136) Wieviele natürliche Zahlen $n < 1000000$ enthalten in ihrer Dezimalentwicklung genau viermal die Ziffer zwei?

137) Man beweise nachstehende Identitäten für Binomialkoeffizienten:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (b) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

138) Man beweise die Formel

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

(Hinweis: Man betrachte die Koeffizienten von $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$.)

139) Zeigen Sie die folgende Formel von *Vandermonde*

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$$

für $x, y, n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Identität $(1+z)^x(1+z)^y = (1+z)^{x+y}$.

140) Zeigen Sie die Formel von Vandermonde aus Bsp. 139 durch kombinatorische Deutung.

141) Man zeige

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{x}{k} = (-1)^n \binom{x-1}{n}$$

für alle $x \geq 1$ und $x \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Identität $(1+z)^x \cdot \frac{1}{1+z} = (1+z)^{x-1}$.

142–145) Berechnen Sie unter Benützung des Binomischen Lehrsatzes:

142)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k4^k$$

143)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k5^k$$

144)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k}$$

145)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k)2^k$$

146) Eine Datei enthalte 7 Datensätze vom Typ A, 4 vom Typ B, 6 vom Typ C, 2 vom Typ D und 3 vom Typ E. Sie soll so in eine doppelt verkettete Liste sortiert werden, dass die Randelemente (erster und letzter Satz) nur Sätze der Typen A oder E sein dürfen. Weiters sollen zwischen zwei Datensätzen desselben Typs keine Sätze anderen Typs stehen. Wie viele mögliche Anordnungen gibt es?

147) Wie viele verschiedene Variablennamen kann man in einer fiktiven Programmiersprache verwenden, wenn diese Namen aus mindestens einem, höchstens aber vier (nicht notwendig verschiedenen) Buchstaben $\{A, \ldots, Z\}$ bestehen müssen, und die Befehle AND, OR, IF, THEN und GOTO nicht als Teilwörter enthalten sei dürfen.

148) Wieviele Möglichkeiten gibt es, k ununterscheidbare Kugeln auf n unterscheidbare Kästchen zu verteilen, wenn jedes Kästchen beliebig viele Kugeln (einschließlich 0) aufnehmen kann?

149) Ein Turm soll auf einem Schachbrett von der linken unteren Ecke in die rechte obere Ecke ziehen. Wieviele verschiedene Wege gibt es, wenn der Turm nie nach links oder unten ziehen darf, d. h. in jedem Schritt nur ein oder mehrere Felder nach rechts oder nach oben.

150–163) Die folgenden Aufgaben sollen mit dem Inklusions-Exklusionsprinzip bearbeitet werden!

150) In einer Menge von n Personen können 10 Personen Deutsch, 7 Englisch, 5 Französisch, 6 Deutsch und Englisch, 4 Deutsch und Französisch, 3 Englisch und Französisch, 3 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n?

151) In einer Menge von n Personen können 13 Personen Deutsch, 8 Englisch, 7 Französisch, 5 Deutsch und Englisch, 6 Deutsch und Französisch, 3 Englisch und Französisch, 2 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n?

152) In einer Menge von n Personen können 10 Personen Deutsch, 9 Englisch, 9 Französisch, 5 Deutsch und Englisch, 7 Deutsch und Französisch, 4 Englisch und Französisch, 3 alle drei Sprachen und niemand keine der drei Sprachen. Wie groß ist n?

153) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^6$ gibt es, die weder Quadrat, noch dritte, vierte oder fünfte Potenz einer natürlichen Zahl sind?

154) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^8$ gibt es, die weder dritte, noch vierte, fünfte oder sechste Potenz einer natürlichen Zahl sind?

155) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^3$ gibt es, die durch 3 und 5, aber weder durch 9 noch durch 11 teilbar sind?

156) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^4$ gibt es, die durch 9 und 11, aber weder durch 5 noch durch 7 teilbar sind?

157) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^4$ gibt es, die durch 3, 5 und 7, aber weder durch 9 noch durch 11 teilbar sind?

