5. Man prüfe nach, ob die Funktionen

(a) $f(x,y,z) = x + (yz)^{\frac{1}{2}}$ (für $y,z \geq 0$)

(b) $f(x,y) = x^2 + y$

(c) $f(x,y) = ax^b y^c$ (mit $a,b,c \in \mathbb{R}$, $x,y > 0$)

homogen sind.

a) $f(x,y,z) = x + (yz)^{\frac{1}{2}}$ (für $y,z \geq 0$)

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^r \cdot f(x,y,z)$$

$$\lambda x + (\lambda y \cdot \lambda z)^{\frac{1}{2}} = \lambda^r \cdot \left(x + (yz)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\lambda x + (\lambda^2 yz)^{\frac{1}{2}} = \lambda^r \cdot \left(x + (yz)^{\frac{1}{2}} \right)$$ links und rechts das Gleiche, r = 1 → homogen

$$\lambda x + \lambda \cdot (yz)^{\frac{1}{2}} = \lambda^r \cdot \left(x + (yz)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\lambda \cdot \left(x + (yz)^{\frac{1}{2}} \right) = \lambda^r \cdot \left(x + (yz)^{\frac{1}{2}} \right)$$

b) $f(x,y) = x^2 + y$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r \cdot f\left(x^2 + y\right)$$

$$(\lambda x)^2 + \lambda y = \lambda^r \cdot \left(x^2 + y\right)$$

$$\lambda^2 x^2 + \lambda y = \lambda^r \cdot \left(x^2 + y\right)$$

$$\lambda \cdot \left(\lambda x^2 + y\right) \neq \lambda^r \cdot \left(x^2 + y\right)$$

links und rechts steht NICHT das Gleiche → nicht homogen

c) $f(x,y) = ax^b y^c$ (mit $a,b,c \in \mathbb{R}$, $x,y > 0$)

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^r \cdot f(ax^b y^c)$$

$$a \cdot (\lambda x)^b \cdot (\lambda y)^c = \lambda^r \cdot (ax^b y^c)$$ links und rechts steht das Gleiche, r = b+c → homogen

$$a \cdot \lambda^b x^b \cdot \lambda^c y^c = \lambda^r \cdot (ax^b y^c)$$

$$\lambda^{b+c} \cdot \left(ax^b y^c\right) = \lambda^r \cdot (ax^b y^c)$$