Prüfung zu
Optimierung und Simulation
14.5.2009

1. Gegeben sei folgendes Optimierungsproblem:

$$2y_1 + 6y_2 + 5y_3 + 2y_4 \rightarrow \min$$
$$y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 \geq 4$$
$$-2y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 \geq 3$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

   (a) Erstellen Sie das dazu duale Problem — 2 Punkte

   (b) Lösen Sie das Problem graphisch — 2 Punkte

   (c) Verifizieren Sie die Lösung mittels Simplexalgorithmus — 3 Punkte

   (d) Ermitteln Sie (mittels des Komplementaritätsprinzips) die optimale Lösung des ursprünglichen Problems. — 3 Punkte

2. (a) Berechnen Sie nach der Methode des Goldenen Schnitts ($\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 2 Iterationsschritte genügen) ein Intervall, in dem die Lösung folgender Optimierungsaufgabe liegt:

$$x^3 + 10|x-2| \rightarrow min!$$
$$1 \leq x \leq 3$$

   4 Punkte

   (b) Beschreiben Sie den Unterschied zur Fibonacci-Methode — 3 Punkte

   (c) Können Sie für die Lösung obiger Optimierungsaufgabe das Newton-Verfahren verwenden? — 3 Punkte

1a)

(18)

$$\left.\begin{aligned} 2y_1 + 6y_2 + 5y_3 + 2y_4 &\to \min \\ y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4 &\geq 4 \\ -2y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 &\geq 3 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0 \end{aligned}\right\}$$

hierbei handelt es sich schon um das duale Problem

$Z: b^T y \to \min$

NB: $A^T y \geq 0$

NNB $y \geq 0$

$\Rightarrow$ Umformen zu primal:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$Z: c^T x \to \max$

NB: $Ax \leq b$

NNB $x \geq 0$

$\Rightarrow$

ZF: $4x_1 + 3x_2 \to \max$

NB1 $x_1 - 2x_2 \leq 2$

NB2: $2x_1 + x_2 \leq 6$

NB3 $1x_1 + 2x_2 \leq 5$

NB4: $-x_1 + x_2 \leq 2$

NNB: $x_1, x_2 \geq 0$

für die Skizze:

$\to x_2 = -\frac{4}{3}x_1$

$\to x_2 \geq -1 + \frac{x_1}{2}$

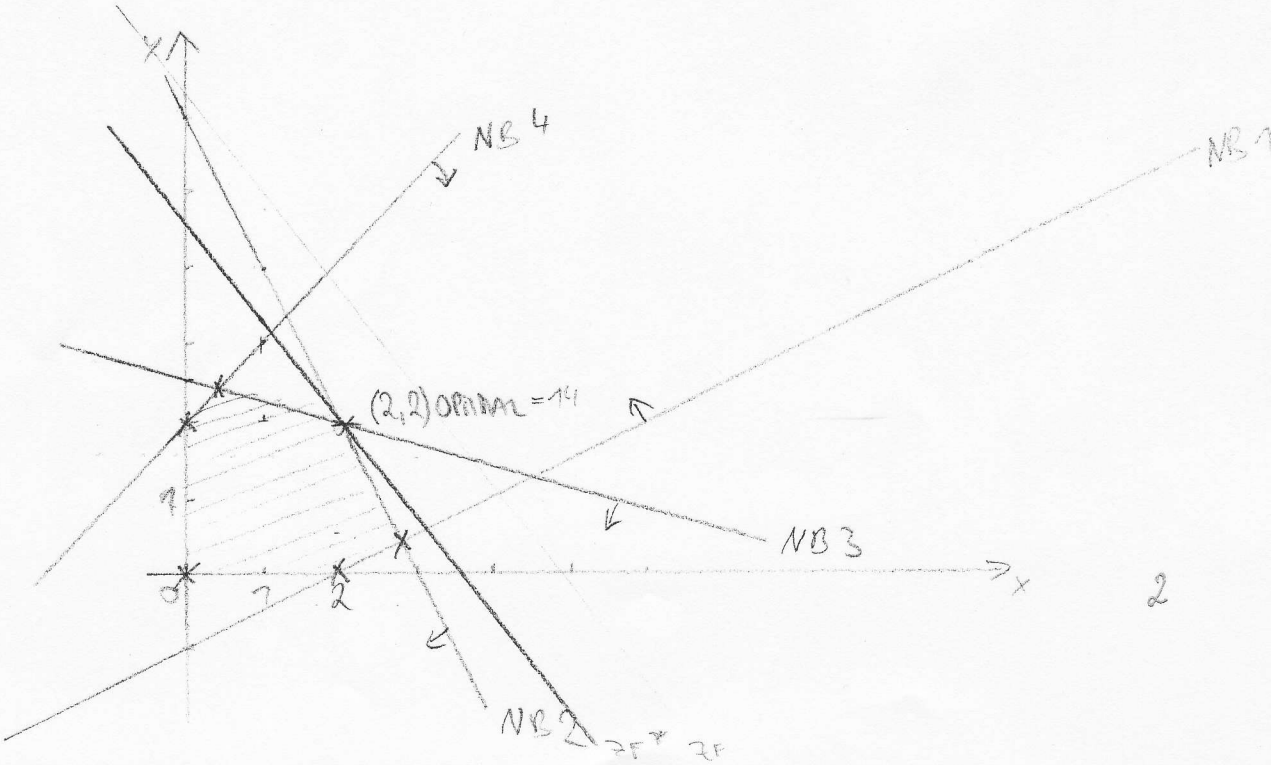
$\to x_2 \leq 6 - 2x_2$

$\to x_2 \leq \frac{5 - x_1}{2}$

$\to x_2 \leq 2 + x_1$

2

b)



2

1. c

	x_1	x_2	u_1	u_2	u_3	u_4	b
u_1	1	-2	1	0	0	0	2
u_2	2	1	0	1	0	0	6
u_3	1	2	0	0	1	0	5
u_4	-1	1	0	0	0	1	2
ZF	-4	-3	0	0	0	0	0

← erweiterte Form mit Schlupfvariablen im Tableau

← b/a max!

