Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 3 (2020W)
Lösungen

Aufgabe 3.1

Drücken Sie folgende Prädikate jeweils als Boolesche Ausdrücke aus oder argumentieren Sie, warum das nicht möglich ist. Verwenden Sie dabei die **offizielle Syntax** für $\mathcal{BA}(\mathcal{D})$, d.h. keine der zusätzlichen Notationsvereinbarungen, die auf den Vorlesungsfolien erwähnt werden.
Hinweis: Versuchen Sie möglichst kurze Ausdrücke zu finden.

a) Über $\mathcal{D} = \mathbb{N}$: $x - 3 \leq y^2$.

b) Über $\mathcal{D} = \mathbb{N}$: $2x$ ist ungerade.

c) Über $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$: $|x| \geq |y|$.

d) Über $\mathcal{D} = \text{FamX}$: Wenn x ein Sohn von Berta ist, dann ist auch y ein Sohn von Berta.

e) Über $\mathcal{D} = \text{FamX}$: x hat eine Schwester.

f) Über $\mathcal{D} = \mathbb{S}$: Die Tiefe von x ist höchstens 3 und mindestens 1.
Hinweis: Die Tiefe eines Stacks ist die Anzahl der darin vorkommenden Stackelemente ($\underline{\mathtt{0}}$ oder $\underline{\mathtt{1}}$).

g) Über $\mathcal{D} = \mathbb{S}$: Genau einer der beiden Stacks x und y ist leer, falls Stack z leer ist.

Lösung 3.1

a) $\underline{\neg\leq(+(*(\mathtt{y},\mathtt{y}),+(\mathtt{1},+(\mathtt{1},\mathtt{1}))),\mathtt{x})}$
Beachten Sie, dass 3 in $\mathbb{N}$ nicht als Konstantensymbol zur Verfügung steht.
Da es in der Signatur $\Sigma_{\mathbb{N}}$ kein Zeichen für die $\leq$-Relation gibt, wurde mit der Ausdruck hier als Negation einer $<$-Relation formuliert.
In diesem konkreten Fall könnte man '$-$' auch durch '$\dot{-}$' ersetzen, weil (trotz der unterschiedlichen Bedeutung von '$-$' und '$\dot{-}$') für alle $x, y \in \omega$ gilt: $x-3 \leq y^2$ gdw. $x \dot{-} 3 \leq y^2$. Daher ist beispielsweise auch folgender Boolesche Ausdruck eine korrekte Lösung:
$\underline{\neg\leq(*(\mathtt{y},\mathtt{y}),\dot{-}(\mathtt{x},+(\mathtt{1},+(\mathtt{1},\mathtt{1}))))}$.
Es gibt aber natürlich viele weitere alternative Lösungen, z.B.
$\underline{(\mathtt{x}=+(*(\mathtt{y},\mathtt{y}),+(\mathtt{1},+(\mathtt{1},\mathtt{1})))\vee\leq(\mathtt{x},+(*(\mathtt{y},\mathtt{y}),+(\mathtt{1},+(\mathtt{1},\mathtt{1})))))}$.

b) Jedes Vielfache von 2 ist gerade. Daher benötigen wir einen Booleschen Ausdruck, der in jeder Umgebung (Variablenbelegung) falsch ist, z.B. $\underline{\neg\mathtt{0}=\mathtt{0}}$ oder $\underline{\leq(\mathtt{x},\mathtt{x})}$.

c) Es ist geschickt auszunützen, dass $|x| \geq |y| \Longleftarrow x^2 \geq y^2$ gilt. Daher:
$\underline{\neg\leq(*(\mathtt{x},\mathtt{x}),*(\mathtt{y},\mathtt{y}))}$

d) $\underline{(\neg(\mathit{Berta}=\mathit{Mutter}(\mathtt{x})\wedge\mathit{männlich}(\mathtt{x}))\vee(\mathit{Berta}=\mathit{Mutter}(\mathtt{y})\wedge\mathit{männlich}(\mathtt{y})))}$
Beachten Sie, dass 'Wenn A, dann B' zu 'Nicht A oder B' umgeformt werden muss.

