Hausübung 4

Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie WS 2016/2017

31. Oktober 2017

Aufgabe 2.6

Aus den De Morganschen Gesetzen folgt die Identität [1]

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c$$

Daraus folgt für die Aufgabe, dass

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c)\right)^c\right)$$

Aus $P(A^c) = 1 - P(A)$ [2] folgt

$$P\left(\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c)\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)$$

also gilt insgesamt

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right)$$

Aus der Boole'schen Ungleichung $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ folgt

$$1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i^c)$$

[1] `https://de.wikipedia.org/wiki/Σ-Algebra`
[2] Behauptung 3 in Kapitel 2.5 im Buch

analog zu

$$
\begin{aligned}
x &< y \\
x - 1 &< y - 1 \\
1 - x &> 1 - y
\end{aligned}
$$

und daher ist gezeigt, dass

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i^c)$$

Für endliche viele Ereignisse gilt

$$
\begin{aligned}
P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) &\geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + 1 - \sum_{i=1}^{n} (P(A_i) + P(A_i^c)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + 1 - n \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n - 1)
\end{aligned}
$$

0.1 Tafel

Aufgabe 2.9

CD Player können denselben Titel mehrmals auswählen, daher Ziehen mit Zurücklegen. Für keinen richtigen Titel erhalten wir schnell

$$\left(\frac{7}{8}\right)^8 = 0.3436$$

und für genau einen richtigen Titel

$$\binom{8}{1} \cdot \left(\left(\frac{7}{8}\right)^7 * \frac{1}{8}\right) = 0.3927$$

Für höhere Titelzahlen, z. B. $\left(\frac{999}{1000}\right)^{1000}$, nähern sich beide Werte immer mehr an die vorgegebene Lösung 0.3679. Warum?

Angelehnt an eine Lösung von Alexander Straschil aus der Übung 2006.

Sei $A \cap B = AB$ notiert. Bezeichne A_i das Ereignis, dass der i-te Titel an der i-ten Stelle gespielt wird. Dessen Wahrscheinlichkeit ist hier (Ziehen mit Zurücklegen) konstant 1/8. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass kein Titel an der richtigen Position ist. Das führt zur Gegenwahrscheinlichkeit in der Formel der In- und Exklusion (Additionstheorem).

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_r})$$

Wenn man sich um jeden Durchschnitt noch das P vorstellt, z. B. $P(A_1A_2)$, so ist für $n = 4$

$$\begin{aligned}
&A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\
&-(A_1A_2 + A_1A_3 + A_1A_4 + A_2A_3 + A_2A_4 + A_3A_4) \\
&+(A_1A_2A_3 + A_1A_2A_4 + A_1A_3A_4 + A_2A_3A_4) \\
&-(A_1A_2A_3A_4)
\end{aligned}$$

AlleA_i haben aber dieselbe Wahrscheinlichkeit. Daher ist das dasselbe wie

$$\begin{aligned}
&\binom{4}{1} \cdot P(A_i) \\
-&\binom{4}{2} \cdot P(A_{i_1} A_{i_2}) \\
+&\binom{4}{3} \cdot P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) \\
-&\binom{4}{4} \cdot P(A_1A_2A_3A_4)
\end{aligned}$$

Daher kann die Formel vereinfacht werden.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{i} P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_r})$$

Der Ausdruck $P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_r})$ wird berechnet mit

$$\frac{\text{Anzahl günstiger Fälle}}{\text{Anzahl möglicher Fälle}} = \frac{(n-r)!}{n!}$$

Möglich sind alle Permutationen von n Elementen. Günstig (d.h. der i-te Titel wird an i-ter Stelle gespielt) sind alle Fälle, in denen r Elemente fix an der richtigen Stelle sind und $n - r$ Elemente falsch.

Setzt man das ein, erhält man

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= 1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{r+1} \binom{n}{i} \frac{(n-i)!}{n!} \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{r+1} \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(n-i)!}{n!} \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{r+1} \frac{1}{i!} \end{aligned}$$

Mittlerweile sind die Variablen i und r austauschbar geworden. Geht n gegen unendlich, so gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \frac{1}{i!}\right) = \frac{1}{e} = 0.3679$$

Aufgabe 2.11

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{45}{91} \\ P(A_2 \mid A_1) &= \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{28}{55} \\ P(A_3 \mid A_1 A_2) &= \frac{\binom{3}{1}\binom{6}{2}}{\binom{9}{3}} = \frac{15}{28} \\ P(A_4 \mid A_1 A_2 A_3) &= \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{5} \\ P(A_5 \mid A_1 A_2 A_3 A_4) &= \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{2}}{\binom{3}{3}} = 1 \end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich mit dem Multiplikationstheorem

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{5} A_i\right) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_2 A_1)P(A_4 \mid A_1 A_2 A_3)P(A_5 \mid A_1 A_2 A_3 A_4) = 0.0809$$

Kombinatorische Lösung:

$$\frac{5!\frac{10!}{2!8!}\frac{8!}{2!6!}\frac{6!}{2!4!}\frac{4!}{2!2!}}{\frac{15!}{12!3!}\frac{12!}{3!9!}\frac{9!}{3!6!}\frac{6!}{3!3!}} = 0.0809$$

