
 Kern, Atom- 302  
 Kernfusion 316  
 Kernkraft 307  
 Kernladungszahl 302  
 Kernreaktion 309  
 Kernreaktor 316  
 Kernschatten 243  
 Kernspaltung 316  
 Kernspinresonanztomographie 306  
 Kernumwandlung 309  
 Kernverschmelzung 316  
 Kettenreaktion 316  
 Kettenregel 102  
 Kilogramm 8  
 Kilopont 38  
 Kilowattstunde 41, 163  
 Kinematik (Bewegung) 28  
 kinetische Energie 44  
 – Rotation 62  
 kintetische Gastheorie 130  
 Kirchhoff-Gesetz  
 – erstes 171  
 – zweites 172  
 Klangfarbe 111  
 Kleindosisstrahlung 327  
 Klemmenspannung 176  
 Knoten 171  
 Knotenregel 171  
 Kochsalzlösung, physiologische 136  
 Koeffizient  
 – Ausdehnungs- 124  
 – Absorptions- (Extinktions-) 268  
 – Diffusions- 134  
 – Massenschwächungs- 291  
 – Permeabilitäts- 135  
 – Schwächungs- 291  
 – Reibungs- 54  
 – Streu- 291  
 – Volumenausdehnungs- 125

Koexistenzbereich 145  
 Kohärenz 278  
 Kohärenzlänge 279  
 Kohäsion 83  
 Kohle, Aktiv- 147  
 Kohlenstoff-14 315  
 Kolbenpumpe 80  
 Kollimator 267  
 kommunizierende Röhre 76  
 Kompensationsmethode 175  
 Komponente (Vektor) 16  
 Kompressibilität 81  
 Kompressionsmodul 82  
 Kondensator  
 – Aufladen 167  
 – Entladung 178, 197 (P)  
 – Feld im 189  
 – gespeicherte Energie 167  
 – Kapazität 166  
 – kapazitiver Widerstand 170  
 – Phasenbeziehung 171  
 – Platten- 166  
 – Schaltzeichen 167  
 kondensieren 137  
 Kondensor 267  
 konkav-konvex 253  
 Konstante  
 – Avogadro 9, 126  
 – Boltzmann 126, 347  
 – Dämpfungs- 104  
 – Extinktions- 268  
 – Faraday 203  
 – Feder- 38  
 – Feld- (el.) 186  
 – Feld- (mag.) 217  
 – Gas- 347  
 – Gravitations- 40  
 – Massenwirkungs- 200  
 – Sedimentations- 78  
 – Strahlungs- 271  
 – Solarkonstante 153  
 – Stefan-Boltzmann- (Strahlungskonstante) 271  
 – Planck 284  
 – Zeit- 21  
 konstruktive Interferenz 106  
 Kontaktpotential 207  
 Kontakt (Thermo-)spannung 207  
 Kontamination 324  
 kontinuierliches Spektrum 270, 290  
 Kontinuitätsgleichung 90

Kontrastmittel 294  
 Konvektion 134, 147  
 konventionelle Stromrichtung 161  
 konvex 253  
 Konzentrationsgradient (-gefälle) 134  
 Konzentrationspotential 204  
 Koordinatensystem 16  
 Kopfwelle 117  
 Kornea 258  
 Körper, schwarzer 270  
 Körperschall 116  
 Kortex, visueller 240  
 Kosinus 18  
 Kotangens 18  
 Kraft 37  
 – Auftriebs- 77  
 – Coulomb 186  
 – Definition 37  
 – elektrische 186  
 – elektromagnetische 180  
 – Flieh- 61  
 – Lager- 48  
 – Lorentz- 215  
 – magnetische 215  
 – Normal- 54, 39  
 – resultierende 39  
 – Rückstell- (rücktreibende) 101  
 – Thermo- 207  
 – Trägheits- 57  
 – Zentrifugal- 60  
 – Zentripetal- 59  
 Kraftarm 46  
 Kräftepaar (Lagerkraft) 48  
 Kräftepolygon 39  
 Kraftfeld 184  
 Kraftgesetz, lineares 38  
 Kraftschluss 36  
 Kraftstoß (Stoß) 56  
 Kraftwirkungslinie 47  
 Kreis(Dreh-)bewegung 35, 59  
 Kreisfrequenz 19, 101  
 Kreisstrom (atomarer) 218  
 Kreuzprodukt 16  
 Kriechfall 104, 228  
 Kristallgitter 69  
 kritische Isotherme 146  
 kritischer Druck 146  
 kritischer Punkt 146  
 kritisches Molvolumen 146


kritischer Winkel (Totalreflexion) 249  
 K-Schale 305  
 Kugel 4  
 künstliche Radioaktivität 316  
 Kurwellenbestrahlung 209  
 Kurzschlussstrom 176  
 kurzsichtig 261  
 Kurzwellenbestrahlung 166 ☸, 209 ☸  
 kurzwellige Grenze 289