e) Es gibt keinen Booleschen Ausdruck, der über der Signatur Σ_{FamX} das einstellige Prädikat 'hat eine Schwester' ausdrückt. Dazu benötigt man einen Existenzquantor. Z.B. würde
$\exists\underline{\mathtt{y}}\underline{(\mathit{Geschwister}(\mathtt{x},\mathtt{y})\wedge\mathit{weiblich}(\mathtt{y}))}$
das gesuchte Prädikat ausdrücken. Diese Formel ist aber kein Boolescher Ausdruck.

f) $\underline{(\text{istleer?}(\text{pop}(\text{pop}(\text{pop}(x))))\wedge\neg\text{istleer?}(x))}$

g) $\underline{(((\text{istleer?}(x)\wedge\neg\text{istleer?}(y))\vee(\text{istleer?}(y)\wedge\neg\text{istleer?}(x)))}\vee\underline{\neg\text{istleer?}(z))}$

Aufgabe 3.2

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen über Terme $t \in \mathcal{T}(\mathbb{N})$ in offizieller Syntax, wobei t jeweils nur die Variable $\underline{\mathtt{x}}$ oder gar kein Variablensymbol enthält. Im positiven Fall ist ein induktiver Beweis zu erbringen; im negativen Fall ein konkretes Gegenbeispiel anzugeben. ($|t|_c$ bezeichnet die Anzahl der Vorkommen des Symbols c in t; $|t|$ die Länge von t, also die Anzahl aller Symbolvorkommen in t. I ist jeweils eine beliebige Variablenbelegung.)
Hinweis: Es ist oft angebracht als Induktionshypothese eine stärkere Aussage zu verwenden als die, die es eigentlich zu beweisen gilt.

a) $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t) \geq \min(I(\underline{\mathtt{x}}), |t|_{\underline{\mathtt{1}}})$, falls $|t|_{\underline{\dot{-}}} = |t|_{\underline{*}} = |t|_{\underline{\mathtt{0}}} = 0$.

b) $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t) \geq \min(|t|_{\underline{*}}, |t|_{\underline{+}})$, falls $|t|_{\underline{\dot{-}}} = |t|_{\underline{\mathtt{x}}} = |t|_{\underline{\mathtt{0}}} = 0$.

c) $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t) \leq |t|^{2 \cdot I(\underline{\mathtt{x}}) + |t|_{\underline{\mathtt{1}}} + 1}$.

d) $|t|_{\underline{(}} + 1 \geq |t|_{\underline{\mathtt{0}}} + |t|_{\underline{\mathtt{1}}} + |t|_{\underline{\mathtt{x}}}$.

Lösung 3.2

a) Wir zeigen die stärkere Behauptung $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t) \geq |t|_{\underline{\mathtt{1}}}$ falls $|t|_{\underline{\dot{-}}} = |t|_{\underline{*}} = |t|_{\underline{\mathtt{0}}} = 0$.
Wir argumentieren durch Induktion gemäß des Aufbaus von t (strukturelle Induktion):

Induktionsanfang. Wir unterscheiden 2 Fälle:

(1) $t = \underline{\mathtt{x}}$: Es gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t) = I(\underline{\mathtt{x}}) \geq |t|_{\underline{\mathtt{1}}} = 0$.

(2) $t = \underline{\mathtt{1}}$: $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t) = 1$ und $|t|_{\underline{\mathtt{1}}} = 1$; daher $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t) \geq |t|_{\underline{\mathtt{1}}}$.

Beachte: Wegen $|t|_{\underline{\mathtt{0}}} = 0$ ist $t = \underline{\mathtt{0}}$ nicht möglich.

