ADM-Prüfung vom 30.01.2026

TU Wien
Prüfer: Panholzer

(1) [10 Punkte] Vollständige Induktion

(a) Man formuliere das **Beweisprinzip der vollständigen Induktion** zunächst **allgemein** für ein Prädikat $P(n)$ in der Sprache der Logik.

Nun betrachten wir eine rekursiv definierte Folge von Vektoren $(\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots)$ im $\mathbb{R}^2$, also $\vec{v}_n \in \mathbb{R}^2$, für alle $n \in \mathbb{N}$, welche durch die Rekursion

$$\vec{v}_{n+1} = A \cdot \vec{v}_n + \vec{b}, \quad \text{für } n \geq 0, \quad \text{mit } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

sowie dem Anfangsvektor $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ eindeutig bestimmt ist.

Ihre Aufgabe ist es, mittels **vollständiger Induktion** zu zeigen, dass die Folgenglieder für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ durch **folgende Formel** gegeben sind:

$$\vec{v}_n = 3^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (n-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

wobei Sie wie folgt vorgehen sollen.

(b) Geben Sie die **Induktionsvoraussetzung** $P(n)$ an.

(c) Führen Sie den **Induktionsanfang** $P(0)$ aus.

(d) Stellen Sie die **Induktionsbehauptung** $P(n+1)$ auf.

(e) Führen Sie den **Induktionsschritt** $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ vollständig aus.

(2) [10 Punkte] Grundaufgaben der Kombinatorik

Wir betrachten im Folgenden immer Funktionen $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$, also Abbildungen von der n-elementigen Menge $\{1, \ldots, n\}$ in die m-elementige Menge $\{1, \ldots, m\}$, für allgemeine $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Das Zählen der nachfolgend angegebenen Abbildungen lässt sich immer auf in der Lehrveranstaltung kennengelernte kombinatorische Grundaufgaben zurückführen. Ihre Aufgabe ist es nun, jeweils eine allgemeine Formel für diese Anzahlen zu ermitteln. Weiters sollen die Anzahlen für die konkreten Werte $n = 3$ und $m = 5$ bestimmt werden.

(a) Sei $\mathcal{A}(n, m)$ die **Anzahl aller Funktionen** $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ ohne weitere Einschränkung.

$$\mathcal{A}(n, m) = |\{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}\}|.$$

(b) Sei $\mathcal{B}(n, m)$ die **Anzahl aller injektiven Funktionen** $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$,

$$\mathcal{B}(n, m) = |\{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\} \mid f(i) \neq f(j), \text{ für } i \neq j\}|.$$

(c) Sei $\mathcal{C}(n, m)$ die **Anzahl aller streng monoton wachsenden Funktionen** $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$,

$$\mathcal{C}(n, m) = |\{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\} \mid f(1) < f(2) < \cdots < f(n-1) < f(n)\}|.$$

Hinweis: Jede streng monoton wachsende Funktion f ist durch die **Menge der Bilder** $\{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$ eindeutig bestimmt.

(d) Sei $\mathcal{D}(n, m)$ die **Anzahl aller monoton wachsenden Funktionen** $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$,

$$\mathcal{D}(n, m) = |\{f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\} \mid f(1) \leq f(2) \leq \cdots \leq f(n-1) \leq f(n)\}|.$$

Hinweis: Jede monoton wachsende Funktion f ist durch die **Multimenge der Bilder** $\{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$ eindeutig bestimmt.

Gefundene Formeln in Tabelle eintragen, nur was hier eingefügt wurde, kann gewertet werden! Sie können aber selbstverständlich allenfalls notwendige Rechnungen / Nebenüberlegungen zur Beantwortung der Fragen auf der Rückseite des Blattes durchführen, diese bleiben aber für die Bewertung unberücksichtigt.

Formel für allgemeine n, m	Wert für $n = 3$ und $m = 5$
$\mathcal{A}(n, m) =$	$\mathcal{A}(3, 5) =$
$\mathcal{B}(n, m) =$	$\mathcal{B}(3, 5) =$
$\mathcal{C}(n, m) =$	$\mathcal{C}(3, 5) =$
$\mathcal{D}(n, m) =$	$\mathcal{D}(3, 5) =$

(3) [10 Punkte] Lineare Algebra

Wir betrachten zunächst die Menge von Vektoren $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\} \subset \mathbb{R}^2$, mit

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) **Zeigen** Sie, dass B **eine Basis** des Vektorraums $V = (\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R})$ ist.