## L

$\lambda$  (Wellenlänge) 109  
 labiles Gleichgewicht 50  
 Ladung  
 – elektrische 160, 161  
 – Elementar- 161  
 – spezifische 197  
 Ladungsträger  
 – Elektronen 160  
 Ladungstrennung 190  
 Ladungszahl (Kern-) 307  
 Lagerkraft 48  
 Laktometer 77  
 Lambert-Beer-Gesetz  
 – Absorptionsspektrum 269  
 Lambert-Gesetz 268  
 laminare Störung 89  
 Länge 4  
 – charakteristische 95  
 Langwelle 234  
 Laser 287  
 Lastarm 46  
 latente Wärme (Umwandlungswärme) 138  
 Lautstärke 113  
 LCD-Display 196  
 LD50 324  
 Lebensdauer (Radioaktivität)  
 – Halbwertszeit 314  
 Leckstrom 210  
 Leerlaufspannung (Urspannung) 176  
 Leerstelle 71  
 Leistung 43  
 – elektrische 162  
 – Definition 43  
 – Dosis 322  
 – Wirk- 171  
 Leiter (el.) 159  
 Leiterschleife 221  
 Leitfähigkeit  
 – elektrische 173  
 – elektrolytische 201  
 – Wärme- 132, 349  
 Leitungselektronen 159  
 Leitwert 163  
 Lenz'sche Regel 224  
 Letaldosis 324  
 Leuchtelektron 304  
 Leuchtstoffröhre 199  
 Licht,  
 – Ausbreitung 242, 268  
 – Emission 270, 285  
 – Farben 271  
 – polarisiertes 275  
 – Spektren 285  
 – Teilchennatur 283  
 – Wellenlängen 241  
 Lichtbogen 199  
 Lichtbündel 243  
 Lichtdruck 295  
 lichtelektrischer Effekt 283  
 Lichtleiter 249  
 Lichtmessgröße 267  
 Lichtquant 283  
 Lichtstrahl (Lichtbündel) 243  
 Lichtstrom 265  
 linearer Maßstab 21  
 linearer Zusammenhang 38  
 lineares Kraftgesetz 38  
 Linienintegral 185  
 Linienspektrum 286  
 Linse  
 – Bildkonstruktion 254  
 – Brennpunkt 251  
 – dicke 257  
 – Kombination 252  
 – optische Achse 254  
 – Praktikumsversuch 257 (P)  
 – Sammel- 252  
 – sphärische 251  
 – Vergrößerung 256  
 – Zerstreuungs- 253  
 – Zylinder 251  
 Linsenfehler 252  
 logarithmische Skala 21  
 Logarithmus 20  
 – dekadischer 20  
 – natürlicher 20  
 longitudinale Welle 108  
 Lorentz-Kraft 215

Loschmidt'sche Zahl (Avogadro-Zahl) 9  
 Lösung, übersättigte 142  
 Lösungswärme 140  
 Lot, Einfalls- 245  
 Luftdruck 75  
 Luftfeuchtigkeit 142  
 – relative 142  
 Lumen 265  
 Luminiszenz 287  
 Lupe 255  
 Lux 267  
 Lyman-Serie 286