Induktionsschritt. Wegen $|t|_{\underline{\dot{-}}} = |t|_{\underline{*}} = 0$ ist t für $|t| > 1$ von der Form $\underline{+}\underline{(}t_1\underline{,}t_2\underline{)}$.
Die *Induktionsannahme* besagt: $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t_i) \geq |t_i|_{\underline{\mathtt{1}}}$ für $i \in \{1,2\}$.
Wir erhalten $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t_1) + \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t_2) \geq^{IH} |t_1|_{\underline{\mathtt{1}}} + |t_2|_{\underline{\mathtt{1}}} = |t|_{\underline{\mathtt{1}}}$.
(^{IH} bezeichnet die Stelle an der die Induktionsannahme benutzt wird.)

b) Wir zeigen die stärkere Behauptung $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t) \geq |t|_{\underline{+}} + 1$ durch strukturelle Induktion:

Induktionsanfang. Wegen $|t|_{\underline{\mathtt{x}}} = |t|_{\underline{\mathtt{0}}} = 0$ gibt es nur einen Fall:

– $t = \underline{\mathtt{1}}$: $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t) = 1$ und $|t|_{\underline{+}} = 0$; daher $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t) \geq |t|_{\underline{+}} + 1$.

Induktionsschritt. Wegen $|t|_{\underline{\dot{-}}} = 0$ gilt für $|t| > 1$ entweder $t = \underline{+}\underline{(}t_1\underline{,}t_2\underline{)}$ oder $t = \underline{*}\underline{(}t_1\underline{,}t_2\underline{)}$.
Die *Induktionsannahme* lautet $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t_i) \geq |t_i|_{\underline{\mathtt{1}}}$ für $i \in \{1,2\}$.

(1) $t = \underline{+}\underline{(}t_1\underline{,}t_2\underline{)}$: Es gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t_1) + \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t_2) \geq^{IH} (|t_1|_{\underline{+}} + 1) + (|t_2|_{\underline{+}} + 1)$ $= |t_1|_{\underline{+}} + |t_2|_{\underline{+}} + 2 \geq |t|_{\underline{+}} + 1$.

(1) $t = \underline{*}\underline{(}t_1\underline{,}t_2\underline{)}$: Es gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t_1) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t_2) \geq^{IH} (|t_1|_{\underline{+}} + 1) \cdot (|t_2|_{\underline{+}} + 1) =$ $|t_1|_{\underline{+}} \cdot |t_2|_{\underline{+}} + |t_1|_{\underline{+}} + |t_2|_{\underline{+}} + 1 \geq |t_1|_{\underline{+}} + |t_2|_{\underline{+}} + 1 \geq |t|_{\underline{+}} + 1$.

(^{IH} bezeichnet die Stellen an der die Induktionsannahme benutzt wird.)

c) Die Behauptung ist falsch. $t = \underline{\mathtt{x}}$ ist ein Gegenbeispiel für die Variablenbelegung $I(\underline{\mathtt{x}}) = 2$, denn in dieser Umgebung gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I,t) = I(\underline{\mathtt{x}}) = 2 > |t|^{2 \cdot I(\underline{\mathtt{x}}) + |t|_{\underline{\mathtt{1}}} + 1} = 1^{2 \cdot 2 + 0 + 1} = 1$.

d) Beweis durch strukturelle Induktion:

Induktionsanfang. Wir unterscheiden 3 Fälle:

(1) $t \in IVS$: $|t|_{\underline{(}} = |t|_{\underline{\mathtt{0}}} = |t|_{\underline{\mathtt{1}}} = 0$ und $|t|_{\underline{\mathtt{x}}} = 1$; daher $|t|_{\underline{(}} + 1 = 1 \geq |t|_{\underline{\mathtt{0}}} + |t|_{\underline{\mathtt{1}}} + |t|_{\underline{\mathtt{x}}} = 0 + 0 + 1 = 1$.

(2) $t = \underline{\mathtt{0}}$: $|t|_{\underline{(}} = 0$, $|t|_{\underline{\mathtt{0}}} = 1$, $|t|_{\underline{\mathtt{1}}} = 0$; daher $|t|_{\underline{(}} + 1 = 1 \geq |t|_{\underline{\mathtt{0}}} + |t|_{\underline{\mathtt{1}}} + |t|_{\underline{\mathtt{x}}} = 1 + 0 + 0 = 1$.