(b) Wir interessieren uns nun für die in der Vorlesung besprochene Beschreibung des Koordinatenwechsels in V bei einem Wechsel von der kanonischen Basis $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ zur Basis B mit Hilfe einer Transformationsmatrix $T_{E,B} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Bezeichne $\Phi_B(\vec{x}) \in \mathbb{R}^2$ die Koordinaten des Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis B bzw. $\Phi_E(\vec{x}) = \vec{x}$ die Koordinaten bezüglich der kanonischen Basis E, dann muss also gelten, dass man bei Multiplikation von $T_{E,B}$ mit einem Vektor $\vec{x}$ die Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich B erhält:

$$T_{E,B} \cdot \Phi_E(\vec{x}) = T_{E,B} \cdot \vec{x} = \Phi_B(\vec{x}), \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie die Transformationsmatrix $T_{E,B}$.

(c) Weiters **bestimme man** $\Phi_B \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$, also die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ bezüglich B.

Nun betrachten wir noch eine Menge von Vektoren $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2\}$, mit

$$\vec{c}_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(d) **Zeigen** Sie, dass C **eine Orthonormalbasis** im $\mathbb{R}^2$ bildet.

(e) Man **bestimme** $\Phi_C \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$, also die Koordinaten von $\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ bezüglich C.

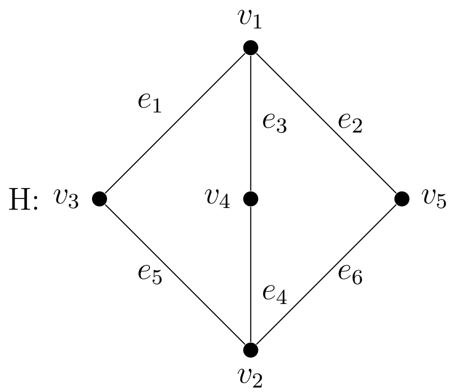
(4) [10 Punkte] Graphentheorie

(a) Man formuliere das **Handschlaglemma** für ungerichtete Graphen.

(b) Man formuliere die **Eulersche Polyederformel**, wobei die Voraussetzungen angegeben sowie die auftretenden Größen erklärt werden müssen.

(c) Man definiere für ungerichtete Graphen den Begriff einer **offenen Eulerschen Linie** und formuliere anschließend das kennengelernte **Kriterium**, wie man effizient entscheiden kann, ob ein ungerichteter Graph G eine offene Eulersche Linie besitzt oder nicht.

(d) Für den nachfolgend angegebenen Graphen H bestimme man eine **offene Eulersche Linie** und weiters illustriere man an Hand von H die **Eulersche Polyederformel**.



(5) [10 Punkte]

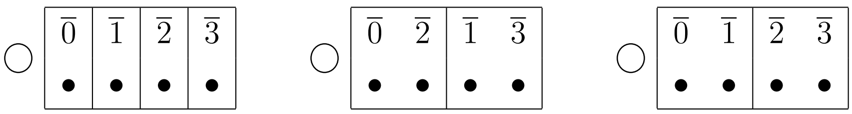
Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. überprüfen Sie die nachstehenden Aussagen (bitte ankreuzen; es können keine, eine oder auch mehrere Antworten zutreffend sein; für jede vollständig richtige Antwort gibt es einen Punkt; es werden für falsche Antworten KEINE Punkte abgezogen). Sie können notwendige Überlegungen zur Beantwortung der Fragen z.B. auf der Rückseite des Blattes durchführen, es zählen aber ausschließlich die hier gekreuzten Antworten!