## M

Magnet 213, 218  
 Magnetfeld 212  
 – Berechnung 217  
 – Dipol 213  
 – eines Leiters 217  
 – Einheit 216  
 – Energiedichte 224  
 magnetische Feldkonstante 217, 346  
 magnetische Feldlinie 213  
 – Rechte-Hand-Regel 214  
 magnetische Feldstärke 216  
 – relative Permeabilität 216  
 magnetische Flusssdichte 216  
 magnetischer Fluss 221  
 magnetische Kraft (Lorentzkraft) 216  
 magnetisches Moment 216  
 magnetisches Feld 212  
 magnetisch hart, weich 218  
 Magnetisierung 218  
 Manometer 79  
 Masche 171  
 Maschenregel 172  
 Masse 8, 40  
 – Elektron 197  
 – molare 9  
 – relativistische 197  
 – Ruhe- 197  
 – schwere 53  
 – träge 53  
 Maßeinheit 3  
 Masseneinheit, atomare 307  
 Massendefekt 308  
 Massendichte 10  
 Masseneinheit, atomare 307  
 Massengehalt 10  
 Massenmittelpunkt 49  
 Massenschwächungskoeffizient  
 – Compton-Effekt 291  
 – Paarbildung 291  
 – Photoeffekt 291  
 Massenspektrometer 217  
 Massenwirkungsgesetz 200  
 Massenwirkungskonstante 200  
 Massenzahl 307  
 Maßstab, linearer 21  
 Maßzahl 3  
 Material, ferromagnetisches 217  
 Materie, Anti 317  
 Materiewelle 295  
 mathematisches Pendel (Fadenpendel) 103  
 Maxwell'schs Geschwindigkeitsverteilung 132  
 Mechanik 28, 68  
 Mechanik, Grundgleichung der 52  
 mechanische Arbeit 43  
 mechanische Energie 46  
 mechanische Schwingung 100  
 mechanische Spannung 70  
 Medium, brechendes 248  
 Membran 135  
 – ionenselektiv-permeable 203  
 – ionensensitive 136  
 – selektivpermeable 135  
 Membranpumpe 80  
 Membranspannung 203  
 Messfehler 11  
 Messung  
 – der Brennweite 257 (P)  
 – der Dichte 78 (P)  
 – Halbwertsdicke 292 (P)  
 – der Kennlinie 175 (P)  
 – der Oberflächenspannung 86 (P)  
 – der Schmelzwärme 129 (P)  
 – der Vergrößerung (Mikroskop) 265 (P)  
 – der Viskosität 92 (P)  
 – der Wärmekapazität 129 (P)  
 – Zuckerkonzentration 276 (P)  
 Messunsicherheit 13  
 – absolute 13  
 – relative 13  
 Metall  
 – schallhartes 115  
 – Wärmekapazität (Dulong-Petit) 131  
 metastabil 287  
 Meter 5  
 Mikrometer, Okular- 6  
 Mirometer, Objekt- 6  
 Mikroskop  
 – Elektronen- 295  
 – Licht- 263  
 – Röntgen- 265  
 Milliliter 7  
 Mischen 139  
 Mischtemperatur 129 (P)  
 Mittelohr 112  
 Mittelpunktstrahl (Zentralstrahl) 257  
 Mittelwert, arithmetischer 12  
 mittlere freie Flugzeit 131  
 mittlere freie Wegstrecke 131  
 mmHg 74  
 Modul  
 – Elastizitäts- 70  
 – Kompressions- 82  
 – Volumenelastizitäts- 82  
 Mohr'sche Waage 78 (P)  
 Mol 9  
 Molalität 10  
 molare Masse 9  
 molare Wärmekapazität 127  
 Molarität 10  
 Molekularbewegung 130  
 Molenbruch 11  
 Molmasse 9  
 Molvolumen 10  
 – kritisches 146  
 Moment  
 – Dipol- 187  
 – Dreh- 48  
 – magnetischer 216  
 – Trägheits- 62  
 momentane Drehachse 37  
 momentane Geschwindigkeit 29  
 Mond (Daten) 347  
 monochromatisch 250  
 Monochromator 267  
 Muskeln 43 

## N

Nanometer 5  
 natürliche Exposition  
 – Höhenstrahlung 326

natürliche Strahlungsaktivität des Menschen 315 ☼  
 natürlicher Logarithmus 20  
 Nebelkammer 311  
 negative Ladung 187  
 negative Linse (Zerstreuungs-) 252  
 Nernst-Formel 204  
 Netzhaut 258  
 Netzwerk (el.) 171  
 neutral (Lösung) 201  
 neutrale Faser 71  
 neutrales (indifferentes) Gleichgewicht 51  
 Neutron 302, 307  
 – thermisches 316  
 Neutronenmasse 347  
 Newton 38  
 Newton-Flüssigkeit 90  
 Newtonmeter 41  
 newtonsch 90  
 Newton'sches Gesetz 51  
 Nichtleiter 159  
 nichtohmsches Verhalten 164  
 Niveauschema 286  
 NMR-Tomographie 306  
 Normalbedingung 126, 143  
 Normalelektrode 206  
 Normalität (Lösung) 200  
 Normalkraft 54, 39  
 Normalobjektiv 256  
 Normalverteilung 13  
 Nukleon 302, 307  
 Nukleonenzahl 307  
 Nuklid 307  
 Nuklidtafel 308, 309  
 Nullinstrument 175 (P)  
 Nullleiter 210  
 Nullpunkt, absoluter 123  
 numerische Apertur 283  
 Nutzeffekt (Wirkungsgrad) 152

## O

Oberfläche  
 – hydrophile 87  
 – hydrophobe 87  
 Oberflächenspannung (-energie) 85 (P)  
 Oberschwingung 111  
 Oberton 111  
 Objektiv 263

Objektmikrometer 6  
 Öffnungsfehler (sphärische Aberration) 252  
 Öffnungswinkel 243  
 Ohm 163  
 ohmscher Widerstand 164  
 Ohm'sches Gesetz  
 – (el.) 164  
 – (Strömung) 90  
 Ohr 112 ☼  
 Okularmikrometer 6  
 Optik 238  
 – Elektronen- 295  
 – geometrische 243  
 – Quanten- 283  
 – Wellen- 275  
 optische Abbildung 254  
 optische Absorption 267  
 optische Achse 254  
 optische Aktivität 276  
 optisches Instrument 262  
 Orbitale (Elektronenwolke) 303  
 Ordnungszahl 302  
 Organdosis 324  
 Orientierungspolarisation 194  
 Ortsunschärfe 297  
 Osmose 135, 136 ☼  
 osmotisch wirksames Teilchen 136 ☼  
 osmotischer Druck 136  
 Oszillator 100  
 Oszillograph 197 (P)  
 Oxyhämoglobin 268