(3) $t = \underline{\mathtt{1}}$: $|t|_{\underline{(}} = 0$, $|t|_{\underline{\mathtt{0}}} = 0$, $|t|_{\underline{\mathtt{1}}} = 1$; daher $|t|_{\underline{(}} + 1 = 1 \geq |t|_{\underline{\mathtt{0}}} + |t|_{\underline{\mathtt{1}}} + |t|_{\underline{\mathtt{x}}} = 0 + 1 + 0 = 1$.

Induktionsschritt. $t = \circ(t_1, t_2)$, wobei $\circ \in \{\underline{+}, \underline{\dot{-}}, \underline{*}\}$.

Die *Induktionsannahme* besagt: $|t_i|_{\underline{(}} + 1 \geq |t_i|_{\underline{0}} + |t_i|_{\underline{1}} + |t|_{\underline{x}}$ für $i \in \{1,2\}$.

Da t eine öffnende Klammer enthält, die nicht in t_1 oder t_2 vorkommt, gilt

$$|t|_{\underline{(}} + 1 = (1 + |t_1|_{\underline{(}} + |t_2|_{\underline{(}}) + 1 = (|t_1|_{\underline{(}} + 1) + (|t_2|_{\underline{(}} + 1) \geq^{IH}$$
$$(|t_1|_{\underline{0}} + |t_1|_{\underline{1}} + |t_1|_{\underline{x}}) + (|t_2|_{\underline{0}} + |t_2|_{\underline{1}} + |t_2|_{\underline{x}}) = |t|_{\underline{0}} + |t|_{\underline{1}} + |t|_{\underline{x}}.$$

(^{IH} bezeichnet die Stelle an der die Induktionsannahme benutzt wird.)

Aufgabe 3.3

Untersuchen Sie eine Variante der Programmiersprache $AL(\mathcal{D})$, in der es keine $\underline{\texttt{while}}$-Schleifen, dafür aber $\underline{\texttt{repeat}}$-$\underline{\texttt{until}}$-Schleifen gibt.

a) Spezifizieren Sie eine Bedingung (AL4') zur Festlegung der Syntax und eine entsprechende Bedingung (MAL4') zur Festlegung der Semantik der üblichen $\underline{\texttt{repeat}}$-$\underline{\texttt{until}}$-Schleifenkonstruktion. *Hinweis:* Formulieren Sie die Bedingungen ohne Rückführung auf die $\underline{\texttt{while}}$-Schleife!

b) Überprüfen Sie Ihre Definitionen durch schrittweise Auswertung des Programms $\underline{\texttt{repeat}}\ \underline{\mathrm{x}} \underline{\leftarrow} \underline{\mathrm{x}}\underline{-}\underline{3}\ \underline{\texttt{until}}\ \underline{\mathrm{x}} \underline{\leq} \underline{\mathrm{y}}$ in einem Environment I mit $I(\underline{\mathrm{x}}) = 7$ und $I(\underline{\mathrm{y}}) = 3$ über $\mathbb{Z}$.

Lösung 3.3

a) **(AL4')** Ist $B \in \mathcal{BA}(\mathcal{D})$ und $\alpha \in AL(\mathcal{D})$, dann ist $\underline{\texttt{repeat}}\,\alpha\,\underline{\texttt{until}}\,B \in AL(\mathcal{D})$.

(MAL4') $$\mathcal{M}_{AL}(I, \underline{\texttt{repeat}}\,\alpha\,\underline{\texttt{until}}\,B) = \begin{cases} \mathcal{M}_{AL}(I,\alpha) & \text{falls } w = \mathbf{t} \\ \mathcal{M}_{AL}(\mathcal{M}_{AL}(I,\alpha), \underline{\texttt{repeat}}\,\alpha\,\underline{\texttt{until}}\,B) & \text{falls } w = \mathbf{f} \end{cases}$$
wobei w eine Abkürzungen für $\mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(\mathcal{M}_{AL}(I,\alpha), B)$ ist.

b) Es sei I eine Umgebung mit $I(\underline{\mathrm{x}}) = 7$ und $I(\underline{\mathrm{y}}) = 3$.