Wie lautet die kartesische Darstellung der komplexen Zahl $z = \frac{2}{1-i}$?
◯ $1-i$ ◯ $-1+i$ ◯ $1+i$ ◯ $-1-i$

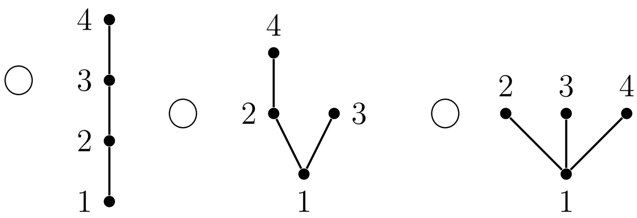
Welche der folgenden aussagenlogischen Formeln sind erfüllbar?
◯ $a \wedge \neg a$ ☒ $a \vee \neg a$ ◯ $a \Rightarrow \neg a$ ◯ $a \wedge (a \Rightarrow \neg a)$

Welche der folgenden Beziehungen für Mengen gelten?
◯ $A \setminus B \subseteq A \Delta B$ ◯ $A \cap B \subseteq A \Delta B$ ◯ $A \cup B \subseteq A \Delta B$

Wir betrachten die Äquivalenzrelation R auf $\mathbb{Z}_4$ definiert via $xRy :\Leftrightarrow x(x-1) = y(y-1)$.
Welche der nachfolgend angegebenen Zerlegungen von $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ beschreibt die der Klasseneinteilung von R entsprechende Partition?



Wie lautet das Hasse-Diagramm der Halbordnung $(\{1, 2, 3, 4\}, |)$,
mit $|$ die Teilbarkeitsrelation auf den ganzen Zahlen?



Wie viele Untergruppen besitzt $(\mathbb{Z}_{17}, +)$?
(Anmerkung: Man beachte, dass 17 eine Primzahl ist.)
◯ 0 ◯ 1 ◯ 2 ◯ 17

Welche der nachfolgenden Ringe sind nullteilerfrei?
◯ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ◯ $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ ◯ $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ ◯ $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$

Welche der folgenden algebraischen Strukturen mit 6 Elementen existieren?
◯ kommutative Gruppe ◯ nicht-kommutative Gruppe ◯ Boolesche Algebra

Welche der nachfolgend in Zyklendarstellung angegebenen Permutationen $\pi \in S_4$ erfüllen $\pi^2 = \mathrm{id}$, mit id die identische Abbildung?
◯ (12)(34) ◯ (123)(4) ◯ (1)(23)(4)

Welche der nachfolgend in Zyklendarstellung angegebenen Permutationen $\pi \in S_4$ sind gerade, erfüllen also $\mathrm{sgn}(\pi) = 1$?
◯ (12)(34) ◯ (123)(4) ◯ (1)(23)(4)

Anhang: LLM-Lösungen

Modell: Claude – Sonnet 4.5

Achtung: Diese Lösungen wurden mit einem LLM generiert und sind mit entsprechender Vorsicht zu genießen.

Lösung zu (1) [10 Punkte] Vollständige Induktion

(a) Beweisprinzip der vollständigen Induktion:

In der Sprache der Logik lautet das Beweisprinzip:

$$[P(0) \wedge \forall n \in \mathbb{N} : (P(n) \Rightarrow P(n+1))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$$

Mit Worten: Wenn das Prädikat P für $n = 0$ gilt (Induktionsanfang) und wenn aus der Gültigkeit von $P(n)$ stets die Gültigkeit von $P(n+1)$ folgt (Induktionsschritt), dann gilt $P(n)$ für alle natürlichen Zahlen n.

(b) Induktionsvoraussetzung $P(n)$:

$$P(n): \quad \vec{v}_n = 3^n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (n-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) Induktionsanfang $P(0)$:

Zu zeigen: $\vec{v}_0 = 3^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (0-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned} 3^0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{v}_0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Der Induktionsanfang ist gezeigt.

(d) Induktionsbehauptung $P(n+1)$:

$$P(n+1): \quad \vec{v}_{n+1} = 3^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(e) Induktionsschritt $P(n) \Rightarrow P(n+1)$:

Wir nehmen an, dass $P(n)$ gilt (Induktionsvoraussetzung) und zeigen daraus $P(n+1)$.