## P

Paarbildung 318  
 Paradoxon, hydrodynamisches 95  
 Parallellichtbündel 245  
 Parallelogramm der Kräfte 39  
 Parallelschaltung 172  
 paramagnetisch 218  
 Parameterdarstellung 144  
 Partialdruck 127  
 Pascal 74  
 Paschen-Serie 286  
 Pauli-Prinzip 304  
 Pegelmaß 113  
 Pendel  
 – elektrisches 226  
 – Faden- 103  
 – Fang- 45  
 – Feder- 100  
 – gekoppeltes 107  
 – mathematisches 103  
 Periode (Schwingungsdauer) 101  
 Periodensystem 302  
 periodischer Vorgang 101  
 Permanentmagnet 213, 218  
 Permeabilität, relative 217  
 Permeabilitätskoeffizient 135  
 Permittivität 192, 349  
 perpetuum mobile 43  
 – 2. Art 153  
 persönlicher Fehler 4  
 PET 317 ☼  
 Phase  
 – Schwingung 101, 106  
 – Wärmelehre 137  
 Phasenbeziehung 106  
 Phasendiagramm 146  
 Phasengeschwindigkeit 109  
 Phasenkontrastmikroskop 264  
 Phasenleiter 210  
 Phasenübergang 137  
 Phasenumwandlung 137  
 Phasenwinkel 101  
 Phon 113  
 Phosphoreszenz 287  
 Photoeffekt 283  
 Photokathode 283  
 Photometer 269  
 Photon 283  
 Photostrom 283  
 Photosynthese 153  
 Photozelle 283  
 pH-Wert 200  
 physikalische Größe 2  
 physikalische Halbwertszeit 324  
 physiologische Kochsalzlösung 136  
 Piezoelektrizität 194  
 Pirouette 62  
 Pitot-Rohr (Staurohr) 96  
 Planck'sches Wirkungsquantum 284  
 plankonvex 253  
 plastische Verformung 37  
 Plattenkondensator 166  
 Poise 89  
 Poiseuille'sches Gesetz 91  
 Polarisierung  
 – lineare 275

- Materie 192
- Verschiebungs- 193
- Polarisationsfolie 275
- Polarisator 275
- polarisiertes Licht 275
- Polkurve 37
- Polschuhe 219
- Polung 161
- Polwender 170
- positive Ladung 187
- positive Linse (Sammellinse) 251
- Positron 317
- Positronenemissionstomographie (PET) 317 ☸
- Positronenvernichtung 317
- Potenzfunktion 22
- Potential
  - elektrisches 181
  - Kontakt- 207
  - Konzentrations- 204
- Potentialfeld 183
- Potentialgefälle 184
- Potentialsonde 182
- potentielle Energie
  - elektrisch 186
  - mechanisch 41
- Potentiometer 174
- Potenzfunktion 22
- Praktikum
  - Dichtebestimmung 78 (P)
  - Gleichstromkreis 175 (P)
  - Kalorimeter 129 (P)
  - Linse (Augenmodell) 257 (P)
  - Mikroskop 265 (P)
  - Oberflächenspannung 86 (P)
  - Oszillograph 197 (P)
  - radioaktiver Zerfall 316 (P)
  - Röntgenstrahlen 292 (P)
  - Saccharimetrie 276 (P)
  - Spektralphotometer 269 (P)
  - Viskosität 92 (P)
- Präzession 305
- Präzessionsfrequenz 305
- Presse, hydraulische 74
- Primärlichtquelle 244
- Primärspule 222
- Prinzip, archimedisches 77
- Prisma 250, 269
- Produkt
  - skalares 42
  - vektorielles 16
- Proportionalität 38

- Proton 302, 307
- Protonenmasse 347
- Prozess
  - stochastischer 314
  - thermisch aktivierter 143
- Pumpe 80
- Punkt
  - kritischer 146
  - Tripel- 146
- Punktladung (el.) 186
- Purpurgerade 272
- p-T-Diagramm 145
- p-V-Diagramm 145
- Pythagoras 16

## Q

- quadratische Ergänzung 23
- quadratische Gleichung 22
- quadratisches Abstandsge-  
setz 115, 266
- Quant, Gamma- 310
- Quantenenergie 284
- Quantenhypothese 284
- Quantenoptik 283
- quasifreies Elektron 191
- Quotient, Differential- 29
- Quecksilber-Barometer 79

