

Runde 1, Beispiel 3

LVA 118.181, Übungsrunde 1, 20.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 06.12.

1 Angabe

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$.

Man führe 3 Iterationsschritte der Picard-Iteration durch und vergleiche die erhaltenen Approximationen mit der exakten Lösung des AWP (Trennung der Variablen).

2 Lösung des Beispiels

$$y' \cdot \frac{1}{y^2} = 2x$$

$$\frac{dy}{y^2} = 2x \, dx$$

$$G(y) = \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}$$

$$F(x) = \int 2x \, dx = x^2$$

$$G(y) - F(x) = c \Rightarrow -\frac{1}{y} - x^2 = c \underset{y(0)=1}{\Rightarrow} -1 = c$$

$$-\frac{1}{y} - x^2 = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x+1) \cdot (x-1)}$$

Picard-Iteration:

$$y_0 = 1$$

$$y_1 = 1 + 2 \int_0^x (1) \, dt = x^2$$

$$y_2 = 1 + 2 \int_0^x t(1+t^2) \, dt = y_1 = 1 + 2 \int_0^x t + t^2 + t^3 \, dt = 1 + x^2 + \frac{x^4}{4}$$

$$y_3 = 1 + 2 \int_0^x t(1+x^2 + \frac{x^4}{4}) \, dt = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \frac{2}{3}x^8 + \frac{1}{3}x^{10} + \frac{1}{9}x^{12} + \frac{1}{63}x^{14}$$