Nach der Rekursionsformel gilt:

$$\vec{v}_{n+1} = A \cdot \vec{v}_n + \vec{b}$$

Setzen wir die Induktionsvoraussetzung ein:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{n+1} &= A \cdot \left[3^n \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (n-1) \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} \cdot \left[3^n \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (n-1) \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Berechnen wir die einzelnen Matrixprodukte:

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \cdot 1 + 1 \cdot 1\\1 \cdot 1 + 2 \cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)\\1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Somit:

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{n+1} &= 3^n \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (n-1) \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \\
&= 3^{n+1} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + [(n-1)+1] \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \\
&= 3^{n+1} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dies ist genau die Induktionsbehauptung $P(n+1)$. Damit ist der Induktionsschritt vollständig gezeigt. $\square$

Lösung zu (2) [10 Punkte] Grundaufgaben der Kombinatorik

(a) Anzahl aller Funktionen $\mathcal{A}(n,m)$:

Jedes der n Elemente der Definitionsmenge kann auf eines der m Elemente der Zielmenge abgebildet werden. Für jedes Element gibt es also m Wahlmöglichkeiten.

Formel: $\mathcal{A}(n,m) = m^n$

Für $n = 3, m = 5$: $\mathcal{A}(3,5) = 5^3 = 125$

(b) Anzahl injektiver Funktionen $\mathcal{B}(n,m)$:

Bei injektiven Funktionen müssen alle Funktionswerte verschieden sein. Dies entspricht der Anzahl der Variationen ohne Wiederholung: Das erste Element hat m Möglichkeiten, das zweite nur noch $m-1$, usw.

Formel: $\mathcal{B}(n,m) = \frac{m!}{(m-n)!}$ für $n \leq m$, sonst 0

Für $n = 3, m = 5$: $\mathcal{B}(3,5) = \frac{5!}{2!} = \frac{120}{2} = 60$

(c) Anzahl streng monoton wachsender Funktionen $\mathcal{C}(n,m)$:

Laut Hinweis ist jede solche Funktion durch die Menge ihrer Bilder eindeutig bestimmt. Wir wählen n verschiedene Elemente aus $\{1,\ldots,m\}$ und ordnen sie aufsteigend. Dies entspricht der Anzahl der n-elementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,m\}$.

Formel: $\mathcal{C}(n,m) = \binom{m}{n}$ für $n \leq m$, sonst 0

Für $n = 3, m = 5$: $\mathcal{C}(3,5) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{120}{6\cdot 2} = 10$

(d) Anzahl monoton wachsender Funktionen $\mathcal{D}(n,m)$:

Laut Hinweis ist jede solche Funktion durch die Multimenge ihrer Bilder eindeutig bestimmt. Wir wählen n Elemente aus $\{1,\ldots,m\}$ mit Wiederholung und ordnen sie aufsteigend. Dies entspricht der Kombination mit Wiederholung.

Formel: $\mathcal{D}(n,m) = \binom{m+n-1}{n} = \binom{m+n-1}{m-1}$

Für $n = 3, m = 5$: $\mathcal{D}(3,5) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{5040}{6\cdot 24} = 35$

Zusammenfassung in Tabellenform:

Formel für allgemeine n, m	Wert für $n = 3$ und $m = 5$
$\mathcal{A}(n,m) = m^n$	$\mathcal{A}(3,5) = 125$
$\mathcal{B}(n,m) = \frac{m!}{(m-n)!}$	$\mathcal{B}(3,5) = 60$
$\mathcal{C}(n,m) = \binom{m}{n}$	$\mathcal{C}(3,5) = 10$
$\mathcal{D}(n,m) = \binom{m+n-1}{n}$	$\mathcal{D}(3,5) = 35$

Lösung zu (3) [10 Punkte] Lineare Algebra

(a) Zeigen, dass B eine Basis ist:

B ist genau dann eine Basis des $\mathbb{R}^2$, wenn die Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ linear unabhängig sind.

Wir prüfen die lineare Unabhängigkeit: Die Vektoren sind linear unabhängig, wenn aus

$$\alpha \cdot \vec{b}_1 + \beta \cdot \vec{b}_2 = \vec{0}$$

folgt, dass $\alpha = \beta = 0$.

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ 3\alpha + 4\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies führt zum Gleichungssystem:

$$\alpha + 2\beta = 0$$
$$3\alpha + 4\beta = 0$$

Aus der ersten Gleichung: $\alpha = -2\beta$

Einsetzen in die zweite: $3(-2\beta) + 4\beta = -6\beta + 4\beta = -2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0$

Damit auch $\alpha = 0$.