↑ min

u_1	0	-4	1	0	-1	0	-3
u_2	0	-3	0	1	-2	0	-4
→ x_1	1	2	0	0	1	0	5
u_4	0	3	0	0	1	1	7
ZF	0	5	0	0	4	0	15

20

← alles ⊕ → STOP!

→ LÖSUNG DUAL

?? Offenbar ist mir hier irgendwo ein Fehler unterlaufen, oder ich auf die schnelle nicht zufrieden im Stande bin

Hier wäre die Basislösung $(x_1, y_1, -3, -4, 0, 7)$, ?

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \\ z = 15 \end{array}\right\}$$ das passt nicht zusammen!! und verstößt gegen NB 2 & NB 1

2

d) Die Lösung des Ausgangsproblemes ließe sich leicht aus letzten ZF Reihe ablesen. Das wäre hier:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_3 = 1 \\ y_4 = 0 \end{array} \quad z = 15\right\}$$ wiederum falsch

2

2.a

$$\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$a = 1$

$b = 3$

$$\lambda = a + (1-\gamma)(b-a)$$

$$\mu = a + \gamma \cdot (b-a)$$

Step 1

$\lambda \approx 1{,}76\cancel{4}$

$\mu \approx 2{,}236$

$$\underset{7{,}849}{F(\lambda)} < \underset{13{,}5}{F(\mu)} \Rightarrow b = 2{,}236 \quad \underline{\underline{[\overset{1}{\cancel{1{,}764}};2{,}236]}}$$

Step 2

$\lambda \approx \cancel{1{,}764}\ 1{,}472$

$\mu \approx 1{,}7639$

$$\underset{8{,}47}{F(\lambda)} > \underset{7{,}849}{F(\mu)} \Rightarrow a = 1{,}472 \quad \underline{\underline{[1{,}472;2{,}236]}}$$ ✓4

2.b

Der Hauptunterschied besteht wohl in der Veränderungs-Sprungweite. Während Intervalle beim Goldenen Schnitt stets mit dem selben Faktor (γ) bzw. ($\gamma-1$) verschoben werden, so passiert dies bei der Fibonacchi-Methode auf der Differenz oder c ~~bzw~~ (Fibonacchi Zahlen und deren Verhältnis zueinander. Veränderung/Unterschied von Fibo Zahlen zu

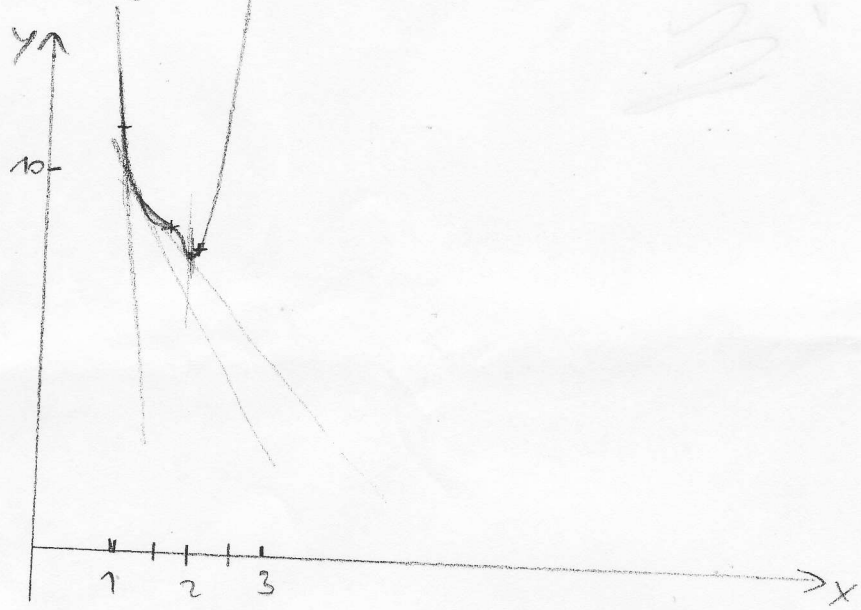
ihrem Vorgänger x_{n-1}, bzw. Vorvorgänger usw.). Die Konvergenzgeschwindigkeit wird dadurch versucht drastisch zu steigern.

3

2c

Newton anzuwenden?

1) Skizze



Es kommt nun darauf an: Verwenden kann ich das Verfahren auf jeden Fall, nur ob es Sinn macht sich auf ein simples ~~mit~~ Newtonverfahren auf ein nicht strikt konvexes Problem anzusetzen, stellt sich mir die Frage. Sofern meine Zeichnung korrekt ist läuft man Gefahr in einem lokalen Optimum hängen zu bleiben. Daher würde ich fortgeschrittenere Methoden wie SA, oder gar eine GA darauf ansetzen. Ich bin zugegebenermaßen ein GA-Fan :)

2