Runde 7, Beispiel 47

LVA 118.181, Übungsrunde 7, 01.12.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 01.12.2006

1 Angabe

Man bestimme die Green-Funktion des Randwertproblems

$$y'' + y = b(x) \qquad y(0) - y(\pi) = 0; y'(0) - y'(\pi) = 0$$

2 Theoretische Grundlagen: Green-Funktion

Green-Funktion für RWP mit homogener Randbedingung: Ist $X(t)$ eine Fundamentalmatrix von $\dot{x} = A(t)x$ und $\det D \neq 0$ mit $D = RX(a) + SX(b)$, so besitzt das RWP

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \qquad Rx(a) + Sx(b) = 0$$

die eindeutige Lösung

$$x(t) = \int_a^b G(t,\tau)b(\tau)\partial\tau$$

mit der Matrix-Funktion $G : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ der Gestalt:

$$G(t,\tau) = \begin{cases} X(t)[E - D^{-1}SX(b)]X(\tau)^{-1} & a \leq \tau \leq t \\ X(t)[-D^{-1}SX(b)]X(\tau)^{-1} & t < \tau \leq b \end{cases}$$

G ist die Green-Funktion des RWP.
Wenn ein halbhomogenes RWP eine Green-Funktion besitzt, kann durch Superposition einfach die Lösung des zugehörigen inhomogenen RWP errechnet werden. Ist $x(t)$ eine Lösung des RWP und $y(t)$ eine beliebige, leicht zu bestimmende Funktion, welche nur die Randbedingungen $Ry(a) + Sy(b) = r$ erfüllt, so genügt $z(t) := x(t) - y(t)$ dem halbhomogenen RWP

$$\dot{z} = Az + b(t) - (\dot{y}(t) - A(t)y(t)), \qquad Rz(a) + Sz(b) = 0$$

Lösung des inhomogenen RWP mit der Green-Funktion:

1. Suche ein $y(t)$, das nur den inhomogenen Randbedingungen $Ry(a) + Sy(b) = r$ genügt.

2. Berechnung der Green-Funktion G des zugehörigen halbhomogenen RWP

$$z(t) = \int_a^b G(t,\tau)(b(\tau) - \dot{y}(\tau) + A(\tau)y(\tau))\partial\tau$$

3. $x(t) = y(t) + z(t)$ ist die Lösung des RWP.

3 Lösung des Beispiels

Betrachten Randbedingungn $y(0) - y(\pi) = 0$:

$$c_1 \cdot \cos(0) + c_2 \cdot \sin(0) - (\mathrm{d1} \cdot \cos(\pi) + \mathrm{d1} \cdot \sin(\pi)) = 0$$

Betrachten Randbedingung $y'(0) - y'(\pi) = 0$. Beide Teile der Green Funktion muss man ableiten und dann einsetzen:

$$-c_1 \cdot \sin(0) + c_2 \cdot \cos(0) - (-\mathrm{d1} \cdot \sin(\pi) + \mathrm{d2} \cdot \cos(\pi)) = 0$$

Zwei weitere Gleichungen erhält man dann noch aus der 3. Bedingung für die Green-Funktion:

$$c_1 \cdot \cos(w) + c_2 \cdot \sin(w) = \mathrm{d1} \cdot \cos(w) + \mathrm{d2} \cdot \sin(w) -$$
$$\mathrm{d1} \cdot \sin(w) + \mathrm{d2} \cdot \cos(w) - (-c_1 \cdot \sin(w) + c_2 \cdot \cos(w)) = 1$$

Man erhält die folgende Green-Funktion:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \sin(w) \cdot \cos(x) - \frac{1}{2} \cdot \cos(w) \cdot \sin(x) & 0 \leq x < w \\ -\frac{1}{2} \cdot \sin(w) \cdot \cos(x) + \frac{1}{2} \cdot \cos(w) \cdot \sin(x) & w < x \leq \pi \end{cases}$$