Die Vektoren sind linear unabhängig. Da wir im $\mathbb{R}^2$ genau 2 linear unabhängige Vektoren haben, bildet B eine Basis. $\square$

(b) Bestimmen der Transformationsmatrix $T_{E,B}$:

Die Transformationsmatrix $T_{E,B}$ erfüllt $T_{E,B} \cdot \vec{x} = \Phi_B(\vec{x})$.

Für die Basisvektoren gilt:

$$T_{E,B} \cdot \vec{b}_1 = \Phi_B(\vec{b}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$T_{E,B} \cdot \vec{b}_2 = \Phi_B(\vec{b}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sei $T_{E,B} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Dann:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + 3c = 1 \\ b + 3d = 0 \end{cases}$$
$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 4c = 0 \\ 2b + 4d = 1 \end{cases}$$

Aus $2a + 4c = 0$: $a = -2c$
Einsetzen in $a + 3c = 1$: $-2c + 3c = 1 \Rightarrow c = 1, a = -2$
Aus $2b + 4d = 1$: $b = \frac{1-4d}{2}$
Einsetzen in $b + 3d = 0$: $\frac{1-4d}{2} + 3d = 0 \Rightarrow 1 - 4d + 6d = 0 \Rightarrow 2d = -1 \Rightarrow d = -\frac{1}{2}$
Damit $b = \frac{1-4(-\frac{1}{2})}{2} = \frac{3}{2}$

$$\boxed{T_{E,B} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

(c) Bestimmen von $\Phi_B \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \Phi_B \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} &= T_{E,B} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \cdot (-5) + 1 \cdot 5 \\ \frac{3}{2} \cdot (-5) + (-\frac{1}{2}) \cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 + 5 \\ -\frac{15}{2} - \frac{5}{2} \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 15 \\ -10 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

Probe: $15 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-10) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 - 20 \\ 45 - 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ ✓

(d) Zeigen, dass C eine Orthonormalbasis ist:

Für eine Orthonormalbasis muss gelten:

- $\|\vec{c}_1\| = 1$ und $\|\vec{c}_2\| = 1$ (Normiertheit)
- $\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = 0$ (Orthogonalität)

Berechnen wir die Normen:

$$\begin{aligned} \|\vec{c}_1\| &= \left\| \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{5}\sqrt{3^2 + 4^2} = \frac{1}{5}\sqrt{9 + 16} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1 \quad \checkmark \\ \|\vec{c}_2\| &= \left\| \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{5}\sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \frac{1}{5}\sqrt{16 + 9} = \frac{1}{5} \cdot 5 = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Berechnen wir das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25}(3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3) \\ &= \frac{1}{25}(-12 + 12) = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Somit ist C eine Orthonormalbasis. $\square$

(e) Bestimmen von $\Phi_C \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$:

Bei Orthonormalbasen gilt: Die Koordinaten erhält man durch Skalarprodukt mit den Basisvektoren.

$$\Phi_C \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{c}_1 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \vec{c}_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{c}_1 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(3 \cdot (-5) + 4 \cdot 5) = \frac{1}{5}(-15 + 20) = \frac{5}{5} = 1 \\ \vec{c}_2 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}((-4) \cdot (-5) + 3 \cdot 5) = \frac{1}{5}(20 + 15) = \frac{35}{5} = 7 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Phi_C \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

Lösung zu (4) [10 Punkte] Graphentheorie

(a) Handschlaglemma:

Für einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$$

Mit Worten: Die Summe aller Knotengrade ist gleich dem Doppelten der Anzahl der Kanten.

Alternativ: In jedem ungerichteten Graphen ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

(b) Eulersche Polyederformel:

Für einen zusammenhängenden planaren Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

wobei:

- $|V|$ = Anzahl der Knoten (Ecken)
- $|E|$ = Anzahl der Kanten
- $|F|$ = Anzahl der Flächen (inkl. Außenfläche)

Voraussetzung: Der Graph muss zusammenhängend und planar (in die Ebene einbettbar ohne Kantenüberschneidungen) sein.

(c) Offene Eulersche Linie:

Definition: Eine offene Eulersche Linie in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist ein Kantenzug, der jede Kante genau einmal durchläuft und bei dem Start- und Endknoten verschieden sind.