Aufgabe 2.13

Geraten: 150 und 300

Allgemein gilt

$$P(A) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$$

Es folgt

$$n = \frac{\ln(1 - P(A))}{\ln\frac{364}{365}}$$

Und für $P(A) = 0.5 \Rightarrow 253, P(A) = 0.9 \Rightarrow 840$

Aufgabe 2.16

Es muss gelten $a + b + c = 1$. Die Dreiecksungleichungen

$$\begin{aligned} a &\leq b + c \\ b &\leq a + c \\ c &\leq a + b \end{aligned}$$

müssen gelten. Sei A_1 die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Strich den Ungleichungen genügt, d. h. in den vorderen 50 cm liegt. Sei A_2 die Wahrscheinlichkeit, dass der zweite Strich in den hinteren 50 cm liegt. Allgemein gilt $P(A_i) = \frac{\text{Größe von } A}{\text{Größe von } \Omega}$. Aus

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \frac{0.5}{1} \\ P(A_2) &= \frac{0.5}{1} \end{aligned}$$

folgt

$$P(A_1 \mid A_2) = P(A_2 \mid A_1) = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 2.19

$$
\begin{aligned}
P(T) &= P(\text{Hauptverdächtiger ist Täter}) = 0.6 \\
P(\overline{T}) &= P(\text{Hauptverdächtiger ist nicht Täter}) = 0.4 \\
P(M) &= P(\text{Person besitzt Merkmal}) = 0.2 \\
P(M \mid T) &= P(\text{Täter besitzt Merkmal}) = 1 \\
P(M \mid \overline{T}) &= P(\text{Nicht-Täter besitzt Merkmal}) = 0.2
\end{aligned}
$$

Aus dem Satz von Bayes folgt

$$
P(T \mid M) = \frac{P(M \mid T) \cdot P(T)}{P(M \mid T) \cdot P(T) + P(M \mid \overline{T}) \cdot P(\overline{T})} = \frac{1 \cdot 0.6}{1 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4} = 0.8824
$$

In Odds-Form

$$
\frac{P(T \mid M)}{P(\overline{T} \mid M)} = \frac{P(T)}{P(\overline{T})} \times \frac{P(M \mid T)}{P(M \mid \overline{T})} = \frac{0.6}{0.4} \cdot \frac{1}{0.2} = 7.5
$$

2.20

$$
\begin{aligned}
P(5) &= P(1,4) + P(2,3) + P(3,2) + P(4,1) = \frac{4}{36} \\
P(7) &= P(1,6) + P(2,5) + P(3,4) + P(4,3) + P(5,2) + P(6,1) = \frac{6}{36} \\
P(\text{Weder 5 noch 7}) &= 1 - \left(\frac{4}{36} + \frac{6}{36}\right) = \frac{26}{36} \\
P(E_n) &= \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \cdot \frac{4}{36} \\
\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) &= \frac{4}{36} \lim_{c \to \infty} \sum_{n=1}^{c} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} = \frac{4}{36} \cdot \frac{18}{5} = \frac{2}{5} = 0.4
\end{aligned}
$$

Weil die einzelnen Ereignisse von einander stochastisch unabhängig sind, können ihre Wahrscheinlichkeiten addiert werden bzw. kann auf bedingte Wahrscheinlichkeiten verzichtet werden. $P(E_n)$ wird für steigende n immer kleiner. Über die Summe bis unendlich kann also eine Aussage über fast alle Versuchsreihen getroffen werden.

Aufgabe 2.21

Aufgrund ihrer Disjunktheit müssen die Ereignisse A und B nicht automatisch unabhängig von einander sein. Im Gegenteil: Nur Ereignisse, die etwas gemeinsam haben (d. h. für die $A \cap B \neq \emptyset$) können auch unabhängig sein. (S. 101f)

Weil $P(A) + P(B)$ auch kleiner als 1 sein können sind zusätzliche andere Ereignisse möglich und somit Gegenwahrscheinlichkeiten notwendig. Sei die Wahrscheinlichkeit für A tritt im n-ten Versuch ein und B nicht davor

$$P(A_n) = (1 - (P(A) + P(B)))^{n-1}\, P(A).$$

Analog zu 2.20

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = P(A) \underbrace{\lim_{c \to \infty} \sum_{n=1}^{c} (1 - (P(A) + P(B)))^{n-1}}_{l} = P(A) \cdot l$$

Betrachte l: Geometrische Reihe $\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{1}{1-r}$ konvergiert für $|r| < 1$. Nun gilt $|r| = |1 - (P(A) + P(B))| < 1 \Longrightarrow$ Reihe konvergent.

$$l = \frac{1}{1 - (1 - (P(A) + P(B))} = \frac{1}{P(A) + P(B)}$$

und es folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}$$

Mit dem Satz von der vollständigen Wahrscheinlichkeit

Abhängig nur vom *ersten* Experiment und nicht von allen vorhergehenden. Sei $C = \Omega \setminus \{A, B\}$. Mit dem Satz von Bayes

$$P(A \mid C) = \frac{P(C \mid A) P(A)}{P(C \mid A) P(A) + P(C \mid B) P(B)}$$

Nach dem Eintritt von A oder B ist die Experimentreihe beendet. Damit tritt das Ereignis $\{\} \in \Omega$ ein. Daraus folgt $P(C \mid A) = P(C \mid B) = 1$. Somit ist

$$P(A \mid C) = \frac{1 \cdot P(A)}{1 \cdot P(A) + 1 \cdot P(B)}$$