$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}_{AL}(I, \underline{\texttt{repeat}}\,\underline{\mathrm{x}} \underline{\leftarrow} \underline{\mathrm{x}}\underline{-}\underline{3}\,\underline{\texttt{until}}\ \underline{\mathrm{x}} \underline{\leq} \underline{\mathrm{y}}) \\
& \quad [\ \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I', \underline{\mathrm{x}} \underline{\geq} \underline{\mathrm{y}}) = [\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I', \underline{\mathrm{x}}) < \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I', \underline{\mathrm{y}})] = [4<3] = \mathbf{f}\ ] \\
& \quad \text{wobei } I' = \mathcal{M}_{AL}(I, \underline{\mathrm{x}} \underline{\leftarrow} \underline{\mathrm{x}}\underline{-}\underline{3}), \text{also} \\
& \quad\ I'(\underline{\mathrm{x}}) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{\mathrm{x}}\underline{-}\underline{3}) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{\mathrm{x}}) - \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{3}) = I(\underline{\mathrm{x}}) - 3 = 7 - 3 = 4 \\
& \quad\ I'(v) = I(v) \text{ für } v \neq \underline{\mathrm{x}} \\
\overset{MAL4'}{=}\ & \mathcal{M}_{AL}(I', \underline{\texttt{repeat}}\,\underline{\mathrm{x}} \underline{\leftarrow} \underline{\mathrm{x}}\underline{-}\underline{3}\,\underline{\texttt{until}}\ \underline{\mathrm{x}} \underline{\leq} \underline{\mathrm{y}}) \\
& \quad [\ \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I'', \underline{\mathrm{x}} \underline{\geq} \underline{\mathrm{y}}) = [\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I'', \underline{\mathrm{x}}) > \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I'', \underline{\mathrm{y}})] = [1<3] = \mathbf{t}\ ] \\
& \quad \text{wobei } I'' = \mathcal{M}_{AL}(I', \underline{\mathrm{x}} \underline{\leftarrow} \underline{\mathrm{x}}\underline{-}\underline{3}), \text{also} \\
& \quad\ I''(\underline{\mathrm{x}}) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I', \underline{\mathrm{x}}\underline{-}\underline{3}) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I', \underline{\mathrm{x}}) - \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{3}) = I'(\underline{\mathrm{x}}) - 3 = 4 - 3 = 1 \\
& \quad\ I''(v) = I'(v) \text{ für } v \neq \underline{\mathrm{x}} \\
\overset{MAL4'}{=}\ & I'' \quad (\text{wobei } I''(\underline{\mathrm{x}}) = 1, I''(\underline{\mathrm{y}}) = 3)
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.4

Formalisieren Sie folgende Sätze als PL-Formeln. Wählen Sie dabei jeweils zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie (inklusive Stelligkeit) und die intendierte Bedeutung aller Elemente der Signatur vollständig an.

a) Nicht alle Katzen fliehen vor jedem Hund, den sie sehen.

b) In jedem Raum befindet sich genau ein Tisch, der vor einem Sessel steht.

c) Esras Mutter kennt beide Kinder von Anna.

d) Jede Professorin betreut mindestens drei Studierende.

Wenn Ihnen ein Satz mehrdeutig erscheinen sollte, so diskutieren Sie alternative Interpretationen.

Lösung 3.4

a) Signatur $\langle\{K, H, F, S\}, \{\}, \{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:

Prädikatensymbole:

$K(x)$ ... x ist eine Katze (einstellig)
$H(x)$ ... x ist ein Hund (einstellig)
$F(x, y)$ ... x flieht vor y (zweistellig)
$S(x, y)$ ... x sieht y (zweistellig)

PL-Formel: $\neg\forall x(K(x) \supset \forall y(H(y) \wedge S(x, y) \supset F(x, y)))$
Lösungen, die der Struktur des Satzes weniger direkt folgen, sondern logische Umformungen vornehmen, sind für mache Anwendungen problematisch, können aber ebenfalls korrekt sein. Z.B. $\exists x\exists y(K(x) \wedge H(y) \wedge S(x, y) \wedge \neg F(x, y))$

b) Signatur $\langle\{R, T, S, B, V\}, \{\}, \{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:

Prädikatensymbole:

$R(x)$ ... x ist ein Raum (einstellig)
$T(x)$ ... x ist ein Tisch (einstellig)
$S(x)$ ... x ist ein Sessel (einstellig)
$B(x, y)$ ... x befindet sich in y (zweistellig)
$V(x, y)$ ... x steht vor y (zweistellig)

Der Satz kann auf mindestens zwei unterschiedliche Arten gelesen werden:

(1) Es kann durchaus auch mehrere Tische in einem Raum geben; allerdings ist nur jeweils genau ein Tisch so platziert, dass er vor (mindestens) einem Sessel steht. Dieser Lesart entspricht folgende PL-Formel:

$$\forall x(R(x) \supset \exists y[T(y) \wedge B(y, x) \wedge \exists z(S(z) \wedge V(y, z)) \wedge \forall u(T(u) \wedge B(u, x) \wedge \exists z(S(z) \wedge V(u, z)) \supset u = y)])$$

(2) Eine zweite Lesart besteht darauf, dass sich nur immer genau ein Tisch in jedem Raum befindet. Von jedem dieser Tische wird dann jeweils ausgesagt, dass er vor (mindestens) einem Sessel steht. Dieser Lesart entspricht folgende PL-Formel:

$$\forall x(R(x) \supset \exists y[T(y) \wedge B(y, x) \wedge \forall u(T(u) \wedge B(u, x) \supset u = y) \wedge \exists z(S(z) \wedge V(y, z)])$$

Es ist auch denkbar 'vor einem Sessel' alternativ als 'vor genau einem Sessel zu lesen'. Das ist allerdings weniger naheliegend und soll hier nicht weiter betrachtet werden.

Man kann beide Formeln auch so umformen, dass die Quantoren am Beginn der Formel stehen. Im Allgemeinen ist allerdings ratsam, jedes Quantorenvorkommen möglichst nahe an diejenige Teilformeln zu rücken, die die entsprechend quantifizierte Variable auch tatsächlich enthalten.

c) Signatur $\langle\{K\}, \{e, a\}, \{m\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:

Prädikatensymbol:

$K(x, y)$ ... x kennt y (zweistellig)

Funktionssymbol

$m(x)$ ... die Mutter von x (einstellig)

Konstantensymbole:

e ... Esra
a ... Anna

PL-Formel:
$\exists x\exists y[K(m(e), x) \wedge K(m(e), y) \wedge a = m(x) \wedge a = m(y) \wedge x \neq y \wedge \forall z(a = m(z) \supset z = x \vee z = y)]$
Hier wurde berücksichtigt, dass 'Anna' der Name einer Frau ist und Anna deshalb die Mutter ihrer Kinder ist.

Es wäre ungeschickt für 'Kind-sein-von' ein Prädikatensymbol einzuführen, da damit der Zusammenhang zwischen 'Mutter von' und 'Kind einer weiblichen Person' verloren geht.

Beachte: Die Phrase 'beide Kinder' zeigt an, dass Ada genau zwei Kinder hat.

Es ist prinzipiell möglich 'ist Mutter von' alternativ als zweistellige Relation (Prädikat) zu interpretieren. Wie in der Vorlesung diskutiert, sollte man aber nacheindeutige Relationen, also funktionale Beziehungen, kompakter und expliziter mit Funktionssymbolen ausdrücken, wenn immer das möglich ist.

d) Signatur $\langle\{P,S,B\},\{\},\{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Prädikatensymbole:
$P(x)$ ... x ist eine Professorin (einstellig)
$S(x)$ ... x ist ein/e Studierende/r (einstellig)
$B(x,y)$ ... x betreut y (zweistellig)

PL-Formel: $\forall x(P(x) \supset \exists y\exists z\exists u[S(y)\wedge S(z)\wedge S(u)\wedge B(x,y)\wedge B(x,z)\wedge B(x,u)\wedge y\neq z\wedge y\neq u\wedge z\neq u])$