## R

- Rad (Einheit) 322
- Radialbeschleunigung 32
- Radiant 18
- radioaktiver Tracer 324
- radioaktiver Zerfall 316 (P)
- Radioaktivität 309
  - Aktivität 314
  - $\alpha$ -Zerfall 309
  - $\beta$ -Zerfall 310
  - $\gamma$ -Zerfall 310
  - Halbwertszeit 314
  - künstliche 316
  - Zerfallsgesetz 314
- Rasterelektronenmikroskop 296
- Raumwinkel 266
- RC-Glied 177
- Reaktionskraft (Gegenkraft) 37, 53
- reale Gase 144
- Rechte-Hand-Regel 17
- reelles Bild 247
- Reflexion 245
  - Strahlung 149
  - Total- 249
- Reflexionsgesetz 245
- Reflexionsvermögen 149
- Reflexverminderung 280
- Regel
  - Kirchhoff 171
  - Lenz'sche 224
  - von Dulong-Petit 131
- Reibung 54
  - Gleit- 54
  - Haft- 54
  - innere 54, 88
  - rollende 54
- Reibungskoeffizient 54
- Reihenschaltung 172
- Rekombination 199
- relative Dielektrizitätszahl (Permit-  
tivität) 192
- relative Luftfeuchtigkeit 142
- relativer Fehler 13
- relative Längenänderung (Deh-  
nung) 38, 70
- relative Messunsicherheit 13
- relative Permeabilität 217
- relativistische Masse 197
- Relativitätstheorie 197
- Rem 322
- Resistivität 173
- Resonanz 105
- Resonanzabsorption 305
- Resonanzkatastrophe 105
- Resonanzkurve 105
- resultierende Kraft 39
- Retina 258
- Reynold-Zahl 94
- Ringtensiometer 86 (P)
- Rinne, stabile 309
- Riva-Rocci 83 ☸
- Röhre, Eustachische 112
- Röhre, Leuchtstoff- 199
- Röhre, kommunizierende 76
- rollende Reibung 54
- Röntgen 290, 323
- Röntgendiagnose 293
- Röntgenmikroskop 265
- Röntgenröhre 289
  - Röntgenbild 290 ☸
- Röntgenstrahlen 289, 292 (P)
  - charakteristische 305

Röntgenstrukturanalyse 305  
 Röntgentomographie 294  
 Rückstellkraft (rücktreibende Kraft) 101  
 Rückstoß (Rechenbeispiel) 57  
 Rückstrahler 245  
 Rotation 62  
 Ruhemasse 197

## S

Saite (Schwingung) 111  
 Saccharimetrie 276 (P)  
 Sammellinse 151  
 Sättigung (magnetisch) 218  
 Sättigungsdampfdruck 142  
 sauer 201  
 Schale, Elektronen- (Atom) 304  
 Schall, Körper- 116  
 Schalldruck 112  
 Schallgeschwindigkeit 349  
 schallhartes Metall 115  
 Schallintensität 113  
 Schalllaufzeit 197 (P)  
 Schallmauer 118  
 Schallpegel 114  
 Schallschnelle 112  
 Schallstärke 113  
 Schallwechseldruck 112  
 schallweiches Gas 115  
 Schallwelle 110  
 Schallwellenwiderstand 115  
 Schaltskizze 160  
 Schaltzeichen  
 – Batterie 160  
 – Erdung 182  
 – Kondensator 167  
 – Spule 224  
 – Widerstand 172  
 Schatten 242  
 – Halb- 244  
 Schätzwert 13  
 Scheinkraft (Trägheitskraft) 57  
 Schichten, dünne (Interferenz) 279  
 Schiebewiderstand 174  
 schiefe Ebene 39  
 schiefer Wurf 33  
 schmelzender Schnee 137  
 Schmelzpunkt 138  
 Schmelzwärme 138, 129 (P)

Schnee  
 – schmelzender 137  
 – sublimierter 137  
 Schraubenfeder 37  
 Schraubenregel (Rechte-Hand-Regel) 17  
 Schubspannung 72  
 Schutzkontakt 210  
 Schwächungskoeffizient 290  
 schwarze Strahlung 150  
 schwarzer Körper 270  
 Schwebung 106  
 schwere Masse 53  
 Schweredruck 75  
 Schwerelosigkeit 59  
 schwere Masse 53  
 schwerer Wasserstoff 308  
 Schwerkraft 40  
 Schwerpunkt 49  
 schwingender Dipol 231  
 Schwingkreis 226  
 Schwingung  
 – anharmonische 107  
 – elektrische 226  
 – erzwungene 104  
 – gedämpfte 103  
 – harmonische 100, 107  
 – mechanische 100  
 Schwingungsbauch 109  
 Schwingungsdauer 101  
 Schwingungsdifferentialgleichung 102  
 Schwingungsenergie 103  
 Schwingungsknoten 109  
 Schwingungsüberlagerung 105  
 Sedimentation 78  
 Sedimentationskonstante 78  
 Sehen 240 ☹️  
 Sehpurpur 271  
 Sehwinkel (Lupe) 263  
 Seilwelle 107  
 Sekundärlichtquelle 244  
 Sekundärspule 222  
 Sekunde 4  
 selbständige Gasentladung 199  
 Selbstinduktion 223  
 Selbststeuerung 228  
 selektivpermeable Membran 135  
 Serie (optisch) 286  
 Serienschaltung 172  
 Sicherung 176  
 sichtbares Licht 271

