

13. In welche Richtung erfolgt die maximal Änderung von

$f(x,y,z) = x^2 \sin(yz) - y^2 \cos(yz)$ **vom Punkt** $P_0\left(4, \frac{\pi}{4}, 2\right)$ **aus und wie groß ist**

sie annähernd?

$$f_x = 2x \cdot \sin(yz) - 0$$

$$f_y = x^2 \cdot \cos(yz) \cdot z - (2y \cdot \cos(yz) + y^2 \cdot (-\sin(yz)) \cdot z) = x^2 z \cdot \cos(yz) - 2y \cdot \cos(yz) + y^2 z \cdot \sin(yz)$$

$$f_z = x^2 \cdot \cos(yz) \cdot y - y^2 \cdot (-\sin(yz)) \cdot y = x^2 y \cdot \cos(yz) + y^3 \cdot \sin(yz)$$

eingesetzt:

$$f_x = 2 \cdot 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 2\right) - 0 = 8$$

$$f_y = 2^2 \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 2\right) - 2 \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 2\right) + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 2\right) = 8 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot 1 = \frac{\pi^2}{8}$$

$$f_z = 2^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 2\right) + \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} \cdot 2\right) = 4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0 + \frac{\pi^3}{4^3} \cdot 1 = \frac{\pi^3}{4^3}$$

$$\text{grad } f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{\pi^2}{8} \\ \frac{\pi^3}{4^3} \end{pmatrix}$$

$$\text{max Änderung: } \|\text{grad } f\| = \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{\pi^2}{8} \\ \frac{\pi^3}{4^3} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{8^2 + \left(\frac{\pi^2}{8}\right)^2 + \left(\frac{\pi^3}{4^3}\right)^2} = 8,109052$$