Aufgabe 3.5

Spezifizieren Sie zu folgenden Formeln jeweils ein Modell $\mathcal{I}$ und ein Gegenbeispiel $\mathcal{J}$ über dem angegebenen Gegenstandsbereich D. Argumentieren Sie jeweils, warum $\mathcal{I}$ ein Modell und $\mathcal{J}$ ein Gegenbeispiel ist. Geben Sie außerdem für jede Formel an welche Variablen dort frei bzw. gebunden vorkommen. (Beachten Sie die in der Vorlesung eingeführten Notationsvereinbarungen und Klammereinsparungsregeln.)

a) Über $D=\omega$: $\exists x\forall y(f(x,y)=z\wedge[Q(x)\supset\forall xP(f(a,x),x)])$

b) Über $D=\{0,1\}$: $\forall yR(x,g(y),a)\supset\forall x\neg R(x,a,g(x))\vee\exists zR(b,x,z)$

c) Über $D=\{\underline{0},\underline{1}\}^*$: $\forall x\forall yP(x,f(x,y))\supset\exists x\forall yP(f(y,x),x)$

Lösung 3.5

Jede Interpretation, also jedes Modell und jedes Gegenbeispiel einer Formel, besteht aus 3 Bestandteilen: Dem Gegenstandsbereich D, der Signaturinterpretation Φ und der Variablenbelegung ξ. Da die Variablenbelegung nur für die *frei* vorkommenden Variablen relevant ist, ist es sinnvoll ξ nur für letztere festzulegen.

a) Die Variablen x und y kommen nur gebunden vor; z kommt nur frei vor. a ist keine Variable, sondern gemäß den Notationsvereinbarungen ein Konstantensymbol.

Es sei $\mathcal{I}=\langle\omega,\Phi_{\mathcal{I}},\xi_{\mathcal{I}}\rangle$, wobei $\Phi_{\mathcal{I}}(f)(m,n)=0$, $\Phi_{\mathcal{I}}(Q)(n)=\mathbf{f}$ für alle $m,n\in\omega$ und $\xi_{\mathcal{I}}(z)=0$. Die anderen Bestandteile von $\mathcal{I}$ spielen keine Rolle. Unter dieser Interpretation wird die Gleichung $f(x,y)=z$, also das linke Konjunkt, immer wahr, denn es drückt $0=0$ aus. Das rechte Konjunkt ist eine Implikation, deren Wenn-Teil $Q(x)$ immer falsch ist. Somit ist die Implikation wahr. Da also beide Konjunkte immer wahr sind, ist auch die Gesamtformel (quantifizierte Konjunktion) wahr.

Ein Gegenbeispiel $\mathcal{J}=\langle\omega,\Phi_{\mathcal{J}},\xi_{\mathcal{J}}\rangle$ erhalten wir, wenn wir $\Phi_{\mathcal{J}}(f)(m,n)=0$ und $\xi_{\mathcal{J}}(z)=1$ setzen. Unter dieser Interpretation ist die Gleichung $f(x,y)=z$, also das linke Konjunkt immer falsch. Damit wird die gesamte Formel falsch.

b) Die Variablen y und z kommen nur gebunden vor; x kommt in der Teil-Formel $\neg R(x,a,g(x))$ gebunden und in den atomaren Teil-Formeln $R(x,g(y),a)$ und $R(b,x,z)$ jeweils frei vor. (a und b sind Konstantensymbole.)

Die Formel ist eine Implikation; daher erhalten wir ein Modell $\mathcal{I}=\langle\{0,1\},\Phi_{\mathcal{I}},\xi_{\mathcal{I}}\rangle$, wenn wir für alle $m,n,p\in\{0,1\}$ $\Phi(R)(m,n,p)=\mathbf{f}$ setzen. Damit wird die linke Teilformel falsch und somit die Gesamtformel wahr. (Wir hätten auch $\Phi(R)(m,n,p)=\mathbf{t}$ setzen können um die rechte Teilformel wahr zu machen.) Alle anderen Bestandteile von $\mathcal{I}$ spielen keine Rolle und können beliebig festgesetzt werden.