158) Wie viele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 1000$ gibt es, die durch 3, 5 oder durch 13 teilbar sind? Wie viele sind weder durch 3, noch durch 5, noch durch 13 teilbar sind?

159) Wieviele natürliche Zahlen n mit $1 \leq n \leq 10^6$ gibt es, die weder durch 2 teilbar, noch Quadratzahlen, noch dritte, noch 4. Potenzen natürlicher Zahlen sind?

160) Man bestimme die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben `a`, `b`, `c`, `d`, `e`, `f`, `g`, in denen weder der Block „`abcd`" noch der Block „`fa`" vorkommt. (Hinweis: Die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge ist $n!$.)

161) Man bestimme die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben `a`, `b`, `c`, `d`, `e`, `f`, in denen weder der Block „`bcf`" noch der Block „`eb`" vorkommt. (Hinweis: Die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge ist $n!$.)

162) Man bestimme die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben `a`, `b`, `c`, `d`, `e`, `f`, `g`, `h`, in denen weder der Block „`acg`" noch der Block „`cgbe`" vorkommt. (Hinweis: Die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge ist $n!$.)

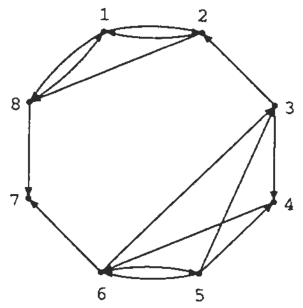
163) Auf wieviele Arten können 8 Türme auf ein Schachbrett gestellt werden, derart daß sie einander nicht schlagen und die weiße Diagonale freibleibt? (Ein Turm schlägt eine andere Figur, die horizontal oder vertikal auf gleicher Höhe steht, sofern keine andere Figur dazwischen steht.)

164)

(a) In nachstehendem Graphen gebe man (verschiedene) Beispiele für eine gerichtete Kantenfolge, einen Kantenzug und einen Weg vom Knoten 6 zum Knoten 1 an.

(b) Desgleichen finde man eine geschlossene Kantenfolge, einen geschlossenen Kantenzug sowie einen Kreis jeweils durch den Knoten 5.

(c) Man zeige, dass G schwach, aber nicht stark zusammenhängend ist, und bestimme die starken Zusammenhangskomponenten.



165–166) Man bestimme $G_1 \cap G_2$ und $G_1 \cup G_2$:

165) G_1: $V(G_1) = \{1, 2, \ldots, 8\}$, $E(G_1) = \{\langle x, y\rangle \mid x \text{ teilt } y,\ x < y\}$,
G_2: $V(G_2) = \{1, 2, \ldots, 5\}$, $E(G_2) = \{\langle x, y\rangle \mid x < y \leq x + 3\}$.

166) G_1: $V(G_1) = \{1, 2, \ldots, 7\}$, $E(G_1) = \{\langle x, y\rangle \mid x < y \leq x + 2\}$,
G_2: $V(G_2) = \{1, 2, \ldots, 9\}$, $E(G_2) = \{\langle x, y\rangle \mid x \text{ teilt } y,\ x < y\}$.

167) Man bestimme alle Quadrupel (a, b, c, d), $a, b, c, d \in \{1, 2, \ldots, 7\}$, sodaß der von den Knoten a, b, c, d in G_1 aufgespannte Teilgraph mit G_2 identisch ist.

168) Man bestimme alle Quadrupel (a, b, c, d), $a, b, c, d \in \{1, 2, \ldots, 7\}$, sodaß der von den Knoten a, b, c, d in G_3 aufgespannte Teilgraph mit G_4 identisch ist.

169) Man bestimme die kleinste transitive Relation R, die G_1 (als Relation aufgefaßt) enthält.

170) Man bestimme die kleinste transitive Relation R, die G_3 (als Relation aufgefaßt) enthält.