Siedepunkt 140  
 SI-Einheit 8  
 Siemens 163  
 Sievert 322  
 signifikante Stellen (Messwertangabe) 14  
 Sinus 18  
 Skala, logarithmische 21  
 Skalar 14  
 skalares Produkt 17, 42  
 Snellius-Gesetz (Brechungsgesetz) 248  
 Solarkonstante, extraterrestrische 153  
 Solvatationswärme 139  
 Solvathülle 140  
 Sonne (Radius) 347  
 Sonographie 116 📶  
 Spannung  
 – elektrische 159, 182  
 – Galvani 205  
 – Grenzflächen- 205  
 – induzierte 221  
 – Klemmen- 175  
 – Kontakt 207  
 – Leerlauf- 176  
 – mechanische 70  
 – Oberflächen- 85  
 – Thermo- 206  
 Spannungsabfall (Spannung) 174  
 Spannungsmesser 160  
 Spannungsquelle 160  
 Spannungsreihe 206  
 Spannungsteiler 174  
 Spektralanalyse, Absorptions- 269  
 Spektralbereich 240  
 Spektralfarben 271  
 Spektrallinien 285  
 Spektralphotometer 267, 269 (P)  
 Spektrometer, Gitter- 281  
 Spektrum 229  
 – Absorptionsspektralanalyse 285  
 – Anregungsenergie 286  
 – Atom- 285  
 – Brems- 289  
 – Grundzustand 286  
 – Niveauschema 285  
 spezifische Aktivität 324  
 spezifische Ausstrahlung 266  
 spezifische Ladung 197



- spezifische Wärmekapazität 127, 349
- spezifischer Widerstand 173, 349
- spezifisches Volumen 9
- sphärische Aberration 252
- sphärische Linse 251
- Spiegelung 245
- Spitzenzähler 311
- Spule
- Lenz'sche Regel 224
  - Induktivität 223
  - Primär- 222
  - Sekundär- 222
  - Selbstinduktion 223
- Stäbchen (Auge) 271
- stabile Rinne 309
- stabiles Gleichgewicht 50
- Stahldichte 267
- Stalagmometer 86 (P)
- Standardabweichung 12
- des Mittelwertes 13
- Standardbedingung (Normalbedingungen) 126, 143
- Statik (Gleichgewicht) 49
- Statistik 11
- Staudruck 95
- Staurohr 96
- Stefan-Boltzmann-Gesetz 149, 271
- stehende Welle 109
- Steighöhe (Kapillare) 86 (P)
- Steigung (math.) 28
- Steigungsdreieck 28
- Stempeldruck 73
- Steradian 266
- Stereoskop 262
- Stichprobe 12
- Stimmband 111
- stimulierte Emission 288
- stochastischer Prozess 314
- Stoffmenge 8
- Stoffmengendichte 11
- Stoffmengengehalt 11
- Stockes'sches Gesetz 92 (P)
- Stoß 56
- elastischer 57
  - unelastischer 57
- Stoßionisation 198
- STPD 143
- Strahl
- Alpha- 309
  - achsenparalleler 254
  - Brenn- 254
  - Zentral- 254
- Strahlen
- ionisierende 322
  - Röntgen- 289
- Strahlengang (Linse) 254
- Strahlenschutz 328
- Strahlenschutzverordnung 328
- Strahlentherapie 325
- Strahlstärke 267
- Strahlung
- charakteristische 305
  - elektromagnetische 239
  - ionisierende 322
  - radioaktive 309
  - schwarze 150
  - Temperatur- 149, 270
  - Wärme- 149
- Strahlungsaktivität, natürliche 315 ☼
- Strahlungsfluss 265
- Strahlungsflussdichte (Intensität) 266
- Strahlungskonstante 271
- Strahlungsleistung 265
- Strahlungsmessgröße 267
- Strahlungsmessung 265
- Streubalken 12
- Streuoeffizient
- Absorptionskoeffizient 291
- Streumaß 11
- Streuung (Messwerte) 11
- Stroboskop 170
- Strom
- elektrischer 159, 191
  - Anoden- 195
  - Blind- 171
  - kapazitiver 170
  - Licht- 265
  - Teilchen- 134
- Stromdichte (el.)
- Stromkreis 160, 171
- Stromfaden 93
- Stromlinienform 93
- Strommesser 160
- Stromquelle 160
- Stromrichtung, konventionelle 161
- Strom-Spannungs-Kennlinie 164
- Stromstärke
- elektrische 160
  - Teilchen- 91
  - Volumen- 89
- Strömung
- laminar 89
  - turbulente 93
- Strömungswiderstand 90
- Stromwärme 165
- Strukturanalyse, Röntgen- 305
- Stufenversetzung 71
- Sublimationswärme 137
- Strömung, laminare 89
- Stufenversetzung 71
- sublimierter Schnee 137
- Substanz, unterkühlte 139
- subtraktive Farbmischung 272
- Suspension 78
- Symmetrieachse 70
- System, Perioden- 302
- systematischer Fehler 11
- Système International d'Unité 8
- Szintillationszähler 311, 316