Für ein Gegenbeispiel $\mathcal{J}=\langle\{0,1\},\Phi_{\mathcal{J}},\xi_{\mathcal{J}}\rangle$ muss die linke Teilformel wahr und die rechte falsch werden. Das ist, z.B., unter folgenden Festlegungen der Fall: $\xi_{\mathcal{J}}(x)=1$ (andere Variablen beliebig); $\Phi_{\mathcal{J}}(a)=\Phi_{\mathcal{J}}(b)=0$ und für alle $m,n,p\in\{0,1\}$: $\Phi_{\mathcal{J}}(g)(m)=m$, sowie

$$\Phi(R)(m,n,p)=\begin{cases}\mathbf{f} & \text{falls } m=0\\ \mathbf{t} & \text{sonst.}\end{cases}$$

Es gilt $\mathrm{val}_{\mathcal{J}}(\forall yR(x,g(y),a))=\mathbf{t}$, aber $\mathrm{val}_{\mathcal{J}}(\forall x\neg R(x,a,g(x)))=\mathbf{f}$ und $\mathrm{val}_{\mathcal{J}}(\exists zR(b,x,z))=\mathbf{f}$. Somit ist die Disjunktion, also die rechte Teilformel der Implikation, falsch und die linke Teilformel der Implikation wahr. Daher ist die gesamte Formel unter dieser Interpretation falsch.

c) Die Variablen x und y kommen nur gebunden vor; es gibt keine freien Variablen.

Für ein Modell über der Domäne der Binärstrings, $\mathcal{I} = \langle\{\underline{0}, \underline{1}\}^*, \Phi_{\mathcal{I}}, \xi_{\mathcal{I}}\rangle$, interpretieren wir das Prädikatensymbol P als die Relation 'enthält (als Teilstring)' und des Funktionssymbol f als Konkatenation. Formaler setzen wir für alle $s, t \in \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$ Folgendes fest: $\Phi_{\mathcal{I}}(P)(s,t) = \mathbf{t} \Longleftrightarrow s = utv$ für irgendwelche $u, v \in \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$ und $\Phi_{\mathcal{I}}(f)(s,t) = st$. Unter der Interpretation $\mathcal{I}$ drückt die rechte Teilformel $(\exists x \forall y P(f(y,z),x))$ aus, dass einen String gibt, der in jedem zusammengesetzten String als Teilstring enthalten ist. Das trifft auf das Leerwort zu. Daher ist diese Teilformel und somit die gesamte Implikation wahr in $\mathcal{I}$. (Wir hätten auch, noch einfacher, $\Phi_{\mathcal{I}}(P)(s,t) = \mathbf{t}$ für alle $s, t \in \{\underline{0}, \underline{1}\}$ setzen können.)

Für ein Gegenbeispiel $\mathcal{J} = \langle\{0, 1\}^*, \Phi_{\mathcal{J}}, \xi_{\mathcal{J}}\rangle$ interpretieren wir f wieder als Konkatenation und P als das Prädikat 'ist ein Teilstring von'. Wir legen also für alle $s, t \in \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$ Folgendes fest: $\Phi_{\mathcal{I}}(P)(s,t) = \mathbf{t} \Longleftrightarrow t = usv$ für irgendwelche $u, v \in \{\underline{0}, \underline{1}\}^*$ und $\Phi_{\mathcal{I}}(f)(s,t) = st$. Unter dieser Interpretation besagt die linke Teilformel $(\forall x \forall y P(x, f(x,y)))$ Folgendes: Für alle Strings s und t gilt, dass s ein Teilstring von st ist. Die rechte Teilformel $(\exists x \forall y P(f(y,z),x))$ besagt hingegen: Es gibt einen String der jeden zusammengesetzten String als Teilstring enthält. Weil daher der Wenn-Teil der Implikation wahr und der Dann-Teil falsch ist, ist die Formel unter dieser Interpretation falsch.