Allg. Lsg. der lin. DGL 1. Ordnung:

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = s(x)$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$y_h(x)$: allg. Lsg. der homogenen DGL

$y_p(x)$: eine Partikulärlsg. der inhomogenen DGL

- Homogene DGL:

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = 0$$

Methode: "Trennung der Variablen"

$$\rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -a(x)$$

$\frac{y'}{y}$: "y" auf eine Seite

$-a(x)$: "x" auf andere Seite

$\Rightarrow$ allg. Lsg.:

$$y_h(x) = C \cdot e^{-A(x)}, \quad C \in \mathbb{R},$$

$A(x) = \int a(x) \cdot dx$ Stammfkt. von $a(x)$

· Inhomogene DGL:

$$y'(x) + a(x) \cdot y(x) = s(x)$$

Methode: „Variation der Konstanten"

um eine Partikulärlsg. der inhomogenen DGL zu erhalten

Ansatz: $y_p(x) = C(x) \cdot e^{-A(x)}$, $A(x) = \int a(x) \cdot dx$

$$C'(x) \cdot e^{-A(x)} - C(x) \cdot e^{-A(x)} \cdot \overbrace{A'(x)}^{a(x)} + a(x) \cdot y(x) = s(x)$$

$$C'(x) \cdot e^{-A(x)} - \cancel{C(x) \cdot e^{-A(x)} \cdot a(x) + a(x) \cdot C(x) \cdot e^{-A(x)}} = s(x)$$

$$C'(x) = s(x) \cdot e^{A(x)}$$

$$C(x) = \int s(x) \cdot e^{A(x)} \cdot dx$$

$$\rightarrow \quad y_p(x) = e^{-A(x)} \cdot \int s(x) \cdot e^{A(x)} \cdot dx$$

$$y' + a(x) \cdot y = s(x)$$

$\Rightarrow$ allg. Lsg.:

$$y(x) = e^{-A(x)} \cdot \int s(x) \cdot e^{A(x)} \cdot dx + C \cdot e^{-A(x)},$$

wobei $A(x) = \int a(x) \cdot dx$

Bsp.:

$$y' + y \cdot \cos x = \sin x \cdot \cos x$$

$$y = y_h + y_p$$

hom.: $y' + y \cdot \cos x = 0$

$$\frac{y'}{y} = -\cos x$$

Trennel $y_h = C \cdot e^{-\int \cos x \cdot dx} =$

$$= C \cdot e^{-\sin x} \quad \text{: allg. Lg. hom.}$$

Part.: $y_p = C(x) \cdot e^{-\sin x}$

$$c'(x) \cdot e^{-\sin x} + \cancel{C(x) \cdot e^{-\sin x} \cdot (-\cos x)}$$

$$+ \cancel{C(x) \cdot e^{-\sin x} \cdot \cos x} = \sin x \cdot \cos x$$

$$c'(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x}$$

$$c(x) = \int \sin x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x} \cdot dx =$$

$$\Rightarrow \sin x = u \qquad \text{Subst.}$$

$$du = \cos x \cdot dx$$

$$= \int u \cdot e^{u} \cdot du =$$

$$= u \cdot e^{u} - \int 1 \cdot e^{u} \cdot du =$$

$$= u \cdot e^{u} - e^{u} =$$

$$= \sin x \cdot e^{\sin x} - e^{\sin x}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = C(x) \cdot e^{-\sin x} =$$

$$= \sin x - 1$$

$\Rightarrow$ allg. Lsg.:

$$y(x) = \sin x - 1 + C \cdot e^{-\sin x}$$

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

2. Ordnung:

$$y'' + ay' + by = \begin{cases} 0 \text{ ... homogen} \\ s(x) \text{ ... inhomogen} \end{cases}$$

a, b Konstante

Allg. Lsg.: $y = y_h + y_p$

y_h: allg. Lsg. homogene DGL

y_p: eine Partikulärlsg. der inhomogenen DGL

• Allg. Lsg. homogene DGL

$$y'' + a y' + by = 0$$

$$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = 0$$

$\Rightarrow$ "Exponentialansatz":

$$y(x) = e^{\lambda \cdot x}$$

$$y'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$$

$$y''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x} + a \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + b \cdot e^{\lambda x} = 0$$

$$(\lambda^2 + a\lambda + b) \cdot \cancel{e^{\lambda x}} = 0$$

$$\boxed{\overbrace{\lambda^2 + a\lambda + b}^{\text{char. Polynom}} = 0}$$

$\Downarrow$

charakteristische Glg.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} =$$

$$= \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$ — D Diskriminante

3 Fälle:

$D > 0$

$D < 0$

$D = 0$

$D > 0$: 2 verschiedene reelle Lsg.