## T

- Tangens 18
- Tangente 29
- Tangentialbeschleunigung (Bahnbeschleunigung) 32
- Teilchen
- Alpha- 309
  - Beta- 310
  - osmotisch wirksames 136
- Teilchenanzahldichte 10
- Teilchenstromdichte 134
- Teilchenstromstärke 91
- Teilchen-Welle Dualismus 285, 297
- Teleobjektiv 256
- Temperatur
- absolute 123
  - absoluter Nullpunkt 123
  - kritische 146
  - Misch- 129
- Temperaturgradient 132
- Temperaturskala 123
- Temperaturstrahlung 149
- schwarze Strahlung 270
- Termschema (Niveauschema) 286
- Tesla 216
- Therapie, Strahlen- 325
- thermisch aktivierter Prozess 143
- thermische Ausdehnung 122

thermische Bewegung 127  
 thermisches Neutron 316  
 Thermodynamik  
 – 1. Hauptsatz 152  
 – 2. Hauptsatz 153  
 Thermoelement 206  
 Thermogramm 150  
 Thermometer 123  
 – Widerstands- 124  
 Thermospannung (Thermokraft) 206  
 Thoraxoperation 81  
 Tiefpass 177  
 Tomographie  
 – NMR 305  
 – Röntgen- 294  
 – PET 317  
 Torr 74  
 Torsion 72  
 Totalreflexion 249  
 Tracer 317, 324  
 träge Masse 53  
 Trägheit 52  
 Trägheitskraft 57  
 Trägheitsmoment 62  
 Transformator 222  
 Transpiration 151  
 transversale Welle 108  
 Treibhauseffekt 153  
 triggern 196  
 trigonometrische Funktionen (Winkelfunktionen) 18  
 Tripelpunkt 146  
 Tritium 308  
 Trog, elektrolytischer 182  
 Trommelfell 112  
 Tropf 85, 87  
 Tropfflasche 85  
 Tubuslänge (Mikroskop) 264  
 Tunnekmikroskop  
 turbulente Strömung 93

## U


Überhöhung, Resonanz- 105  
 Überlagerung, Schwingungen 105  
 Überlandleitung 166  
 übersättigter Dampf 142  
 übersättigte Lösung 142  
 Überschallknall 118  
 überschwerer Wasserstoff 308

Uhr 4  
 Ultrakurzwelle 234  
 Ultraschall 110, 116   
 Ultraschalldiagnose 116  
 Ultraviolett 240  
 Umgebungsstrahlung 326  
 Umkehrfunktion 20  
 Umlaufzeit 36  
 Umwandlungswärme 137  
 unelastischer Stoß 57  
 Unfall, elektrischer 209  
 Unschärfe  
 – Impuls- 297  
 – Ort- 297  
 Unschärferelation 297  
 unselbständige Gasentladung 199  
 unterkühlte Substanz 139  
 Urometer 77  
 Ursprung (Leerlaufspannung) 176


## V

Vakuumdiode 195  
 Vakuum-Lichtgeschwindigkeit 240  
 van der Waals 144  
 van't-Hoff-Gleichung 136  
 Varianz 12  
 Vektor 15  
 Vektoraddition 15  
 vektoriell Produkt 16  
 Vektorprodukt 16  
 Vektorzerlegung 16  
 verdampfendes Wasser 137  
 Verdampfung 140  
 Verdampfungsenthalpie 143  
 Verdampfungswärme, innere 143  
 Verformung  
 – elastische 37, 70  
 – plastische 37  
 Vergrößerung 256  
 Vergrößerungsfaktor (Mikroskop) 265  
 Verlustleistung 166  
 Verschiebungsgesetz, Wien- 271, 149  
 Verschiebungspolarisation 193  
 Versetzung 71  
 Vielfachinstrument 160  
 virtuelles Bild 246  
 Viskoelastizität 73  
 Viskosimeter 89  
 Viskosität 88  
 – Messung 92 (P)  
 visueller Kortex (Auge) 240  
 Volt 160  
 Volumen 4  
 – spezifisches 9  
 Volumenarbeit 74  
 Volumenausdehnungskoeffizient 125  
 Volumenelastizitätsmodul 82  
 Volumenprozent 10  
 Volumenstromstärke 89  
 Vorgang, periodischer 101