171) Konstruieren Sie, wenn möglich einen ungerichteten Graphen mit den Graden
a) 2, 2, 3, 3, 4, 4
b) 2, 3, 3, 4, 4, 4
c) 2, 3, 3, 3, 4, 4

172) Ein schlichter Graph $G = (V, E)$ heißt kubisch, wenn jeder Knoten $v \in V$ Knotengrad $d(v) = 3$ hat.
a) Geben Sie ein Beispiel für einen kubischen Graphen mit $\alpha_0(G) = 6$ an!
b) Gibt es einen kubischen Graphen mit ungerader Knotenanzahl $\alpha_0(G)$?
c) Zeigen Sie, daß es zu jedem $n \geq 2$ einen kubischen Graphen mit $\alpha_0(G) = 2n$ gibt!

Die Abbildungen aller Graphen G_i, auf die in den Beispielen Bezug genommen wird, finden Sie auf Seite 14

173) Man bestimme die starken Zusammenhangskomponenten und die Reduktion G_{1R} des Graphen G_1.

174) Man bestimme die starken Zusammenhangskomponenten und die Reduktion G_{3R} des Graphen G_3.

175) Man bestimme die starken Zusammenhangskomponenten und die Reduktion G_{5R} des Graphen G_5.

176) Man bestimme die starken Zusammenhangskomponenten und die Reduktion G_{7R} des Graphen G_7.

177) Sei $\bar{G}_7$ jener Graph, der aus G_7 durch Umdrehen aller Kantenrichtungen entsteht. Man bestimme die starken Zusammenhangskomponenten und die Reduktion $\bar{G}_{7R}$ des Graphen $\bar{G}_7$.

178) Gegeben sei der ungerichtete schlichte Graph $G = \langle V, E\rangle$ mit $V = \{a, b, c, d, e\}$ und $E = \{ab, ac, ae, bc, bd, ce\}$. Man veranschauliche G graphisch, bestimme seine Adjazenzmatrix sowie alle Knotengrade und zeige, dass die Anzahl der Knoten, die einen ungeraden Knotengrad besitzen, gerade ist. Gilt diese Aussage in jedem ungerichteten Graphen?

179) Welche der nachstehenden Adjazenzmatrizen stellt einen Baum dar?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

180) Gegeben sei ein zusammenhängender bewerteter Graph G durch seine Kanten / Bewertungen:

ab/3, ac/2, ad/7, ae/2, bd/4, bf/8, bk/6, bl/1, cf/2, ck/5, de/1,
df/6, dg/9, dh/6, dj/1, ef/2, ei/1, fg/2, gh/4, fk/6, gi/6, hk/7.

(a) Man gebe drei verschiedene Gerüste von G an.

(b) Man bestimme ein Minimalgerüst von G und dessen Gesamtlänge.

181) Man bestimme die Adjazenzmatrix A_{G_1} und die Potenzen $A^2_{G_1}$.

182) Man bestimme die Adjazenzmatrix A_{G_3} und die Potenzen $A^2_{G_3}$.

183) Man bestimme die Adjazenzmatrix $A(G_5)$, sowie (mit deren Hilfe) die Anzahl der gerichteten Kantenfolgen der Länge 3 von 4 nach 6.

184) Sei $\bar{G}_5$ jener Graph, der aus G_5 durch Umdrehen aller Kantenrichtungen entsteht. Man bestimme die Adjazenzmatrix $A(\bar{G}_5)$, sowie (mit deren Hilfe) die Anzahl der gerichteten Kantenfolgen der Länge 3 von 4 nach 6.

185) Man bestimme im Graphen G_5 die Anzahl der Zyklen der Länge 3, auf denen der Knoten 4 liegt.

186) Sei $\bar{G}_5$ jener Graph, der aus G_5 durch Umdrehen aller Kantenrichtungen entsteht. Man bestimme im Graphen $\bar{G}_5$ die Anzahl der Zyklen der Länge 3, auf denen der Knoten 4 liegt.

Die Abbildungen aller Graphen G_i, auf die in den Beispielen Bezug genommen wird, finden Sie auf Seite 14