$\lambda_1 \neq \lambda_2$

$e^{\lambda_1 \cdot x}$, $e^{\lambda_2 \cdot x}$ Lsg. der DGL.

$$y_h(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$$

$D < 0$: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$

$\lambda_2 = \alpha - i\beta$

konj. komplexe Lsg.

allg. Lsg.:

$$y_h(x) = \underbrace{C_1 \cdot e^{(\alpha+i\beta)\cdot x} + C_2 \cdot e^{(\alpha-i\beta)\cdot x}}_{\text{"reelle machen"}} = \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{C}$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

$$= C_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \left(\cos(\beta x) + i \cdot \sin(\beta x)\right) +$$

$$+ C_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \left(\cos(\beta x) - i \cdot \sin(\beta x)\right) =$$

$$= e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \cdot (\overbrace{C_1 + C_2}^{\tilde{C}_1})$$

$$+ e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \cdot (\underbrace{i \cdot C_1 - i \cdot C_2}_{\tilde{C}_2})$$

$$= \tilde{C}_1 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta x) + \tilde{C}_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$$

$\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}$

$D = 0 \Rightarrow$ Doppellsg.

$\lambda_1 = \lambda_2$ reell

$$y_h(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda_1 \cdot x}$$

$$(c_1 + c_2 \cdot x) \cdot e^{\lambda_1 \cdot x}$$

Satz: λ_1, λ_2 Lösungen der charakteristischen Glg.

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

$\Rightarrow$ Allg. Lsg. der homogenen DGL

$y'' + ay' + by = 0$ geg. durch:

$$y_h(x) = \begin{cases} C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}, & \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ reell} \\ e^{\alpha \cdot x} \cdot \left(C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \sin(\beta x) \right), & \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \text{ konj. komplex} \\ (C_1 + C_2 \cdot x) \cdot e^{\lambda_1 \cdot x}, & \lambda_1 = \lambda_2 \text{ reell} \end{cases}$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ beliebig

- Ermitteln einer Partikulärlsg. $y_p(x)$ der inhom. DGL

$$y'' + a y' + b y = \underline{\underline{s(x)}}$$

Falls Störfkt. $s(x)$ "schöne Gestalt"

$\Rightarrow$ <u>"Methode des unbestimmten Ansatzes"</u>

- $s(x) = (a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_k \cdot x^k) \cdot e^{r \cdot x}$

$$\Downarrow$$

"Versuchslsg.": unbest. Koeff.

$$y_p(x) = (A_0 + A_1 \cdot x + \ldots + A_k \cdot x^k) \cdot e^{r x} \cdot x^{\nu(r)}$$

$\nu(r)$ .. Vielfachheit von r als Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

$\nu(r) > 0 \Rightarrow$ "<u>Resonanzfall</u>"

- $$s(x) = (a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_k \cdot x^k) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x)$$

oder $$s(x) = (a_0 + a_1 x + \dots + a_k \cdot x^k) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$$

$$\Downarrow$$

"Versuchslsg."

$$y_p(x) = \Big[(A_0 + A_1 \cdot x + \dots + A_k \cdot x^k) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) +$$
$$+ (B_0 + B_1 \cdot x + \dots + B_k \cdot x^k) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)\Big] \cdot x^{\nu(\alpha + i\beta)}$$

$\nu(\alpha + i\beta)$ .. Vielfachheit von $\alpha + i\beta$ als Nullstelle des charakt. Polynoms $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

Bsp.: $\boxed{y'' - 3y' - 4y = 2x}$

y_h: $e^{\lambda \cdot x}$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \quad \text{char. Glg.}$$

$$(\lambda - 4)\cdot(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = -1$$

$$\Rightarrow y_h = C_1 \cdot e^{4\cdot x} + C_2 \cdot e^{-x}$$

---

y_p: Vermdsh.

$$y_p = (A\cdot x + B)\cdot \underbrace{e^{0\cdot x}}_{1} \cdot \underbrace{x^{\overset{0}{\overset{\parallel}{\nu(0)}}}}_{1}$$

kein Resonanz.

$$= A\cdot x + B$$

$$y_p' = A, \quad y_p'' = 0$$

$$0 - 3A - 4Ax - 4B = 2x$$

Koeff.-vgl.: $-4A = 2 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

$-3A - 4B = 0 \Rightarrow B = -\frac{3}{4}A = \frac{3}{8}$

$\Rightarrow \quad y_p = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{8}$

$\Rightarrow \quad y(x) = y_h + y_p =$

$= -\frac{1}{2}x + \frac{3}{8} + C_1 \cdot e^{4x} + C_2 \cdot e^{-x}$