## W

Waage  
 – Balken- 39  
 – Mohr'sche 78 (P)  
 Wachstumsfunktion 20  
 Wahrscheinlichkeitswelle 295  
 Wärme 127  
 – Erstarrungs- 138  
 – Joule'sche (Strom-) 165  
 – latente (Umwandlungs-) 137  
 – Lösungs- (Solvations-) 139  
 – Schmelz- 138  
 – Umwandlungs- 137  
 – Verdampfungs- 140  
 Wärmehaushalt des Menschen 150   
 Wärmekapazität 127, 129 (P)  
 – molare 127  
 – spezifische 127, 349  
 – von Metallen (Dulong-Petit) 131  
 Wärmekraftmaschine 152  
 Wärmelehre 122  
 Wärmeleitfähigkeit 132, 349  
 Wärmeleitung 132  
 Wärmeleitungsgleichung 132  
 Wärmenutzung 151  
 Wärmestrahlung (Temperaturstrahlung) 149  
 Wärmestromdichte 132  
 Wärmeübergangskoeffizient 148  
 Wasser  
 – Daten 348  
 – verdampfendes 137

Wasserdampf, kondensieren-  
 der 137  
 Wassermolekül 187  
 Wasserstoff  
 – Energieniveaus 186  
 – schwerer 308  
 – überschwerer 308  
 Wasserstoffelektrode 206  
 Wasserstoffionenkonzentration 200  
 Wasserwert 129 (P)  
 Wattsekunde 41  
 Weber-Fechner-Gesetz 113  
 Wechselspannung 168  
 Wechselstromwiderstand (Impedanz) 197 (P)  
 Wegstrecke, mittlere freie 131  
 Weg-Zeit-Diagramm 29  
 weiches Ferromagnetikum 218  
 Weißpunkt 272  
 weitsichtig 261  
 Welle 107  
 – ebene 242  
 – elektromagnetische 238  
 – Interferenz 243  
 – longitudinale 108  
 – Materie- 295  
 – stehende 109  
 – Seil- 107  
 – transversale 108  
 – Wahrscheinlichkeits- 295  
 Wellenausbreitung 241  
 Wellenfront 241  
 Wellenfunktion 295  
 Wellenlänge 109  
 Wellenoptik 275  
 Wellenpaket 297  
 Wellenzentrum 241  
 Wertigkeit 201  
 Wheatstone'sche Brücke 175 (P)  
 Wichtungsfaktor 327  
 Widerstand  
 – elektrischer 163, 175 (P)  
 – Gesamt- 172  
 – induktiver 225  
 – Innen- 175, 176  
 – kapazitiver 170  
 – ohmscher 164  
 – nichtohmscher 175 (P)  
 – spezifischer 173, 349  
 – Strömungs- 90  
 Widerstandsthermometer 124

Wien'sches Verschiebungsgesetz 271, 149  
 Wilson-Nebelkammer 312  
 Windkesselfunktion 82   
 Winkel  
 – Phasen- 101  
 – Raum- 266  
 Winkelbeschleunigung 62  
 Winkelfunktion 18  
 Winkelgeschwindigkeit  
 – Frequenz 19  
 – Schwingungsdauer 19  
 Winkelgrad 18  
 Winkelspiegel 245  
 Wirkleistung 171, 225  
 Wirkung 297  
 Wirkungsgrad 152  
 Wurf, schiefer 33  
 Wurfparabel 33  
 Wurzel (math.) 22

## Y

Young-Helmholz'sche Farbentheorie 271

## Z

Zähigkeit 88  
 Zahl  
 – Kernladungs- 302  
 – Massen- 307  
 – Maß- 3  
 – Reynold'sche 94  
 Zahlengerade 3  
 Zahlenwertgleichung 3  
 Zählrohr 316  
 Zapfen (Auge) 271  
 Zeit 3  
 Zeitkonstante 21, 224  
 Zentralbeschleunigung (Radialbeschleunigung) 36  
 Zentralstrahl 245, 252, 154  
 Zentrifugalkraft 60  
 Zentrifuge 61, 78  
 Zentripetalbeschleunigung 59  
 Zentripetalkraft 59  
 Zerfall  
 – Alpha- 309  
 – Beta- 310  
 Zerfallsgesetz 314  
 Zerfallskonstante 314  
 Zerfallsreihe 310  
 Zersetzung, elektrolytische 203  
 zerstrahlen 317  
 Zerstreuungslinse 252  
 zufälliger Fehler 11  
 Zusammenhang, linearer 38  
 Zustandsdiagramm 144  
 Zustandsgleichung  
 – ideales Gas 126  
 – van der Waals 144  
 Zustandsgröße 14  
 zweiter Hauptsatz (Thermodynamik) 153  
 zweites Newton'sches Gesetz 53  
 Zwischenbild (Mikroskop) 264  
 Zylinderlinse 251