Kriterium: Ein zusammenhängender ungerichteter Graph G besitzt genau dann eine offene Eulersche Linie, wenn er genau zwei Knoten mit ungeradem Grad besitzt. Diese beiden Knoten sind dann Start- und Endpunkt der offenen Eulerschen Linie.

(d) Für den Graphen H:

Zunächst bestimmen wir die Knotengrade:

- $\deg(v_1) = 3$ (Kanten: e_1, e_2, e_3)
- $\deg(v_2) = 3$ (Kanten: e_4, e_5, e_6)
- $\deg(v_3) = 2$ (Kanten: e_1, e_5)
- $\deg(v_4) = 2$ (Kanten: e_3, e_4)
- $\deg(v_5) = 2$ (Kanten: e_2, e_6)

Es gibt genau zwei Knoten mit ungeradem Grad (v_1 und v_2), daher existiert eine offene Eulersche Linie von v_1 nach v_2 (oder umgekehrt).

Offene Eulersche Linie:

$$v_1 \xrightarrow{e_1} v_3 \xrightarrow{e_5} v_2 \xrightarrow{e_6} v_5 \xrightarrow{e_2} v_1 \xrightarrow{e_3} v_4 \xrightarrow{e_4} v_2$$

oder als Kantenfolge: $e_1, e_5, e_6, e_2, e_3, e_4$

Eulersche Polyederformel für H:

Der Graph H ist planar und zusammenhängend. Wir bestimmen:

- $|V| = 5$ (Knoten: v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)
- $|E| = 6$ (Kanten: $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$)
- $|F| =?$ (zu bestimmen)

Aus der Eulerschen Polyederformel:

$$|V| - |E| + |F| = 2 \Rightarrow 5 - 6 + |F| = 2 \Rightarrow |F| = 3$$

Die drei Flächen sind:

(a) Äußere Fläche (unbegrenzt)

(b) Innere Fläche begrenzt durch v_1, v_3, v_2, v_4 (Kanten: e_1, e_5, e_4, e_3)

(c) Innere Fläche begrenzt durch v_1, v_5, v_2, v_4 (Kanten: e_2, e_6, e_4, e_3)

Verifikation: $5 - 6 + 3 = 2$ ✓

Lösung zu (5) [10 Punkte] Multiple-Choice-Aufgaben

Frage 1: Komplexe Zahl

Gesucht: kartesische Darstellung von $z = \frac{2}{1-i}$
Erweitern mit dem konjugiert Komplexen:

$$\begin{aligned} z &= \frac{2}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2(1+i)}{1-i^2} \\ &= \frac{2(1+i)}{1-(-1)} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i \end{aligned}$$

Antwort: ☒ $1+i$

Frage 2: Erfüllbarkeit aussagenlogischer Formeln

- $a \wedge \neg a$: Immer falsch (Kontradiktion) $\Rightarrow$ nicht erfüllbar
- $a \vee \neg a$: Immer wahr (Tautologie) $\Rightarrow$ erfüllbar ✓
- $a \Rightarrow \neg a \equiv \neg a \vee \neg a \equiv \neg a$: Erfüllbar für $a =$ falsch ✓
- $a \wedge (a \Rightarrow \neg a) \equiv a \wedge \neg a$: Kontradiktion $\Rightarrow$ nicht erfüllbar

Antwort: ☒ $a \vee \neg a$ **und** ☒ $a \Rightarrow \neg a$

Frage 3: Mengenbeziehungen

Sei $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die symmetrische Differenz.

- $A \setminus B \subseteq A \Delta B$: Ja, da $A \setminus B \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ✓
- $A \cap B \subseteq A \Delta B$: Nein, denn $A \cap B$ und $A \Delta B$ sind disjunkt
- $A \cup B \subseteq A \Delta B$: Nein, $A \cup B = (A \cap B) \cup A \Delta B$, also $A \Delta B \subseteq A \cup B$

Antwort: ☒ $A \setminus B \subseteq A \Delta B$

Frage 4: Äquivalenzrelation

Berechnen wir $x(x-1)$ für alle $x \in \mathbb{Z}_4$:

- $\overline{0}(\overline{0} - \overline{1}) = \overline{0} \cdot \overline{3} = \overline{0}$
- $\overline{1}(\overline{1} - \overline{1}) = \overline{1} \cdot \overline{0} = \overline{0}$
- $\overline{2}(\overline{2} - \overline{1}) = \overline{2} \cdot \overline{1} = \overline{2}$
- $\overline{3}(\overline{3} - \overline{1}) = \overline{3} \cdot \overline{2} = \overline{6} = \overline{2}$

Also: $\overline{0} R \overline{1}$ und $\overline{2} R \overline{3}$
Die Äquivalenzklassen sind: $\{\overline{0}, \overline{1}\}$ und $\{\overline{2}, \overline{3}\}$
Antwort: ☒ **dritte Partition (mit** $\{\overline{0}, \overline{1}\}$ **und** $\{\overline{2}, \overline{3}\}$**)**

Frage 5: Hasse-Diagramm

Teilbarkeitsrelation auf $\{1, 2, 3, 4\}$:

- $1|1, 1|2, 1|3, 1|4$ (1 teilt alle)
- $2|2, 2|4$
- $3|3$
- $4|4$

Das Hasse-Diagramm zeigt:

- 1 unten (teilt alle anderen)
- 2 und 3 auf mittlerer Ebene (beide nur von 1 teilbar)
- 4 über 2 (da $2|4$)

Antwort: ☒ mittleres Diagramm

Frage 6: Untergruppen von $(\mathbb{Z}_{17}, +)$

Da 17 eine Primzahl ist, ist $(\mathbb{Z}_{17}, +)$ eine zyklische Gruppe der Ordnung 17.

Eine zyklische Gruppe der Ordnung n hat für jeden Teiler d von n genau eine Untergruppe der Ordnung d.

Die Teiler von 17 sind: 1 und 17.

Also gibt es genau 2 Untergruppen:

- $\{\overline{0}\}$ (triviale Untergruppe, Ordnung 1)
- $\mathbb{Z}_{17}$ (gesamte Gruppe, Ordnung 17)

Antwort: ☒ 2

Frage 7: Nullteilerfreie Ringe

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$: Nullteilerfrei ✓ (Integritätsbereich)
- $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$: Nullteilerfrei ✓ (Körper, da 2 prim)
- $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$: Nicht nullteilerfrei, da $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4} = \overline{0}$
- $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$: Nullteilerfrei ✓ (Polynomring über Integritätsbereich)

Antwort: ☒ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, ☒ $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$, ☒ $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$

Frage 8: Algebraische Strukturen mit 6 Elementen

- Kommutative Gruppe: Ja, z.B. $(\mathbb{Z}_6, +)$ oder $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3, +)$ ✓
- Nicht-kommutative Gruppe: Ja, die symmetrische Gruppe S_3 hat 6 Elemente und ist nicht-kommutativ ✓
- Boolesche Algebra: Nein, Boolesche Algebren haben 2^n Elemente für $n \geq 1$, also 2, 4, 8, 16, ... aber nicht 6

Antwort: ☒ kommutative Gruppe, ☒ nicht-kommutative Gruppe

Frage 9: Permutationen mit $\pi^2 = \mathbf{id}$

- $(12)(34)$: $(12)(34) \circ (12)(34) = \text{id}$ ✓
- $(123)(4) = (123)$: $(123) \circ (123) = (132) \neq \text{id}$
- $(1)(23)(4) = (23)$: $(23) \circ (23) = \text{id}$ ✓

Antwort: ⊠ (12)(34), ⊠ (1)(23)(4)

Frage 10: Gerade Permutationen

Das Signum einer Permutation ist $(-1)^k$, wobei k die Anzahl der Transpositionen ist.

- $(12)(34)$: Zwei Transpositionen $\Rightarrow \text{sgn} = (-1)^2 = 1$ ✓ (gerade)
- (123): Ein 3-Zyklus = zwei Transpositionen $(12)(23) \Rightarrow \text{sgn} = (-1)^2 = 1$ ✓ (gerade)
- (23): Eine Transposition $\Rightarrow \text{sgn} = (-1)^1 = -1$ (ungerade)

Antwort: ⊠ (12)(34), ⊠ (123)(4)